INTERAÇÃO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

ADILSON LONGEN
LUCIANA TENUTA DE FREITAS
(COORD.)

CÓDIGO DA COLEÇÃO
0068 P26 01 01 202 814
PNLD ENSINO MÉDIO – 2026 - 2029 • CATEGORIA 1
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO – VERSÃO EM PROCESSO DE AVALIAÇÃO

VOLUME 2

MATEMÁTICA
APRENDENDO E RESOLVENDO PROBLEMAS

MANUAL DO PROFESSOR

ENSINO MÉDIO – 2º ANO
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – MATEMÁTICA

Editora do Brasil

INTERAÇÃO

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

MATEMÁTICA APRENDENDO E RESOLVENDO PROBLEMAS

ADILSON LONGEN

- Doutor em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Mestre em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Professor do Ensino Médio

LUCIANA TENUTA DE FREITAS (COORD.)

- Mestre em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-Minas)
- Bacharel e licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
- Assessora pedagógica da Educação Básica, com atuação na formação de professores

VOLUME

2

ENSINO MÉDIO – 2º ANO
MATEMÁTICA E SUAS
TECNOLOGIAS – MATEMÁTICA

1ª edição
São Paulo, 2024

Editora do Brasil

"Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada"

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Longen, Adilson
Matemática : aprendendo e resolvendo problemas : 2º ano / Adilson Longen ; Luciana Tenuta de Freitas (coord.). -- 1. ed. -- São Paulo : Editora do Brasil, 2024. -- (Interação matemática e suas tecnologias)

ISBN 978-85-10-10255-1 (aluno)
ISBN 978-85-10-10252-0 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Freitas, Luciana Tenuta de. II. Título. III. Série.

24-225137 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Direção-geral: Paulo Serino de Souza

Diretoria editorial: Felipe Ramos Poletti
Gerência editorial de conteúdo didático: Erika Caldin
Gerência editorial de produção e design: Ulisses Pires
Supervisão de design: Catherine Saori Ishihara
Supervisão de arte: Abdonildo José de Lima Santos
Supervisão de revisão: Elaine Cristina da Silva
Supervisão de iconografia: Léo Burgos
Supervisão de digital: Priscila Hernandez
Supervisão de controle e planejamento editorial: Roseli Said
Supervisão de direitos autorais: Luciana Sposito

Supervisão editorial: Everton José Luciano
Leitura crítica: Michele Andréia Borges
Edição: Adriana Netto, Daniel Vitor Casertelli Santos, Katia Queiroz, Marcos Gasparetto, Paulo Roberto de Jesus e Rodrigo Cosmo dos Santos
Assistência editorial: Felipe Gabriel, Isabella Cosenza Ferreira e Paola Polizeli
Revisão: Alexander Siqueira, Amanda Carvalho, Andréia Andrade, Beatriz Dorini, Bianca Oliveira, Gabriel Ornelas, Giovana Sanches, Graciela Paparazo, Janaína Bean, Jéssie Panegassi, Júlia Castello Branco, Maisa Akazawa, Martin Gonçalves, Rita de Cássia Costa, Rosani Andreani, Sandra Fernandes, Vitor Silva e Yasmin Fonseca
Pesquisa iconográfica: Luiza Camargo
Tratamento de imagens: Robson Mereu
Projeto gráfico: Talita Lima, Diego Lima e Rafael Gentile
Capa: Gláucia Koller
Imagem de capa: Denis Belitsky/Shutterstock.com
Edição de arte: Beatriz Sato, Bruna Souza e Julia Nakano
Ilustrações: Acervo editora, Aline Rivolta, Fábio Nienow, FJF Vetorização, Mauro Salgado, Reinaldo Vignati, Tarcísio Garbellini, TDPStudio e Vagner Coelho
Produção cartográfica: Acervo editora/Da Costa Mapas e Sonia Vaz
Editoração eletrônica: Typegraphic
Licenciamentos de textos: Cinthya Utiyama, Renata Garbellini e Solange Rodrigues
Controle e planejamento editorial: Ana Fernandes, Bianca Gomes, Juliana Gonçalves, Maria Trofino, Renata Vieira, Terezinha Oliveira e Valéria Alves

1ª edição, 2024

Editora do Brasil

Avenida das Nações Unidas, 12901
Torre Oeste, 20º andar
São Paulo, SP – CEP: 04578-910
Fone: +55 11 3226-0211
www.editoradobrasil.com.br

COMEÇO DE CONVERSA

Caro estudante,

A etapa do Ensino Médio é um desafio na vida de todo jovem. Neste momento que estamos vivendo, com as mudanças trazidas pelo Novo Ensino Médio, os desafios se acentuam e se tornam mais complexos.

No centro de todas essas mudanças, está a ideia de que as aprendizagens escolares podem capacitá-lo para que, ao final desta etapa, você esteja apto a atuar, com competência e responsabilidade, na sociedade em que vive. Para isso, é importante que você se aproprie da Matemática como uma das diversas formas de leitura da realidade e a utilize como ferramenta para que possa, de forma consciente e responsável, intervir nessa realidade.

Esta coleção foi escrita com o objetivo de levar você a ter experiências que promovam o desenvolvimento de um pensamento matemático consistente, estabelecendo o maior número possível de relações, ao mesmo tempo que aplica esse conhecimento em outras disciplinas e situações do mundo real. Esse processo, que visa uma aprendizagem consistente dos conceitos matemáticos, também o prepara para avaliações de acesso às universidades, se essa for sua opção de vida.

Por meio de atividades em grupo e discussões com os colegas, usando ou não a tecnologia, você terá a oportunidade de levantar hipóteses, argumentar, defender suas ideias, mudar de ideia com base na argumentação do colega e, assim, desenvolver a empatia e o respeito pelo outro, além de contribuir para sua formação integral.

Apresentamos também uma grande quantidade de atividades resolvidas, além de exercícios, questões de Enem e testes de vestibulares para que você possa consolidar as aprendizagens e se preparar para os exames de acesso à universidade.

Você está sendo chamado a ser protagonista de todo o processo de aprendizagem da Matemática ao longo do Ensino Médio. Esperamos que você aproveite esta oportunidade.

Os autores

Marish/Shutterstock.com

CONHEÇA SEU LIVRO

Lista de capítulos que compõem o volume

Capítulo 1
Função exponencial e função logarítmica

Capítulo 2
Sequências numéricas

Capítulo 3
Estatística descritiva

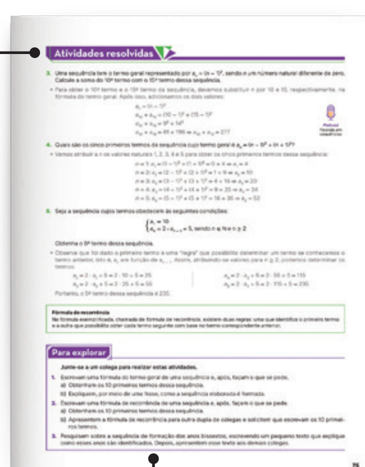
Capítulo 4
Geometria das transformações e triângulos

Capítulo 5
Funções trigonométricas

Capítulo 6
Os sólidos geométricos

Abertura de capítulo
Uma imagem representativa do tema e um texto introdutório favorecem a reflexão sobre o assunto que será estudado.

Questões disparadoras sobre a temática escolhida para a abertura de capítulo.



Atividades resolvidas
Seleção de atividades resolvidas que, por meio da reflexão sobre a resolução, auxiliam na compreensão da linguagem matemática e na resolução dos problemas que serão propostos.

Para explorar
Atividades exploratórias relacionadas ao conteúdo trabalhado, que envolvem a observação, elaboração de hipóteses, discussão de ideias, argumentação e explicitação do pensamento matemático.

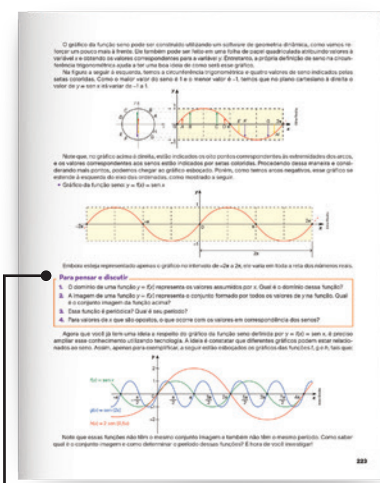
Análise e contexto
Apresenta textos sobre a história da Matemática ou sobre temas do cotidiano, aprofundando a discussão do conteúdo abordado no capítulo.

Conexões e projetos

Apresentam propostas de projetos que visam colocar em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas nos capítulos deste volume.

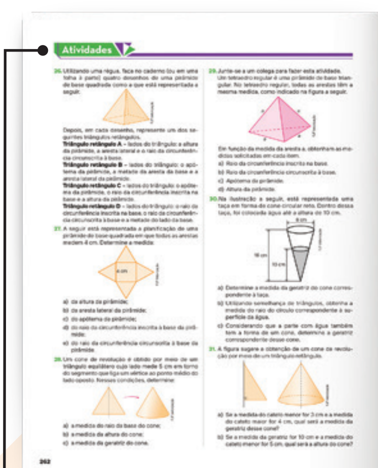
Infográfico

Sempre acompanhado de questões para discussão, o infográfico apresenta uma síntese de assuntos relacionados ao capítulo.



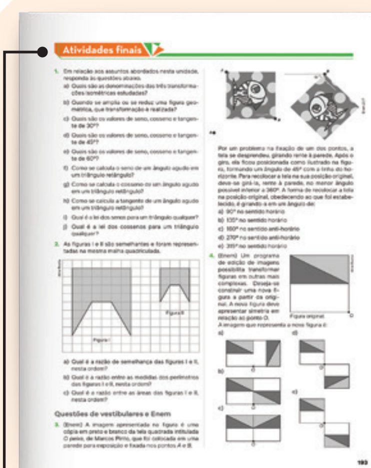
Para pensar e discutir

Questões que auxiliam os estudantes na capacidade de fazer inferências por meio da investigação de propriedades e elaboração de novos problemas, conclusões ou sínteses.



Atividades

Conjunto de atividades relacionadas ao conteúdo das últimas seções.



Atividades finais

Conjunto de atividades para retomar os conteúdos matemáticos de cada capítulo. A seção, que contém questões de vestibulares e do Enem, finaliza com uma proposta de autoavaliação.

Carrossel de imagens

Podcast

Infográfico clicável

Vídeo

Mapa clicável

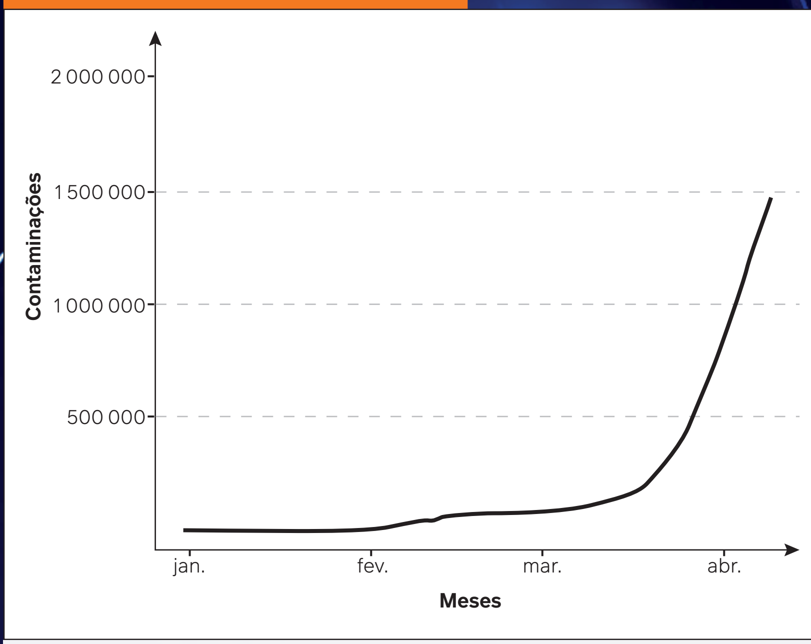
Objetos digitais

Ao longo dos capítulos, você encontrará os ícones de remissão para o conteúdo digital: *podcast*, vídeo, infográfico clicável, mapa clicável e carrossel de imagens. Eles aprofundam o conteúdo do livro e ajudam você a compreender melhor os assuntos discutidos. Acesse os objetos digitais por meio do livro digital, clicando nos ícones.

SUMÁRIO

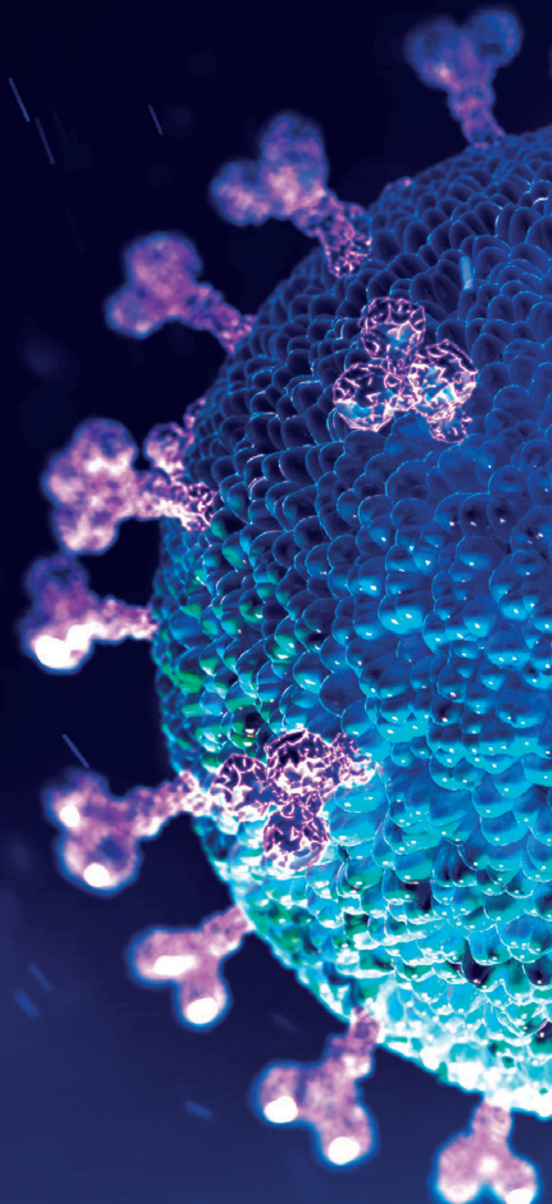
Topvector/ Shutterstock.com

Casos confirmados de covid-19 no mundo entre janeiro e abril de 2020



Reinaldo Vignati

FIGUEIREDO, D. *et al*. *Covid-19 em dados*: Brasil em perspectiva comparada. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 10 abr. 2020. p. 9. Disponível em: https://bit.ly/3x2T6U5. Acesso em: 22 ago. 2024.



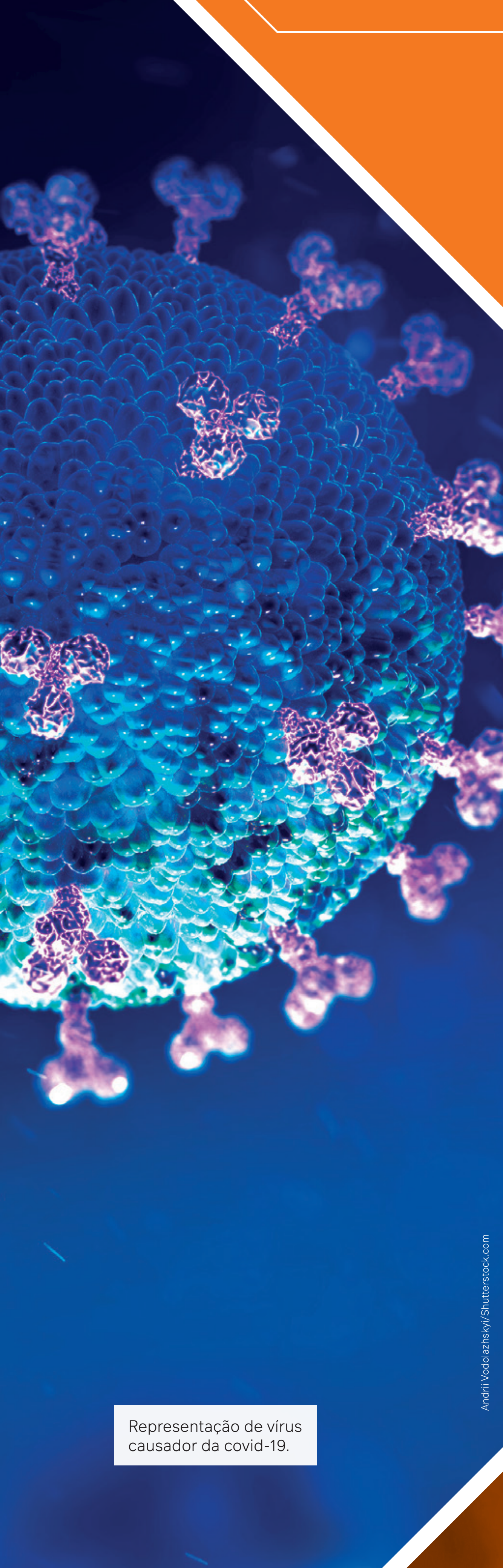
Neste capítulo, você vai:

- compreender as propriedades da potenciação e utilizá-las nos cálculos de potências;
- identificar e representar números em notação científica;
- conceituar função exponencial;
- esboçar gráficos de funções exponenciais;
- utilizar funções exponenciais para modelar e resolver problemas;
- resolver equações e inequações exponenciais;
- compreender e utilizar o conceito e as propriedades operatórias para calcular logaritmos;
- efetuar mudança de base, calculando logaritmo com o uso de calculadora científica;
- compreender o conceito de função logarítmica como função inversa da função exponencial de mesma base e identificar características da função logarítmica utilizadas na modelagem de situações;
- esboçar gráficos de função logarítmica;
- utilizar logaritmos para modelar e resolver problemas.

CAPÍTULO

1

Função exponencial e função logarítmica



Andrii Vodolazhskyi/Shutterstock.com

Representação de vírus causador da covid-19.

No início da pandemia do coronavírus, em março de 2020, muitas pessoas não acreditavam que o vírus se espalharia tão rapidamente. Naquele momento, vários gráficos foram divulgados na mídia buscando esclarecer a população sobre o rápido crescimento da pandemia em diversos países. Entretanto, no Brasil os números ainda não eram alarmantes, o que levava a população a desacreditar na rapidez com que o vírus se espalharia.

Nesta unidade, vamos estudar a função exponencial, utilizada para modelar situações de crescimento muito acelerado, e sua função inversa, a função logarítmica.

1. **Pense em uma situação envolvendo algo cujo crescimento seja muito acelerado e apresente aos colegas.** 1. Resposta pessoal.

2. **Procure em *sites* de busca algumas dessas situações representadas em gráficos. Faça comparações e analise as características comuns.** 2. Resposta pessoal.

1 Potenciação

Em 2024, o Japão passou a ser o 5º país a pousar na Lua. Além do Japão, os outros quatro países foram Estados Unidos, a antiga União Soviética, a China e a Índia.

Bill Anders/NASA

Amanhecer da Terra vista da Lua. Foto tirada em 24 de dezembro de 1968 por Bill Anders.

A distância entre a Terra e a Lua não é "estática", pois os dois corpos celestes têm suas órbitas elípticas e a distância pode variar dependendo do ponto e do instante da medição. Dizemos que, em média, essa distância é de 384 400 quilômetros.

Para pensar e discutir

1. Dizemos que distância da Terra à Lua é de aproximadamente 384 mil quilômetros. Como representar essa distância utilizando a notação científica? 1. $3{,}84 \cdot 10^5$ km
2. Ainda na notação científica, como seria essa distância em metros? Explique como calculou. 2. $3{,}84 \cdot 10^8$ m; resposta pessoal
3. Quais as condições de α e k para que $\alpha \cdot 10^k$ represente um número real na notação científica? 3. $\alpha \in [1, 10[$ e $k \in \mathbb{Z}$

As grandezas microscópicas e as macroscópicas podem ser representadas por notação científica. Neste capítulo, utilizaremos situações de fenômenos que envolvem crescimentos exponenciais. Para isso, vamos estudar as funções exponenciais e as funções logarítmicas. Assim, retomaremos as propriedades da potenciação, bem como a notação científica, que nos auxiliará nesse estudo.

Propriedades da potenciação

A potenciação é uma maneira de representar uma multiplicação de fatores iguais. Observe.

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{6 \text{ fatores}} = 3^6 = 729$$

6: expoente
729: potência
3: base

Os expoentes podem ser números naturais, inteiros, racionais ou irracionais, ou seja, são números que pertencem ao conjunto dos números reais.

Expoente natural

Dados um número real positivo a e um número natural n, com $n \geq 2$, a potência de base a e o expoente n formam o número real a^n correspondente ao produto de n fatores iguais a a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Observe que para $n = 1$ temos $a^1 = a$, pois não há produto com apenas um fator.

No caso do expoente natural, cinco propriedades podem ser verificadas por meio de exemplos, conforme faremos a seguir.

Considerando os números reais positivos a e b e os números naturais m e n, temos:

1ª propriedade (propriedade fundamental):

$$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Justificativa:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot (\ldots) \cdot a}_{m \text{ fatores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot (\ldots) \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot (\ldots) \cdot a}_{m+n \text{ fatores}}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Podemos dizer que, na multiplicação de potências de mesma base, repete-se a base e efetua-se a adição dos expoentes.

Exemplo:

- $128 \cdot 8 = 2^7 \cdot 2^3 = 2^{7+3} = 2^{10} = 1\,024$

2ª propriedade:

$$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

Justificativa:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot (\ldots) \cdot a^m}_{n \text{ fatores}}$$

$\downarrow$ Utilizando a 1ª propriedade

$$(a^m)^n = a^{\overbrace{m+m+m+\ldots+m}^{n \text{ parcelas}}}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m}$$

Podemos dizer que, na potência de potência, repete-se a base e efetua-se a multiplicação dos expoentes.

Exemplo:

- $(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{12}$
  $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$

3ª propriedade:

$$\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}} \text{ (para } m > n \text{ e } a \neq 0)$$

Justificativa:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ fatores}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m - n \text{ fatores}}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Dizemos que, na divisão de potências de mesma base, repete-se a base e efetua-se a subtração dos expoentes.
Exemplo:

- $\frac{256}{32} = \frac{2^8}{2^5} = 2^{8-5} = 2^3 = 8$

Para explorar

Junte-se a dois colegas para estas atividades.

1. Justifiquem estas outras duas propriedades: 1. Respostas pessoais.

4ª propriedade:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

5ª propriedade:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ sendo } b \neq 0$$

2. Supondo que a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ fosse válida para $m = 0$ e $a \neq 0$, qual seria o resultado de a^0? 2. 1

3. O quadro a seguir apresenta a sequência *A* de potências de base 3 e a sequência *B* dos resultados dessas potências. Copiem e completem com os números que estão faltando. 3. 243; 81; 27; 9; 3

A	3^6	3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	x
B	729						y

a) Observem que, da esquerda para direita, os expoentes na sequência *A* vão diminuindo de 1 em 1. O que ocorre com os valores correspondentes na sequência *B*? 3. a) Ficam divididos por 3, da esquerda para a direita.

b) Quais valores vocês atribuiriam para *x* e *y* ao completar as sequências *A* e *B* no quadro? 3. b) $x = 3^0$; $y = 1$

Expoente inteiro

Como calcular uma potenciação de expoente inteiro?

Já retomamos a potenciação de expoentes inteiros positivos, incluindo o zero (números naturais). Vamos, agora, verificar como calcular potências de expoentes inteiros negativos. Para isso, a propriedade fundamental deve ser verificada. Sendo a base *a* um número real positivo, temos:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Fazendo: $m = -n$

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n}$$

$$a^{-n} \cdot a^n = a^0$$

$$a^{-n} \cdot a^n = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Essa relação permite ampliar o entendimento do cálculo de potência de um número real positivo *a* com expoentes inteiros quaisquer.

Importante:

Nas propriedades de potenciação, consideramos as bases positivas para facilitar a compreensão. Entretanto, elas também são válidas para bases negativas, que abordaremos em exemplos e atividades.

Para pensar e discutir

1. Na relação matemática apresentada na página anterior, se n é um número **inteiro positivo**, o que representa $-n$? 1. Um número inteiro negativo.

2. E, na mesma relação, se n é um número **inteiro negativo**, o que representa $-n$? 2. Um número inteiro positivo.

3. Sendo a positivo, qual o resultado de $a^{-1} \cdot a^1$? Qual a denominação do número a^{-1} em relação ao número a? E se a for negativo, qual o resultado de $a^{-1} \cdot a^1$? 3. 1; inverso do número a; 1

4. Qual o resultado de $(-4)^{-3}$? E o resultado de $(-4)^{-3} \cdot (-4)^3$? 4. $-\frac{1}{64}$; 1

Exemplos:

- $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$
- $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$
- $-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$
- $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$
- $-5^{-2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^3} = \frac{1}{\frac{27}{125}} = \frac{125}{27} = \left(\frac{5}{3}\right)^3$
- $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^3} = -\frac{1}{\frac{27}{125}} = -\frac{125}{27} = \left(-\frac{5}{3}\right)^3$
- $(2\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{(2\sqrt{5})^2} = \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20}$

Atividades resolvidas

1. Enquanto o diâmetro aproximado do Sol é 696 400 000 m, temos que a massa de um mosquito é aproximadamente 0,000004 kg. Represente essas duas medidas em notação científica.

- O diâmetro do Sol: o fator da potência inteira de 10 deve ser maior ou igual a 1 e menor que 10. Assim, temos que deslocar a vírgula 8 casas para esquerda (ou seja, dividir por 10^8) e, para não alterar a medida, devemos multiplicar por 10^8.

$$696\,400\,000 \text{ m} = 6{,}964 \cdot 10^8 \text{ m}$$

- A massa do mosquito: o fator da potência inteira de 10 deve ser maior ou igual a 1 e menor que 10. Assim, temos que deslocar a vírgula 6 casas para a direita (significa multiplicar por 10^6) e, para não alterar a medida, devemos dividir por 10^6, isto é, multiplicar por 10^{-6}.

$$0{,}000004 \text{ kg} = 4{,}0 \cdot 10^{-6} \text{ kg} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

2. Utilizando as propriedades de potenciação, sem o uso de calculadora, determine qual destes números reais é maior: 3^{500} ou 6^{300}.

- Para comparar essas duas potências, podemos deixá-las com o mesmo expoente e comparar as bases. Observando que os expoentes são múltiplos de 100, temos:

$$3^{500} = 3^{5 \cdot 100} = (3^5)^{100} = 243^{100}$$
$$6^{300} = 6^{3 \cdot 100} = (6^3)^{100} = 216^{100}$$

- Como as duas potências têm o mesmo expoente e bases positivas, comparamos as bases, ou seja:

$$243 > 216$$
$$243^{100} > 216^{100}$$
$$3^{500} > 6^{300}$$

Portanto, o maior deles é 3^{500}.

3. Calcule o valor de $A + B$, considerando que $A = 2^{3^2}$ e $B = (2^3)^2$.

- Os dois números são diferentes. Enquanto A representa "potência de ordem superior", B representa uma "potência de potência". Esses valores são calculados de maneiras diferentes, observando a ordem das operações:

$$A = 2^{3^2} = 2^9 = 512$$
$$B = (2^3)^2 = 2^6 = 64$$

- Cálculo de $A + B$:

$$A + B = 512 + 64$$
$$A + B = 576$$

Para pensar e discutir

1. Dividir um número por 10^6 é o mesmo que multiplicar o número por 10^{-6}? Explique. 1. Sim; resposta pessoal.
2. Qual é a propriedade da potenciação que justifica a igualdade $6^{300} = (6^3)^{100}$? 2. A 2ª propriedade.
3. A ordem em que as operações de 2^{3^2} e de $B = (2^3)^2$ são feitas **não** é a mesma. Explique. 3. Resposta pessoal.

4. (UFRGS) Um adulto saudável abriga cerca de 100 bilhões de bactérias, somente em seu trato digestivo. Esse número de bactérias pode ser escrito como

a) 10^9
b) 10^{10}
c) 10^{11}
d) 10^{12}
e) 10^{13}

- Observando as potências de base 10, temos:

$$1 \text{ mil} = 10^3$$
$$1 \text{ milhão} = 10^3 \cdot 10^3 = 10^{3+3} = 10^6$$
$$1 \text{ bilhão} = 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 10^{3+3+3} = 10^9$$

- Escrevendo 100 bilhões de bactérias como potência de base 10:

$$100 \text{ bilhões} = 100 \cdot 10^9$$
$$100 \text{ bilhões} = 10^2 \cdot 10^9$$
$$100 \text{ bilhões} = 10^{2+9} \Rightarrow 100 \text{ bilhões} = 10^{11}$$

Portanto, 10^{11} bactérias.

5. Considere o número $x = 4^{18} \cdot 5^{27}$. Após efetuar as potências e a multiplicação indicadas, determine quantos algarismos tem o número x.

- Conforme as propriedades de potenciação, x pode ser assim transformado:

$$x = 4^{18} \cdot 5^{27}$$
$$x = (2^2)^{18} \cdot 5^{27}$$
$$x = 2^{36} \cdot 5^{27}$$
$$x = 2^9 \cdot (2 \cdot 5)^{27}$$
$$x = 512 \cdot 10^{27}$$

- Observe que, na potência de base 10, o expoente natural indica a quantidade de zeros após o algarismo 1:

$$x = 512 \cdot 10^{27}$$
$$x = 512 \cdot 1\underbrace{000\ldots000}_{27 \text{ zeros}}$$
$$x = 512\underbrace{000\ldots000}_{27 \text{ zeros}}$$

Portanto, x tem 30 algarismos.

Atividades

1. Calcule cada uma das seguintes potências:

a) $(-3)^4$ 1. a) 81
b) -3^4 1. b) -81
c) $\left(4\sqrt{2}\right)^2$ 1. c) 32
d) 0^6 1. d) 0
e) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$ 1. e) $-\frac{125}{8}$
f) $(0{,}333...)^{-2}$ 1. f) 9

2. Responda:

a) Se a base é negativa e o expoente é um número inteiro par, o resultado é um número positivo ou negativo? 2. a) Positivo.
b) Se a base é negativa e o expoente é um número inteiro ímpar, o resultado é um número positivo ou negativo? 2. b) Negativo.

3. Escreva em notação científica cada um dos seguintes números:

a) 0,000003 3. a) $3 \cdot 10^{-6}$

b) 12 000 000 000 3. b) $1,2 \cdot 10^{10}$

c) 10 425 000 3. c) $1,0425 \cdot 10^{7}$

d) 0,000342 3. d) $3,42 \cdot 10^{-4}$

4. No quadro abaixo estão indicadas em notação científica as massas aproximadas, em quilogramas, de alguns planetas.

Planeta	Massa aproximada (em kg)
Júpiter	$1,90 \cdot 10^{27}$
Mercúrio	$3,30 \cdot 10^{23}$
Saturno	$5,68 \cdot 10^{26}$
Terra	$5,97 \cdot 10^{24}$
Marte	$6,42 \cdot 10^{23}$

Escreva em ordem crescente as massas desses planetas. 4. $3,30 \cdot 10^{23}$; $6,42 \cdot 10^{23}$; $5,97 \cdot 10^{24}$; $5,68 \cdot 10^{26}$; $1,90 \cdot 10^{27}$

5. Os números x, y e z são tais que:

$$x = (2^2)^3,\ y = 2^{3^2} \text{ e } z = 2^{2^3}$$

O resultado da multiplicação desses três números, utilizando propriedades de potenciação, é 2^N. Calcule o valor de N. 5. 23

6. Considere os números A, B, C e D abaixo representados por potências de expoentes naturais. Qual desses números é maior? 6. *D*.

$$A = 3^{31}$$
$$B = 81^{6}$$
$$C = 243^{5}$$
$$D = 3^{2^5}$$

7. Na expressão E abaixo, n representa um número natural qualquer. Utilizando propriedades da potência, a expressão dada representa um número. Qual é esse número? 7. 125

$$E = \frac{2^{n+5} \cdot 2 - 2^{n-2} \cdot 6}{4 \cdot 2^{n-3}}$$

8. Ao efetuar as operações indicadas no número $N = 5^{23} \cdot 2^{30}$ obtemos um número natural. Obtenha a quantidade de algarismos desse número. 8. 26

9. (IFSC-RS) Sabendo que $x = 20^{100}$ e $y = 400^{50}$, pode-se afirmar que:
Assinale a alternativa correta. 9. Alternativa **a**.

a) x é igual a y.

b) x é a metade de y.

c) x é o dobro de y.

d) x é igual ao quadrado de y.

e) x é igual ao quádruplo de y.

10. (Fuvest-SP) O valor de $(0,2)^3 + (0,16)^2$ é: 10. Alternativa **b**.

a) 0,0264

b) 0,0336

c) 0,1056

d) 0,2568

e) 0,6256

11. (UFRGS) A atmosfera terrestre contém 12 900 quilômetros cúbicos de água. Esse valor corresponde, em litros, a 11. Alternativa **d**.

a) $1,29 \cdot 10^{9}$

b) $1,29 \cdot 10^{12}$

c) $1,29 \cdot 10^{15}$

d) $1,29 \cdot 10^{16}$

e) $1,29 \cdot 10^{18}$

Expoente racional

Vimos anteriormente que na ampliação de uma potência de expoente natural para expoente inteiro esteve preservada a propriedade fundamental de potenciação (1ª propriedade) e, consequentemente, as outras propriedades. Essa mesma ideia nos permite ampliar para o expoente racional.

> Sendo a um número real não negativo e n um número natural maior ou igual a 2, a raiz n-ésima de a é o número real não negativo b tal que $b^n = a$, isto é:
>
> $$\sqrt[n]{a} = b \text{ se, e somente se, } b^n = a$$

Agora, vamos dar significado à potência $a^{\frac{m}{n}}$, com a real positivo, para m e n inteiros e $n \neq 0$, de tal forma que a propriedade fundamental seja válida. Para auxiliar na compreensão, acompanhe o seguinte exemplo em que vamos obter $5^{\frac{1}{2}}$ de maneira que a propriedade fundamental seja verificada:

$$5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^1$$

$$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5$$

Assim, $5^{\frac{1}{2}}$ é um número positivo cujo quadrado é igual a 5, isto é, $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.

Assim, podemos determinar $a^{\frac{1}{n}}$, com a real positivo, e n inteiro diferente de zero, de modo que preserve as propriedades.

$$\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot (...) \cdot a^{\frac{1}{n}}}_{n \text{ vezes}} = a^{\overbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+(...)+\frac{1}{n}}^{n \text{ vezes}}}$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{n \cdot \frac{1}{n}}$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$$

Dessa forma, $a^{\frac{1}{n}}$ é um número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a. Conforme definição de raiz n-ésima, temos: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, com a maior que zero e n natural maior ou igual a 2.

De maneira análoga, temos que:

$$\underbrace{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot (...) \cdot a^{\frac{m}{n}}}_{n \text{ vezes}} = a^{\overbrace{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+(...)+\frac{m}{n}}^{n \text{ vezes}}}$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{n \cdot \frac{m}{n}}$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$$

Portanto, $a^{\frac{m}{n}}$ é um número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m. Conforme definição de raiz n-ésima, temos:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

com a maior que zero, m e n naturais, com $m \geq 1$ e $n \geq 2$.

O conjunto dos números reais é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. Assim, para compreendermos a potência com expoente real, falta verificar como podemos calcular uma potência com expoente irracional.

Expoente irracional

Uma ideia é examinarmos uma potência com expoente irracional por meio de aproximações racionais desse expoente. Nesse sentido, a utilização de uma calculadora científica nos auxilia bastante.

Vamos calcular $5^{\sqrt{2}}$ aproximando o expoente irracional por falta e por excesso. Para isso, utilizamos a tecla x^y de uma calculadora científica, sendo $x = 5$.

Reinaldo Vignati

Observe as aproximações registradas nos quadros a seguir.

Aproximação por falta	
y	**5^y**
1,4	9,51826969
1,41	9,67269973
1,414	9,73517104
1,4142	9,73830517
1,41421	9,73846191
1,414213	9,73850893
...	...

Aproximação por excesso	
y	**5^y**
1,5	11,18033989
1,42	9,82963533
1,415	9,75085181
1,4143	9,73987262
1,41422	9,73861864
1,414214	9,73852460
...	...

Assim como fizemos para obter um valor aproximado de $5^{\sqrt{2}}$, poderíamos obter valores aproximados para outros exemplos de potências de base positiva com expoente irracional. De modo geral, o resultado de a^x, para a real positivo e x irracional, pode ser obtido por aproximações racionais de x.

Para a real positivo e x irracional, podemos obter aproximações racionais de a^x, com quantas casas decimais desejarmos, atribuindo a x valores aproximados.

As propriedades de potenciação para expoentes inteiros são também válidas para expoentes irracionais.
Exemplos:

- $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = 5^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = 5^3 = 125$
- $\dfrac{3^{2\pi}}{3^{\pi}} = 3^{2\pi-\pi} = 3^{\pi}$
- $\left(2^{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(3^{\sqrt{2}}\right) = (2\cdot3)^{\sqrt{2}} = 6^{\sqrt{2}}$
- $\dfrac{8^{\sqrt{5}}}{4^{\sqrt{5}}} = \left(\dfrac{8}{4}\right)^{\sqrt{5}} = 2^{\sqrt{5}}$

Observações:

1. Como o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é a união dos conjuntos dos números racionais com os irracionais, podemos dizer que as propriedades estudadas são válidas para todas as potências de expoentes reais.
2. Também podemos ampliar a potência de expoente real considerando a base real, porém com o cuidado de observar que, nos casos da base ser zero ou negativa, algumas potências são definidas no conjunto dos números reais e outras não:

   $0^{10} = 0$

   $0^{-10} \rightarrow$ Não está definida para os números reais.

   $(-64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-64} = -4$

   $(-64)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-64} \rightarrow$ Não está definida para os números reais.
3. Dizemos que a potência 0^0 é uma indeterminação em Matemática.

Atividades resolvidas

6. Calcule o valor de y sendo $y = 64^{\frac{2}{3}}$.

- Um procedimento para determinar o valor de y é utilizar a radiciação:

$$y = 64^{\frac{2}{3}}$$
$$y = \sqrt[3]{64^2}$$
$$y = \sqrt[3]{4\,096} \Rightarrow y = 16$$

- Outra maneira é fazendo a decomposição da base e aplicando a propriedade de potência de potência:

$$y = 64^{\frac{2}{3}}$$
$$y = (2^6)^{\frac{2}{3}}$$
$$y = 2^{6 \cdot \frac{2}{3}}$$
$$y = 2^4 \Rightarrow y = 16$$

Para pensar e discutir

1. Explique como você calcularia o valor do número x tal que $x = 1\,024^{\frac{3}{5}}$
1. Resposta pessoal.

7. Sendo $a > 0$ e considerando m, n e k naturais maiores ou iguais a 2, mostre que é válida a igualdade: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$.
- Utilizando a forma de potenciação, temos:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \text{(I)}$$
$$\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = a^{\frac{m \cdot k}{n \cdot k}} = a^{\frac{m}{n}} \quad \text{(II)}$$

- Comparando (I) e (II), concluímos que:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$$

8. Sendo $a > 0$, $b > 0$ e n natural maior ou igual a 2, mostre que $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
- Conforme propriedades de potenciação para expoentes racionais, temos:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}$$
$$\sqrt[n]{a \cdot b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$$
$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

9. Utilize uma calculadora para determinar qual dos números 9^{π} e $8^{\sqrt{10}}$ é maior.
- Com uma calculadora científica, fazemos aproximações racionais para π e $\sqrt{10}$, com 5 casas decimais:

$$9^{\pi} \cong 9^{3{,}14159}$$
$$8^{\sqrt{10}} \cong 8^{3{,}16228}$$

- Clicando na tecla y^X (ou outra correspondente, conforme modelo da calculadora científica), para efetuar os cálculos das potências, obtemos:

$$9^{\pi} \cong 9^{3{,}14159} \cong 995{,}04164$$
$$8^{\sqrt{10}} \cong 8^{3{,}16228} \cong 717{,}49898$$

Portanto, o número 9^{π} é maior que $8^{\sqrt{10}}$.

Para explorar

Junte-se a dois colegas e, com base no texto anterior, façam o que se pede a seguir.

1. Qual dos números é maior: 3^{π} ou π^3? 1. π^3

2. Determinem o valor da expressão numérica E, sendo $E = \dfrac{(0{,}00032)^{\frac{1}{5}} \cdot (0{,}0256)^{\frac{1}{4}}}{(0{,}125)^{\frac{1}{3}}}$. 2. 0,16

3. Calculem o valor de x na expressão: $x = \sqrt{\dfrac{2^{37}}{2^{35} + 2^{38} + 2^{39}}}$. Em seguida , expliquem como vocês procederam para efetuar a adição $2^{35} + 2^{38} + 2^{39}$. 3. 0,4; resposta pessoal

4. Escrevam os resultados como potências de π:

a) $(-\pi)^2$ 4. a) π^2

b) $\sqrt{(-\pi)^2}$ 4. b) π

c) $\sqrt{\pi^2}$ 4. c) π

d) $\sqrt[5]{\pi^{10}}$ 4. d) π^2

5. A professora escreveu na lousa os números reais $0{,}0625^{(-0{,}25)}$ e $81^{0{,}5}$ e pediu aos estudantes que efetuassem a adição desses dois números. Qual o resultado obtido? 5. 11

6. O resultado de $(0{,}25)^{1\,006} \cdot 2^{2\,013}$ é um número natural. Determinem esse número. 6. 2

Atividades

12. Escreva cada potência na forma de radical e, utilizando uma calculadora, obtenha os valores aproximados das potências com 4 casas decimais.

a) $10^{\frac{2}{5}}$ 12. a) $\sqrt[5]{10^2}$; 2,5119

b) $128^{\frac{2}{3}}$ 12. b) $\sqrt[3]{128^2}$; 25,3984

c) $\pi^{0,2}$ 12. c) $\sqrt[5]{\pi}$; 1,2573

d) $5^{-0,5}$ 12. d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 0,4472

13. Determine o valor numérico de E, sendo $E = (0{,}0016)^{\frac{1}{4}} \cdot (0{,}008)^{-\frac{1}{3}}$. 13. 1

14. Calcule o valor de x na expressão: $x = \sqrt{\dfrac{3^{10} + 3^9 + 3^8}{13 \cdot 3^6}}$. Em seguida, explique como você procedeu para calcular a adição $3^{10} + 3^9 + 3^8$. 14. 3; resposta pessoal

15. Utilizando propriedades de potenciação, determine qual dos números a seguir é o maior. 15. y

$$x = 6^{300} \text{ ou } y = 2^{800}$$

16. A sentença $6 \cdot 5^{10} < 5 \cdot 6^{10}$ é verdadeira ou falsa? Justifique. 16. Verdadeira; resposta pessoal.

17. (IFCE) Ao ordenar corretamente os números reais $x = 2\sqrt{5}$, $y = 3\sqrt{2}$ e $z = 5\sqrt{3}$, obtemos 17. Alternativa **c**.

a) $x < y < z$
b) $z < y < x$
c) $y < x < z$
d) $x < z < y$
e) $y < z < x$

18. (Cotuca-SP) Considere as sentenças: 18. Alternativa **e**.

I. $(x^3)^4 = x^7$
II. $(x^3)^4 = x^{12}$
III. $(x^3)^4 = x^{81}$
IV. $x^3x^4 = x^7$
V. $x^3x^4 = x^{12}$
VI. Para a, b e c números reais, se ab = ac, então b = c

São verdadeiras as sentenças:

a) I, V e VI
b) II, IV e VI
c) III, V e VI
d) I e V
e) II e IV

19. (Ifal) Transformando a expressão $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$ em uma potência de expoente fracionário, obtemos 19. Alternativa **c**.

a) 3^1
b) $3^{\frac{2}{3}}$
c) $3^{\frac{1}{2}}$
d) $3^{\frac{1}{3}}$
e) 1

20. (ESPM-SP) A expressão numérica $2 \cdot 81^3 + 3 \cdot 9^6 + 4 \cdot 27^4$ equivale a: 20. Alternativa **b**.

a) 3^{15}
b) 9^7
c) 27^4
d) 3^{21}
e) 9^{12}

21. (IFCE) Simplificando a expressão $\left(4^{\frac{3}{2}} + 8^{-\frac{2}{3}} - 2^{-2}\right) \div 0{,}75$, obtemos 21. Alternativa **e**.

a) $\frac{8}{25}$
b) $\frac{16}{25}$
c) $\frac{16}{3}$
d) $\frac{21}{2}$
e) $\frac{32}{3}$

22. (UEPB) Um grão de feijão pesa $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ g. Se um saco contém $5 \cdot 10^2$ g de grãos de feijão, 920 sacos contêm: 22. Alternativa **a**.

a) $1{,}84 \times 10^7$ grãos de feijão
b) $1{,}84 \times 10^6$ grãos de feijão
c) $1{,}84 \times 10^8$ grãos de feijão
d) $1{,}84 \times 10^5$ grãos de feijão
e) $1{,}84 \times 10^4$ grãos de feijão

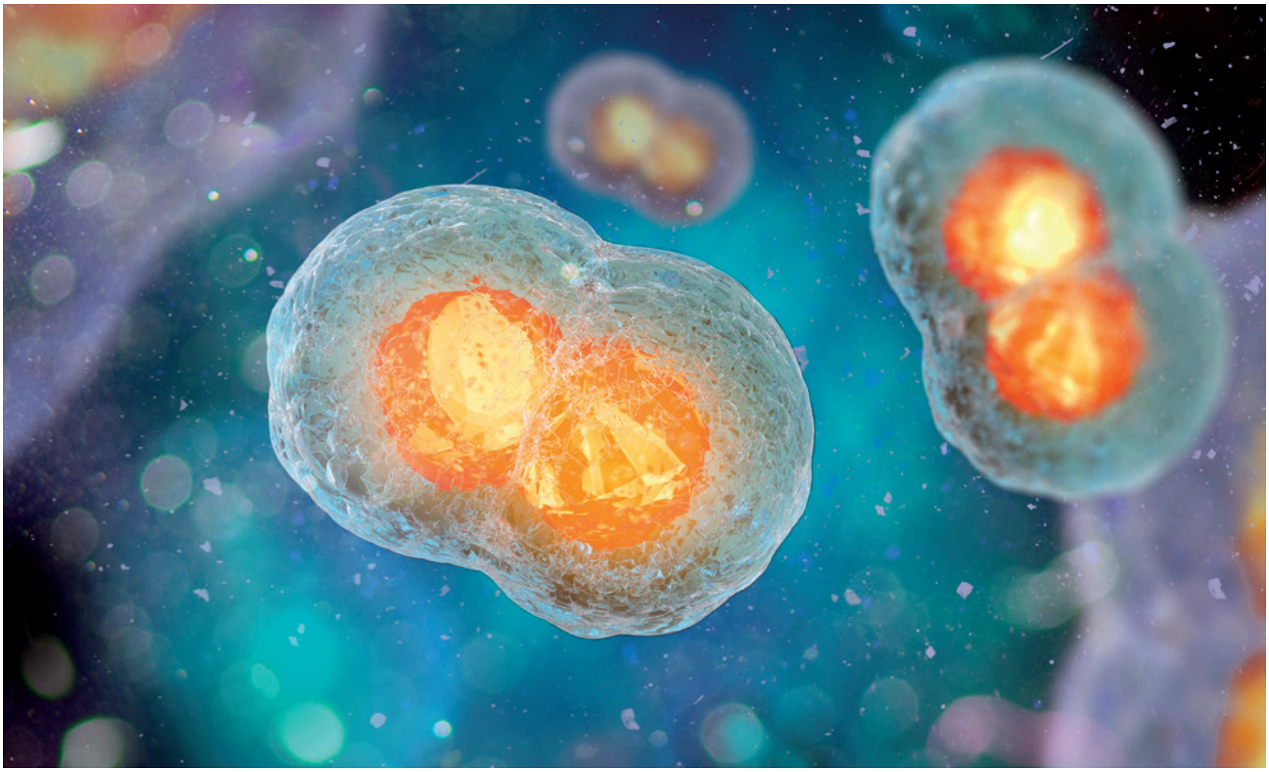
23. (FGV-SP) Se calcularmos o valor de 2^{95}, iremos obter um número natural N. O algarismo final (das unidades) desse número N vale: 23. Alternativa **e**.

a) 2
b) 4
c) 5
d) 6
e) 8

2 A função exponencial

Você já ouviu falar em **crescimento** e **divisão celular**?

Geralmente, associamos crescimento à ideia de aumento de tamanho. Em organismos unicelulares, logo que uma célula, denominada **célula-mãe**, tenha aproximadamente dobrado seu tamanho e duplicado seu conteúdo, ela se divide em duas células, as **células-filhas**. Então, essas células-filhas crescem e também acabam se dividindo. Se considerarmos que as células individuais crescem apenas para se dividir em duas novas células, o crescimento microbiano é definido não em termos de tamanho celular, mas como o aumento do número de células que ocorre por divisão celular.



Andrii Vodolazhskyi/Shutterstock.com

A evolução do número de células em um organismo em desenvolvimento pode ser modelada utilizando funções exponenciais.

Quando estudamos função afim, abordamos o crescimento linear. Agora, vamos estudar o crescimento exponencial, para compreender, por exemplo, como se comporta um fenômeno como o da divisão celular.

Para pensar e discutir

1. Como você descreve a sequência de números (3, 10, 17, 24, ...)? E a sequência (12, 6, 0, –6, ...)? 1. Resposta pessoal.
2. A partir da função afim definida por $f(x) = 5x - 1$, forma-se a sequência dos seguintes valores: $(f(1), f(2), f(3), \ldots)$. Como se dá o crescimento dessa sequência? 2. Aumenta de 5 em 5.
3. A sequência (1, 3, 9, 27, 81, ...) é crescente. Como você a descreve? 3. Resposta pessoal.
4. A sequência numérica (1 024, 512, 256, 128, ...) é decrescente. Como você a descreve? 4. Resposta pessoal.

O crescimento bacteriano, por exemplo, implica a divisão celular. Isso acarreta em um aumento exponencial do número de células iniciais de uma população. Mas o que significa e como descrever esse aumento exponencial?

Estudaremos aqui as chamadas funções exponenciais, que são utilizadas para modelar fenômenos com crescimentos exponenciais.

Conceito e gráfico de uma função exponencial

Lembrando que função é uma relação de dependência entre duas grandezas, podemos conceituar função exponencial da seguinte maneira:

Dado um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ dada por $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ é denominada de **função exponencial** de base a.

Observações:

1. Na lei de formação da função exponencial, x é variável (expoente) e a é um valor determinado (base).
2. Consideramos, neste momento, o contradomínio $\mathbb{R}_+^*$, que coincide com o conjunto imagem da função exponencial, conforme veremos ao analisar o gráfico de funções exponenciais. Entretanto, pode-se, também, considerar o contradomínio $\mathbb{R}$ para a função exponencial, como faremos em algumas situações.
3. Em uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o primeiro $\mathbb{R}$ indica o domínio da função e o segundo $\mathbb{R}$ indica o contradomínio da função.
4. Denomina-se conjunto imagem de uma função o subconjunto do contradomínio formado por todos os valores de $f(x)$, isto é, valores de y tais que

$$y = f(x)$$

x pertence ao conjunto domínio de f

y pertence ao conjunto imagem de f

Exemplos:

- $f(x) = 2^x$
- $f(x) = \pi^x$
- $f(x) = (0,2)^x$
- $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

Para pensar e discutir

1. Com base na definição de função exponencial acima, explique o motivo da base não poder ser negativa, nula ou igual a um. 1. Resposta pessoal.
2. É correto afirmar que, conforme a definição de função exponencial acima, para quaisquer valores reais m e n é válida a igualdade $f(m + n) = f(m) \cdot f(n)$? Explique. 2. Sim; resposta pessoal.
3. Em quais dos exemplos apresentados, aumentando-se os valores de x, as imagens também são aumentadas? E em quais deles, aumentando-se os valores de x, as imagens diminuem?

3. Aumentam: $f(x) = 2^x$ e $f(x) = \pi^x$; diminuem: $f(x) = (0,2)^x$ e $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Atividades resolvidas

10. Considere a função exponencial definida por $f(x) = 3^x$. Calcule o valor de S:

$$S = f(0) + f(1) + f(2) + f(3).$$

- Substituindo os valores de x na lei de formação da função, temos:

$$S = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$
$$S = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3$$
$$S = 1 + 3 + 9 + 27 \Rightarrow S = 40$$

11. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = 2 \cdot 5^x$. Verifique se $f(m + n) = f(m) \cdot f(n)$ para todo m e n pertencente ao domínio de f.

- Substituindo x por $m + n$ na lei de formação da função, temos:

$$f(m + n) = 2 \cdot 5^{m + n} \text{ (I)}$$

- Calculando $f(m) \cdot f(n)$:

$$f(m) \cdot f(n) = (2 \cdot 5^m) \cdot (2 \cdot 5^n)$$
$$f(m) \cdot f(n) = 4 \cdot 5^{m+n} \text{ (II)}$$

- Comparando (I) com (II), temos:

$$f(m + n) \neq f(m) \cdot f(n)$$

12. Na função $f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3 \cdot 4^{-x}$, explique o padrão numérico da sequência correspondente a $(f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots)$.

- Calculando os valores da sequência conforme a lei de formação da função:

$$f(1) = 3 \cdot 4^{-1} = \frac{3}{4^1} = \frac{3}{4}$$
$$f(2) = 3 \cdot 4^{-2} = \frac{3}{4^2} = \frac{3}{16}$$
$$f(3) = 3 \cdot 4^{-3} = \frac{3}{4^3} = \frac{3}{64}$$
$$f(4) = 3 \cdot 4^{-4} = \frac{3}{4^4} = \frac{3}{256}$$
(...)

Portanto, nessa sequência, cada termo a partir do segundo é o anterior multiplicado pela constante $\frac{1}{4}$.

13. (Uerj) Um imóvel perde 36% do valor de venda a cada dois anos. O valor $V(t)$ desse imóvel em t anos pode ser obtido por meio da fórmula a seguir, na qual V_0 corresponde ao seu valor atual.

$$V(t) = V0 \cdot (0{,}64)^{\frac{t}{2}}$$

Admitindo que o valor de venda atual do imóvel seja igual a 50 mil reais, calcule seu valor de venda daqui a três anos.

- Sabendo que $V_0 = 50\,000$, temos que o valor de venda daqui a três anos é igual a:

$$V(3) = 50\,000 \cdot (0{,}64)^{\frac{3}{2}}$$
$$V(3) = 50\,000 \cdot \sqrt{0{,}64^3}$$
$$V(3) = 50\,000 \cdot \left(\sqrt{0{,}64}\right)^3$$
$$V(3) = 50\,000 \cdot 0{,}8^3$$
$$V(3) = 50\,000 \cdot 0{,}512 \Rightarrow V(3) = 25\,600$$

Portanto, o valor do imóvel será R$ 25.600,00.

Para pensar e discutir

1. Considere a função da **atividade 11** definida pela lei de formação $f(x) = 2 \cdot 5^x$. A relação $f(2m)=[f(m)]^2$ é válida para qualquer valor real de m dessa função? Justifique. 1. Não; resposta pessoal.

2. Como você calcularia $(0{,}64)^{\frac{3}{2}}$ utilizando apenas propriedades de potenciação? 2. 0,512; resposta no Manual do Professor

Atividades

24. Dada a função exponencial $f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4^x$, calcule:

a) $f(0)$ 24. a) 1

b) $f(3)$ 24. b) 64

c) $f(4)$ 24. c) 256

25. Considere as funções reais definidas por $f(x) = 25^x$ e $g(x) = 25^{-x}$. Determine o valor do produto $f(3) \cdot g(3)$. 25. 1

26. Explique como é formada a sequência $(f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots)$, sendo $f(x) = \pi^x$. 26. Resposta pessoal.

27. Dada a função exponencial $f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 10^x$, faça o que se pede:

a) Determine, com o auxílio de uma calculadora científica, o número inteiro mais próximo de $f(0{,}301)$. 27. a) 2

b) Calcule, sem a utilização de calculadora, o valor de $S = f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$. 27. b) 1 111,111

28. Determine $S = f(-1) + f(-2) + f(1) + f(2)$, considerando a função exponencial cuja lei de formação é $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
28. 6,75

29. Sabendo que a lei de formação das funções reais f e g são dadas por $f(x) = 2^{3^x}$ e $g(x) = (2^3)^x$, calcule:

a) $f(1) + g(1)$ 29. a) 16

b) $f(2) - g(2)$ 29. b) 448

30. (Ulbra-RS) Em um experimento de laboratório, 400 indivíduos de uma espécie animal foram submetidos a testes de radiação, para verificar o tempo de sobrevivência da espécie. Verificou-se que o modelo matemático que determinava o número de indivíduos sobreviventes em função do tempo era $N(t) = C \cdot A^t$, com o tempo t dado em dias, e A e C dependiam do tipo de radiação. Três dias após o início do experimento, havia 50 indivíduos. Quantos indivíduos vivos existiam no quarto dia após o início do experimento? 30. Alternativa **c**.

a) 40

b) 30

c) 25

d) 20

e) 10

31. (Enem) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1 800,00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $s(t) = 1\,800 \cdot (1{,}03)^t$. De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais,
31. Alternativa **e**.

a) 7 416,00

b) 3 819,24

c) 3 709,62

d) 3 708,00

e) 1 909,62

32. (IFPE) No início do ano de 2017, Carlos fez uma análise do crescimento do número de vendas de refrigeradores da sua empresa, mês a mês, referente ao ano de 2016. Com a análise, ele percebeu um padrão matemático e conseguiu descrever a relação $V(x) = 5 + 2^x$, onde V representa a quantidade de refrigeradores vendidos no mês x. Considere: $x = 1$ referente ao mês de janeiro; $x = 12$ referente ao mês de dezembro.
A empresa de Carlos vendeu, no 2º trimestre de 2016, um total de 32. Alternativa **c**.

a) 39 refrigeradores.

b) 13 refrigeradores.

c) 127 refrigeradores.

d) 69 refrigeradores.

e) 112 refrigeradores.

33. (Enem) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em horas, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias. Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será 33. Alternativa **d**.

a) reduzida a um terço.

b) reduzida à metade.

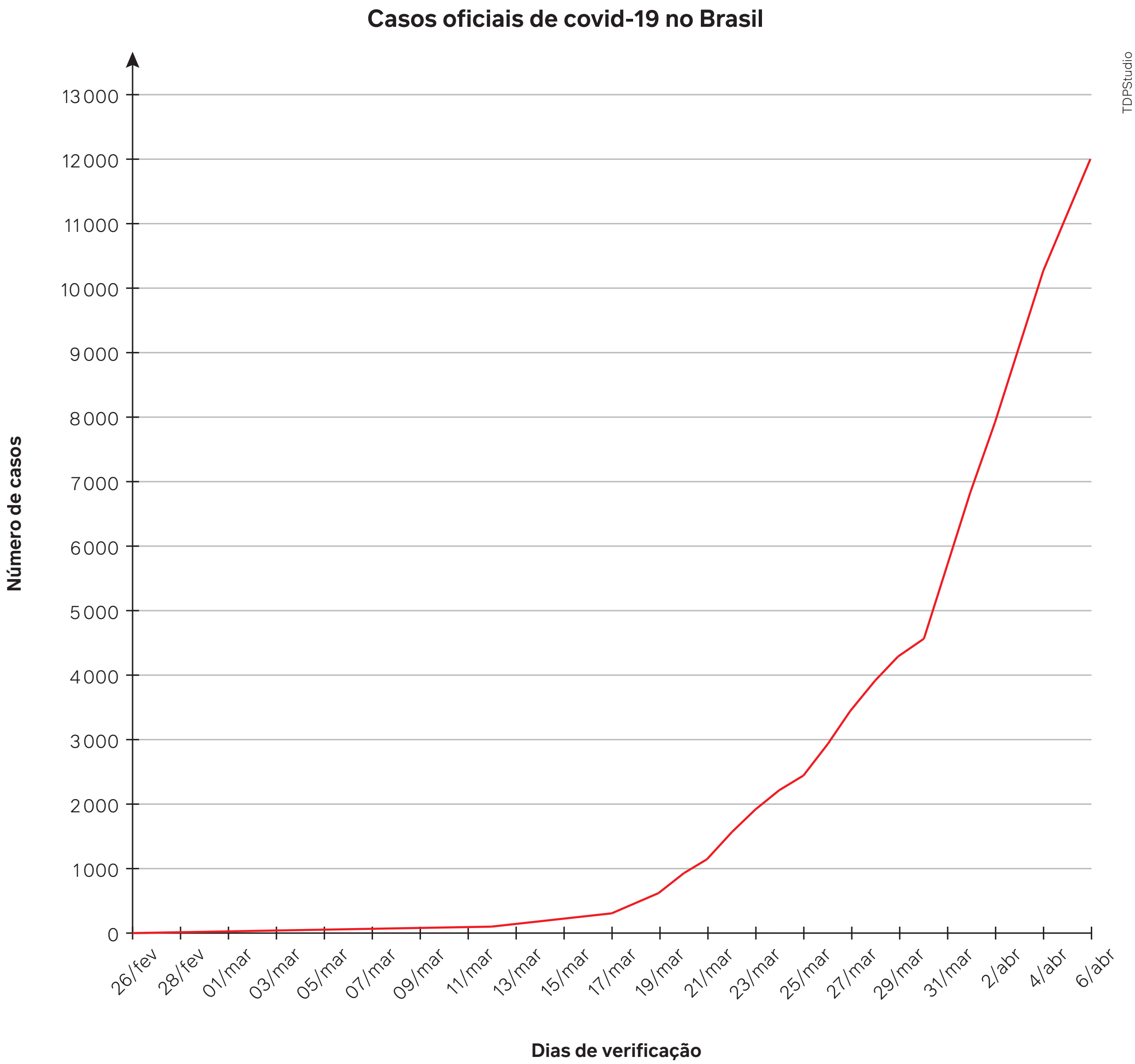
c) reduzida a dois terços.

d) duplicada.

e) triplicada.

Gráfico de uma função exponencial

Alguns fenômenos apresentam o comportamento que pode ser modelado de forma aproximada por meio de funções. O gráfico a seguir indica os casos oficiais de covid-19 registrados no Brasil, no período de 26 de fevereiro a 6 de abril de 2020.



Fonte: BRASIL. Ministério da Saúde. *Painel Coronavírus*. Brasília, DF: MS, 2024. Disponível em: https://covid.saude.gov.br/. Acesso em: 23 ago. 2024.

As variáveis envolvidas são a quantidade de casos registrados em função do dia no período assinalado.

Para pensar e discutir

1. Com base nas informações do gráfico, como você descreve o aumento do número de casos no período de 13 de março a 6 de abril? 1. Resposta pessoal.
2. O crescimento do número de casos no período considerado é linear? Justifique. 2. Não; resposta pessoal.

A situação apresentada no gráfico deste exemplo, pelo menos em parte do período representado, mostra um crescimento extremamente acentuado do número de casos. Fenômenos de crescimento como esse podem ser descritos, de maneira aproximada, como uma função exponencial.

Vamos agora estudar o comportamento gráfico de uma função exponencial com base em sua lei de formação.

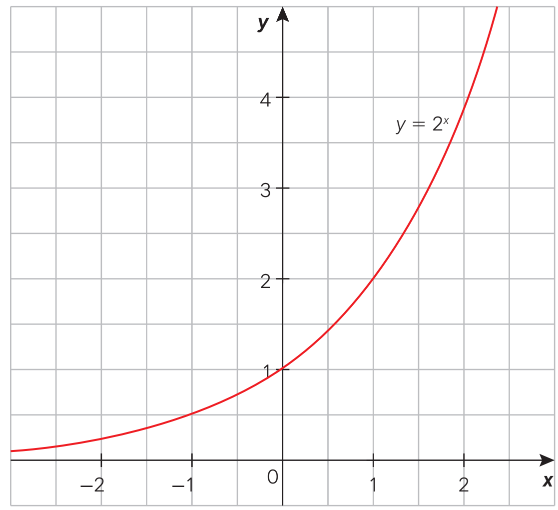
Podemos representar o plano cartesiano em uma folha quadriculada, para ter uma ideia do comportamento gráfico da função exponencial. Atribuindo-se valores à variável independente *x*, obtemos os valores da variável dependente *y*, conforme a lei de formação da função.

Podcast
Crescimento das células

Observe a seguir dois exemplos.

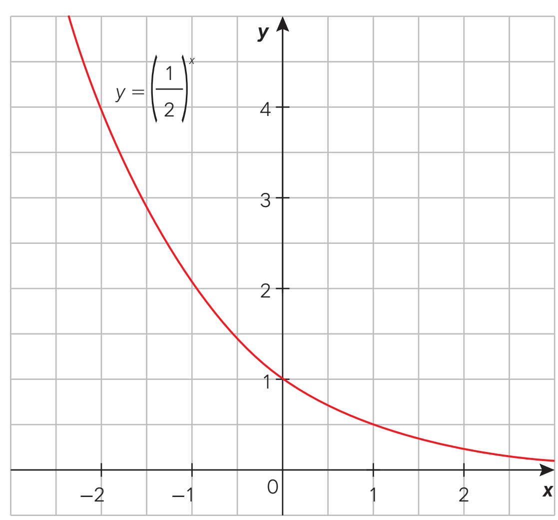
- Esboço do gráfico da função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 2^x$:

x	$y = f(x) = 2^x$	(x, y)
–2	$\frac{1}{4}$	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$
–1	$\frac{1}{2}$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
0	1	(0, 1)
1	2	(1, 2)
2	4	(2, 4)



- Esboço do gráfico da função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

x	$y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	(x, y)
–2	4	(–2, 4)
–1	2	(–1, 2)
0	1	(0, 1)
1	$\frac{1}{2}$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$
2	$\frac{1}{4}$	$\left(2, \frac{1}{4}\right)$



Para pensar e discutir

1. Em qual das duas funções dos exemplos, aumentando-se *x*, observa-se também um aumento do *y* correspondente? 1. $f(x) = 2^x$

2. E em qual delas, aumentando-se *x*, observa-se uma diminuição de *y* correspondente? 2. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3. As duas funções exemplificadas têm o mesmo domínio? E o contradomínio? E o conjunto imagem? 3. Sim; sim; sim.

4. Os dois gráficos interceptam o eixo das abscissas? E o eixo das ordenadas? 4. Não; sim.

Nos dois exemplos apresentados, podemos perceber algumas características sobre o comportamento gráfico das funções exponenciais. Entretanto, outras características podem ser observadas em diferentes casos. Para isso, realize as atividades a seguir.

Para explorar

Junte-se a três colegas para realizar as atividades a seguir. Vocês vão precisar de um *software* de geometria dinâmica.

1. Dadas as seguintes funções exponenciais de base maior que 1, considere o domínio $\mathbb{R}$ e o contradomínio $\mathbb{R}_+^*$. Construam o gráfico de cada uma dessas funções em um plano cartesiano, separadamente:

a) $f(x) = 3^x$

b) $g(x) = 4^x$

c) $h(x) = 10^x$

d) $m(x) = (1{,}5)^x$

1. Respostas no Manual do Professor.

2. Para cada função acima, respondam:

a) Aumentando-se o valor de x, o que ocorre com o valor de y? O que vocês podem concluir? 2. a) O y aumenta; as funções são crescentes.

b) Valores diferentes de x têm sempre valores diferentes de y em correspondência? 2. b) Sim.

c) Qual o conjunto imagem? 2. c) $\mathbb{R}_+^*$.

3. Construam separadamente os gráficos das quatro funções exponenciais com bases entre 0 e 1, considerando domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}_+^*$: 3. Respostas no Manual do Professor.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c) $h(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

d) $m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

4. Para cada função acima, respondam:

a) Aumentando-se o valor de x, o que ocorre com o valor de y? O que vocês podem concluir? 4. a) O y diminui; as funções são decrescentes.

b) Valores diferentes de x têm sempre valores diferentes de y em correspondência? 4. b) Sim.

c) Qual o conjunto imagem dessas funções? 4. c) $\mathbb{R}_+^*$.

5. Escrevam, com base nos gráficos construídos, uma conclusão a respeito do comportamento de uma função exponencial da forma $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, para a base $a > 1$ ou $0 < a < 1$. 5. Para $a > 1$ a função é crescente, e para $0 < a < 1$, é decrescente.

Características do gráfico de uma função exponencial

Você pode construir o gráfico ou um esboço do gráfico de uma função exponencial utilizando papel quadriculado ou *softwares* de geometria dinâmica. Neles, pode-se constatar algumas características de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, conforme abaixo:

- A função exponencial pode ser crescente ou decrescente:

se $a > 1$, a função é crescente, isto é: $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$;

se $0 < a < 1$, a função é decrescente, isto é: $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$.

- O gráfico intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1):

se $x = 0$, temos $f(0) = a^0 = 1$.

- O conjunto imagem da função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ coincide com o contradomínio, isto é, $\text{Im}(f) = CD(f) = \mathbb{R}_+^*$. Assim, o gráfico de uma função exponencial não intercepta o eixo das abscissas.

Em uma função $f: A \to B$, se o conjunto imagem coincide com o contradomínio, $\text{Im}(f) = B$, a função é dita **sobrejetora**.

- Na função exponencial, elementos diferentes do domínio da função têm imagens diferentes, isto é:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Em outras palavras, imagens iguais só ocorrem se os valores de x forem iguais:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Em uma função $f: A \to B$, se elementos distintos do domínio têm imagens distintas no contradomínio, a função é dita **injetora**. Outra maneira de caracterizar a função injetora é observando que imagens iguais só ocorrem para valores de x iguais.

Para pensar e discutir

1. Sem construir o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 7^x$, como você classifica essa função quanto ao crescimento? 1. Crescente.
2. Na função $f(x) = 7^x$, qual o valor de x tal que $f(x) = 49$? Ele é único? Justifique. 2. 2; sim; resposta pessoal
3. Sem construir o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 0,1^x$, como você classifica essa função quanto ao crescimento? 3. Decrescente.
4. Na função $f(x) = 0,1^x$ qual o valor de x tal que $f(x) = -10$? 4. Não existe.

Importante:

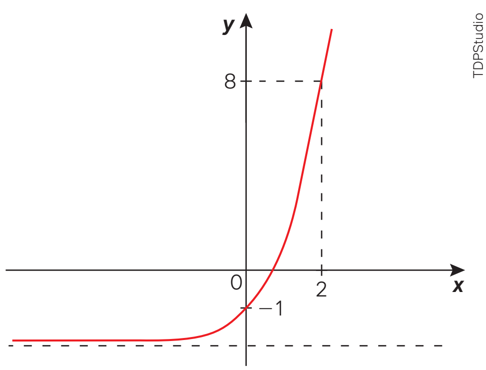
Existem fenômenos que têm o crescimento ou o decrescimento exponencial e não são descritos por funções da forma $\mathbf{f(x) = a^x}$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$), mas por funções da forma $\mathbf{f(x) = b \cdot a^{k \cdot x} + c}$, sendo as constantes b, c e k reais. Pode-se considerar que são funções do tipo exponencial.

Exemplos:

- $f(x) = 10 \cdot 3^{2x} - 1$
- $f(t) = 4\,000 \cdot (1,02)^t + 1\,000$

Atividades resolvidas

14. Observe o esboço do gráfico de uma função cuja lei de formação é do tipo $f(x) = m \cdot 3^x + n$. Determine a lei de formação dessa função.



- De acordo com o gráfico, os pontos (0, –1) e (2, 8) pertencem à curva. Assim, temos:

Ponto (0, –1):
$f(0) = m \cdot 3^0 + n$
$-1 = m \cdot 1 + n \Rightarrow m + n = -1$

Ponto (2, 8):
$f(2) = m \cdot 3^2 + n$
$8 = m \cdot 9 + n \Rightarrow 9m + n = 8$

- Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} m + n = -1 \Rightarrow n = -1 - m \\ 9m + n = 8 \end{cases}$$
$$9m + (-1 - m) = 8$$
$$8m = 9$$
$$m = \frac{9}{8} \Rightarrow n = -1 - \frac{9}{8} \Rightarrow n = -\frac{17}{8}$$

Portanto, a lei de formação da função é $f(x) = \frac{9}{8} \cdot 3^x - \frac{17}{8}$.

15. (UFRGS) No estudo de uma população de bactérias, identificou-se que o número N de bactérias, t horas após o início do estudo, é dado por $N(t) = 20 \cdot 2^{1,5 \cdot t}$. Nessas condições, em quanto tempo a população de mosquitos duplicou?

a) 15 min **b)** 20 min **c)** 30 min **d)** 40 min **e)** 45 min

- Como o número de bactérias é dado em função do tempo, para determinar a quantidade inicial de bactérias, fazemos $t = 0$:

$$N(0) = 20 \cdot 2^{(1,5 \cdot 0)}$$
$$N(0) = 20 \cdot 2^0 \Rightarrow N(0) = 20$$

- Para determinar o tempo que o número de bactérias duplicou, consideramos:

$$N = 2 \cdot 20 = 40$$
$$\downarrow \text{ substituindo na função}$$
$$40 = 20 \cdot 2^{1,5 \cdot t}$$
$$2 = 2^{1,5 \cdot t}$$
$$2^1 = 2^{1,5 \cdot t}$$
$$\downarrow (*)$$
$$1 = 1,5t$$
$$10 = 15t \Rightarrow t = \frac{10}{15} \text{ (em horas)}$$

Para pensar e discutir

1. Explique, conforme as características apresentadas de uma função exponencial, a passagem indicada ao lado pelo símbolo (*), isto é, como podemos concluir que $1 = 1,5t$ a partir de $2^1 = 2^{1,5 \cdot t}$. 1. Resposta pessoal.

- Transformando para minutos, temos:

$$t = \frac{10}{15} \cdot 60 = 40$$

Portanto, em 40 minutos o número de bactérias irá duplicar.

16. (UFJF-MG) A desintegração de certa substância é descrita pela lei $M(t) = c \cdot 4^{-0,125t}$, em que c é uma constante positiva, t representa o tempo, em horas, e $M(t)$ a massa, em gramas, dessa substância no instante t.
Quanto tempo leva para que uma amostra de 256 g dessa substância seja reduzida a 32 g?

- Sabemos que a massa inicial é 256 g. Considerando $t = 0$ na lei de formação da função, temos:

$$M(0) = c \cdot 4^{-0,125 \cdot 0}$$
$$256 = c \cdot 4^0 \Rightarrow c = 256$$

- Para determinar o tempo que leva para a massa ficar reduzida a 32 g, substituímos M por 32:

$$M(t) = c \cdot 4^{-0,125t}$$
$$32 = 256 \cdot 4^{-0,125t}$$
$$\frac{32}{256} = 4^{-0,125t}$$
$$\frac{1}{8} = 4^{-0,125t}$$

- Como 8 e 4 são potências de base 2, temos:

$$2^{-3} = (2^2)^{-0,125t}$$
$$2^{-3} = 2^{-0,25t} \Rightarrow -3 = -0,25t$$
$$\frac{300}{25} = t \Rightarrow t = 12$$

Em 12 horas, a massa ficará reduzida a 32 g.

Carrossel de imagens
Função exponencial

Para explorar

Junte-se a três colegas para realizar as próximas atividades. Utilize um *software* de geometria dinâmica para as **atividades 1** e **2**.

1. Façam o que se pede a seguir.

a) Construam no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções: 1. a) Resposta no Manual do Professor.

$f(x) = 2^x$ $\qquad$ $g(x) = 2^x + 1$ $\qquad$ $h(x) = 2^x - 1$

b) Escrevam uma conclusão sobre como é possível obter os gráficos das funções g e h a partir do gráfico da função f. 1. b) Resposta pessoal.

2. Façam o que se pede a seguir.

a) Construam no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções: 2. a) Resposta no Manual do Professor.

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\qquad$ $g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\qquad$ $h(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b) Comparando os gráficos das funções g e h com o gráfico da função f, o que vocês podem concluir? 2. b) Resposta pessoal.

3. Elaborem um problema que possa ser resolvido por meio de uma função exponencial e peçam para outro grupo resolver. Vocês resolvem o que eles irão elaborar. Reúnam-se, depois, para discutir as soluções. 3. Resposta pessoal.

Atividades

34. Classifique cada função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida a seguir conforme seu crescimento.

a) $f(x) = 4^x$ 34. a) Crescente.

b) $f(x) = 1{,}6^x$ 34. b) Crescente.

c) $f(x) = 0{,}9^x$ 34. c) Decrescente.

d) $f(x) = 5^{-x}$ 34. d)Decrescente.

35. No caderno, esboce no plano cartesiano o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida $f(x) = 3^{x-1}$. Em seguida, responda: 35. Resposta no Manual do Professor.

a) Qual é o conjunto imagem dessa função? 35. a) $\mathbb{R}_+^*$.

b) Quais as coordenadas do ponto em que o gráfico dessa função intercepta o eixo das ordenadas? 35. b) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

c) Qual o valor real de x para o qual $f(x) = 1$? 35. c) 1

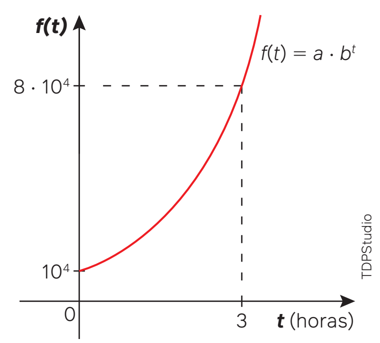
d) Qual o valor real de x para o qual $f(x) = 0$? 35. d) Não existe x real.

36. Em um laboratório, observou-se que a população de uma espécie de bactérias iniciava com 100 bactérias e duplicava a cada três horas. Chegou-se, então, à seguinte lei de formação do número de bactérias N em função do tempo t (em horas), isto é, $N(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$.

a) Obtenha o número de bactérias 3 horas após o início da observação. 36. a) 200

b) Em quanto tempo, após o início da observação, o número de bactérias será de 51 200 bactérias? 36. b) 27 horas

37. (Mack-SP) O gráfico mostra, em função do tempo, a evolução do número de bactérias em certa cultura.



Dentre as alternativas abaixo, decorridos 30 minutos do início das observações, o valor mais próximo desse número é: 37. Alternativa **d**.

a) 18 000 **b)** 20 000 **c)** 32 000 **d)** 14 000 **e)** 40 000

38. Em uma concessionária de carros novos, o vendedor informou ao comprador que a lei matemática que permite estimar a depreciação de determinado carro comprado é $V(t) = 75\,000 \cdot 4^{-0{,}2t}$, em que $V(t)$ é o valor do carro em reais, t anos após a aquisição do carro zero na concessionária. Segundo a lei da depreciação, determine:

a) o valor do carro no momento da compra. 38. a) R$ 75.000,00.

b) o tempo que leva para esse carro valer um oitavo do valor quando retirado da concessionária. 38. b) 7,5 anos

39. Em um experimento, um pesquisador notou que um número N de bactérias em uma cultura, em função do tempo t (em horas), pode ser expresso por $N(t) = 256 \cdot 2^{0{,}75 \cdot t}$. Responda:

a) Qual a quantidade inicial do número de bactérias no início desse experimento? 39. a) 256

b) Em quanto tempo, após o início do experimento, o número de bactérias será igual a 2 048? 39. b) 4 h

40. (FMC-SP) Uma pessoa ingeriu 10 mg de certo medicamento. A função $q(t) = 10 \cdot 2^{-\frac{t}{4}}$ representa, em miligramas, a quantidade presente desse medicamento no organismo, após t horas de sua ingestão. Nessas condições, a quantidade de tal medicamento presente no organismo dessa pessoa será menor do que 2,5 mg após: 40. Alternativa **e**.

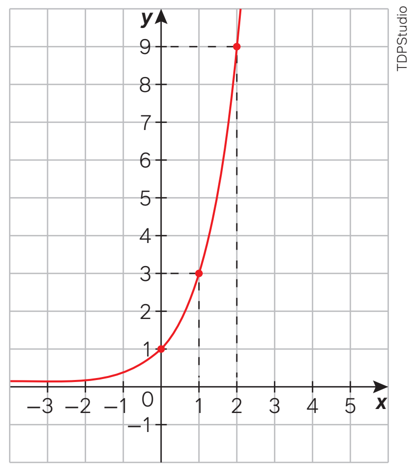
a) 4 h **b)** 5 h **c)** 6 h **d)** 7 h **e)** 8 h

41. (Uece) Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = 8 \cdot a^x$, onde a é um número real positivo diferente de um. Se $f(3) = 125$, então, pode-se afirmar corretamente que $f(4) : f(5)$ é igual a 41. Alternativa **d**.

a) $\frac{4}{5}$ **b)** $\frac{5}{2}$ **c)** $\frac{3}{5}$ **d)** $\frac{2}{5}$

Resolução de equações e inequações exponenciais

O plano cartesiano a seguir apresenta um esboço do gráfico da função definida por $f(x) = 3^x$, e foram destacados três pontos: (0, 1), (1, 3) e (2, 9).



Considere ainda as seguintes equações exponenciais:

$$\underbrace{3^x = 1; \quad 3^x = 3; \quad 3^x = 9}$$

→ Exemplos de equações em que a incógnita x está no expoente.

Para pensar e discutir

1. Com base no gráfico, determine a solução de cada uma dessas equações exponenciais. 1. $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$
2. Como você resolveria essas equações sem a utilização do gráfico? 2. Resposta pessoal.

Equações exponenciais

As três equações apresentadas acima são denominadas **equações exponenciais**, isto é, equações em que a incógnita se apresenta no expoente de pelo menos uma potência de base real, positiva e diferente de 1.

Exemplos:

- $2^{3x} = 256$
- $2^{2x} + 2^x - 6 = 0$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = \frac{1}{243}$
- $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 39$

Como podemos resolver uma equação exponencial?

A resolução de uma equação exponencial é feita com as propriedades da potenciação e considerando o fato de que uma função exponencial é injetora. As propriedades são utilizadas para reduzir, quando possível, os dois membros da equação em potências de mesma base. E utilizamos o conceito de função injetora aplicada à função exponencial $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\downarrow f(x) = a^x$$

$$\underbrace{a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2}$$

→ Consequência de uma função exponencial ser injetora.

A seguir, utilizaremos essa consequência para resolver algumas equações exponenciais. Observe, em cada situação resolvida, o procedimento utilizado e, caso tenha ideia de algum procedimento alternativo, apresente aos colegas.

Atividades resolvidas

17. Resolva, sem o auxílio do gráfico, as equações exponencias $3^x = 1$, $3^x = 3$ e $3^x = 9$ apresentadas anteriormente.

- Sempre que possível, usamos as propriedades das potências para deixar a mesma base nos dois membros da igualdade:

$$3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$$
$$3^x = 3 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1$$
$$3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$$

Portanto, as soluções dessas equações são $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$, respectivamente.

18. A equação exponencial $3^{x+2} + 3^x = 2\,430$ apresenta uma solução real. Determine essa solução.

- Note que a equação dada apresenta duas potências de base 3; então, deixamos as duas no primeiro membro da igualdade:

$$3^{x+2} + 3^x = 2\,430$$
$$\downarrow \text{(a)}$$
$$3^x \cdot 3^2 + 3^x = 2\,430$$
$$\downarrow \text{(b)}$$
$$3^x \cdot (3^2 + 1) = 2\,430$$
$$3^x \cdot 10 = 2\,430$$
$$3^x = 243$$
$$3^x = 3^5 \Rightarrow x = 5$$

Portanto, a solução dessa equação é 5.

Para pensar e discutir

1. Na resolução da equação $3^{x+2} + 3^x = 2\,430$, duas passagens foram indicadas por *a* e *b*. Explique oralmente essas etapas da resolução. 1. Resposta pessoal.

19. Como podemos obter o conjunto-solução da equação exponencial dada por $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$?

- Embora existam duas potências de mesma base, um expoente é o dobro do outro. Assim, podemos reescrever essa equação na seguinte forma:

$$5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 \Rightarrow (5^x)^2 - 6 \cdot (5^x) + 5 = 0$$

- Ao efetuarmos a substituição $5^x = m$, obtemos uma equação do 2º grau na incógnita *m*:

$$(5^x)^2 - 6 \cdot (5^x) + 5 = 0$$
$$\downarrow \text{Fazendo } 5^x = m$$
$$m^2 - 6m + 5 = 0$$
$$m = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$
$$m = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}$$
$$m = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = 1 \end{cases}$$

Para pensar e discutir

1. Você resolveria de outra maneira a equação $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ apresentada na **atividade 19**? Explique. 1. Resposta pessoal.

- Substituindo os valores de *m* na expressão $5^x = m$:

para $m = 5$, temos: $5^x = 5 \Rightarrow 5^x = 5^1 \Rightarrow x = 1$;

para $m = 1$, temos: $5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow x = 0$.

Portanto, o conjunto-solução é $S = \{0, 1\}$.

20. (IFPR) Alguns objetos de uso contínuo sofrem desvalorização comercial, devido ao uso e desgaste ao longo do tempo. Ao comprar uma moto, temos que o valor de venda $V(t)$, em função do tempo *t* de uso em anos, é dado pela seguinte função: $V(t) = 10\,000 \cdot (0{,}9)^t$. Dessa forma, essa moto poderá ser vendida por R$ 8.100,00, após quanto tempo de uso?

a) 2 anos **b)** 1 ano **c)** 18 meses **d)** 36 meses

- Na lei de formação da função, substituímos $V(t) = 8\,100$ e resolvemos a equação exponencial correspondente:

$$V(t) = 10\,000 \cdot (0{,}9)^t$$
$$\frac{8\,100}{10\,000} = (0{,}9)^t$$
$$\frac{81}{100} = (0{,}9)^t$$
$$\left(\frac{9}{10}\right)^2 = \left(\frac{9}{10}\right)^t \Rightarrow t = 2$$

Portanto, em 2 anos a moto terá o valor de R$ 8.100,00.

Para pensar e discutir

1. Na situação da **atividade 20**, foi apresentada a lei de formação da função: $V(t) = 10\,000 \cdot (0{,}9)^t$. Explique o significado do valor 10 000 reais.

2. E o que significa multiplicar o valor 10 000 reais por 0,9? 2. Reduzir esse valor em 10%.

1. Valor inicial da moto.

Atividades

42. Obtenha a solução de cada equação exponencial.

a) $4^x = 128$ 42. a) $\frac{7}{2}$

b) $3^{2x-1} = 1$ 42. b) $\frac{1}{2}$

c) $25^{2y} = 125$ 42. c) $\frac{3}{4}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-m} = 27^{-1}$ 42. d) –3

e) $8^{2x} = 16$ 42. e) $\frac{2}{3}$

f) $81^{3x} = 27$ 42. f) $\frac{1}{4}$

43. Ao resolver uma equação exponencial, Paula obteve a seguinte igualdade: $2^x = -4$. O que você pode concluir sobre essa equação? Justifique. 43. A equação não apresenta solução real; resposta pessoal.

44. Resolva cada uma das seguintes equações exponenciais para a incógnita x:

a) $4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} = 336$ 44. a) 2

b) $2 \cdot 9^x - 9^{x-1} = 17$ 44. b) 1

45. Considere a equação exponencial $2^x = 13$ e faça o que se pede.

a) A equação tem solução representada por um número inteiro? Justifique. 45. a) Não; resposta pessoal.

b) Essa equação tem solução real e isso pode ser justificado a partir da função $f(x) = 2^x$. Explique. 45. b) Resposta pessoal.

c) Entre quais números inteiros consecutivos a equação admite solução real? 45. c) Entre 3 e 4.

46. As três equações exponenciais a seguir podem ser resolvidas por meio de equações do 2º grau. Determine o conjunto-solução de cada uma dessas equações.

a) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ 46. a) {0, 2}

b) $9^x - 30 \cdot 3^x + 81 = 0$ 46. b) {1, 3}

c) $5^{2x} - 24 \cdot 5^x - 25 = 0$ 46. c) {2}

47. (Mack-SP) A soma das raízes da equação $2^{2x+1} - 2^{x+4} = 2^{x+2} - 32$ é: 47. Alternativa **c**.

a) 2

b) 3

c) 4

d) 6

e) 7

48. (Uerj) Um surto de gripe em uma escola teve início com apenas um aluno. O número total y de alunos infectados pelo vírus da gripe, até x horas depois do momento inicial da contaminação, é dado aproximadamente pela equação $y = 46 - k \cdot 3^{-0,1x}$, em que $0 \leq x < 20$ é uma constante positiva. Observando que o surto teve início com $y = 1$, calcule o valor de k e, também, em quantas horas, exatamente, 31 alunos foram contaminados. 48. $k = 45$; 10 h

49. (Famema-SP) Se quadruplicarmos 2^x e dividirmos o resultado por 4^x, o resultado será igual a $\frac{1}{64}$. Nessas condições, o valor de x é 49. Alternativa **e**.

a) 4

b) –6

c) –8

d) 6

e) 8

50. (UFPR) A análise de uma aplicação financeira ao longo do tempo mostrou que a expressão $V(t) = 1000 \cdot 2^{0,0625 \cdot t}$ fornece uma boa aproximação do valor V (em reais) em função do tempo t (em anos), desde o início da aplicação. Depois de quantos anos o valor inicialmente investido dobrará? 50. Alternativa **c**.

a) 8

b) 12

c) 16

d) 24

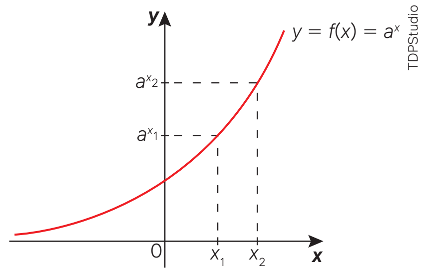
e) 32

Inequações exponenciais

A resolução de inequações exponenciais utiliza como referência o estudo do comportamento gráfico de funções exponenciais quanto ao crescimento. São duas situações possíveis para uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, sendo a base positiva e diferente de um.

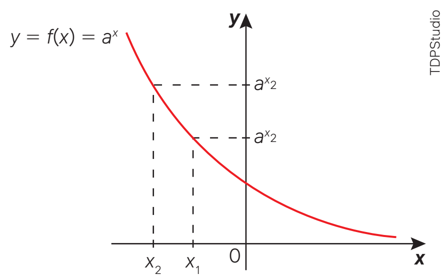
Situação 1: $a > 1$

A função é **crescente**, isto é, quanto maior o valor de y, maior é o valor de x.



Situação 2: $0 < a < 1$

A função é **decrescente**, isto é, quanto maior o valor de y, menor é o valor de x.



Para pensar e discutir

1. Na situação 1, também é correto dizer que quanto maior o valor de x, maior o valor de y? Indique outra maneira de expressar isso. 1. Sim; resposta pessoal.
2. Na situação 2, também é correto dizer que quanto maior o valor de x, menor o valor de y? Indique outra maneira de expressar isso. 2. Sim; resposta pessoal.
3. Em qual das situações tem-se $a^{x_1} > a^{x_2}$ implicando em $x_1 > x_2$? 3. Situação 1.
4. Em qual das situações tem-se $a^{x_1} > a^{x_2}$ implicando em $x_1 < x_2$? 4. Situação 2.

As inequações exponenciais com potências de mesma base nos dois membros das desigualdades podem ser resolvidas com base nas conclusões obtidas no estudo das duas situações anteriores, resumidas a seguir.

Quando a base da potência é maior do que 1, a relação entre as potências se mantém entre os expoentes correspondentes.

Para $a > 1$:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

A desigualdade é conservada.

Quando a base da potência está entre 0 e 1, a relação entre as potências se inverte entre os expoentes correspondentes.

Para $0 < a < 1$:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

A desigualdade é invertida.

Atividades resolvidas

21. Resolva a inequação exponencial $4^{2x-1} \geq 32$.

- Deixamos a mesma base nos dois membros da desigualdade:

$$4^{2x-1} \geq 32$$
$$(2^2)^{2x-1} \geq 2^5$$
$$2^{4x-2} \geq 2^5$$
$$\downarrow (a)$$
$$4x - 2 \geq 5$$
$$4x \geq 7 \Rightarrow x \geq \frac{7}{4}$$

Portanto, o conjunto-solução é dado por $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq \frac{7}{4}\right\}$.

> **Para pensar e discutir**
>
> **1.** Na resolução da inequação $4^{2x-1} \geq 32$ justifique a passagem indicada por (*a*). 1. Resposta pessoal.

22. Determine todos os valores reais de x para os quais a expressão $\sqrt{3^x + 3^{x+1} - 36}$ representa um número real.

- A raiz quadrada de um número real existe se esse número for maior ou igual a zero. Assim, temos a seguinte condição:

$$3^x + 3^{x+1} - 36 \geq 0$$

- Como a condição de existência é uma inequação, vamos resolver essa inequação escrevendo as potências dos dois membros da desigualdade em mesma base:

$$3^x + 3^{x+1} - 36 \geq 0 \Rightarrow 3^x + 3^x \cdot 3^1 \geq 36$$
$$3^x \cdot (1 + 3^1) \geq 36$$
$$3^x \cdot 4 \geq 36$$
$$3^x \geq 9$$
$$3^x \geq 3^2 \Rightarrow x \geq 2$$

Portanto, temos o conjunto-solução $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 2\}$.

23. Um pesquisador observou que o valor de um determinado veículo $V(t)$, no decorrer do tempo em anos, é obtido de forma aproximada pela lei de formação $V(t) = 60\,000 \cdot (0{,}9)^t$. Se um consumidor compra esse veículo e deseja vendê-lo até que o valor atinja, conforme a função dada, o valor de R$ 39.366,00, qual é o tempo máximo que esse consumidor ficará com o veículo?

- Aplicamos na função a condição do veículo ter valor maior ou igual a R$ 39.366,00:

$$V(t) \geq 39\,366$$
$$60\,000 \cdot (0{,}9)^t \geq 39\,366$$
$$(0{,}9)^t \geq \frac{39\,366}{60\,000}$$
$$(0{,}9)^t \geq 0{,}6561$$
$$(0{,}9)^t \geq (0{,}9)^4$$
$$\downarrow (a)$$
$$t \leq 4$$

Portanto, esse consumidor ficará com esse veículo no máximo 4 anos.

> **Para pensar e discutir**
>
> **1.** Na resolução da inequação $60\,000 \cdot (0{,}9)^t \geq 39\,366$, justifique a passagem indicada por (*a*). 1. Resposta pessoal.

Atividades

51. Resolva as inequações e determine o conjunto-solução.

a) $4^x < 1024$ 51. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 5\}$

b) $0{,}2^x < 0{,}04$ 51. b) $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 2\}$

c) $32^x \geq 64$ 51. c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq \frac{6}{5}\right\}$

d) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-x} \leq 216$ 51. d) $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 3\}$

52. Determine a soma de todos os números naturais para os quais $3^{x-3} \leq 81$. 52. 28

53. Dada a inequação $1 \leq 2^{x+1} \leq 32$, faça o que se pede.

a) Determine o conjunto-solução. 53. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 \leq x \leq 4\}$

b) Quantos números inteiros pertencem ao conjunto-solução dessa inequação? 53. b) 6

54. A inequação exponencial $10^x + 10^{x+1} + 10^{x+2} + 10^{x+3} + 10^{x+4} < 11\,111$ admite infinitas soluções. Determine o conjunto-solução. 54. $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 0\}$

55. (Mack-SP) Os valores de x real que satisfazem a inequação $(0,5)^{x^2} \geq (0,25)^{2x}$ são 55. Alternativa **a**.

a) $0 \leq x \leq 4$
b) $x \leq 0$ ou $x \geq 4$
c) $x \leq 0$ ou $x \geq 2$
d) $0 \leq x \leq 6$
e) $-2 \leq x \leq 0$

56. (Eear) A desigualdade $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} > \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ tem como conjunto-solução 56. Alternativa **b**.

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 1\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 5\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 5\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 < x < 5\}$

57. (Cefet-MG) Se um animal foi infectado no tempo $t = 0$ com um número inicial de 1 000 bactérias estima-se que t horas após a infecção o número N de bactérias será de $N(t) = 1\,000 \cdot 2^t$. Para que o animal sobreviva, a vacina deve ser aplicada enquanto o número de bactérias é, no máximo, 512 000. Assim, após a infecção, o número máximo de horas para se aplicar a vacina, de modo que o animal sobreviva, é 57. Alternativa **b**.

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11

58. (Unifor-CE) Após um estudo em uma colmeia de abelhas, verificou-se que no instante $t = 0$ o número de abelhas era 1 000 e que o crescimento populacional da colmeia é dado pela função f, onde f é definida por $f(t) = 1\,000 \cdot 2^{\frac{2t}{3}}$, em que t é o tempo decorrido em dias. Supondo que não haja mortes na colmeia, em quantos dias no mínimo essa colmeia atingirá uma população de 64 000 abelhas? 58. Alternativa **a**.

a) 9
b) 10
c) 12
d) 13
e) 14

59. (UEL-PR) A relação a seguir descreve o crescimento de uma população de micro-organismos, sendo P o número de micro-organismos, t dias após o instante 0.

$$P(t) = 64\,000 \cdot (1 - 2^{-0,1 \cdot t})$$

O valor de P é superior a 63 000 se, e somente se, t satisfizer à condição: 59. Alternativa **d**.

a) $2 < t < 16$
b) $t > 16$
c) $t > 30$
d) $t > 60$
e) $32 < t < 64$

Para explorar

Junte-se a mais um colega para realizar estas atividades. Utilizem uma calculadora científica.

1. Descrevam a lei de formação da sequência numérica 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000, 10 000 000 e 100 000 000. 1. Multiplica-se o antecedente por 10.

2. Considerem uma função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.
Com auxílio da calculadora, investiguem o que acontece com as imagens da função à medida que x aumenta.
2. a) 2; 2,593742; 2,704814; 2,716924; 2,718146; 2,718268; 2,718280 e 2,718282

a) Para isso, calculem os seguintes valores com 6 casas decimais: $f(1)$, $f(10)$, $f(100)$, $f(1\,000)$, $f(10\,000)$, $f(100\,000)$, $f(1\,000\,000)$, $f(10\,000\,000)$ e $f(100\,000\,000)$.

b) Essa sequência de valores, de um termo para outro, aumenta segundo alguma taxa fixa? 2. b) Não.

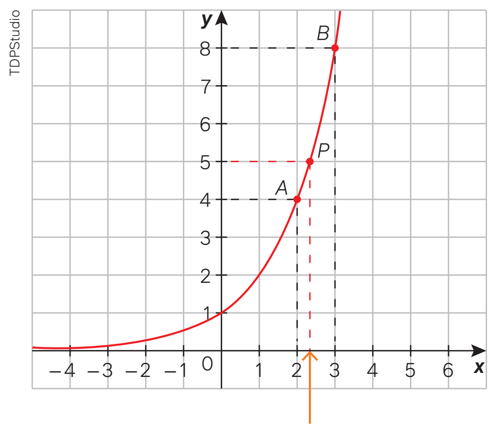
c) Comparando os valores de $f(1\,000\,000)$, $f(10\,000\,000)$ e $f(100\,000\,000)$, em até qual casa decimal eles são iguais? 2. c) Até a 4ª casa decimal.

3. Utilizando a tecla e^x da calculadora e atribuindo a x o valor 1, qual o resultado obtido? Comparem esse valor com o valor de $f(100\,000\,000)$ obtido na atividade anterior e escrevam uma conclusão. 3. 2,71828182845904...; resposta pessoal

4. Dada a função $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, ao atribuir a x valores maiores que 100 000 000 e comparar com o valor de e obtido na calculadora, o que vocês podem concluir? 4. Os valores vão se aproximando de e.

3 Logaritmos

Vamos retomar o gráfico da função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 2^x$. Considere os três pontos A, B e P, tais que:



Qual é a abscissa?

Observando as ordenadas desses três pontos do gráfico da função dada, podemos escrever as seguintes equações:

$$A \rightarrow 2^x = 4$$
$$B \rightarrow 2^x = 8$$
$$P \rightarrow 2^x = 5$$

Para pensar e discutir

1. Qua é o valor do expoente x da potência de base 2 que produz o resultado 8, ou seja, qual é a solução da equação $2^x = 8$? 1. 3
2. Qual é a solução da equação $2^x = 4$? 2. $x = 2$
3. Como se resolve a equação $2^x = 5$? Essa equação tem solução? 3. Resposta pessoal; sim.

Nem toda equação exponencial pode ser resolvida com o procedimento de igualar as bases (positivas e diferentes de 1) das potências para concluir que os expoentes são iguais em razão de ser função injetora. Para esses casos, vamos estudar outro procedimento, que envolve o conceito de logaritmo.

Conceito de logaritmo

O cálculo de uma potência envolve três elementos que se relacionam: a base, o expoente e o resultado, que é denominado potência. Por exemplo:

$2^{10} = 1\,024$

→ Expoente: 10

→ Potência: 1 024

→ Base: 2

Em relação a esse exemplo, podemos dizer que:

"10 é o **expoente** ao qual devemos elevar a base 2 para obter a potência 1 024"

↓ Outra maneira

"10 é o **logaritmo** do número 1 024 na base 2"

↓ Representação

$$10 = \log_2 1\,024$$

Assim, o logaritmo nada mais é que o expoente a que se deve elevar uma base para obter o valor da potência.

Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, se $a^x = b$, então o **expoente** x é o valor do **logaritmo** do número b na base a.

Notação: $\mathbf{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$

Dizemos que ***b*** é o **logaritmando** (número do qual estamos calculando o logaritmo), ***a*** é a **base** do logaritmo e ***x*** é o logaritmo do número b na base a.

Exemplos:

- $\log_6 36 = 2 \Leftrightarrow 6^2 = 36$
- $\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4 \Leftrightarrow 3^{-4} = \frac{1}{81}$
- $\log_{10} 0{,}001 = -3 \Leftrightarrow 10^{-3} = 0{,}001$
- $\log_7 1 = 0 \Leftrightarrow 7^0 = 1$

Observações:

1. O logaritmo de um número positivo na base 10 é chamado logaritmo decimal. Nesse caso, por ser uma base amplamente utilizada, pode-se omitir a base em sua representação.
2. São consequências do conceito de logaritmo para $a > 0$ e $a \neq 1$:

   1ª) $\log_a 1 = 0$

   2ª) $\log_a a = 1$

   3ª) $\log_a a^n = n$

Para pensar e discutir

1. Qual é o valor de log 100 000? 1. 5
2. Utilizando o conceito de logaritmo, justifique as três consequências apresentadas acima. 2. Resposta pessoal.

Existem outras duas consequências do conceito de logaritmo considerando $b > 0$, $c > 0$ e $a > 0$ e $a \neq 1$:

4ª) $a^{\log_a b} = b$

5ª) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Essas duas consequências são justificadas a seguir.

Atividades resolvidas

24. Justifique a 4ª e a 5ª consequências do conceito de logaritmo.

- Vamos justificar a 4ª consequência utilizando o conceito de logaritmo:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

- Substituindo x no expoente da segunda igualdade pela expressão que representa x na primeira igualdade, vem:

$$a^{\log_a b} = b \text{ (4ª consequência)}$$

- Para justificar a 5ª consequência, vamos considerar que:

$$\log_a b = m \Leftrightarrow a^m = b \qquad \log_a c = n \Leftrightarrow a^n = c$$

- Conforme essas igualdades, temos:

$$b = c \Leftrightarrow a^m = a^n \Leftrightarrow m = n \Leftrightarrow \log_a b = \log_a c$$

e

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow m = n \Leftrightarrow a^m = a^n \Leftrightarrow b = c$$

25. Determine o valor de cada logaritmo.

a) $\log_9\left(\frac{1}{27}\right)$

b) $\log_{625}\sqrt{5}$

- Item **a**. Atribuímos a letra x ao valor do logaritmo que vamos calcular. Utilizamos o conceito de logaritmo para recair em uma equação exponencial:

$$\log_9\left(\frac{1}{27}\right) = x \Rightarrow 9^x = \frac{1}{27} \Rightarrow (3^2)^x = \frac{1}{3^3} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{-3} \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

- Item **b**. Analogamente, atribuímos a letra y ao valor do logaritmo que vamos calcular e utilizamos o conceito de logaritmo para recair em uma equação exponencial:

$$\log_{625}\sqrt{5} = y$$
$$625^y = \sqrt{5}$$
$$(5^4)^y = 5^{\frac{1}{2}}$$
$$5^{4y} = 5^{\frac{1}{2}}$$
$$4y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{8}$$

26. Obtenha o valor do número real M tal que $M = \log_{10}10\,000 + \log_7\left(\frac{1}{49}\right) - \log_3 243$

- Utilizando a 3ª consequência do conceito de logaritmos, temos:

$$M = \log_{10}10\,000 + \log_7\left(\frac{1}{49}\right) - \log_3 243$$
$$M = \log_{10}10^4 + \log_7 7^{-2} - \log_3 3^5$$
$$M = 4 + (-2) - 5$$
$$M = -3$$

Para pensar e discutir

1. Sem a utilização da 3ª consequência do conceito de logaritmo, como é possível determinar o valor de M na expressão numérica $M = \log_{10}10\,000 + \log_7\left(\frac{1}{49}\right) - \log_3 243$? 1. Resposta pessoal.

27. Determine o valor de x que é base do logaritmo $\log_x 256 = 2$.

- Conforme definição de logaritmo, a base deve ser positiva e diferente de um, isto é, $x > 0$ e $x \neq 1$. Assim, temos:

$$\log_x 256 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 256$$
$$x = \pm\sqrt{256} \Rightarrow x = 16 \text{ ou } x = -16$$

Portanto, $x = 16$, pois a base não pode ser negativa.

28. Em um cálculo envolvendo potenciação, chegou-se à seguinte expressão $x = 3^{3 + \log_3 10}$. Qual é o valor de x?

- Reescrevendo a potência indicada, conforme a propriedade de potenciação, e utilizando a 5ª consequência do conceito de logaritmo, temos:

$$x = 3^{3 + \log_3 10}$$
$$x = 3^3 \cdot 3^{\log_3 10}$$
$$x = 27 \cdot 10 \Rightarrow x = 270$$

Atividades

60. Determine o valor dos seguintes logaritmos:

a) $\log_5 125$ 60. a) 3
b) $\log_2 128$ 60. b) 7
c) $\log_{14} 1$ 60. c) 0
d) $\log_7 \sqrt{7}$ 60. d) $\frac{1}{2}$
e) $\log_3 9\sqrt{3}$ 60. e) $\frac{5}{2}$
f) $\log_{32}\left(\frac{1}{64}\right)$ 60. f) $-\frac{6}{5}$
g) $\log 0{,}0001$ 60. g) -4
h) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{9}{4}\right)$ 60. h) -2

61. Utilize a notação de logaritmo para representar o expoente x indicado:

a) $3^x = 7$ 61. a) $x = \log_3 7$
b) $\pi^x = 9$ 61. b) $x = \log_\pi 9$
c) $10^x = 2$ 61. c) $x = \log_{10} 2 = \log 2$
d) $4^x = 10$ 61. d) $x = \log_4 10$

62. Utilizando uma calculadora científica, forneça, com aproximação de 3 casas decimais, os seguintes logaritmos:

a) $\log 2$ 62. a) 0,301
b) $\log 3$ 62. b) 0,477
c) $\log 5\,000$ 62. c) 3,699
d) $\log 7\,008$ 62. d) 3,846

63. Calcule as expressões numéricas utilizando as consequências do conceito de logaritmo:

a) $\log_3 3^{22}$ 63. a) 22
b) $5^{\log_5 201}$ 63. b) 201
c) $\log_7(\log_7 7)$ 63. c) 0
d) $\log_{10}(\log_{10} 10^{10})$ 63. d) 1

64. Considere a expressão $m = 16^{\log_4 8}$ e determine o valor de m conforme indicado em cada item.

a) Determine inicialmente o valor de $\log_4 8$ e depois o valor da potência de base 16. 64. a) $\frac{3}{2}$; $m = 64$

b) Utilize as propriedades da potenciação e a consequência do conceito de logaritmo dada por $a^{\log_a b} = b$.
64. b) $m = 64$

65. Em cada igualdade, determine a base do logaritmo.

a) $\log_x 10 = 1$ 65. a) 10

b) $\log_x 400 = 2$ 65. b) 20

c) $\log_a\left(\frac{1}{16}\right) = 2$ 65. c) $\frac{1}{4}$

d) $\log_a\left(\frac{1}{16}\right) = -2$ 65. d) 4

e) $\log_a 1 = 0$ 65. e) Qualquer $a > 0$ e $a \neq 1$.

f) $\log_a 10 = 2$ 65. f) $\sqrt{10}$

66. (Uerj) Uma calculadora tem duas teclas especiais, **A** e **B**. Quando a tecla **A** é digitada, o número que está no visor é substituído pelo logaritmo decimal desse número. Quando a tecla **B** é digitada, o número do visor é multiplicado por 5. Considere que uma pessoa digitou as teclas **BAB**, nesta ordem, e obteve no visor o número 10. Nesse caso, o visor da calculadora mostrava inicialmente o seguinte número: 66. Alternativa **a**.

a) 20 b) 30 c) 40 d) 50

67. (Ifal) Nas análises químicas de soluções, o pH é muito utilizado e, através dele, o químico pode avaliar a acidez da solução. O pH de uma solução, na verdade, é uma função logarítmica dada por:

$$pH = -\log [H^+]$$

Onde: $[H^+]$ é a concentração de H^+ na solução (concentração hidrogeniônica).

Tendo em vista essas informações, se uma solução apresentou pH 5, podemos dizer que a concentração hidrogeniônica vale 67. Alternativa **b**.

a) 10^{-3} b) 10^{-5} c) 10^{-7} d) 10^{-9} e) 10^{-11}

68. (Uece) Se x é o logaritmo de 16 na base 2, então, o logaritmo (na base 2) de $x^2 - 5x + 5$ é igual a 68. Alternativa **b**.

a) 2 b) 1 c) −1 d) 0

69. (UPF-RS) Se $24^{n+1} = 3^{n+1} \cdot 16$, então $\log_3 n$ é igual a: 69. Alternativa **b**.

a) −2 b) −1 c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) 2

Propriedades dos logaritmos

Neste tópico, vamos propor a leitura de um texto sobre a história da criação dos logaritmos. Nele você poderá observar que a origem dos logaritmos teve como principal motivação facilitar cálculos por meio de transformações de operações em outras mais simples. Assim, por exemplo, uma multiplicação, a partir da definição de logaritmos, poderia ser efetuada por uma adição; uma divisão por meio de uma subtração; uma potenciação por meio de uma multiplicação.

Para compreender melhor essa ideia, observe no quadro algumas potências de base 3.

Potências	Logaritmos
$3^2 = 9$	$\log_3 9 = 2$
$3^3 = 27$	$\log_3 27 = 3$
$3^4 = 81$	$\log_3 81 = 4$
$3^5 = 243$	$\log_3 243 = 5$
$3^6 = 729$	$\log_3 729 = 6$
$3^7 = 2\,187$	$\log_3 2\,187 = 7$
$3^8 = 6\,561$	$\log_3 6\,561 = 8$

Vamos considerar agora que você precise efetuar a seguinte multiplicação:

$$27 \cdot 243 = ?$$

Observando a coluna de potências no quadro acima, podemos escrever:

$$27 \cdot 243 = 3^3 \cdot 3^5$$
$$27 \cdot 243 = 3^{3+5}$$
$$27 \cdot 243 = 3^8$$
$$27 \cdot 243 = 6\,561$$

Consultando o quadro

Para pensar e discutir

1. No cálculo de 27 · 243 apresentado acima, qual operação foi realizada antes da consulta ao quadro? 1. Adição dos expoentes.
2. Observando a coluna de logaritmos do quadro, qual é a relação entre o $\log_3 6\,561$ e os logaritmos de 27 e de 243 na base 3? 2. O logaritmo de 6 561 é a soma dos outros dois.
3. Explique como você efetuaria a divisão 2 187 : 243 usando os valores da coluna de potências e, depois, usando os valores da coluna de logaritmos. 3. Resposta pessoal.

As ideias apresentadas no quadro e na discussão anterior, bem como outras similares, podem ser ampliadas e fazem parte do conhecimento de três propriedades operatórias envolvendo logaritmos que passaremos a apresentar e a demonstrar a seguir.

1ª propriedade:

Para os números reais positivos M, N e a, tal que $a \neq 1$, vale a relação:

$$\mathbf{\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N}$$

Nessa propriedade, dados dois números positivos, o logaritmo do produto desses dois números em uma base a (positiva e diferente de 1) é a soma de seus logaritmos na mesma base.

Demonstração:

Aplicando nos três logaritmos o conceito de logaritmo, temos:

$$\log_a(M \cdot N) = r \Leftrightarrow a^r = M \cdot N$$
$$\log_a M = x \Leftrightarrow a^x = M$$
$$\log_a N = y \Leftrightarrow a^y = N$$

Vídeo
Terremotos

Conforme propriedade de potenciação e as expressões acima, vem:

$$a^r = M \cdot N$$
$$a^r = a^x \cdot a^y$$
$$a^r = a^{x+y}$$
$$r = x + y \Rightarrow \log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

Observação:

Essa demonstração foi feita para o logaritmo do produto de dois números positivos. Entretanto, a mesma propriedade também é válida para o logaritmo do produto de três ou mais números positivos.

Exemplo: $\log_5 60 = \log_5(2 \cdot 3 \cdot 10) = \log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 10$

2ª propriedade:

Para os números reais positivos M, N e a, tal que $a \neq 1$, vale a relação:

$$\mathbf{\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N}$$

Nessa propriedade, dados dois números positivos, o logaritmo do quociente desses dois números em uma base a (positiva e diferente de 1) é a diferença, nessa ordem, de seus logaritmos na mesma base.

Demonstração:

Aplicando nos três logaritmos o conceito de logaritmo, temos:

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = r \Leftrightarrow a^r = \frac{M}{N}$$
$$\log_a M = x \Leftrightarrow a^x = M$$
$$\log_a N = y \Leftrightarrow a^y = N$$

Conforme propriedade de potenciação e as expressões acima, vem:

$$a^r = \frac{M}{N}$$
$$a^r = \frac{a^x}{a^y}$$
$$a^r = a^{x-y}$$
$$r = x - y \Rightarrow \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

Exemplo: $\log_{10} 1{,}5 = \log_{10}\left(\frac{3}{2}\right) = \log_{10} 3 - \log_{10} 2$

3ª propriedade:

Sendo k um número real qualquer, para os números reais positivos M e a, tal que $a \neq 1$, vale a relação:

$$\mathbf{\log_a M^k = k \cdot \log_a M}$$

Nessa propriedade, o logaritmo de uma potência em uma base a (positiva e diferente de 1) é transformado em um produto.

Demonstração:

Aplicando nos dois logaritmos o conceito de logaritmo, temos:

$$\log_a M^k = r \Leftrightarrow a^r = M^k$$
$$\log_a M = x \Leftrightarrow a^x = M$$

Conforme propriedade de potenciação e as expressões anteriores, vem:

$$a^r = M^k$$
$$a^r = (a^x)^k$$
$$a^r = a^{k \cdot x}$$
$$r = k \cdot x$$
$$\log_a M^k = k \cdot \log_a M$$

Exemplo: $\log_3 64 = \log_3 2^6 = 6 \cdot \log_3 2$

Atividades resolvidas

29. Em uma calculadora científica, obteve-se os valores aproximados de $\log 2 \cong 0{,}301$ e $\log 3 \cong 0{,}477$. A partir desses dois valores, calcule:

a) log 60

b) log 2,5

- Item **a.** Como o logaritmo está na base 10, podemos decompor o logaritmando para expressá-lo em função de 2, 3 e 10:

$$\log 60 = \log (2 \cdot 3 \cdot 10)$$
$$\log 60 = \log 2 + \log 3 + \log 10$$
$$\log 60 \cong 0{,}301 + 0{,}477 + 1 \Rightarrow \log 60 \cong 1{,}778$$

- Item **b.** Da mesma maneira, precisamos fazer decomposições do logaritmando para chegar nos logaritmos dados:

$$\log 2{,}5 = \log \left(\frac{25}{10}\right)$$
$$\log 2{,}5 = \log 25 - \log 10$$
$$\log 2{,}5 = \log 5^2 - \log 10$$
$$\log 2{,}5 = 2 \cdot \log 5 - \log 10$$
$$\log 2{,}5 = 2 \cdot \log \left(\frac{10}{2}\right) - \log 10$$
$$\log 2{,}5 = 2 \cdot (\log 10 - \log 2) - \log 10$$
$$\log 2{,}5 \cong 2 \cdot (1 - 0{,}301) - 1 \Rightarrow \log 2{,}5 \cong 0{,}398$$

Para pensar e discutir

1. Utilize uma calculadora e verifique os valores aproximados dos logaritmos obtidos na atividade anterior.
1. 1,77815125038 e 0,39794000867
2. No cálculo de log 2,5, explique o motivo de expressar o número 5 como o quociente de 10 por 2.
2. Resposta pessoal.
3. Calcule $\log \left(\frac{25}{10}\right)$ de outra maneira. 3. Resposta pessoal.

30. Utilizando as propriedades de logaritmos e com o auxílio de uma calculadora, resolva a equação exponencial $2^x = 5$ apresentada no início deste capítulo.

- Essa é uma equação exponencial em que os dois membros não estão reduzidos à mesma base. Podemos usar logaritmos para isolar *x*:

$$2^x = 5$$
$$\downarrow \text{(I)}$$
$$\log_{10} 2^x = \log_{10} 5$$
$$\downarrow \text{(II)}$$
$$x \cdot \log_{10} 2 = \log_{10} 5$$
$$x \cdot 0{,}301 \cong 0{,}699$$
$$x \cong \frac{0{,}699}{0{,}301} \Rightarrow x \cong 2{,}322$$

Para pensar e discutir

1. Explique as passagens (I) e (II) da resolução acima. 1. Resposta no Manual do Professor.
2. Utilize uma calculadora científica para verificar se $2^{2{,}322}$ é aproximadamente 5. 2. $2^{2{,}322} \cong 5$

31. Obtenha o desenvolvimento logarítmico da expressão $E = \log_2\left(\frac{A^3 \cdot \sqrt{B}}{C}\right)$.

- Vamos desenvolver a expressão em função dos logaritmos de A, B e C na base 2, aplicando as propriedades operatórias:

$$E = \log_2\left(\frac{A^3 \cdot \sqrt{B}}{C}\right)$$
$$E = \log_2(A^3 \cdot \sqrt{B}) - \log_2 C$$
$$E = \log_2 A^3 + \log_2 B^{\frac{1}{2}} - \log_2 C$$
$$E = 3 \cdot \log_2 A + \frac{1}{2} \cdot \log_2 B - \log_2 C$$

32. Determine o expoente da potência de base 10 que equivale a 435, com auxílio de uma calculadora e utilizando as propriedades de logaritmos.

- Para determinar o expoente x da potência de base 10, escrevemos:

$$10^x = 435$$

- Aplicando logaritmo e suas propriedades, calculamos o valor aproximado do expoente x:

$$10^x = 435$$
$$\log 10^x = \log 435$$
$$x \cdot \log 10 = \log 435$$
$$x \cdot 1 = \log 435$$
$$x = \log 435$$
$$\downarrow \text{calculadora}$$
$$x \cong 2{,}638$$

Portanto, $435 \cong 10^{2{,}638}$.

Carrossel de imagens
Logaritmos na Astronomia

Atividades

70. Considerando as aproximações $\log 2 \cong 0{,}30$ e $\log 3 \cong 0{,}48$, utilize as propriedades operatórias para calcular os valores aproximados de:

a) $\log 8$ 70. a) 0,9
b) $\log 12$ 70. b) 1,08
c) $\log 3{,}2$ 70. c) 0,5
d) $\log 500$ 70. d) 2,7
e) $\log \sqrt{6}$ 70. e) 0,39
f) $\log 0{,}02$ 70. f) –1,7

71. Utilizando as propriedades operatórias de logaritmos, obtenha o desenvolvimento logarítmico da expressão numérica $A = \log_{11}\left(\frac{5 \cdot 3^7}{2^4}\right)$ em função de $\log_{11}5$, $\log_{11}3$ e $\log_{11}2$. 71. $A = \log_{11}5 + 7 \cdot \log_{11}3 - 4 \cdot \log_{11}2$

72. Considere os logaritmos $\log_{10}A = 3$, $\log_{10}B = 7$ e $\log_{10}C = -2$ para calcular os seguintes logaritmos:

a) $\log_{10}\left(\frac{A^2 B}{C^3}\right)$ 72. a) 19
b) $\log_{10}\left(\frac{AB^4}{C}\right)$ 72. b) 33

73. Expresse cada número a seguir, de forma aproximada, como potência de base 10 (utilize calculadora):

a) 7 73. a) $10^{0{,}845}$
b) 18 73. b) $10^{1{,}255}$
c) 257 73. c) $10^{2{,}410}$
d) 9 021 73. d) $10^{3{,}952}$

74. A partir do valor aproximado de $\log_{10}2 \cong 0{,}301$, obtenha os valores de 74. 1,301; 2,301; 3,301; 4,301 e 5,301.

- $\log_{10}20$
- $\log_{10}200$
- $\log_{10}2\,000$
- $\log_{10}20\,000$
- $\log_{10}200\,000$

Comparando os valores obtidos, responda:

a) O que não alterou de um logaritmo para outro? 74. a) A parte decimal dos logaritmos.
b) O que alterou? 74. b) A parte inteira dos logaritmos.

75. Uma consequência do conceito de logaritmos é que se $\log_a B = \log_a C$, então $B = C$, sendo $B > 0$, $C > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Utilizando esse resultado, determine o valor de x em cada sentença abaixo:

a) $\log_2 x = 2 \cdot \log_2 3 + \log_2 5$ 75. a) 45
b) $\log_5 x = 3 \cdot \log_5 10 - 2 \cdot \log_5 2$ 75. b) 250
c) $\log_{10} x = 4 + 2 \cdot \log_{10} 3 - 4 \cdot \log_{10} 2$ 75. c) 5 625

76. (UFRGS) Se $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, então $\log 288$ é 76. Alternativa **b**.

a) $2x + 5y$
b) $5x + 2y$
c) $10xy$
d) $x^2 + y^2$
e) $x^2 - y^2$

77. (EEAR) Sejam m, n e b números reais positivos, com $b \neq 1$. Se $\log_b m = x$ e se $\log_b n = y$, então $\log_b(m \cdot n) + \log_b\left(\frac{n}{m}\right)$ é igual a 77. Alternativa **b**.

a) x
b) $2y$
c) $x + y$
d) $2x - y$

Análise e contexto

A criação dos logaritmos

vchal/Shutterstock.com

Os logaritmos e as tábuas logarítmicas foram muito importantes para a determinação de distâncias de corpos celestes na Astronomia.

O texto a seguir, escrito pelo professor Elon Lages Lima, apresenta os principais personagens envolvidos na criação dos logaritmos e suas justificativas.

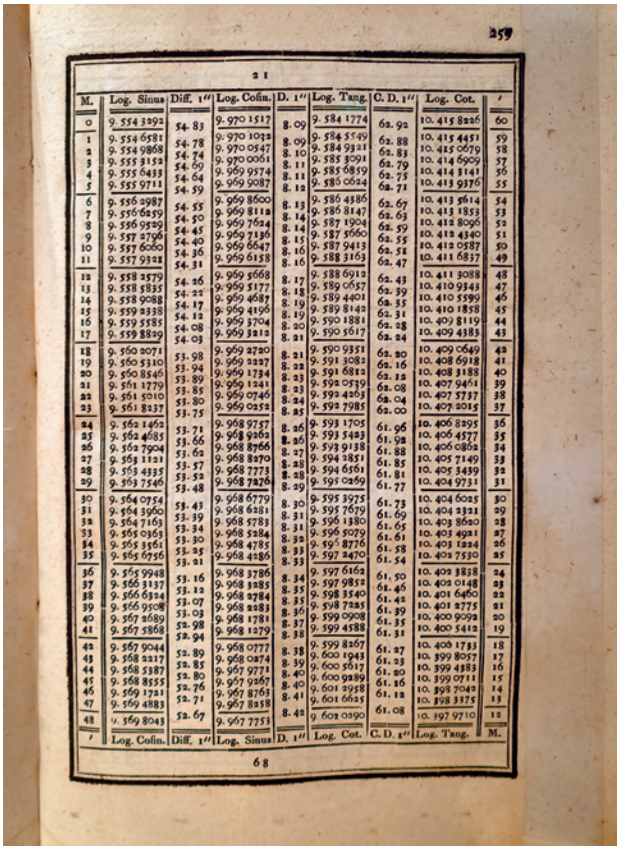
No fim do século XVI, o desenvolvimento da astronomia e da navegação exigia longos e laboriosos cálculos aritméticos. Um auxílio precioso já fora obtido com a recente invenção das frações decimais, embora ainda não suficientemente difundida. Mesmo assim, achar um método que permitisse efetuar com presteza multiplicações, divisões, potenciações e extrações de raízes era, nos anos próximos de 1600, um problema fundamental.

Segundo o grau de dificuldade, as operações aritméticas podem ser classificadas em 3 grupos: adição e subtração formam as operações de 1ª espécie; multiplicação e divisão são de 2ª espécie, enquanto que potenciação e radiciação constituem as operações de 3ª espécie. Procurava-se então um processo que permitisse reduzir cada operação de 2ª ou 3ª espécie a uma espécie inferior e, portanto, mais simples.

Acontece com frequência que uma grande descoberta científica é feita simultaneamente por duas ou mais pessoas trabalhando independentemente. Não se trata de simples coincidência: tal descoberta corresponde à solução de um problema importante, do qual muitos se vinham ocupando.

Assim aconteceu com os logaritmos. Jost Bürgi (1552-1632), suíço, fabricante de instrumentos astronômicos, matemático e inventor, e John Napier (1550-1617), um nobre escocês, teólogo e matemático, cada um deles desconhecendo inteiramente o outro, publicaram as primeiras tábuas de logaritmos. As tábuas de Napier foram publicadas em 1614 e as de Bürgi em 1620. A influência de Napier no desenvolvimento dos logaritmos foi muito maior do que a de Bürgi, devido a suas publicações e seu relacionamento com professores universitários.

Uma tábua de logaritmos consiste essencialmente de duas colunas de números. A cada número da coluna à esquerda corresponde um número à sua direita, chamado de seu logaritmo. Para multiplicar dois números, basta somar seus logaritmos; o resultado é o logaritmo do produto. Para achar o produto, basta ler na tábua, da direita para a esquerda, qual número tem aquele logaritmo. Semelhantemente, para dividir dois números, basta subtrair os logaritmos. Para elevar um número a uma potência, basta multiplicar o logaritmo do número pelo expoente. Finalmente, para extrair a raiz n-ésima de um número, basta dividir o logaritmo do número pelo índice da raiz. Na terminologia matemática de hoje, uma correspondência como essa – estabelecida por meio de uma tábua de logaritmos – é o que se chama de função. Convém notar, porém, que a invenção dos logaritmos foi anterior à introdução do conceito de função na Matemática. A utilidade original dos logaritmos resulta, portanto, da seguinte observação: o trabalho de elaborar uma tábua de logaritmos, por mais longo e cansativo que seja, é um só. Depois de executado, ninguém precisa mais, digamos, efetuar multiplicações; adições bastam.



259

21

M.	Log. Sinus	Diff. 1″	Log. Cofin.	D. 1″	Log. Tang.	C. D. 1″	Log. Cot.	′
0	9. 554 3292	54. 83	9. 970 1517	8. 09	9. 584 1774	62. 92	10. 415 8226	60
1	9. 554 6581	54. 78	9. 970 1032	8. 09	9. 584 5549	62. 88	10. 415 4451	59
2	9. 554 9868	54. 74	9. 970 0547	8. 10	9. 584 9321	62. 83	10. 415 0679	58
3	9. 555 3152	54. 69	9. 970 0061	8. 11	9. 585 3091	62. 79	10. 414 6909	57
4	9. 555 6433	54. 64	9. 969 9574	8. 11	9. 585 6859	62. 75	10. 414 3141	56
5	9. 555 9711	54. 59	9. 969 9087	8. 12	9. 586 0624	62. 71	10. 413 9376	55
6	9. 556 2987	54. 55	9. 969 8600	8. 13	9. 586 4386	62. 67	10. 413 5614	54
7	9. 556 6259	54. 50	9. 969 8112	8. 14	9. 586 8147	62. 63	10. 413 1853	53
8	9. 556 9529	54. 45	9. 969 7624	8. 14	9. 587 1904	62. 59	10. 412 8096	52
9	9. 557 2796	54. 40	9. 969 7136	8. 15	9. 587 5660	62. 55	10. 412 4340	51
10	9. 557 6060	54. 36	9. 969 6647	8. 16	9. 587 9413	62. 51	10. 412 0587	50
11	9. 557 9321	54. 31	9. 969 6158	8. 16	9. 588 3163	62. 47	10. 411 6837	49
12	9. 558 2579	54. 26	9. 969 5668	8. 17	9. 588 6912	62. 43	10. 411 3088	48
13	9. 558 5835	54. 22	9. 969 5177	8. 18	9. 589 0657	62. 39	10. 410 9343	47
14	9. 558 9088	54. 17	9. 969 4687	8. 19	9. 589 4401	62. 35	10. 410 5599	46
15	9. 559 2338	54. 12	9. 969 4196	8. 19	9. 589 8142	62. 31	10. 410 1858	45
16	9. 559 5585	54. 08	9. 969 3704	8. 20	9. 590 1881	62. 28	10. 409 8119	44
17	9. 559 8829	54. 03	9. 969 3212	8. 21	9. 590 5617	62. 24	10. 409 4383	43
18	9. 560 2071	53. 98	9. 969 2720	8. 21	9. 590 9351	62. 20	10. 409 0649	42
19	9. 560 5310	53. 94	9. 969 2227	8. 22	9. 591 3082	62. 16	10. 408 6918	41
20	9. 560 8546	53. 89	9. 969 1734	8. 23	9. 591 6812	62. 12	10. 408 3188	40
21	9. 561 1779	53. 85	9. 969 1241	8. 23	9. 592 0539	62. 08	10. 407 9461	39
22	9. 561 5010	53. 80	9. 969 0746	8. 24	9. 592 4263	62. 04	10. 407 5737	38
23	9. 561 8237	53. 75	9. 969 0252	8. 25	9. 592 7985	62. 00	10. 407 2015	37
24	9. 562 1462	53. 71	9. 968 9757	8. 26	9. 593 1705	61. 96	10. 406 8295	36
25	9. 562 4685	53. 66	9. 968 9262	8. 26	9. 593 5423	61. 92	10. 406 4577	35
26	9. 562 7904	53. 62	9. 968 8766	8. 27	9. 593 9138	61. 88	10. 406 0862	34
27	9. 563 1121	53. 57	9. 968 8270	8. 28	9. 594 2851	61. 85	10. 405 7149	33
28	9. 563 4335	53. 52	9. 968 7773	8. 28	9. 594 6561	61. 81	10. 405 3439	32
29	9. 563 7546	53. 48	9. 968 7276	8. 29	9. 595 0269	61. 77	10. 404 9731	31
30	9. 564 0754	53. 43	9. 968 6779	8. 30	9. 595 3975	61. 73	10. 404 6025	30
31	9. 564 3960	53. 39	9. 968 6281	8. 31	9. 595 7679	61. 69	10. 404 2321	29
32	9. 564 7163	53. 34	9. 968 5783	8. 31	9. 596 1380	61. 65	10. 403 8620	28
33	9. 565 0363	53. 30	9. 968 5284	8. 32	9. 596 5079	61. 61	10. 403 4921	27
34	9. 565 3561	53. 25	9. 968 4785	8. 33	9. 596 8776	61. 58	10. 403 1224	26
35	9. 565 6756	53. 21	9. 968 4286	8. 33	9. 597 2470	61. 54	10. 402 7530	25
36	9. 565 9948	53. 16	9. 968 3786	8. 34	9. 597 6162	61. 50	10. 402 3838	24
37	9. 566 3137	53. 12	9. 968 3285	8. 35	9. 597 9852	61. 46	10. 402 0148	23
38	9. 566 6324	53. 07	9. 968 2784	8. 35	9. 598 3540	61. 42	10. 401 6460	22
39	9. 566 9508	53. 03	9. 968 2283	8. 36	9. 598 7225	61. 39	10. 401 2775	21
40	9. 567 2689	52. 98	9. 968 1781	8. 37	9. 599 0908	61. 35	10. 400 9092	20
41	9. 567 5868	52. 94	9. 968 1279	8. 38	9. 599 4588	61. 31	10. 400 5412	19
42	9. 567 9044	52. 89	9. 968 0777	8. 38	9. 599 8267	61. 27	10. 400 1733	18
43	9. 568 2217	52. 85	9. 968 0274	8. 39	9. 600 1943	61. 23	10. 399 8057	17
44	9. 568 5387	52. 80	9. 967 9771	8. 40	9. 600 5617	61. 20	10. 399 4383	16
45	9. 568 8555	52. 76	9. 967 9267	8. 40	9. 600 9289	61. 16	10. 399 0711	15
46	9. 569 1721	52. 71	9. 967 8763	8. 41	9. 601 2958	61. 12	10. 398 7042	14
47	9. 569 4883	52. 67	9. 967 8258	8. 42	9. 601 6625	61. 08	10. 398 3375	13
48	9. 569 8043		9. 967 7753		9. 602 0290		10. 397 9710	12
′	Log. Cofin.	Diff. 1″	Log. Sinus	D. 1″	Log. Cot.	C. D. 1″	Log. Tang.	M.

68

Página de uma tábua de logaritmos.

Logo depois do aparecimento da primeira tábua de logaritmos de Napier, o matemático inglês Henry Briggs (1561-1631), professor da Universidade de Londres, e depois de Oxford, elaborou juntamente com Napier uma nova tábua, de mais fácil utilização, contendo os chamados logaritmos decimais, ou logaritmos ordinários, que tiram proveito do fato de usarmos um sistema de numeração decimal.

Durante os quase 4 séculos que sucederam à descoberta dos logaritmos, sua utilidade revelou-se decisiva na ciência e na tecnologia. Já Kepler, por volta de 1620, atestava seu reconhecimento pela nova descoberta que, segundo ele, "aumentava vastamente o poder computacional do astrônomo". O próprio Napier, um tanto imodestamente, reconhecendo o valor de sua descoberta, deu às tábuas o título de *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, que significa Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos.

Recentemente, com a utilização cada vez mais divulgada das calculadoras, as tábuas de logaritmos perderam muito do seu interesse como instrumento de cálculo, o mesmo acontecendo com outras tabelas matemáticas. Mas o estudo dos logaritmos ainda é e continuará a ser de central importância. Com efeito, embora eles tenham sido inventados como acessório para facilitar operações aritméticas, o desenvolvimento da matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversas leis matemáticas e vários fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos são estreitamente relacionados com os logaritmos. Assim sendo, os logaritmos, que no princípio eram importantes apenas por causa das tábuas, mostraram ter apreciável valor intrínseco.

LIMA, E. L. *Logaritmos*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1996. p. 1-3. (Coleção do Professor de Matemática).

Responda:

1. Resposta no Manual do Professor.
2. Ciência, tecnologia e Astronomia.
3. Elaboração da tábua de logaritmos decimais.

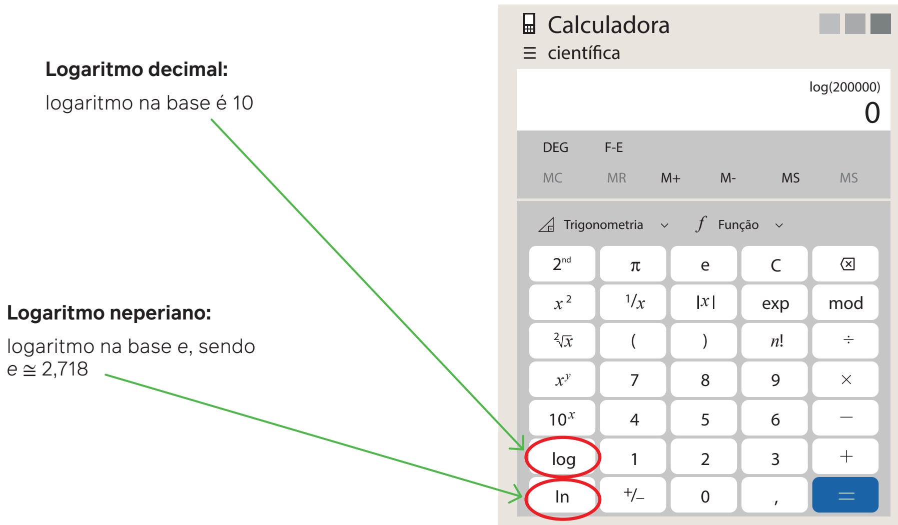
1. Identifique no texto as três propriedades operatórias de logaritmos.

2. Após quase quatro séculos da descoberta dos logaritmos, em que áreas do conhecimento foi decisiva sua utilização?

3. Indique, conforme o texto, a colaboração de Henry Briggs juntamente com John Napier para as definições de logaritmos.

Mudança de base

Ao examinar com um pouco mais de atenção uma calculadora científica, você perceberá que existem duas "funções" da calculadora que estão relacionadas com os logaritmos, conforme destacado na ilustração a seguir. Uma delas refere-se ao **logaritmo decimal**, enquanto a outra é o **logaritmo natural** ou **logaritmo neperiano** (nome que se refere a John Napier).



Reinaldo Vignati

Já estudamos a base decimal neste capítulo. O número e, correspondente à base dos logaritmos neperianos, é um número irracional que pode ser obtido a partir da função $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, fazendo x tender ao infinito. Assim como o logaritmo decimal, o logaritmo neperiano também é utilizado em diversas áreas de conhecimento.

Mesmo conhecendo esses dois logaritmos, que podem ser obtidos na calculadora, existem situações em que a base do logaritmo não é nenhuma delas.

Vamos considerar, por exemplo, uma situação em que precisamos calcular o logaritmo:

$$\log_5 36 = ?$$

Observe a seguir como determinar esse logaritmo com o auxílio de uma calculadora.

Representando o resultado pela letra x e utilizando a definição de logaritmos, temos:

$$\log_5 36 = x$$
$$5^x = 36$$

Como não é possível igualar as bases, vamos aplicar logaritmo nos dois membros da equação. Considerando que é possível utilizar a calculadora para obter logaritmos na base 10 e na base neperiana, temos duas possibilidades:

Base 10:

$$5^x = 36 \Rightarrow \log_{10} 5^x = \log_{10} 36$$
$$x \cdot \log_{10} 5 = \log_{10} 36$$
$$x = \frac{\log_{10} 36}{\log_{10} 5} \longrightarrow \text{calculadora}$$

Base e:

$$5^x = 36 \Rightarrow \log_e 5^x = \log_e 36$$
$$x \cdot \log_e 5 = \log_e 36$$
$$x = \frac{\log_e 36}{\log_e 5} = \frac{\text{Ln } 36}{\text{Ln } 5} \longrightarrow \text{calculadora}$$

O logaritmo neperiano de um número positivo x pode ser representado por: $\ell n(x)$, $Ln(x)$ ou ainda por $\log_e(x)$.

Assim, podemos usar uma calculadora para obter o valor de x nas duas expressões.

Para pensar e discutir

1. Qual o valor de x nas duas expressões acima? 1. Aproximadamente 2,2266
2. Como podemos representar $\log_5 36$ na base 10? 2. $\log_5 36 = \frac{\log_{10} 36}{\log_{10} 5}$
3. Como podemos representar $\log_5 36$ na base e? 3. $\log_5 36 = \frac{\log_e 36}{\log_e 5}$

O procedimento utilizado para o cálculo do logaritmo de 36 na base 5, na situação anterior, é o mesmo que nos conduz a uma propriedade sobre mudança de base de logaritmo.

Considerando N, a e b números reais positivos, com $a \neq 1$ e $b \neq 1$, é válida a relação

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Demonstração:

Representamos o primeiro membro da igualdade por x e aplicamos o conceito de logaritmo:

$$\log_b N = x$$
$$b^x = N$$

Nessa última igualdade, aplicamos logaritmo membro a membro, na base a:

$$\log_a b^x = \log_a N$$
$$x \cdot \log_a b = \log_a N$$
$$x = \frac{\log_a N}{\log_a b} \Rightarrow \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Exemplos:

- $\log_2 7 = \dfrac{\log_3 7}{\log_3 2}$ → mudança para a base 3
- $\log_{10} 2 = \dfrac{\log_e 2}{\log_e 10}$ → mudança para a base e
- $\log_{15} 9 = \dfrac{\log_9 9}{\log_9 15} = \dfrac{1}{\log_9 15}$ → mudança para a base 9

Atividades resolvidas

33. A partir da propriedade de mudança de base, mostre que $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, para a e b positivos e diferentes de 1.

- Efetuando a mudança para a base b do logaritmo que está na base a, temos:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a}$$
$$\Big\downarrow \log_b b = 1$$
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

34. Considere que $\log_3 2 = k$. Determine, em função de k, o valor de $\log_{81} 16$.

- Como a base do logaritmo dado é 3, fazemos a mudança da base do logaritmo que queremos calcular para a mesma base:

$$\log_{81} 16 = \frac{\log_3 16}{\log_3 81}$$

- Os números 16 e 81 podem ser representados na forma fatorada como potências de 2 e 3, respectivamente:

$$\log_{81} 16 = \frac{\log_3 2^4}{\log_3 3^4} = \frac{4 \cdot \log_3 2}{4 \cdot \log_3 3} = \frac{4 \cdot k}{4 \cdot 1} \Rightarrow \log_{81} 16 = k$$

35. Calcule o produto P indicado por $P = (\log_3 4) \cdot (\log_4 5) \cdot (\log_5 6) \cdot (\log_6 3)$.

- Como esses logaritmos estão em bases diferentes, escolhemos uma dessas bases e fazemos a mudança de todos para a mesma base. Neste exemplo, para a base 3:

$$P = (\log_3 4) \cdot (\log_4 5) \cdot (\log_5 6) \cdot (\log_6 3)$$
$$P = (\log_3 4) \cdot \left(\frac{\log_3 5}{\log_3 4}\right) \cdot \left(\frac{\log_3 6}{\log_3 5}\right) \cdot \left(\frac{\log_3 3}{\log_3 6}\right)$$
$$\Big\downarrow \text{simplificando}$$
$$P = 1$$

Para pensar e discutir

1. Qual é a relação entre $\log_{10}7$ e $\log_{7}10$? Justifique. 1. Eles têm valores inversos; resposta pessoal.

2. E a relação entre $\log_{3}2$ e $\log_{3^{400}}2^{400}$? Justifique. 2. Eles são iguais; resposta pessoal.

Atividades

78. Utilizando uma calculadora científica, calcule cada um dos logaritmos abaixo com 3 casas decimais:

a) $\log_{7}10$ 78. a) 1,183

b) $\log_{12}5$ 78. b) 0,648

c) $\log_{20}100$ 78. c) 1,537

d) $\log_{5}3$ 78. d) 0,683

79. Considerando $\log_{10} 2 \cong 0{,}30$ e $\log_{10} 3 \cong 0{,}48$, calcule os seguintes logaritmos sem a utilização da calculadora.

a) $\log_{3}2$ 79. a) Aproximadamente 0,625

b) $\log_{2}10$ 79. b) Aproximadamente 3,33

c) $\log_{200}2$ 79. c) Aproximadamente 0,13

d) $\log_{9}8$ 79. d) Aproximadamente 0,9375

80. Qual é o valor de x tal que $x = (\log_{3}2) \cdot (\log_{4}9) \cdot (\log_{8}27) \cdot (\log_{81}16)$? 80. 1

81. (CFTMG) Se $\log_{3}a = x$, então $\log_{9}a^2$ vale 81. Alternativa **b**.

a) $\frac{x}{2}$

b) x

c) $2x$

d) $3x$

82. (Fuvest-SP) Se $x = \log_{4}7$ e $y = \log_{16}49$, então $x - y$ é igual a: 82. Alternativa **e**.

a) $\log_{4}7$

b) $\log 7$

c) 1

d) 2

e) 0

83. (IME-RJ) Se $\log_{10}2 = x$ e $\log_{10}3 = y$, então $\log_{5}18$ vale: 83. Alternativa **a**.

a) $\dfrac{x + 2y}{1 - x}$

b) $\dfrac{x + y}{1 - x}$

c) $\dfrac{2x + y}{1 + x}$

d) $\dfrac{x + 2y}{1 + x}$

e) $\dfrac{3x + 2y}{1 - x}$

Para explorar

Junte-se a um colega e realizem as atividades a seguir com o auxílio de uma calculadora.

1. Explorem as funções das seguintes teclas: 1. Resposta pessoal.

10^x | $\log x$ | e^x | $\ln x$

Acervo editora

2. Atribuam cinco valores reais e positivos para x, sigam os seguintes passos e anotem os resultados obtidos.

- Digitem o valor de $\boldsymbol{x}$;
- Apertem a tecla $\mathbf{10^{x}}$;
- Apertem a tecla **log** $\boldsymbol{x}$

Respondam:

Para cada valor atribuído a x, qual é o valor resultante após apertar a tecla **log** $\boldsymbol{x}$? 2. O valor inicial de x.

3. Agora atribuam cinco valores reais e positivos para x e sigam os seguintes passos, anotando os resultados obtidos.

- Digitem o valor de $\boldsymbol{x}$;
- Apertem a tecla $\mathbf{e^{x}}$;
- Apertem a tecla **ln** $\boldsymbol{x}$.

Respondam:

Para cada valor atribuído a x, qual é o valor resultante após apertar a tecla **ln** $\boldsymbol{x}$? 3. O valor inicial de x.

4. Escrevam uma conclusão sobre o que vocês observaram nas **atividades 2** e **3**. 4. Resposta pessoal.

4 A função logarítmica

Nas atividades do boxe **Para explorar**, na página anterior, você atribuiu alguns valores reais positivos e, com o auxílio de uma calculadora, obteve valores para potências de 10 e dos logaritmos decimais dos resultados obtidos. Da mesma maneira, atribuiu valores para potências de base neperiana e logaritmos neperianos desses resultados.

Observe os exemplos a seguir, considerando a base 10 e valores aproximados:

- $x = 2{,}3 \rightarrow 10^{2{,}3} \rightarrow 199{,}526... \rightarrow \log 199{,}523... \rightarrow 2{,}3 = x$
- $x = 4{,}5 \rightarrow 10^{4{,}5} \rightarrow 31622{,}776... \rightarrow \log 31622{,}776... \rightarrow 4{,}5 = x$

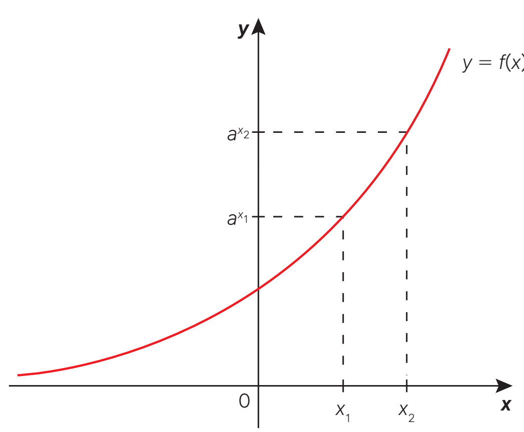
Considerando agora a base neperiana para os mesmos valores, temos:

- $x = 2{,}3 \rightarrow e^{2{,}3} \rightarrow 9{,}9741... \rightarrow \ln 9{,}9741... \rightarrow 2{,}3 = x$
- $x = 4{,}5 \rightarrow e^{4{,}5} \rightarrow 90{,}017... \rightarrow \ln 90{,}017... \rightarrow 4{,}5 = x$

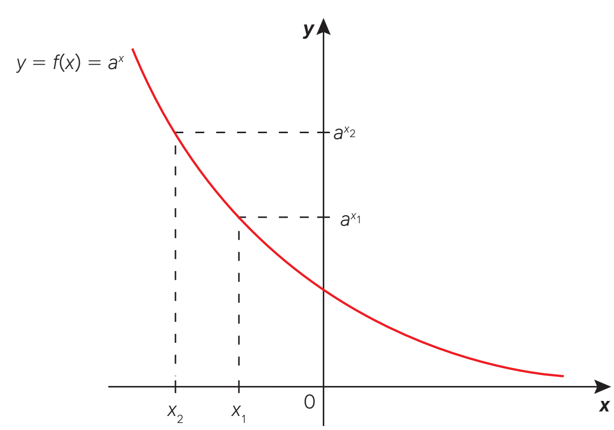
Para pensar e discutir

1. Calculando-se "10 elevado a um número real", e calculando do número obtido "o seu logaritmo na base 10", o que ocorre? 1. Obtém-se o mesmo número real.
2. Calculando-se "e elevado a um número real", e calculando do número obtido "o seu logaritmo na base e", o que ocorre? 2. Obtém-se o mesmo número real.
3. Essas conclusões são válidas apenas para as bases 10 e neperiana? Explique com exemplos. 3. Resposta pessoal.

Retomando o estudo do comportamento gráfico de uma função exponencial, dada uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:



$a > 1 \rightarrow$ a função é crescente



$0 < a < 1 \rightarrow$ a função é decrescente

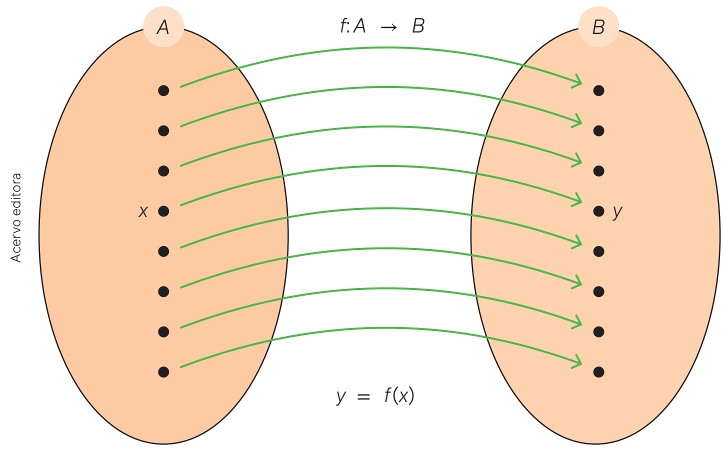
TDPStudio

Observações:

1. Na função exponencial, definida por elementos distintos quaisquer do domínio, ambos têm imagens distintas.
2. A escolha do contradomínio da função exponencial como $\mathbb{R}_+^*$, isto é, coincidindo com o conjunto imagem, garante que qualquer elemento $\mathbb{R}_+^*$ do contradomínio é imagem de algum valor de x no domínio da função.

Conceito e gráfico de uma função logarítmica

No diagrama a seguir, temos a representação de uma função $f: A \rightarrow B$ e as características estudadas anteriormente.



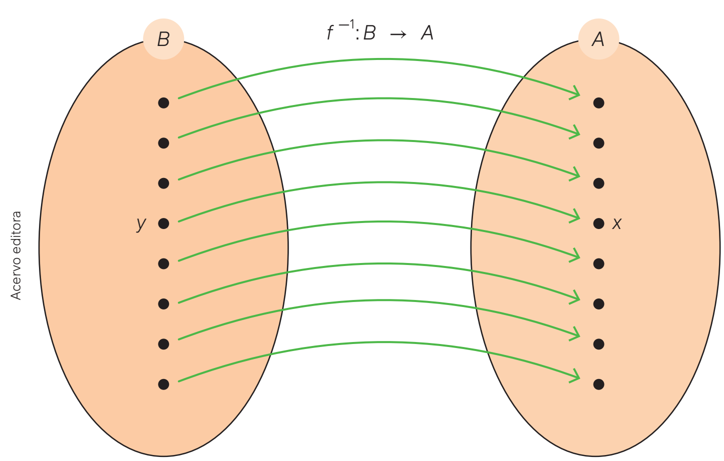
- Elementos distintos do domínio da função têm imagens distintas: **função injetora**.
- Todo elemento do contradomínio é imagem de algum valor de x do domínio: **função sobrejetora**.

> Uma função que é simultaneamente injetora e sobrejetora é denominada **função bijetora**.

Exemplo:

A função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é uma função bijetora.

Se uma função f é bijetora ela admite **função inversa**, que representamos por f^{-1}. Como o próprio nome diz, os papéis se invertem: o conjunto domínio passa a ser conjunto imagem e o conjunto imagem passa a ser conjunto domínio.



Em linguagem simplificada, dizemos que a função inversa "faz o caminho inverso" da função dada. Como vimos anteriormente, exponencial e logaritmo estão relacionados dessa maneira sendo a função exponencial bijetora. Assim, podemos definir a função logarítmica como função inversa de uma função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, ou seja:

> A **função inversa da função exponencial** de base real a, $a > 0$ e $a \neq 1$, é a **função logarítmica** $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$, isto é, a função que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$.

Exemplos:

- $f(x) = \log_2 x$
- $f(x) = \log_{10} x$
- $f(x) = \log_{0,5} x$

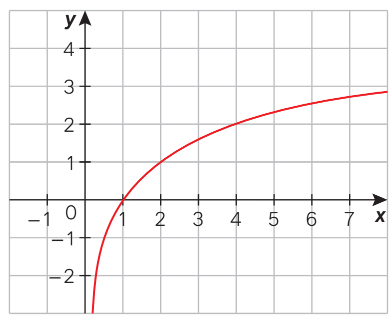
Gráfico de uma função logarítmica

O comportamento gráfico de uma função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, pode ser observado atribuindo-se valores à variável independente x e obtendo-se valores para a variável dependente y.

Exemplos:

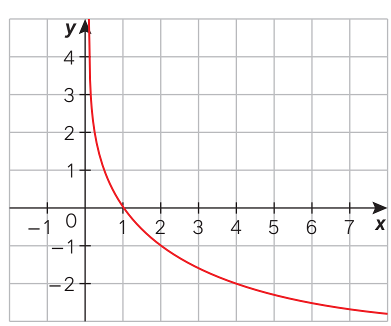
- Esboço do gráfico da função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_2 x$:

x	$y = f(x) = \log_2 x$	(x, y)
$\frac{1}{4}$	-2	$\left(\frac{1}{4}, -2\right)$
$\frac{1}{2}$	-1	$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
1	0	(1, 0)
2	1	(2, 1)
4	2	(4, 2)



- Esboço do gráfico da função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$:

x	$y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	(x, y)
$\frac{1}{4}$	2	$\left(\frac{1}{4}, 2\right)$
$\frac{1}{2}$	1	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
1	0	(1, 0)
2	-1	(2, -1)
4	-2	(4, -2)



Para pensar e discutir

1. Observando os dois gráficos, responda: Qual é o conjunto imagem de cada função? 1. $\mathbb{R}$ em ambas.
2. Graficamente, à medida que x aumenta, o que acontece com y em cada função?
2. Na primeira, y aumenta, e, na segunda, y diminui.
3. Considerando que $y = \log_2 x$, como podemos obter x em função de y? Explique. 3. $x = 2^y$; resposta pessoal.
4. Considerando que $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, como podemos obter x em função de y? Explique. 4. $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$; resposta pessoal.

Os dois exemplos anteriores possibilitam notar algumas informações sobre o comportamento gráfico das funções logarítmicas. Vamos agora observar outras características dos gráficos dessas funções logarítmicas usando mais exemplos. Para isso, realize as atividades a seguir.

Para explorar

Junte-se a três colegas e realizem estas atividades utilizando um *software* de geometria dinâmica.

1. Construam em planos cartesianos separados os gráficos das quatro funções logarítmicas a seguir, com domínio $\mathbb{R}_+^*$ e contradomínio $\mathbb{R}$ em que a base é maior que 1:

a) $f(x) = \log_3 x$ 1. a) Resposta no Manual do Professor.

b) $g(x) = \log_4 x$ 1. b) Resposta no Manual do Professor.

c) $h(x) = \log_{10} x$ 1. c) Resposta no Manual do Professor.

d) $m(x) = \log_{1,5} x$ 1. d) Resposta no Manual do Professor.

2. Para cada função acima, respondam:

a) Aumentando-se o valor de *x*, o que ocorre com o valor de *y*? O que vocês podem concluir?
2. a) O *y* aumenta; são funções crescentes.

b) Valores diferentes de *x* têm sempre valores diferentes de *y* em correspondência? 2. b) Sim.

c) Qual é o conjunto imagem dessas funções? 2. c) $\mathbb{R}$.

3. Como na **atividade 1**, construam separadamente os gráficos das quatro funções logarítmicas dadas, com domínio $\mathbb{R}_+^*$ e contradomínio $\mathbb{R}$, em que a base está entre 0 e 1.

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ 3. a) Resposta no Manual do Professor.

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ 3. b) Resposta no Manual do Professor.

c) $h(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$ 3. c) Resposta no Manual do Professor.

d) $m(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ 3. d) Resposta no Manual do Professor.

4. Para cada função acima, respondam:

a) Aumentando-se o valor de *x*, o que ocorre com o valor de *y*? O que vocês podem concluir?
4. a) O *y* diminui. São funções decrescentes.

b) Valores diferentes de *x* têm sempre valores diferentes de *y* em correspondência? 4. b) Sim.

c) Qual é o conjunto imagem dessas funções? 4. c) $\mathbb{R}$.

5. Observem os gráficos construídos e escrevam uma conclusão a respeito do comportamento gráfico de uma função logarítmica da forma $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, em que sua base seja $a > 1$ e $0 < a < 1$.
5. Resposta pessoal.

Características do gráfico de uma função logarítmica

É possível construir o gráfico ou um esboço gráfico de uma função logarítmica utilizando papel quadriculado ou ainda *softwares* de geometria dinâmica. Neles, pode-se constatar algumas características para uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

- A função logarítmica pode ser crescente ou decrescente:

  Se $a > 1$, a função é crescente, isto é: $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

  Se $0 < a < 1$, a função é decrescente, isto é: $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

- O gráfico intercepta o eixo das abscissas no ponto (1, 0).

  Se $x = 1$, temos $f(1) = \log_a 1 = 0$.

- Como o domínio da função é $\mathbb{R}_+^*$, o gráfico de uma função logarítmica não intercepta o eixo das ordenadas.
- A função logarítmica é injetora, pois elementos diferentes do domínio da função têm imagens diferentes, isto é:

  $$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

  Em outras palavras, imagens iguais só ocorrem para valores de *x* iguais:

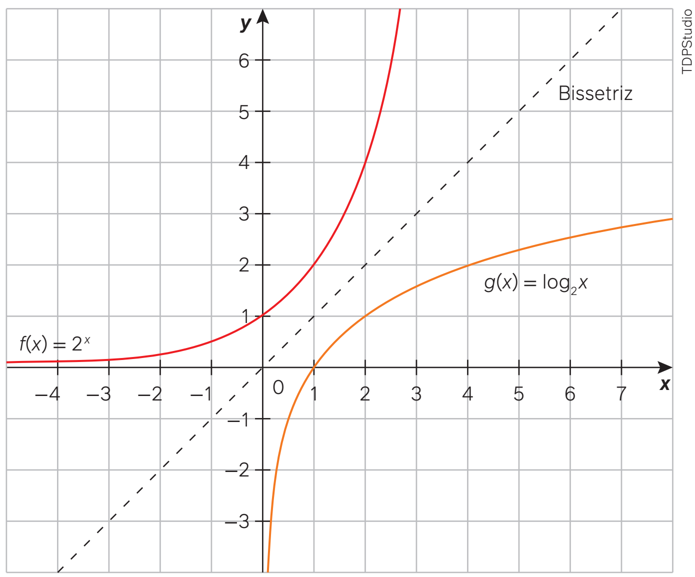
  $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- A função logarítmica também é sobrejetora, pois seu conjunto imagem é igual ao contradomínio, isto é, $Im(f) = CD(f) = \mathbb{R}$. Isso significa que para qualquer número real *k* sempre existe um único valor de *x* tal que $\log_a x = k$.

- Por ser injetora e sobrejetora, a função logarítmica é bijetora e, portanto, admite inversa.
- A função logarítmica é inversa da função exponencial na mesma base e, reciprocamente, a função exponencial é inversa da função logarítmica na mesma base.
- Se em um mesmo plano cartesiano construirmos os gráficos de uma função exponencial e de uma função logarítmica, ambas na mesma base, as curvas serão simétricas em relação à reta bissetriz dos quadrantes ímpares.

  Exemplo:

No plano cartesiano a seguir estão representados os gráficos de f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ e g: $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$.



Para pensar e discutir

1. Sem construir o gráfico da função f: $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_7 x$, como você classifica essa função quanto ao crescimento? 1. Crescente.
2. Na função $f(x) = \log_7 x$, se $f(x) = 2$, qual é o valor de x em correspondência? Ele é único? 2. 49; sim.
3. Sem construir o gráfico da função f: $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_{0,1} x$, como você classifica essa função quanto ao crescimento? 3. Decrescente.
4. Na função $f(x) = \log_{0,1} x$, qual é o valor de x tal que $f(x) = 2$? 4. $\frac{1}{100}$
5. As funções definidas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$, representadas no gráfico acima, são ambas crescentes. Quanto "à velocidade" do crescimento, o que você pode concluir? 5. Resposta pessoal.

O fato de a função logarítmica ser a inversa da função exponencial na mesma base, além das características mencionadas anteriormente, também permite abordar equações e inequações logarítmicas que são resolvidas de forma análoga aos procedimentos utilizados para a resolução de equações e inequações exponenciais, porém considerando a restrição do logaritmando ser um número real positivo.

Resolução de equações e inequações logarítmicas

Uma equação que apresente a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo de base real positiva e diferente de 1 é denominada **equação logarítmica**. Para resolvê-la, reduzimos cada um dos membros da igualdade a um só logaritmo. Em seguida, aplicamos a consequência da definição de logaritmos:

$$\log_a B = \log_a C \Leftrightarrow B = C$$

Para isso, é importante considerar as condições de existência de todos os logaritmos envolvidos, isto é, $B > 0$, $C > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

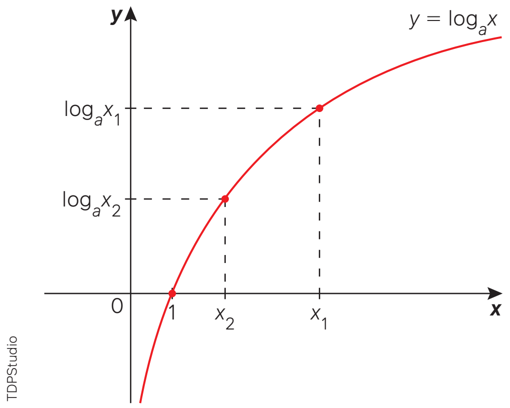
E as inequações logarítmicas?

Assim como na equação, uma inequação que apresente a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo de base real positiva e diferente de 1 é denominada **inequação logarítmica**. Após reduzir os membros da desigualdade a um só logaritmo, o procedimento é análogo ao da resolução de inequação exponencial, conforme os dois casos a seguir.

Caso 1: $a > 1 \rightarrow$função crescente

$$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

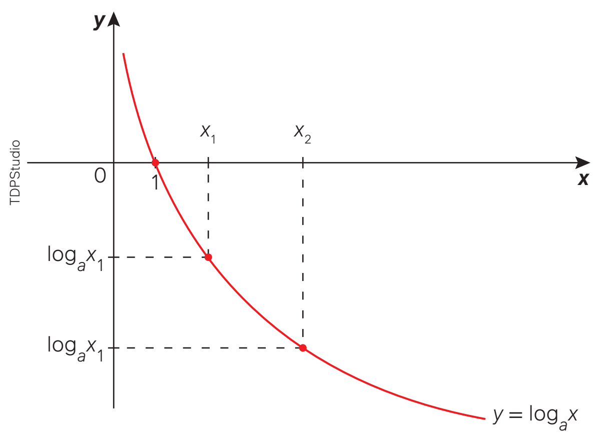
(mantém-se o sentido da desigualdade)



Caso 2: $0 < a < 1 \rightarrow$ função decrescente

$$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

(inverte-se o sentido da desigualdade)



Importante:
Nos dois casos, as condições de existência devem ser verificadas: $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Atividades resolvidas

36. Considere a função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_5 x$. Determine o valor S da expressão:

$$S = f(1) + f(5) + f(25) + f(125) + f(625).$$

- Substituindo na função, temos:

$$S = f(1) + f(5) + f(25) + f(125) + f(625)$$
$$S = \log_5 1 + \log_5 5 + \log_5 25 + \log_5 125 + \log_5 625$$
$$S = \log_5 5^0 + \log_5 5^1 + \log_5 5^2 + \log_5 5^3 + \log_5 5^4$$
$$S = 0 + 1 + 2 + 3 + 4$$
$$S = 10$$

37. As funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ e $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$, respectivamente, são inversas entre si. Obtenha o resultado de $f(g(x))$ e $g(f(x))$, isto é, a função f composta com a função g e a função g composta com a função f.

- A composição de duas funções é uma "operação" em que uma função assume o papel de x em outra função. Assim, vamos obter $f(g(x))$:

$$f(x) = 2^x$$
$$f(g(x)) = 2^{g(x)}$$
$$f(g(x)) = 2^{\log_2 x} \Rightarrow f(g(x)) = x$$

- Agora, vamos determinar $g(f(x))$:

$$g(x) = \log_2 x$$
$$g(f(x)) = \log_2 f(x)$$
$$g(f(x)) = \log_2 2^x \Rightarrow g(f(x)) = x$$

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal.

1. Como você calcularia $f(g(4))$, em que $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$, sem utilizar o resultado obtido nessa atividade?

2. E como você calcularia $g(f(5))$, em que $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$, sem utilizar o resultado obtido nessa atividade?

2. Resposta pessoal.

38. (Unesp) A expectativa de vida em anos, em uma região, de uma pessoa que nasceu a partir de 1900 no ano x ($x \geq 1\,900$) é dada por $L(x) = 12 \cdot (199 \cdot \log_{10} x - 651)$. Considerando $\log 2 = 0{,}3$, uma pessoa dessa região que nasceu no ano 2000 tem expectativa de viver:

a) 48,7 anos

b) 54,6 anos

c) 65,5 anos

d) 68,4 anos

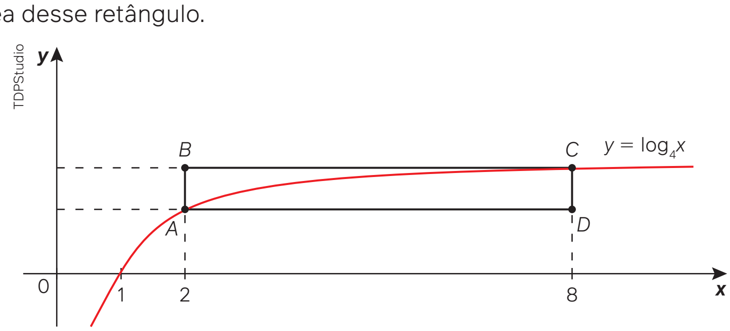
e) 72,3 anos

- Temos que $x = 2\,000$. Assim, substituindo na função e utilizando o conceito e propriedades de logaritmos, vem:

$$L(2\,000) = 12 \cdot (199 \cdot \log_{10} 2\,000 - 651)$$
$$L(2\,000) = 12 \cdot [199 \cdot \log_{10}(2 \cdot 10^3) - 651]$$
$$L(2\,000) = 12 \cdot [199 \cdot (\log_{10} 2 + \log_{10} 10^3) - 651]$$
$$L(2\,000) = 12 \cdot [199 \cdot (0{,}3 + 3) - 651]$$
$$L(2\,000) = 12 \cdot (656{,}7 - 651)$$
$$L(2\,000) = 12 \cdot 5{,}7 \Rightarrow L(2\,000) = 68{,}4$$

Portanto, a expectativa de vida é de 68,4 anos.

39. No plano cartesiano a seguir, está representado o gráfico da função definida por $f(x) = \log_4 x$ e um retângulo $ABCD$. Calcule a área desse retângulo.



- Inicialmente vamos determinar as ordenadas dos vértices A e C, pontos que pertencem ao gráfico da função.

Ponto A:

$$y = f(2)$$
$$y = \log_4 2$$
$$4^y = 2$$
$$2^{2y} = 2^1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Ponto C:

$$y = f(8)$$
$$y = \log_4 8$$
$$4^y = 8$$
$$2^{2y} = 2^3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

- Para calcular a área do retângulo, observe que os pontos B e D têm as mesmas ordenadas dos pontos A e C, respectivamente. Portanto, temos:

$$A = (AD) \cdot (AB)$$
$$A = (8 - 2) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)$$
$$A = 6 \Rightarrow A = 6 \text{ u.a.}$$

40. Determine a soma das soluções da equação logarítmica.

$$(\log_3 x)^2 - 5 \cdot \log_3 x + 6 = 0$$

- Substituindo $\log_3 x$ pela letra m, temos:

$$(\log_3 x)^2 - 5 \cdot \log_3 x + 6 = 0$$
$$\Big\downarrow \log_3 x = m \text{ (I)}$$
$$m^2 - 5m + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$$

- Retornando à substituição em (I), e conforme definição de logaritmos, determinamos os valores de x, considerando que $x > 0$:

$$\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9$$
ou
$$\log_3 x = 3 \Rightarrow x = 27$$

Portanto, a soma das soluções é 36.

Para pensar e discutir

1. Quais valores de x verificam a inequação $\log_2 x > \log_2 5$? 1. $x > 5$
2. Se $\log_{0,2} x > \log_{0,2} 5$, o que se pode concluir sobre os valores de x? 2. $0 < x \leq 5$

Atividades

84. Classifique cada função a seguir quanto ao crescimento:

a) $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_5 x$ 84. a) Crescente.

b) $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_{1,5} x$ 84. b) Crescente.

c) $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_{0,3} x$ 84. c) Decrescente.

d) $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$ 84. d) Decrescente.

85. Faça o que se pede a seguir.

a) Crie a lei de formação para uma função exponencial crescente e determine a lei de formação de sua inversa. 85. a) Resposta pessoal.

b) Crie a lei de formação para uma função logarítmica decrescente e determine a lei de formação de sua inversa. 85. b) Resposta pessoal.

86. Considerando a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_3 x$, faça o que se pede a seguir:

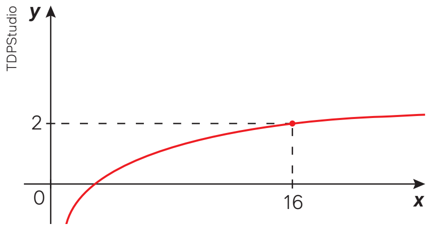
a) Calcule $f(1) + f(3) + f(9) + f(27)$. 86. a) 6

b) Determine x tal que $f(x) = 4$. 86. b) 81

c) Para M e N pertencentes ao domínio da função, é correto afirmar que $f(M \cdot N) = f(M) + f(N)$? Justifique. 86. c) Sim; resposta pessoal.

d) Para M e N pertencentes ao domínio da função, é correto afirmar que $f\left(\frac{M}{N}\right) = f(M) - f(N)$? Justifique. 86. d) Sim; resposta pessoal.

87. Considere o esboço do gráfico abaixo da função definida por $f(x) = \log_n x$.



a) Determine o valor de n. 87. a) 4

b) Calcule o valor de $f(128)$. 87. b) $\frac{7}{2}$

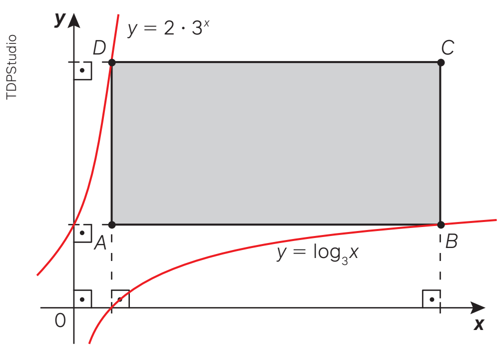
88. Resolva cada equação logarítmica a seguir:

a) $\log_3[\log_8(\log_{10} x)] = -1$ 88. a) 100

b) $(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 12 = 0$ 88. b) 8 ou $\frac{1}{16}$

c) $\frac{1}{\log_9 x} + \frac{1}{\log_{24} x} = 3$ 88. c) 6

89. Considere o plano cartesiano com os esboços dos gráficos de duas funções e o retângulo *ABCD*, em que o vértice *D* pertence a um dos gráficos, e o vértice *B*, ao outro gráfico.



a) Determine as coordenadas dos vértices do retângulo *ABCD*. 89. a) *A*(1, 2), *B*(9, 2), *C*(9, 6), *D*(1, 6)

b) Calcule o perímetro e a área desse retângulo. 89. b) 24 u.c.; 32 u.a.

90. (Unicamp-SP) Se $f(x) = \log_{10} x$ e $x > 0$, então $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(100x)$ é igual a 90. Alternativa **b**.

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4

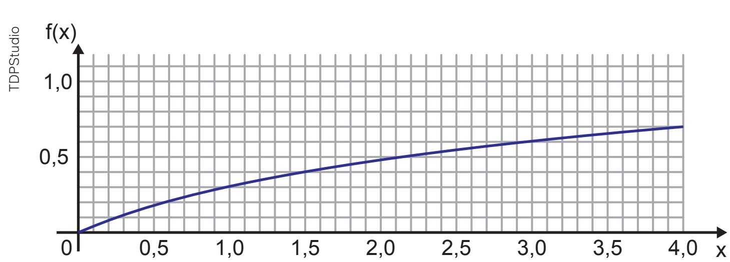
91. (FCM-MG) Um estudante acompanha duas reações químicas *A* e *B* que evoluem ao longo de *t* segundos, com velocidade $V_A(t)$ e $V_B(t)$, dadas por

$$V_A(t) = \log_2(t + 4) \text{ e } V_B(t) = \log_4(t^2 + 3t + 31).$$

Segundo orientações recebidas, determinado catalisador deve ser inserido no processo quando as velocidades das reações se igualarem. Iniciado o processo, essa ação será efetivada em: 91. Alternativa **b**.

a) 1 s **b)** 3 s **c)** 4 s **d)** 7 s

92. (FCMSC-SP) Observe o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log(x + 1)$ para valores reais de x tais que $0 \leq x \leq 4$.



Consultando o gráfico, o valor de log 13 − log 4 é, aproximadamente,

a) 0,5 **b)** 0,3 **c)** 0,4 **d)** 0,6 **e)** 0,2

92. Alternativa **a**.

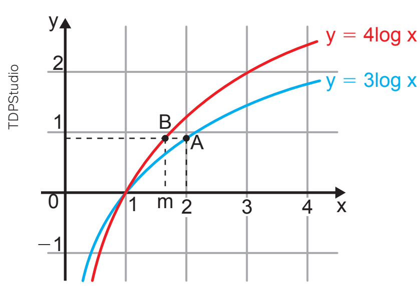
93. (UFPR) Um tanque contém uma solução de água e sal cuja concentração está diminuindo devido à adição de mais água. Suponha que a concentração $Q(t)$ de sal no tanque, em gramas por litro (g/L), decorridas t horas após o início da diluição, seja dada por

$$Q(t) = 100 \cdot 5^{-0,3t}$$

Assinale a alternativa que mais se aproxima do tempo necessário para que a concentração de sal diminua 50 g/L. 93. Alternativa **d**.
(Use log 5 = 0,7)

a) 4 horas e 45 minutos.
b) 3 horas e 30 minutos.
c) 2 horas e 20 minutos.
d) 1 hora e 25 minutos.
e) 20 minutos.

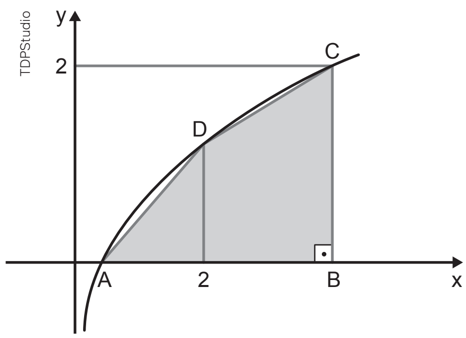
94. (Famerp-SP) A figura indica os gráficos das funções f e g, definidas de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, cujas leis são, respectivamente, $f(x) = 4 \cdot \log x$ e $g(x) = 3 \cdot \log x$.



O valor de m, indicado na figura, é igual a
94. Alternativa **b**.

a) log 12
b) $2^{0,75}$
c) log 7
d) $2^{0,25}$
e) $2^{1,25}$

95. (UFJF-MG) Na figura a seguir, encontram-se representados o gráfico da função f: $]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_2 x$, e o polígono $ABCD$. Os pontos A, C e D estão sobre o gráfico de f. Os pontos A e B estão sobre o eixo das abscissas. O ponto C tem ordenada 2, o ponto D tem abscissa 2 e BC é perpendicular ao eixo das abscissas.



Sabendo que os eixos estão graduados em centímetros, a área do polígono $ABCD$ é:

a) 2,5 cm². 95. Alternativa **c**.
b) 3 cm².
c) 3,5 cm².
d) 4 cm².
e) 4,5 cm².

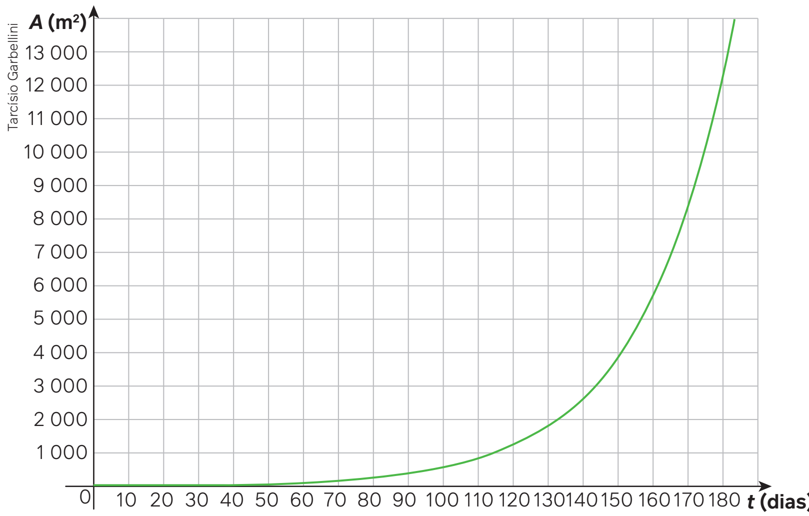
O uso de logaritmos na resolução de problemas

Existem locais em que é possível observar o crescimento acentuado de algas, algumas vezes cobrindo grande parte da superfície das águas em determinados locais, como se pode ver na imagem abaixo.

Adriano Kirihara/Pulsar Imagens

O crescimento acentuado de algas em lagos e regiões marítimas pode acarretar um processo de eutrofização e sufocamento da vida aquática. Rio Tietê em Barbosa (SP), 2019.

Para exemplificar, vamos considerar que a área coberta por uma população de algas começa ocupando 12 m^2 e essa superfície é duplicada a cada 18 dias. Podemos dizer que a área ocupada pelas algas varia em função do tempo e pode ser representada por $A(t) = 12 \cdot 2^{\frac{t}{18}}$. Ao representarmos essa situação no plano cartesiano, temos o seguinte esboço:



Para pensar e discutir

1. Na lei de formação da função, explique por que o expoente t aparece dividido por 18.
2. Como você descreve o crescimento da área ocupada pelas algas em função do tempo?
3. Com a ajuda do professor ou da professora da área de Ciências da Natureza, respondam: Por que ocorre o crescimento acentuado de algas? Esse crescimento é somente parte de um fenômeno natural? Como vocês observam essa situação na região onde vivem? Caso não aconteça em sua região, que impactos o crescimento acentuado de algas em outras localidades do território brasileiro pode gerar globalmente, impactando a sua realidade local?

1. Resposta pessoal. 2. Resposta pessoal. 3. Resposta pessoal.

Como a função tem o crescimento muito acentuado a partir de determinado ponto, ao observamos pequenos trechos do domínio da função temos apenas parte do crescimento da mesma função, o que dificulta compreender o todo. Se, ao contrário, observamos um trecho maior do domínio, perdemos os detalhes do comportamento gráfico. Uma solução é a utilização da escala logarítmica.

A **escala logarítmica** é uma escala não linear, geralmente utilizada para analisar quantidades ou grandezas que variam em um intervalo muito grande.

Retornando ao exemplo, primeiro efetuamos a mudança para o logaritmo na base 10. Assim, teremos no eixo vertical uma escala logarítmica:

Crescimento exponencial

$$A(t) = 12 \cdot 2^{\frac{t}{18}}$$

$$\downarrow \log_{10}$$

$$\log_{10} A(t) = \log_{10}\left(12 \cdot 2^{\frac{t}{18}}\right)$$

$$\downarrow y = \log_{10} A(t)$$

Escala logarítmica

$$y = \log_{10}\left(12 \cdot 2^{\frac{t}{18}}\right)$$

$$y = \log_{10} 12 + \log_{10} 2^{\frac{t}{18}}$$

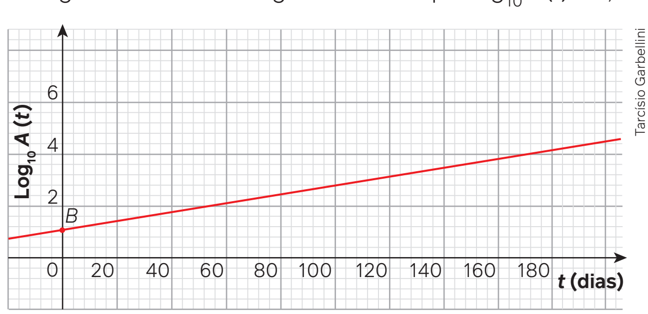
$$y = \log_{10} 12 + \frac{t}{18} \cdot \log_{10} 2$$

$$\downarrow \text{Aproximações (calculadora)}$$

$$y = 1{,}079 + 0{,}017t$$

Crescimento linear

Observe a seguir o esboço do gráfico na escala logarítmica em que $\log_{10} A(t) = 1{,}079 + 0{,}017t$.



Para pensar e discutir

Considere o exemplo anterior para os itens **1** e **2** e responda.

1. Quais são as coordenadas do ponto B antes de aplicarmos a escala logarítmica? 1. (0, 12)
2. Quais são as coordenadas do mesmo ponto B considerando o gráfico na escala logarítmica? Em termos de logaritmos, o que significa a ordenada obtida? 2. (0, 1,079); resposta pessoal.
3. Elaborem um problema que possa ser resolvido por meio de uma função logarítmica. Apresentem para outra dupla resolver. Vocês resolvem o que eles irão elaborar. Reúnam-se, depois, para discutir as soluções. 3. Resposta pessoal.

A escala logarítmica é um exemplo de aplicação do estudo de logaritmos; existem outras aplicações em Física e em Química.

Exemplos:

- Decibel para potência acústica.
- O pH de uma substância química.
- Magnitude estelar para a luminosidades de estrelas.
- Richter para a intensidade de terremotos.

Nas atividades resolvidas a seguir, apresentamos algumas aplicações de logaritmos.

Atividades resolvidas

41. A intensidade de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que varia de 0 a 9,5 para o maior terremoto conhecido. Sendo energia E (em quilowatt-hora: kWh) liberada em um terremoto, e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh o valor de referência, a intensidade I desse terremoto pode ser obtida pela relação $I = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$. Calcule a energia liberada por um terremoto de intensidade I na escala Richter.

- Substituindo I na relação por 7 e utilizando o conceito e propriedades de logaritmos, temos:

$$7 = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

$$\frac{21}{2} = \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

$$10^{\frac{21}{2}} = \frac{E}{E_0}$$

$$E_0 \cdot 10^{\frac{21}{2}} = E$$

$$\Big\downarrow \text{Substituindo } E_0$$

$$7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{\frac{21}{2}} = E$$

$$7 \cdot 10^{-3+\frac{21}{2}} = E \Rightarrow E \cong 221\,359\,436$$

Portanto, a energia liberada foi de aproximadamente 221 milhões de quilowatts-hora.

Para pensar e discutir

1. Se ocorresse outro terremoto com intensidade 8 na escala Richter, por quanto ficaria multiplicada a energia liberada em comparação a do terremoto com intensidade 7? 1. $\sqrt{1\,000} \cong 31{,}6$

42. Em um experimento, observou-se que determinada substância radioativa se desintegra conforme a função $M(t) = M_0 \cdot 9{,}5^{-k \cdot t}$, onde: t é o tempo em anos; k é a constante característica dessa substância; M_0 a massa inicial dessa substância; $M(t)$ a massa residual após o tempo t dado em anos. Considerando que $M_0 = 1\,000$ g e que após 20 anos a massa residual é de 600 g, determine a constante k.

- Como conhecemos a massa inicial e a massa residual em 20 anos, temos:

$$M(t) = M_0 \cdot 9{,}5^{-k \cdot t}$$

$$M(20) = 1\,000 \cdot 9{,}5^{-k \cdot 20}$$

$$600 = 1\,000 \cdot 9{,}5^{-20k}$$

$$0{,}6 = 9{,}5^{-20k}$$

$$\log_{10}0{,}6 = \log_{10}9{,}5^{-20k}$$

$$\log_{10}0{,}6 = -20k \cdot \log_{10}9{,}5$$

$$\Big\downarrow \text{calculadora}$$

$$-0{,}222 \cong -20k \cdot 0{,}978 \Rightarrow k = 0{,}011$$

43. (UFRGS) A tabela a seguir possibilita calcular aproximadamente o valor de $\sqrt[5]{1\,000}$.

De acordo com os dados da tabela, esse valor aproximado é

a) 1,99 **c)** 3,16 **e)** 5,01

b) 2,51 **d)** 3,98

N	**log *N***
1,99	0,3
2,51	0,4
3,16	0,5
3,98	0,6
5,01	0,7

- Representamos o valor a ser determinado por x e, após, aplicamos logaritmos aos dois membros:

$$x = \sqrt[5]{1\,000} = 1\,000^{\frac{1}{5}}$$
$$\log_{10}x = \log_{10}1\,000^{\frac{1}{5}}$$
$$\log_{10}x = \frac{1}{5} \cdot \log_{10}10^3$$
$$\log_{10}x = \frac{3}{5}$$
$$\log_{10}x = 0{,}6 \Rightarrow x = 3{,}98$$

Portanto, $x = 3{,}98$ representa a raiz quinta de 1 000. Alternativa **d**.

44. (UFPR) Um método para se estimar a ordem de grandeza de um número positivo N é usar uma pequena variação do conceito de notação científica. O método consiste em determinar o valor x que satisfaz a equação $10^x = N$ e usar propriedades dos logaritmos para saber o número de casas decimais desse número. Dados log 2 = 0,30 e log 3 = 0,47, use esse método para decidir qual dos números abaixo mais se aproxima de $N = 2^{120} \cdot 3^{30}$.

a) 10^{45} **b)** 10^{50} **c)** 10^{55} **d)** 10^{60} **e)** 10^{65}

- Substituindo N por 10^x e utilizando logaritmos, podemos expressar N como potência de base 10:

$$N = 2^{120} \cdot 3^{30}$$
$$10^x = 2^{120} \cdot 3^{30}$$
$$\log 10^x = \log_{10}(2^{120} \cdot 3^{30})$$
$$x = \log 2^{120} + \log 3^{30}$$
$$x = 120 \cdot \log 2 + 30 \cdot \log 3$$
$$x = 120 \cdot 0{,}30 + 30 \cdot 0{,}47$$
$$x = 36 + 14{,}1 \Rightarrow x = 50{,}1$$

- De forma aproximada, temos:

$$N = 2^{120} \cdot 3^{30} \cong 10^{50{,}1}$$

Portanto, temos N aproximadamente igual a 10^{50}. Alternativa **b**.

45. (Fatec-SP) Define-se o nível sonoro β de um som, medido em decibéis (dB), pela relação $\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$, em que I é a intensidade do som correspondente ao nível sonoro β, medida em watt por metro quadrado (W/m^2), e I_0 é uma constante que representa a menor intensidade de som audível (geralmente $10^{-12}\,W/m^2$). Se a intensidade de um som duplicar, o seu nível sonoro aumenta em:

Adote log 2 = 0,3.

a) 0,03 dB **b)** 0,3 dB **c)** 3 dB **d)** 30 dB **e)** 300 dB

- Considerando uma situação em que a intensidade é I, temos o nível sonoro β_1 dado pela relação:

$$\beta_1 = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

- Duplicando a intensidade, o nível sonoro será β_2:

$$\beta_2 = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{2 \cdot I}{I_0}\right)$$

- Utilizando as propriedades de logaritmos vamos obter β_2 em função de β_1:

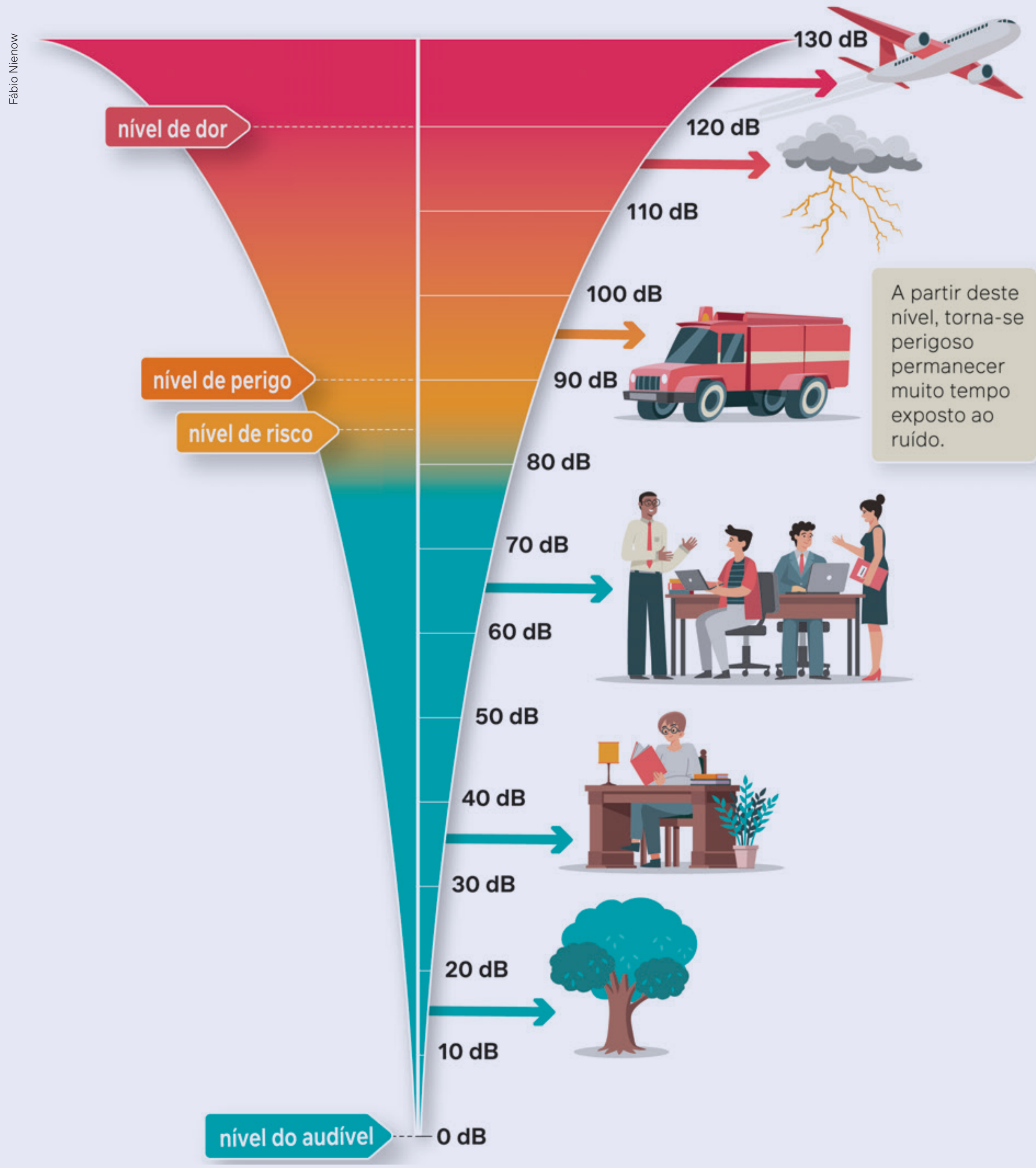
$$\beta_2 = 10 \cdot \log_{10}\left(2 \cdot \frac{I}{I_0}\right)$$
$$\beta_2 = 10 \cdot \left[\log_{10}2 + \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)\right] = 10 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow \beta_2 = 3 + \beta_1$$

Portanto, o nível sonoro aumenta em 3 dB. Alternativa **c**.

A respeito dessa aplicação de logaritmos, analise o infográfico apresentado a seguir.

Infográfico

Intensidade e amplitude



Junte-se a um colega e faça o que se pede:

1. Converse com seu colega sobre alguma situação que vocês tenham vivenciado em que o nível de ruído foi muito alto. De acordo com o infográfico, quantos decibéis vocês estimam que esse ruído tenha alcançado, em cada caso, e expliquem como vocês pensaram. 1. Respostas pessoais.
2. Com ajuda de um professor ou de uma professora da área de Ciências da Natureza, desenvolvam um trabalho para alertar sobre os efeitos negativos que o aumento da faixa de intensidade sonora causa nas pessoas. Divulguem esse trabalho na escola. 2. Resposta pessoal.

Atividades

96. Um estudo feito ao longo de alguns anos mostrou que a população de uma cidade, que atualmente é de 30 000 habitantes, vem diminuindo. A função $P(t) = 30\,000 \cdot (0{,}9)^t$ se ajusta ao comportamento aproximado do número de habitantes $P(t)$ em função de t, dado em anos. 96. a) 27 000

96. b) Aproximadamente 6,6 anos.

a) Qual será a população dessa cidade após 1 ano?

b) Em quanto tempo, a partir do momento em que a população é de 30 000 habitantes, ele se reduzirá à metade?

97. Em uma imobiliária, descobriu-se que o preço em reais de determinado imóvel é dado, em função do tempo t, em anos, por $P(t) = 250\,000 \cdot (1{,}28)^t$. Considerando o valor aproximado de log 2 como 0,30, responda:

a) Segundo esse modelo, qual é o valor do imóvel no início da análise? 97. a) 250 000 reais

b) Em quanto tempo, aproximadamente, esse imóvel irá duplicar? 97. b) Em aproximadamente 3 anos.

98. (Unicamp) O decaimento radioativo do estrôncio 90 é descrito pela função $P(t) = P_0 \cdot 2^{-bt}$, onde t é um instante de tempo, medido em anos, b é uma constante real e P_0 é a concentração inicial de estrôncio 90, ou seja, a concentração no instante t = 0.

a) Se a concentração de estrôncio 90 cai pela metade em 29 anos, isto é, se a meia-vida do estrôncio 90 é de 29 anos, determine o valor da constante b. 98. a) $\frac{1}{29}$

b) Dada uma concentração inicial P_0, de estrôncio 90, determine o tempo necessário para que a concentração seja reduzida a 20% de P_0. Considere $\log_2 10 \approx 3{,}32$. 98. b) Aproximadamente 67,28 anos

99. (Unifesp) Uma droga na corrente sanguínea é eliminada lentamente pela ação dos rins. Admita que, partindo de uma quantidade inicial de Q_0 miligramas, após t horas a quantidade da droga no sangue fique reduzida a $Q(t) = Q_0 \cdot (0{,}64)^t$ miligramas. Determine:

a) a porcentagem da droga que é eliminada pelos rins em 1 hora. 99. a) 36%

b) o tempo necessário para que a quantidade inicial da droga fique reduzida à metade. 99. b) 1,5 hora

Utilize $\log_{10} 2 = 0{,}30$.

100. (UFSM-RS) Sabe-se que a quantidade de uma substância radioativa presente num material, no instante $t > 0$, é dada por $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-x \cdot t}$, onde Q_0 é a quantidade inicial da substância e x é uma constante positiva associada a cada tipo de substância. Então o tempo necessário para que a quantidade da substância se reduza a metade de sua quantidade inicial é igual a 100. Alternativa **b**.

a) $\dfrac{\text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right)}{x}$ **b)** $\dfrac{\text{Ln}2}{x}$ **c)** $\dfrac{x}{\text{Ln }2}$ **d)** $x \cdot \text{Ln }2$ **e)** Ln 2

101. (Unicamp-SP) A função $L(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$ fornece o nível de iluminação, em luxes, de um objeto situado a x metros de uma lâmpada.

a) Calcule os valores numéricos das constante a e b, sabendo que um objeto a 1 metro de distância da lâmpada recebe 60 luxes e que um objeto a 2 metros de distância recebe 30 luxes. 101. a) $a = 120$; $b = \text{Ln }2$.

b) Considerando que um objeto recebe 15 luxes, calcule a distância entre a lâmpada e esse objeto. 101. b) 3 m

102. (UFF-RJ) A energia potencial elástica (E) e a variação do comprimento ($\Delta\ell$) de uma determinada mola estão associadas conforme a tabela:

$y = \log E$	$x = \log \Delta\ell$
4	1
6	2

Sabe-se, também, que a relação entre y e x é estabelecida pela equação $y = nx + \log\left(\frac{k}{2}\right)$, sendo k a constante elástica da mola e n uma constante.

a) Determine os valores das constantes k e n. 102. a) $n = 2$; $k = 200$.

b) Determine o valor de E para $\Delta\ell = 3$. 102. b) 900

103. (Unesp) Numa experiência para se obter o cloreto de sódio (sal de cozinha), colocou-se num recipiente uma certa quantidade de água do mar e expôs-se o recipiente a uma fonte de calor para que a água evapore lentamente. A experiência termina quando toda a água se evaporar. Em cada instante t, a quantidade de água existente no recipiente (em litros) é dada pela expressão:

$$Q(t) = \log_{10}\left(\frac{10^n}{t+1}\right)$$

com n uma constante positiva e t em horas.

a) Sabendo que havia inicialmente 1 litro de água no recipiente, determine a constante n. 103. a) 1

b) Ao fim de quanto tempo a experiência terminará? 103. b) 9 horas.

Atividades finais

1. Considerando $2^x = m$ e $3^x = n$, decomponha as potências em função de m e n.

a) 36^x 1. a) $m^2 \cdot n^2$ **b)** 8^x 1. b) m^3 **c)** 81^x 1. c) n^4 **d)** 64^x 1. d) m^6

2. Ao simplificar a expressão $y = \sqrt[4]{\dfrac{2^{67} + 2^{65}}{10}}$, obtemos como resultado $y = 2^k$. Determine o valor de k. 2. 16

3. A expressão numérica $\dfrac{10^{-2} \cdot 10^{-3}}{10^{-4}}$ corresponde ao número 3. Alternativa **d**.

a) 1 **b)** 10 **c)** 100 **d)** 0,1

4. Dada a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 6^x$, analise cada uma das afirmações e classifique-a em **V** (verdadeira) ou **F** (falsa).

a) A função é crescente em seu domínio. 4. a) V

b) O gráfico da função intercepta o eixo das ordenadas em dois pontos. 4. b) F

c) O conjunto imagem da função é $\mathbb{R}$. 4. c) F

d) $f(1,2) > f(1,3)$ 4. d) F

5. Determine o conjunto-solução de cada equação exponencial a seguir:

a) $2^{x+3} - 62 = 2^{x-2}$ 5. a) $S = \{3\}$

b) $3^{x-1} + 3^x - 3^{x+1} + 3^{x+2} = 66$ 5. b) $S = \{2\}$

c) $25^y + 125 = 30 \cdot 5^y$ 5. c) $S = \{1, 2\}$

d) $3 \cdot 7^x + 4 \cdot 7^x = -49$ 5. d) $S = \{\ \}$

6. Determine todos os valores reais de x que satisfazem cada inequação a seguir:

a) $5^{3x-1} \geq 25$ 6. a) $x \geq 1$ **b)** $(0,3)^{9x-1} < (0,3)^{17}$ 6. b) $x > 2$

7. Utilizando o conceito de logaritmo, obtenha o valor da expressão E. 7. 6,5

$$E = \log_4 1\,024 + \log_{36} 216$$

8. Considerando que $\log_{10} 2 \cong 0,301$ e $\log_{10} 3 \cong 0,477$, calcule cada um dos logaritmos abaixo utilizando as propriedades operatórias. Após, confira os resultados em uma calculadora científica.

a) $\log_{10} 72$ 8. a) 1,857 **c)** $\log_{10} 2,4$ 8. c) 0,380

b) $\log_{10} 15$ 8. b) 1,176 **d)** $\log_{10} 128$ 8. d) 2,107

9. Sendo $\log_{20} 2 = a$ e $\log_{20} 3 = b$, obtenha, em função de a de b, os logaritmos:

a) $\log_2 20$ 9. a) $\frac{1}{a}$ **b)** $\log_6 400$ 9. b) $\frac{2}{a+b}$

10. Ao aplicar a tecla **LOG** uma calculadora científica fornece o logaritmo do número positivo que estava no visor. Digita-se inicialmente o número 10 000 e, após, aperta-se k vezes a tecla **LOG** até aparecer um número negativo no visor. Qual o valor de k? 10. 3

11. Dada a função f:e $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_4 x$, calcule:

a) $f(1) + f(2) + f(4)$. 11. a) $\frac{3}{2}$

b) O valor do domínio da função tal que $f(x) = 4$. 11. b) 256

12. Dada a função f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_{0,3} x$, avalie cada afirmação a seguir como **V** (verdadeira) ou **F** (falsa).

I. A função f é crescente. 12. I.) F

II. O conjunto imagem dessa função é $\mathbb{R}$. 12. II.) V

III. $f(10) > f(2)$ 12. III.) F

IV. O gráfico dessa função intercepta o eixo das abscissas no ponto (1,0). 12. IV.) V

13. Obtenha o conjunto-solução de cada equação logarítmica a seguir:

a) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 22$ 13. a) {4 096}

b) $(\log x)^2 - 5 \cdot \log x - 6 = 0$ 13. b) $\{10^6; 10^{-1}\}$

Questões de vestibulares e Enem

14. (UFRGS) Considere que o corpo de uma determinada pessoa contém 5,5 litros de sangue e 5 milhões de glóbulos vermelhos por milímetro cúbico de sangue. Com base nesses dados, é correto afirmar que o número de glóbulos vermelhos no corpo dessa pessoa é 14. Alternativa **e**.

a) $2,75 \cdot 10^9$ **d)** $5,5 \cdot 10^{12}$

b) $5,5 \cdot 10^{10}$ **e)** $2,75 \cdot 10^{13}$

c) $5 \cdot 10^{11}$

15. (Famerp-SP) Na matemática, o número 1 gugol equivale a 10^{100}. Imaginando, hipoteticamente, um quadrado de área igual a 1 gugol, uma forma para representar o perímetro desse quadrado é

a) 40^{50} **c)** 40^{10} **e)** 20^{50} 15. Alternativa **d**.

b) $20^2 \cdot 10^8$ **d)** $20^2 \cdot 10^{48}$

16. (Unifor-CE) O dono de um antiquário restaurou uma de suas obras e estimou que o valor da peça t anos após a restauração é $v(t) = 2\,500 \cdot (1,03)^t$, onde $0 \leq t \leq 3$. A expressão que corresponde ao valor da peça m meses após a restauração, onde $0 \leq m \leq 36$, é 16. Alternativa **e**.

a) $v(m) = 2\,500 \cdot (1,03)^{m/36}$

b) $v(m) = 2\,500 \cdot (1,03)^{m/3}$

c) $v(m) = 2\,500 \cdot \left(\dfrac{1,03}{36}\right)^{3m}$

d) $v(m) = 2\,500 \cdot (1,03)^{12m}$

e) $v(m) = 2\,5000 \cdot (1,03)^{m/12}$

17. (UEMG) Muitos vírus e bactérias têm crescimento exponencial, isso é uma das causas que os torna tão perigosos. Supondo o surgimento de um novo vírus com um crescimento exponencial de acordo com a seguinte lei de formação $Q(t) = 25 \cdot 3^{2t-7}$, na qual Q é a quantidade de vírus e t é o tempo em dias. Analisando uma cultura desse vírus, quanto tempo demora para que ele alcance a quantidade de 54 675? 17. Alternativa **b**.

a) 6 dias **c)** 8 dias

b) 7 dias **d)** 9 dias

18. (UPE) A meia-vida é o tempo necessário para que a massa de uma amostra radioativa caia pela metade. Num instante inicial, duas amostras radioativas *A* e *B* possuem a mesma massa, 100 gramas. As meias-vidas de *A* e *B* são, respectivamente, 20 horas e 15 horas. Passados 5 dias, qual a razão entre as massas da amostra radioativa *A* e da amostra radioativa *B*?

18. Alternativa **d**.

a) 32
b) 16
c) 8
d) 4
e) 2

19. (UFMS) A depreciação de um carro ocorre segundo a expressão $y = V \cdot a^x$, em que *y* é o valor do bem e *x* é o tempo que passou em anos, com *V* e *a* constantes. Se hoje o valor do carro é R$ 200.000,00, daqui a quatro anos o valor será a metade. Logo, seu valor daqui a oito anos será: 19. Alternativa **c**.

a) R$ 100.000,00
b) R$ 75.000,00
c) R$ 50.000,00
d) R$ 25.000,00
e) R$ 12.500,00

20. (UPF-RS) Uma das raízes da equação $3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 18 = 0$ é $x = 1$. A outra raiz é:

20. Alternativa **a**.

a) $1 + \log_3 2$
b) $1 + \log_2 3$
c) 2
d) 6
e) $\log_6 3$

21. (ESPM-SP) Sejam as funções $f(x) = 7^{x+1}$ e $g(x) = \log_7 x$, com $x > 0$. A função composta $f(g(x))$ é dada por: 21. Alternativa **b**.

a) $x + 7$
b) $7x$
c) $\frac{x}{7}$
d) $7x + 1$
e) x^7

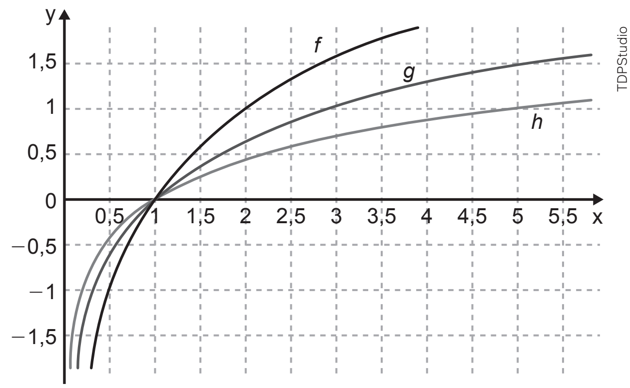
22. (UERJ) Diferentes defensivos agrícolas podem intoxicar trabalhadores do campo. Admita uma situação na qual, quando intoxicado, o corpo de um trabalhador elimine, de modo natural, a cada 6 dias, 75% da quantidade total absorvida de um agrotóxico. Dessa forma, na absorção de 50 mg desse agrotóxico, a quantidade presente no corpo será dada por:

$$V(t) = 50 \cdot (0{,}25)^{\frac{1}{6}} \text{ miligramas.}$$

Assim, o tempo *t*, em dias, necessário para que a quantidade total desse agrotóxico se reduza a 25 mg no corpo do trabalhador é igual a: 22. Alternativa **b**.

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

23. (UFJF-MG) No plano cartesiano a seguir estão representados os gráficos das funções *f*, *g* e *h*, todas definidas no conjunto dos números reais positivos por $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_b x$ e $h(x) = \log_c x$.



O valor de $\log_{10}(abc)$ é 23. Alternativa **d**.

a) 1
b) 3
c) $\log_{10} 3$
d) $1 + \log_{10} 3$
e) $(\log_{10} 2) \cdot (\log_{10} 3) \cdot (\log_{10} 5)$

24. (UEG-GO) A solução da equação $\log x + \log\sqrt{x} + \log\sqrt[4]{x} + \log\sqrt[8]{x} + \log\sqrt[16]{x} = 62$, é

24. Alternativa **d**.

a) 10^2
b) 10^5
c) 10^{16}
d) 10^{32}
e) 10^{64}

25. (Enem) O matemático americano Eduardo Kasner pediu ao filho que desse um nome a um número muito grande, que consistia do algarismo 1 seguido de 100 zeros. Seu filho batizou o número de gugol. Mais tarde, o mesmo matemático criou um número que apelidou de gugolplex, que consistia em 10 elevado a um gugol.
Quantos algarismos tem um gugolplex? 25. Alternativa **d**.

a) 100
b) 101
c) 10^{100}
d) $10^{100} + 1$
e) $10^{1\,000} + 1$

26. (UFJF-MG) Um terremoto é o resultado de uma liberação súbita de energia que provoca movimentos da superfície terrestre. Esses movimentos recebem o nome de abalos sísmicos. A magnitude de um terremoto, que é uma medida quantitativa do tamanho do terremoto, está relacionada com a energia sísmica liberada no foco do terremoto. Em 1935 Gutenberg e Richter concluíram que a fórmula

$$\log_{10} E = K + \frac{3}{2} \cdot M$$

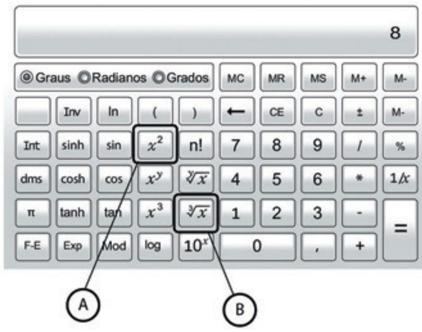
relaciona a energia sísmica liberada *E*, medida em erg, com a magnitude *M* do terremoto, em que *K* é uma constante positiva. De acordo com a fórmula acima, qual é a razão entre a energia liberada por um terremoto de magnitude 7 com um terremoto de magnitude 3?

a) $\frac{3}{7}$
b) $\frac{7}{3}$
c) 4
d) 10^{-6}
e) 10^6

26. Alternativa **e**.

27. (Enem) A imagem representa uma calculadora científica com duas teclas destacadas. A tecla A eleva ao quadrado o número que está no visor da calculadora, e a tecla B extrai a raiz cúbica do número representado no visor.

Uma pessoa digitou o número 8 na calculadora e em seguida apertou três vezes a tecla **A** e depois uma vez a tecla **B**. A expressão que representa corretamente o cálculo efetuado na calculadora é



Enem, 2021

a) $\sqrt[2]{8^{3+3+3}}$

b) $\sqrt[3]{8^{2\times2\times2}}$

c) $\sqrt[2]{8^3+8^3+8^3}$

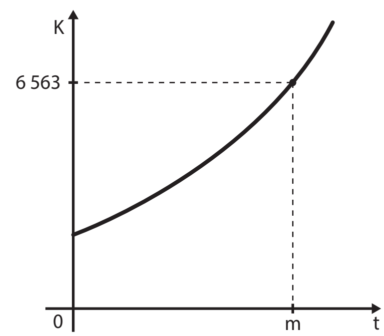
d) $\sqrt[3]{8^2+8^2+8^2}$

e) $\sqrt[3]{8^2\times8^2\times8^2}$

27. Alternativa **b**.

28. (Enem) O crescimento de uma população de microrganismos é descrito pela expressão $K(t) = 81 \cdot 3^{\frac{1}{3}\cdot t} + 2$, em que $K(t)$ indica a quantidade de microrganismos em um meio de cultura em função de t. O gráfico representa a evolução de K em relação ao tempo t.

Com base nos dados, o valor de m é 28. Alternativa **d**.



TDPStudio

a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{7}{5}$

c) $\frac{24}{5}$

d) 12

e) 81

29. (Enem) Um jardineiro cultiva plantas ornamentais e as coloca à venda quando estas atingem 30 centímetros de altura. Esse jardineiro estudou o crescimento de suas plantas, em função do tempo, e deduziu uma fórmula que calcula a altura em função do tempo, a partir do momento em que a planta brota do solo até o momento em que ela atinge sua altura máxima de 40 centímetros. A fórmula é $h = 5 \cdot \log_2 (t + 1)$, em que t é o tempo contado em dias e h, a altura da planta em centímetro. A partir do momento em que uma dessas plantas é colocada à venda, em quanto tempo, em dias, ela alcançará sua altura máxima? 29. Alternativa **d**.

a) 63 **b)** 96 **c)** 128 **d)** 192 **e)** 255

Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão em relação aos assuntos e objetivos trabalhados ao longo do presente capítulo.

Objetivos de aprendizagem	Sim	É necessário retomar
Compreendo as propriedades de potenciação e as utilizo nos cálculos com potências.		
Identifico e represento números em notação científica.		
Conceituo função exponencial.		
Esboço o gráfico de uma função exponencial.		
Utilizo a função exponencial para modelar e resolver problemas.		
Resolvo equações e inequações exponenciais.		
Compreendo e utilizo o conceito e as propriedades operatórias para calcular logaritmos.		
Efetuo mudança de base, calculando logaritmo com o uso de calculadora científica.		
Compreendo o conceito de função logarítmica como função inversa da exponencial de mesma base.		
Esboço o gráfico de função logarítmica.		
Utilizo logaritmos para modelar e resolver problemas.		

Arthimedes/Shutterstock.com

Neste capítulo, você vai:

- obter os termos de uma sequência com base na fórmula do termo geral ou da fórmula de recorrência;
- compreender o conceito de progressão aritmética, suas propriedades e a fórmula do termo geral;
- relacionar progressão aritmética com função afim e com juros simples;
- compreender a relação matemática para o cálculo da soma dos termos de uma progressão aritmética;
- resolver e elaborar problemas envolvendo progressão aritmética;
- compreender o conceito de progressão geométrica, suas propriedades e a fórmula do termo geral;
- relacionar progressão geométrica com função exponencial e com juros compostos;
- compreender a relação matemática para o cálculo da soma dos termos de uma progressão geométrica finita e do limite da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica em que o último termo tende a zero;
- resolver e elaborar problemas envolvendo progressão geométrica.

CAPÍTULO

2

Sequências numéricas

No final do século XVIII, um pastor anglicano inglês chamado Thomas Malthus previu que o crescimento da população seria muito mais acelerado do que o crescimento da produção de alimentos. Sua teoria, que foi refutada por diversos motivos, afirmava que, enquanto as populações crescem em progressão geométrica (2, 4, 8, 16, 32, ...), a produção de alimentos aumenta apenas em progressão aritmética (2, 4, 6, 8, 10, ...), o que indicava que em dado momento faltaria alimento para a população. Neste capítulo, vamos estudar vários tipos de sequências, entre elas as progressões aritméticas e geométricas.

1. Na PG: $a_n = a_{n-1} \cdot 2$ e na PA: $a_n = a_{n-1} + 2$

1. **Analise as duas sequências apresentadas no texto e encontre a regra que determina a formação de cada uma delas.**
2. **Complete cada sequência com mais alguns elementos e faça projeções que possam fundamentar a teoria de Malthus.**

2. Resposta no Manual do Professor.

Nos dias de hoje, a alta tecnologia possibilita que troquemos informações com pessoas do mundo todo a qualquer hora e de qualquer lugar.

1 Sequências numéricas

Utilizamos sequências numéricas em contextos variados, com o objetivo de organizar as informações e de nos orientar de forma geral. Você já observou como são os números das casas em uma mesma rua? Em cidades encontramos placas não apenas das ruas mas também da numeração das casas e dos edifícios, como na imagem a seguir.

Dasayev DiogoShutterstock.com

Placas que indicam o nome de ruas e a numeração de casas e edifícios. Campo Grande (MS), 2020.

Para pensar e discutir

1. Qual é o objetivo de enumerar as casas de uma mesma rua? 1. Resposta pessoal.
2. Na rua em que você mora, as casas são numeradas? Observe a numeração de cada lado da rua. Existe algum padrão numérico? 2. Resposta pessoal.
3. Dê um exemplo de sequência numérica que segue algum padrão de construção. 3. Resposta pessoal.

A contagem dos anos e dos meses no nosso calendário, de modo geral, é uma organização feita por meio de sequências para organizar nossa vida, assim como a contagem das horas em relógios. Geralmente, quando pensamos em sequências, imediatamente imaginamos números uns após os outros. Entretanto, temos também sequências não necessariamente numéricas, mas que representam uma ordenação. Um exemplo são as estações do ano, que seguem determinado padrão. Se iniciarmos a sequência com o verão, por exemplo, teremos:

... verão, outono, inverno, primavera, verão, outono, inverno, primavera, ...

Existem sequências formadas por figuras geométricas, como ilustrado a seguir.

Reinaldo Vignati

Figura 1. Figura 2. Figura 3. Figura 4. Figura 5.

Os triângulos externos das cinco figuras têm o mesmo tamanho e são triângulos equiláteros (seus lados têm as mesmas medidas), e os triângulos menores formados nas figuras também são equiláteros. O que há de interessante nessa sequência de triângulos? Como ela foi formada?

Existem diversas respostas possíveis para essas perguntas, entre as quais as citadas a seguir.

- Ligando os pontos médios dos lados do triângulo da **figura 1** ele ficou dividido em 4 outros triângulos.
- Ligando os pontos médios dos lados dos triângulos de cada um dos 4 triângulos da **figura 2** formaram-se novos triângulos.

E assim por diante.

Se pensarmos nas quantidades dos triângulos pretos e dos triângulos brancos que foram formados, sem considerar os tamanhos, temos também duas sequências numéricas, organizadas no quadro a seguir.

	Pretos	**Brancos**
Figura 1	1	0
Figura 2	3	1
Figura 3	9	4
Figura 4	27	13
Figura 5	81	40

Essas duas sequências apresentam padrões possíveis de ser identificados. Voltaremos a elas, pois nosso objetivo no presente capítulo é estudar as sequências conhecidas como **progressão aritmética** e **progressão geométrica**. Iniciamos observando um pouco mais a respeito de padrões numéricos de modo geral.

Padrões numéricos e geométricos

A busca por padrões envolvendo números e formas geométricas aparece na história da Matemática em momentos diversos. Um exemplo está em Pitágoras e seus discípulos, que viveram há mais de 2 500 anos na Grécia. Os pitagóricos tinham uma concepção de mundo em que tudo podia, a princípio, ser explicado por meio dos números. Eles elaboraram os chamados números figurados, que podem ser ilustrados por pontos em determinada configuração geométrica, gerando triângulos, quadrados e pentágonos, por exemplo. Vamos exemplificar com três sequências.

Números triangulares

Reinaldo Vignati

T_1 T_2 T_3 T_4 T_5

A sequência dos números triangulares pode ser representada por meio de parênteses, em que os números (chamados termos da sequência) são separados por vírgula:

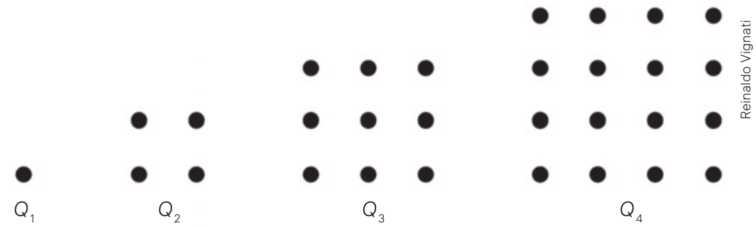
(1, 3, 6, 10, 15, ...)

sequência de números triangulares

Um número triangular pode ser representado por uma letra T (triangular) com um índice que indica a ordem do número na sequência:

$$T_1 = 1,\ T_2 = 3,\ T_3 = 6,\ T_4 = 10,\ T_5 = 15,\ ...$$

Números quadrados



Os números quadrados formam uma sequência que também pode ser representada por meio de parênteses, em que os números (chamados termos da sequência) são separados por vírgula.

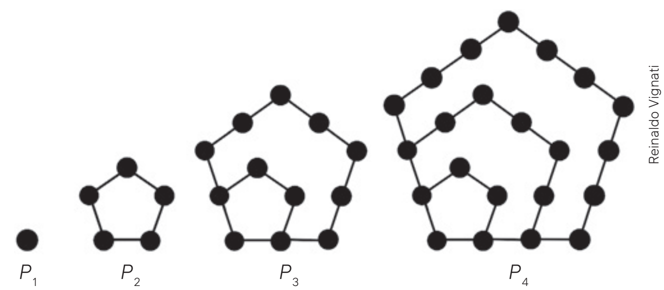
Observe a seguir.

(1, 4, 9, 16, ...) → sequência de números quadrados

Representando cada número quadrado por uma letra Q (quadrado) com um índice que indica a ordem do número na sequência, temos:

$$Q_1 = 1,\ Q_2 = 4,\ Q_3 = 9,\ Q_4 = 16,\ ...$$

Números pentagonais



Já a sequência dos números pentagonais observada na figura é a seguinte:

(1, 5, 12, 22, ...) → sequência de números pentagonais

Analogamente, temos a sequência:

$$P_1 = 1,\ P_2 = 5,\ P_3 = 12,\ P_4 = 22,\ ...$$

Para pensar e discutir

1. $T_6 = 21$; resposta pessoal.

1. Observando os números triangulares, qual número corresponde a T_6? Explique como a sequência é formada.
2. Qual é o 10º termo da sequência dos números quadrados, isto é, Q_{10}? Explique como a sequência é formada.
3. Qual é o 5º termo da sequência dos números pentagonais, isto é, P_5? Explique como a sequência é formada.

2. $Q_{10} = 100$; resposta pessoal. 3. $P_5 = 35$; resposta pessoal.

Os números pitagóricos representam apenas um exemplo de padrões numéricos e de padrões geométricos. Você pode criar também uma sequência de números ou de formas geométricas. Observe a seguir como podemos relacionar os números ímpares consecutivos com os números quadrados perfeitos.

1ª linha → $1 = 1^2$
2ª linha → $1 + 3 = 2^2$
3ª linha → $1 + 3 + 5 = 3^2$
4ª linha → $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$
5ª linha → $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$
6ª linha → $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2$
7ª linha → $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7^2$
(...)

Atividades resolvidas

1. Explique qual é a regra de formação das linhas da sequência da página anterior.

- Cada linha é formada pela soma de números ímpares consecutivos. Assim, temos:

  1ª linha: é o 1º número ímpar: 1^2

  2ª linha: é a soma dos 2 primeiros números ímpares consecutivos: 2^2

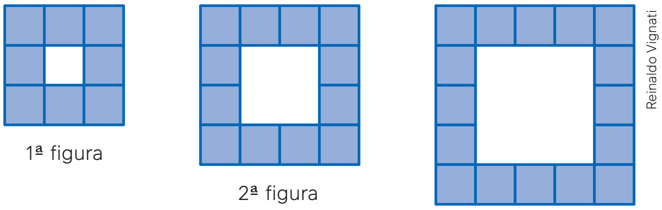
  3ª linha: é a soma dos 3 primeiros números ímpares consecutivos: 3^2

  4ª linha: é a soma dos 4 primeiros números ímpares consecutivos: 4^2

  5ª linha: é a soma dos 5 primeiros números ímpares consecutivos: 5^2

  E assim sucessivamente.

2. As figuras que formam a sequência a seguir seguem um padrão. Explique como essa sequência é formada e quantos quadradinhos há na 30ª figura da sequência.



1ª figura 2ª figura 3ª figura

- As figuras são formadas por quadradinhos coloridos. Assim, em um primeiro momento podemos observar as quantidades de quadradinhos coloridos a seguir:

  1ª figura: 8

  2ª figura: 12

  3ª figura: 16

  (...)

- Buscamos, então, uma relação entre a quantidade de quadradinhos e o número que indica a ordem na figura. Uma relação posssível é:

  1ª figura: $4 \cdot (\mathbf{1} + 1)$

  2ª figura: $4 \cdot (\mathbf{2} + 1)$

  3ª figura: $4 \cdot (\mathbf{3} + 1)$

  (...)

- Assim, para a 30ª figura teremos:

  30ª figura: $4 \cdot (\mathbf{30} + 1)$

  Portanto, a 30ª figura é formada por 124 quadradinhos.

Para pensar e discutir

1. Encontre outra maneira de justificar a formação da sequência e obter a quantidade de quadradinhos na 30ª figura.

1. Resposta pessoal.

Atividades

1. Observe a sequência formada por quadradinhos de mesmo tamanho e faça o que se pede.

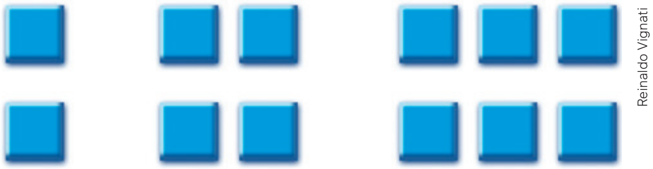


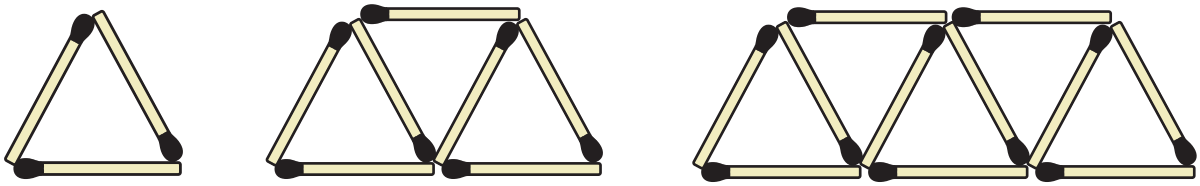
Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

a) Represente a quantidade de quadradinhos que farão parte da Fig. 4 dessa sequência e justifique. 1. a) 8; resposta pessoal

b) Quantos quadradinhos farão parte da Fig. 10? 1. b) 20

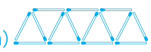
c) Quantos quadradinhos farão parte da n-ésima figura? 1. c) $2n$

2. A ilustração a seguir representa formas geométricas composta de palitos, segundo determinado padrão.



Reinaldo Vignati

Figura 1. Figura 2. Figura 3.

a) Desenhe no caderno a Figura 4 que continua essa sequência. 2. a) 

b) O quadro a seguir foi elaborado com base na sequência ilustrada.

Figura	Número de palitos	Número de triângulos
1	3	1
2	7	3
3	11	5

Com base na ilustração, reproduza e amplie em seu caderno um quadro que contenha as quantidades de palitos e de triângulos para as 20 primeiras figuras dessa sequência. Se for possível, utilize uma planilha eletrônica para esta atividade, imprimindo-a para apresentar aos colegas. 2. b) Resposta no Manual do Professor.

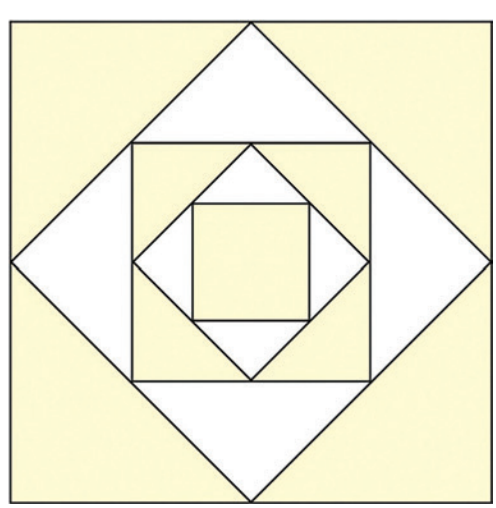
3. Observe atentamente a sequência numérica abaixo, formada por 7 números, sendo o último número desconhecido. Há um padrão na formação dos números nessa sequência. Descubra e determine qual número falta. 3. 200

Acervo editora

2 → 10 → 12 → 16 → 17 → 18 → 19 → ☐

4. Elabore um desafio envolvendo sequência numérica para que os colegas resolvam. Nesse desafio, é importante que haja um padrão numérico que relacione os números. 4. Resposta pessoal.

5. Observe a figura a seguir, construída a partir de quadrados.

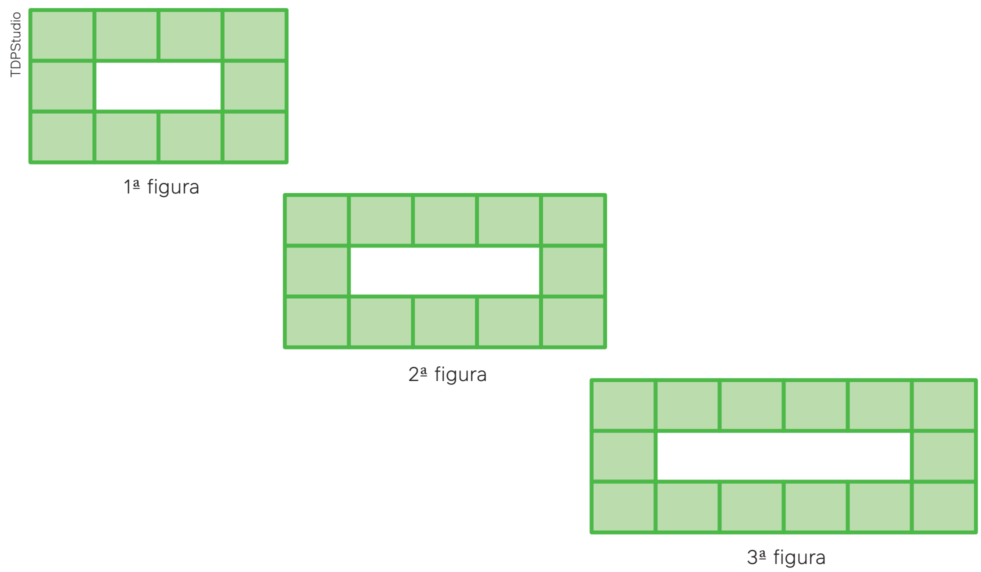


Reinaldo Vignati

Escreva um algoritmo que determine como essa figura poderá ser formada iniciando com o quadrado maior.

5. Resposta no Manual do Professor.

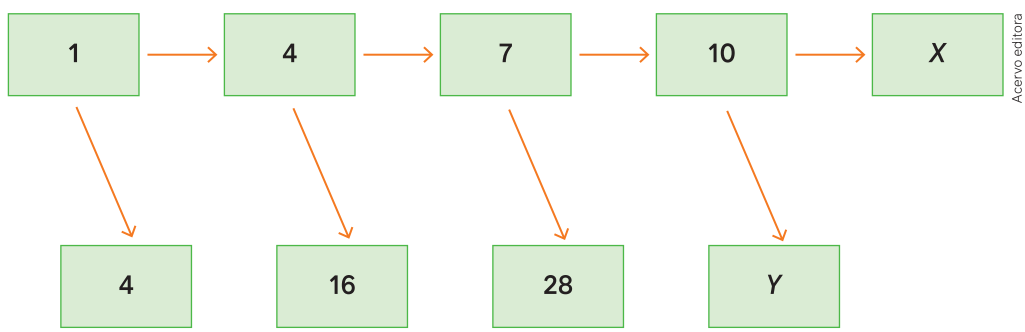
6. Observe a sequência de figuras abaixo.



a) Explique como a sequência é formada. 6. a) Resposta pessoal.

b) Determine a quantidade total de quadradinhos na 11ª figura. 6. b) 30

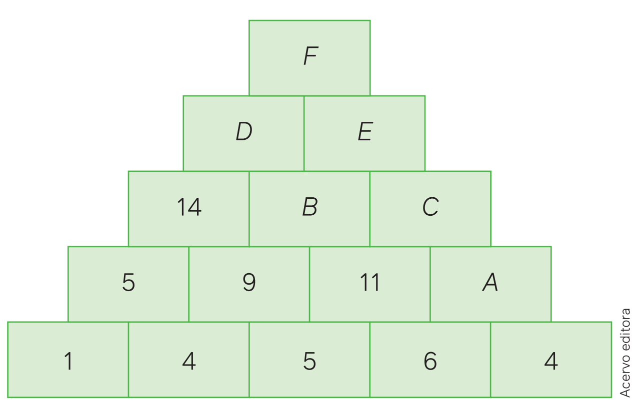
7. Na figura abaixo, os números, começando pelo 1, foram dispostos segundo um padrão numérico.



a) Explique o padrão numérico da disposição dos números nessa figura. 7. a) Resposta pessoal.

b) Quais números devem ser colocados no lugar de *X* e de *Y*, respectivamente? 7. b) $X = 13$ e $Y = 40$

8. Há um padrão numérico na distribuição dos números nos retângulos para formar a figura a seguir.



a) Explique o padrão numérico na distribuição dos números na figura. 8. a) Resposta pessoal.

b) Determine os números que devem ser colocados nos lugares das letras *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*.
8. b) $A = 10$; $B = 20$; $C = 21$; $D = 34$; $E = 41$; $F = 75$

Lei de formação de uma sequência

Vamos considerar a seguinte sequência de números naturais, representada entre parênteses e cujos elementos estão separados por vírgula.

$$\underbrace{(0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \ldots)}_{\text{sequência de números naturais que são múltiplos de 4}}$$

Podemos representar essa sequência de números por meio do seguinte quadro:

1º termo	2º termo	3º termo	4º termo	5º termo	6º termo	7º termo	8º termo	...
$0 = 4 \cdot 0$	$4 = 4 \cdot 1$	$8 = 4 \cdot 2$	$12 = 4 \cdot 3$	$16 = 4 \cdot 4$	$20 = 4 \cdot 5$	$24 = 4 \cdot 6$	$28 = 4 \cdot 7$	...

Para pensar e discutir

1. Qual é o 10º termo dessa sequência? E o 20º termo? 1. 36 e 76, respectivamente
2. Qual é a expressão matemática que representa o n-ésimo termo dessa sequência? 2. $4(n - 1)$
3. Substituindo *n*, nessa expressão, por 22, qual termo você obtém? 3. O 22º termo da sequência.

A expressão que você obteve na questão 2 é chamada de **lei de formação da sequência**. Como o próprio nome sugere, permite determinar qualquer termo da sequência, conhecendo-se sua posição nessa ordem. Há uma maneira de representar os termos de uma sequência: pode-se utilizar a letra *a* (ou outra letra) com um índice que indica a posição do termo na série. Assim, retomando a sequência dos múltiplos naturais de 4, temos:

1º termo: $a_1 = 0$
2º termo: $a_2 = 4$
3º termo: $a_3 = 8$
4º termo: $a_4 = 12$
5º termo: $a_5 = 16$
6º termo: $a_6 = 20$
7º termo: $a_7 = 24$
(...)
$\underbrace{n^{\text{o}} \text{ termo: } a_n = 4 \cdot (n - 1)}_{\text{Lei de formação da sequência pelo termo geral } a_n}$

Infográfico clicável
Sequências e a música

Podemos dizer, de modo geral, que as sequências numéricas obedecem a uma lei de formação que pode ser apresentada ou obtida basicamente de duas maneiras diferentes. Observe os exemplos a seguir.

Termo geral de uma sequência

Quando conhecemos a lei de formação pelo termo geral, cada termo é expresso em **função** de sua posição na sequência, ou seja, temos uma fórmula que representa $\boldsymbol{a_n}$ **em função de *n***.

Exemplos:
Considerando *n* um número natural tal que $n \geq 1$, são exemplos de termo geral:

- $a_n = n^2 \rightarrow$ representa os quadrados dos números naturais diferentes de zero;
- $a_n = 2n \rightarrow$ representa os números naturais pares diferentes de zero;
- $a_n = (2n - 1)^3 \rightarrow$ representa os cubos dos números naturais ímpares.

Atividades resolvidas

3. Uma sequência tem o termo geral representado por $a_n = (n - 1)^2$, sendo n um número natural diferente de zero. Calcule a soma do 10º termo com o 15º termo dessa sequência.

- Para obter o 10º termo e o 15º termo da sequência, devemos substituir n por 10 e 15, respectivamente, na fórmula do termo geral. Após isso, adicionamos os dois valores:

$$a_n = (n - 1)^2$$
$$a_{10} + a_{15} = (10 - 1)^2 + (15 - 1)^2$$
$$a_{10} + a_{15} = 9^2 + 14^2$$
$$a_{10} + a_{15} = 81 + 196 \Rightarrow a_{10} + a_{15} = 277$$

Podcast
Falando em sequências

4. Quais são os cinco primeiros termos da sequência cujo termo geral é $a_n = (n - 1)^2 + (n + 1)^2$?

- Vamos atribuir a n os valores naturais 1, 2, 3, 4 e 5 para obter os cinco primeiros termos dessa sequência:

$$n = 1: a_1 = (1 - 1)^2 + (1 + 1)^2 = 0 + 4 \Rightarrow a_1 = 4$$
$$n = 2: a_2 = (2 - 1)^2 + (2 + 1)^2 = 1 + 9 \Rightarrow a_2 = 10$$
$$n = 3: a_3 = (3 - 1)^2 + (3 + 1)^2 = 4 + 16 \Rightarrow a_3 = 20$$
$$n = 4: a_4 = (4 - 1)^2 + (4 + 1)^2 = 9 + 25 \Rightarrow a_4 = 34$$
$$n = 5: a_5 = (5 - 1)^2 + (5 + 1)^2 = 16 + 36 \Rightarrow a_5 = 52$$

5. Seja a sequência cujos termos obedecem às seguintes condições:

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 5, \text{ sendo } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2 \end{cases}$$

Obtenha o 5º termo dessa sequência.

- Observe que foi dado o primeiro termo e uma “regra” que possibilita determinar um termo se conhecemos o termo anterior, isto é, a_n em função de a_{n-1}. Assim, atribuindo-se valores para $n \geq 2$, podemos determinar os termos:

$$a_2 = 2 \cdot a_1 + 5 = 2 \cdot 10 + 5 = 25$$
$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 5 = 2 \cdot 25 + 5 = 55$$
$$a_4 = 2 \cdot a_3 + 5 = 2 \cdot 55 + 5 = 115$$
$$a_5 = 2 \cdot a_4 + 5 = 2 \cdot 115 + 5 = 235$$

Portanto, o 5º termo dessa sequência é 235.

Fórmula de recorrência
Na fórmula exemplificada, chamada de fórmula de recorrência, existem duas regras: uma que identifica o primeiro termo e a outra que possibilita obter cada termo seguinte com base no termo correspondente anterior.

Para explorar

Junte-se a um colega para realizar estas atividades.

1. Escrevam uma fórmula do termo geral de uma sequência e, após, façam o que se pede.
   a) Obtenham os 10 primeiros termos dessa sequência. 1. a) Resposta pessoal.
   b) Expliquem, por meio de uma frase, como a sequência elaborada é formada. 1. b) Resposta pessoal.

2. Escrevam uma fórmula de recorrência de uma sequência e, após, façam o que se pede.
   a) Obtenham os 10 primeiros termos dessa sequência. 2. a) Resposta pessoal.
   b) Apresentem a fórmula de recorrência para outra dupla de colegas e solicitem que escrevam os 10 primeiros termos. 2. b) Resposta pessoal.

3. Pesquisem sobre a sequência de formação dos anos bissextos, escrevendo um pequeno texto que explique como esses anos são identificados. Depois, apresentem esse texto aos demais colegas. 3. Resposta pessoal.

Atividades

9. Na sequência parcialmente representada a seguir, as figuras são formadas por triângulos de mesmo tamanho. Então, faça o que se pede.

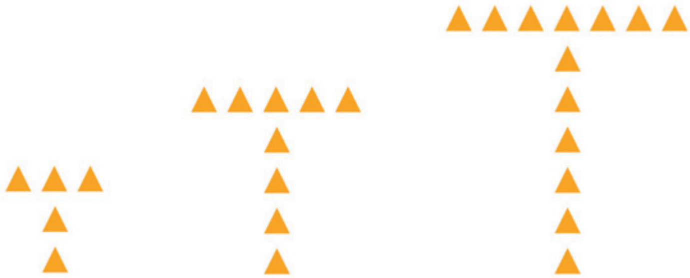


Figura 1. Figura 2. Figura 3.

Acervo editora

a) Escreva os seis primeiros termos da sequência formada pelas quantidades de triângulos que compõem as figuras. 9. a) 5, 9, 13, 17, 21 e 25

b) Qual é o 10º termo dessa sequência? 9. b) 41

c) Verifique se o termo geral dessa sequência é $a_n = 4n + 1$. Explique como você verificou. 9. c) Sim, resposta pessoal.

10. O termo geral de uma sequência é dado por $a_n = \sqrt{n}$, sendo n um número natural não nulo, isto é, $n \in \mathbb{N}^*$. Faça o que se pede a seguir.

a) Escreva os 6 primeiros termos dessa sequência. 10. a) $(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6})$

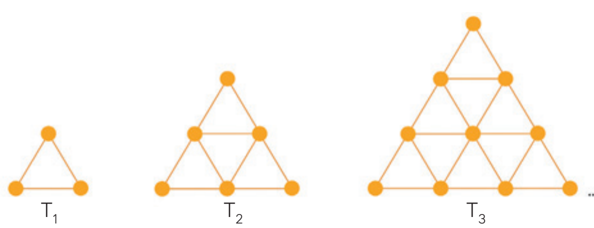
b) Quais são os cinco primeiros números naturais dessa sequência? 10. b) 1, 2, 3, 4 e 5

11. Determine: 11. a) (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29)

a) os 10 primeiros termos da sequência formada pelos números naturais que são primos.

b) o 10º termo da sequência dos números naturais que são cubos perfeitos. 11. b) 729

12. Observe a figura formada por triângulos e faça o que se pede.

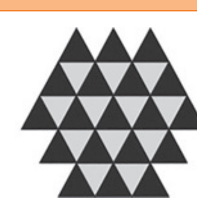


Acervo editora

a) Escreva a sequência (apenas os 5 primeiros termos) formada pelas quantidades de pontos ligados pelos segmentos de mesmo tamanho nessas figuras. 12. a) (3, 6, 10, 15, 21)

b) Escreva a sequência (apenas os 5 primeiros termos) formada pelas quantidades de triângulos de mesmo tamanho que compõem cada figura. 12. b) (1, 4, 9, 16, 25)

13. No quadro abaixo, considere a sequência de figuras formadas da seguinte maneira: em cada etapa, desde a primeira, são feitos novos triângulos pequenos sobre cada lado livre dos triângulos da figura anterior.

Etapa	1	2	3	4	5
Figura					
Número de triângulos pequenos	1	4	10	19	31

Reinaldo Vignati

a) Quantos triângulos pequenos formarão a figura da etapa 6? 13. a) 46

b) Explique como a sequência (1, 4, 10, 19, 31, ...) é formada. 13. b) Resposta pessoal.

14. Observe atentamente quais números formam cada linha da sequência a seguir.

1ª linha → 1
2ª linha → 1 1
3ª linha → 1 2 1
4ª linha → 1 3 3 1
5ª linha → 1 4 6 4 1
6ª linha → 1 5 10 10 5 1
(...)

Faça o que se pede a seguir.

a) Quais números ocuparão a 7ª linha dessa sequência? 14. a) (1, 6, 15, 20, 15, 6, 1)

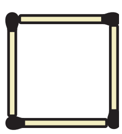
b) Obtenha a soma dos números que aparecem em cada linha da sequência. 14. b) (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...)

c) Qual é a soma de todos os números existentes na 11ª linha dessa sequência? 14. c) 1 024

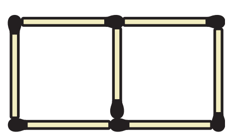
d) Explique em uma frase como essa sequência é formada. 14. d) Resposta pessoal.

15. A sequência de figuras a seguir é formada por palitinhos de mesmo tamanho.

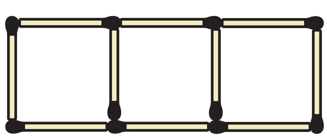
Reinaldo Vignati



1ª figura



2ª figura



3ª figura

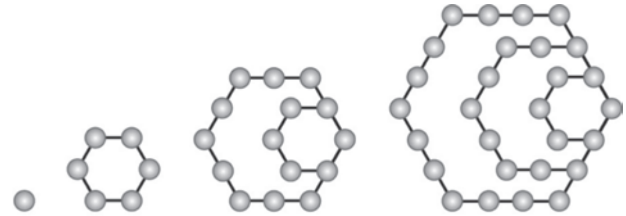
Faça o que se pede.

a) Elabore e resolva uma situação envolvendo a sequência formada pelo número de quadradinhos de mesmo tamanho existentes na sequência de figuras. 15. a) Resposta pessoal.

b) Elabore e resolva uma situação envolvendo a sequência formada pelo número de palitinhos de mesmo tamanho existentes na sequência de figuras. 15. b) Resposta pessoal.

Depois, entregue essas duas questões a um colega para que ele as resolva. A finalidade é verificar se as situações foram compreendidas e confrontar as respostas obtidas.

16. Os números hexagonais estão entre os números figurados que os pitagóricos conheciam. A seguir estão representados os quatro primeiros termos dessa sequência.



H_1 H_2 H_3 H_4

Reinaldo Vignati

A fórmula do termo geral dessa sequência é dada por $H_n = n \cdot (2n - 1)$. Com base nessa fórmula, faça o que se pede.

a) Escreva a sequência formada pelos 7 primeiros números hexagonais. 16. a) (1, 6, 15, 28, 45, 66, 91)

b) Verifique se 780 é um número hexagonal. Caso seja, indique a ordem dele na sequência. 16. b) Sim; 20º

17. Determine o 7º termo da sequência dada por:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 4, \text{ sendo } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2 \end{cases}$$

Depois, responda: Como os termos dessa sequência são formados? 17. 27; aumentam de 4 em 4

18. Retome a atividade anterior e explique o que acontecerá com a sequência se alterarmos apenas o primeiro termo, isto é, se tivermos a sequência definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 4, \text{ sendo } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2 \end{cases}$$

18. Os termos serão outros, porém continuarão aumentando de 4 em 4.

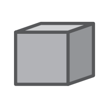
19. Faça o que se pede a seguir.

a) Elabore a fórmula de recorrência de uma sequência. 19. a) Resposta pessoal.

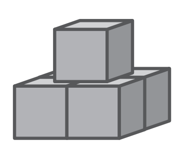
b) Escreva os 10 primeiros termos dessa sequência. 19. b) Resposta pessoal.

c) Solicite a um colega que verifique, com base na fórmula de recorrência elaborada, se os 10 primeiros termos conferem com os obtidos. 19. c) Resposta pessoal.

20. Observe na figura a seguir as quantidades de pequenos cubos que formam as quatro primeiras pilhas de uma sequência.

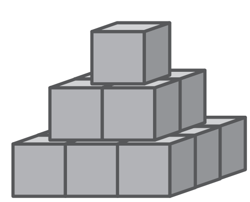


1ª

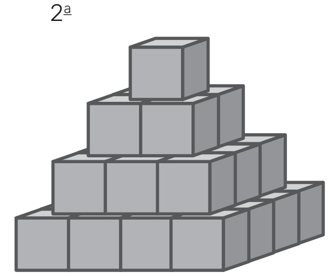


2ª

Reinaldo Vignati



3ª



4ª

a) Quantos pequenos cubos são necessários para formar a 5ª figura dessa sequência? 20. a) 55

b) Explique como essa sequência é formada. 20. b) Resposta pessoal.

Análise e contexto

Padrões geométricos em tecidos

Em Matemática, nosso primeiro contato com padrões geralmente acontece quando estudamos as sequências numéricas. Nesse contexto, trabalha-se com a lei de formação (termo geral) de uma sequência para determinar uma relação que possibilite construí-la. Esses padrões também aparecem, como vimos, em figuras geométricas, e estão presentes em calçadas ou paredes com faixas decorativas, por exemplo.

Também podemos encontrar certos padrões riquíssimos em detalhes olhando um pouco mais para nossa história e suas influências. O que dizer destas faixas presentes em tecidos, conforme mostrado a seguir?

Transnia Design/Shutterstock.com

latynina nataliya/Shutterstock.com

Exemplos de faixas de tecido colorido com padrões geométricos.

Essas imagens representam apenas exemplos do que hoje identificamos como cultura afro-brasileira. Leia o texto a seguir para compreender um pouco essa história.

Cultura afrodescendente no Brasil

A cultura africana chegou às terras brasileiras pelos africanos trazidos para cá para servirem de escravos. Os navios negreiros ou tumbeiros (grandes embarcações europeias que traziam em seus porões dezenas e até centenas de africanos em condições degradantes) carregavam pessoas de várias etnias africanas, o que permitiu a pluralidade cultural de origem africana no Brasil.

Com a fusão entre a cultura africana e os vários elementos da cultura indígena e europeia, nasceu no país uma cultura muito vasta. Se buscarmos em nossas origens, diversos são os elementos que compõem a nossa formação tradicional e têm origem no continente africano.

Temos hoje diversas danças brasileiras que foram trazidas por africanos ou surgiram com base em elementos culturais dessas pessoas que viviam no Brasil. São elas: a capoeira, que é também uma arte marcial utilizada como defesa dos escravos fugitivos contra os capitães do mato; o samba; o axé, dança originária do ritmo afoxé que tem origem nas tradicionais danças religiosas; o coco e o maracatu.

PORFÍRIO, F. Cultura africana. *Brasil Escola*, [*s. l.*], [20--]. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/cultura/cultura-africana.htm. Acesso em: 10 set. 2024.

Faça o que se pede a seguir:

1. Pesquise em *sites* de busca alguma fotografia de tecido da cultura afro-brasileira que contenha figuras geométricas formando padrões. Depois, elabore um texto para descrever o padrão geométrico que você identificou.

1. Resposta pessoal.

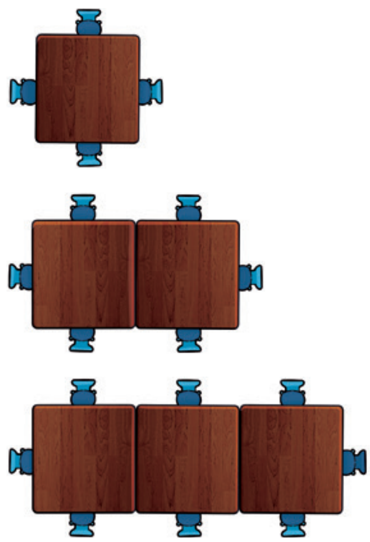
2. Agora, para toda a turma, apresente a fotografia pesquisada e leia o texto que você elaborou.

2. Resposta pessoal.

2 Progressão aritmética

Existem sequências numéricas cujos padrões estão relacionados a uma adição de números constantes. Exemplo disso é o que acontece quando, em um restaurante, a pedido dos clientes, juntam-se mesas para que as pessoas do mesmo grupo fiquem próximas.

Na imagem a seguir, considere que uma mesa quadrada acomode quatro pessoas. Ao se juntarem duas mesas, três mesas, e assim por diante, observe o que acontece com a quantidade de lugares para acomodar as pessoas.



Mauro Salgado

(...)

Para pensar e discutir

1. Duas mesas separadas acomodam 8 pessoas. Ao se juntarem 2 mesas, quantos "lugares" se perdem? E ao se juntarem 3 mesas? 1. Perdem-se 2 lugares e 4 lugares, respectivamente.
2. Quantas pessoas ao todo podem ser acomodadas juntando-se 4 mesas? 2. 10
3. Quantas mesas são necessárias juntar para que 30 pessoas fiquem acomodadas? 3. 14
4. Qual é a sequência formada pela quantidade de pessoas que podem ser acomodadas em 1 mesa, 2 mesas juntas, 3 mesas juntas, 4 mesas juntas e assim sucessivamente? Explique como formar esse padrão numérico. 4. (4, 6, 8, 10, 12, ...); resposta pessoal

Na situação mostrada, observando-se a quantidade de mesas nas figuras, temos uma sequência numérica (1, 2, 3, 4, ...) com infinitos termos (é claro que, na prática, há um limite no número de mesas conforme o restaurante). Caso consideremos o número de lugares à medida que vamos juntando as mesas, teremos a sequência (4, 6, 8, 10, 12, ...). Essas duas sequências são exemplos de progressão aritmética.

Progressão aritmética é toda sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior adicionado a uma constante. Essa constante é chamada de **razão da progressão**.

Exemplos:

- (0, 3, 6, 9, 12, 15, ...)
  Cada termo, a partir do segundo, é o imediatamente anterior adicionado ao número 3;
- (15, 10, 5, 0, –5, –10, ...)
  Cada termo, a partir do segundo, é o imediatamente anterior adicionado ao número –5;
- (8, 8, 8, 8, 8, 8, ...)
  Cada termo, a partir do segundo, é o imediatamente anterior adicionado ao número zero.

Há outra maneira de conceituarmos uma progressão aritmética (representada por PA).

> Uma **progressão aritmética** é a sequência de números na qual a diferença entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é constante. Essa constante é a **razão da progressão** aritmética e é representada pela letra *r*.

Você pode voltar ao início deste capítulo e verificar se as sequências apresentadas são exemplos de progressão aritmética. Procure, ao investigar essas sequências, explicar o motivo de elas serem, ou não, exemplos de progressão aritmética.

Analise alguns exemplos a seguir.

Exemplos:

PA crescente - Se considerarmos a sequência formada pelos números que indicam os anos de eleições brasileiras para presidente no século XXI, temos:

(2002, 2006, 2010, 2014, 2018, ...)

→ PA crescente de razão igual a 4

Antonio Augusto/Ascom/TSE

Urna eletrônica.

PA decrescente - Uma caixa-d´água em uma residência está cheia, com 1 500 L de água. Considerando que o consumo por hora seja de aproximadamente 50 L e que não entre mais água nessa caixa ao final das próximas 6 horas, vamos escrever a sequência formada pela quantidade de litros de água com o tempo.


Jatuporn Tansirimas/iStockphoto.com

É de extrema importância usar a água de maneira racional.

Tempo (h)	0	1	2	3	4	5	6
Capacidade (L)	1 500	1 450	1 400	1 350	1 300	1 250	1 200

(1 500, 1 450, 1 400, 1 350, 1 300, 1 250, 1 200)

→ PA decrescente de razão igual a −50

PA constante – Pedro recebe 1 000 reais, por semana, por um trabalho de digitação que realiza para uma empresa. Assim, a sequência formada pelos salários semana após semana é:

(1 000, 1 000, 1 000, 1 000, 1 000, ...)

→ PA constante de razão igual a zero

Para pensar e discutir

1. Que característica deve ter a razão *r* de uma progressão aritmética para que ela seja crescente? 1. $r > 0$
2. Quanto ao crescimento, qual é a classificação de uma progressão aritmética de razão igual a zero? 2. PA constante.
3. O que se pode afirmar quanto ao crescimento de uma progressão aritmética quando sua razão é negativa? 3. A PA é decrescente.

Termo geral de uma progressão aritmética

Um dos problemas existentes no estudo de progressão aritmética é a determinação de um termo dessa sequência conhecendo-se o primeiro termo, a razão da sequência e também a ordem desse termo. Vamos considerar a situação a seguir.

Roberta representou, no quadro abaixo, uma progressão aritmética escrevendo os cinco primeiros termos. Indicou nele o 44º e o 99º termos para que fossem determinados.

4	12	20	28	36	...	$\boldsymbol{a_{44}}$	...	$\boldsymbol{a_{99}}$	...

Como você faria para determinar esses dois termos?

Uma possibilidade seria calcular os termos um a um, mas seria extremamente trabalhoso. Voltaremos a essa situação após obtermos a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética.

Como, em uma progressão aritmética, qualquer termo a partir do segundo é o termo anterior adicionado a uma constante (razão da PA), podemos escrever:

$$\boldsymbol{a_2 = a_1 + r}$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r \Rightarrow \boldsymbol{a_3 = a_1 + 2 \cdot r}$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r \Rightarrow \boldsymbol{a_4 = a_1 + 3 \cdot r}$$

$$a_4 = a_4 + r = a_1 + 3r + r \Rightarrow \boldsymbol{a_5 = a_1 + 4 \cdot r}$$

$$a_6 = a_5 + r = a_1 + 4r + r \Rightarrow \boldsymbol{a_6 = a_1 + 5 \cdot r}$$

$$a_7 = a_6 + r = a_1 + 5r + r \Rightarrow \boldsymbol{a_7 = a_1 + 6 \cdot r}$$

$$a_8 = a_7 + r = a_1 + 6r + r \Rightarrow \boldsymbol{a_8 = a_1 + 7 \cdot r}$$

(...)

Aqui já é possível identificar um padrão numérico que relaciona o índice que indica a posição do termo na sequência ao número que multiplica a razão da progressão aritmética. Observe como seria o próximo termo dessa sequência.

$$a_9 = a_1 + 8 \cdot r$$

Índice

Coeficiente de r

Com base no conceito de progressão aritmética, podemos expressar o segundo, o terceiro, o quarto, o quinto e o sexto termos da sequência em função do primeiro termo e da razão. Então:

Para pensar e discutir

1. Como obter o 10º termo dessa sequência em função do 1º termo e da razão? 1. $a_{10} = a_1 + 9r$
2. E o 100º termo dessa sequência? 2. $a_{100} = a_1 + 99r$
3. Qual é o termo (ordem do termo) que corresponde a $a_1 + 502 \cdot r$? 3. 503º termo
4. E como você representaria o termo a_n? 4. $a_n = a_1 + (n - 1)r$

A fórmula do termo geral de uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão igual a r é dada por:

$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)r}$, sendo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo:

Atribuindo-se alguns valores a n nessa fórmula do termo geral, temos:

$$n = 1 \rightarrow a_1 = a_1 + (1 - 1)r \Rightarrow a_1 = a_1$$

$$n = 5 \rightarrow a_5 = a_1 + (5 - 1)r \Rightarrow a_5 = a_1 + 4r$$

$$n = 32 \rightarrow a_{32} = a_1 + (32 - 1)r \Rightarrow a_{32} = a_1 + 31r$$

Atividades resolvidas

6. Retomando uma situação apresentada anteriormente:
Roberta representou, no quadro abaixo, uma progressão aritmética escrevendo os cinco primeiros termos. Indicou nele o 44º e o 99º termos para que fossem determinados.

4	12	20	28	36	...	a_{44}	...	a_{99}	...

Como você faria para determinar esses dois termos?

- Observando que a razão r dessa PA é igual a 8 e utilizando a fórmula do termo geral, temos:

$$44º\ \text{termo: } a_{44} = a_1 + (44 - 1) \cdot r = a_1 + 43 \cdot r$$
$$a_{44} = a_1 + 43 \cdot 8$$
$$a_{44} = 348$$
$$99º\ \text{termo: } a_{99} = a_1 + (99 - 1) \cdot r$$
$$a_{99} = a_1 + 98 \cdot r$$
$$a_{99} = 4 + 98 \cdot 8 \Rightarrow a_{99} = 788$$

- Outra maneira de determiná-los seria, inicialmente, obter o termo geral da progressão aritmética em função apenas de n (que indica a posição do termo na PA):

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$\Big\downarrow \text{ Considerando que } a_1 = 4 \text{ e } r = 8$$
$$a_n = 4 + (n - 1) \cdot 8 \Rightarrow a_n = 8n - 4$$
$$\Big\downarrow \text{ Substituindo } n \text{ por 44 e por 99:}$$
$$a_{44} = 8 \cdot 44 - 4 \Rightarrow a_{44} = 348$$
$$a_{99} = 8 \cdot 99 - 4 \Rightarrow a_{99} = 788$$

7. A sequência $(1, 3, 5, 7, ..., a_n, ...)$ é formada pelos números naturais ímpares e consecutivos. Escreva a fórmula do termo geral dessa sequência. Após, obtenha o 1 000º número natural ímpar.

- A sequência é uma progressão aritmética de razão 2. Como conhecemos o 1º termo e a razão, podemos representar o termo geral a_n em função de n:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2$$
$$a_n = 1 + 2n - 2 \Rightarrow a_n = 2n - 1$$

- Para obter o 1 000º número natural ímpar, substituímos n por 1 000 na fórmula do termo geral, ou seja:

$$a_n = 2n - 1$$
$$\Big\downarrow n = 1\,000$$
$$a_{1\,000} = 2 \cdot 1\,000 - 1$$
$$a_{1\,000} = 1\,999$$

8. Interpolar meios aritméticos significa inserir entre dois números dados outros números de tal maneira que a sequência resultante seja uma progressão aritmética. Considere que entre os números 10 e 400 sejam inseridos 14 números de tal maneira a formar uma progressão aritmética. Descubra qual a razão dessa sequência.

- Vamos representar a situação na ilustração a seguir, sendo 10 e 400 os dois termos extremos na progressão aritmética a ser formada.

$$10, \underbrace{\_, \_, \_, \_, \_, \_, \_, \_, \_, \_, \_, \_, \_, \_}_{\text{Interpolação de 14 termos}}, 400$$

- A progressão aritmética terá 16 termos. Utilizando a fórmula do termo geral para $n = 16$, temos:

$$a_{16} = a_1 + 15 \cdot r$$
$$400 = 10 + 15 \cdot r$$
$$390 = 15 \cdot r$$
$$\frac{390}{15} = r \Rightarrow r = 26$$

Portanto, a razão da progressão é 26.

9. Em uma progressão aritmética, sabe-se que o 5º termo é igual a 25 e o 20º termo é igual a 100. Determine o 1º termo e a razão dessa sequência.

- A partir da fórmula do termo geral, podemos obter o seguinte sistema formado por duas incógnitas: o primeiro termo e a razão.

$$\begin{cases} a_5 = 25 \\ a_{20} = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4r = 25 \\ a_1 + 19r = 100 \end{cases}$$

- Multiplicando a 1ª equação por –1 e adicionando as duas equações membro a membro, temos:

$$\begin{cases} -a_1 - 4r = -25 \\ a_1 + 19r = 100 \end{cases}$$
$$15r = 75$$
$$r = 5$$

- Substituindo na 1ª equação, obtemos o 1º termo:

$$a_1 + 4r = 25$$
$$a_1 + 4 \cdot 5 = 25 \Rightarrow a_1 = 5$$

Portanto, o primeiro termo e a razão dessa progressão aritmética são iguais a 5.

Atividades

21. Considere a progressão aritmética (20, 15, 10, 5, ...).
Obtenha:
a) a fórmula do termo geral dessa sequência; 21. a) $a_n = -5n + 25$
b) o 15º termo dessa sequência. 21. b) –50

22. O termo geral de uma progressão aritmética é dado por $a_n = 4n - 1$. Faça o que se pede a seguir.
a) Escreva os 4 primeiros termos dessa sequência. 22. a) (3, 7, 11, 15)
b) Determine o 25º termo dessa progressão. 22. b) 99

23. Em uma progressão aritmética, sabe-se que a razão $r = -7{,}2$ e que o primeiro termo $a_1 = 100$. Faça o que se pede a seguir.
a) Obtenha o 20º termo dessa sequência. 23. a) –36,8
b) Escreva a fórmula do termo geral dessa progressão aritmética. 23. b) $a_n = -7{,}2n + 107{,}2$

24. Considere a sequência de números reais $\left(3 - \sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2}, 1 - 3\sqrt{2}\right)$. Responda:
a) É uma progressão aritmética? Justifique. 24. a) Sim; resposta pessoal.
b) Qual é o 20º termo dessa sequência? 24. b) $-16 - 20\sqrt{2}$

25. Escreva o termo geral da sequência de cada caso a seguir.
a) Sequência formada por todos os múltiplos de 3 maiores que 100. 25. a) $a_n = 3n + 99$
b) Sequência formada por todos os números pares maiores que 1. 25. b) $a_n = 2n$
c) Sequência formada por todos os múltiplos de 4 maiores que 50. 25. c) $a_n = 4n + 48$

26. Resolva cada uma das seguintes situações envolvendo progressão aritmética.
a) Determine o 8º termo de uma progressão aritmética considerando que seu 3º termo é igual a 16 e a razão é igual a –6. 26. a) –14
b) Quantos são os termos da progressão aritmética finita (–2, 3, 8, ..., 48)? 26. b) 11

c) Determine o primeiro termo de uma progressão aritmética considerando que o 10º termo é igual a 39 e a razão é igual a 4. 26. c) 3

d) Calcule a quantidade de múltiplos de 7 existentes entre 30 e 250. 26. d) 31

e) Elabore e resolva uma situação envolvendo múltiplos de 11 em certo intervalo. 26. e) Resposta pessoal.

27. Junte-se a um colega para realizar esta atividade.

> Artifício de três números em progressão aritmética de razão r: $(x, x + r, x + 2r)$.

a) Considerem que três números formam uma progressão aritmética de razão r e, além disso, o termo central seja representado pela letra x. Como vocês representariam os três termos dessa sequência em função de x e de r? 27. a) $(x - r, x, x + r)$

b) Agora, imaginem que, em uma progressão aritmética de razão r, o termo central seja x. Como vocês representariam os 5 termos dessa sequência em função de x e de r? 27. b) $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$

c) Verifiquem: Se as medidas dos ângulos internos de um triângulo estiverem em progressão aritmética, então uma dessas medidas deverá ser igual a 60°? 27. c) Sim.

d) Verifiquem: Se as medidas dos três lados de um triângulo retângulo estiverem em progressão aritmética, então os lados terão medidas proporcionais aos números 3, 4 e 5? 27. d) Sim.

28. (Unicamp-SP) Considere que $(a, b, 3, c)$ é uma progressão aritmética de números reais e que a soma de seus elementos é igual a 8. O produto dos elementos dessa progressão é igual a 28. Alternativa **c**.

a) 30 **b)** 10 **c)** –15 **d)** –20

29. (UPF-RS) A quantidade de números naturais múltiplos de 7 que existem entre 20 e 1 200 é: 29. Alternativa **c**.

a) 171 **b)** 170 **c)** 169 **d)** 85 **e)** 70

30. (ESPM-SP) O vigésimo termo da PA $(x, 3 + x, 2x + 1, ...)$ é igual a: 30. Alternativa **b**.

a) 56 **b)** 62 **c)** 69 **d)** 74 **e)** 81

31. (Mack-SP) Em um triângulo retângulo ABC, reto em B, as medidas de seus lados AB, BC e AC formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão 3. Então, das alternativas abaixo, as medidas de AB, BC e AC são, respectivamente, 31. Alternativa **c**.

a) 3, 6 e 9 **b)** 6, 9 e 12 **c)** 9, 12 e 15 **d)** 12, 15 e 18 **e)** 15, 18 e 21

Propriedades de uma progressão aritmética

A sequência denominada **progressão aritmética** permite estabelecer relações diversas envolvendo juros simples e função afim. Além disso, o conhecimento de propriedades que relacionam os termos de uma PA facilita a resolução de situações de contagem.

Apenas para exemplificar, há uma curiosa questão que já fez parte de uma avaliação para o ingresso em determinada instituição de Ensino Superior envolvendo progressão aritmética. Leia-a com atenção.

> (Uerj) A figura apresenta 25 retângulos. Observe que quatro desses retângulos contêm números e um deles, a letra n. Podem ser escritos, em todos os outros retângulos, números inteiros positivos, de modo que, em cada linha e em cada coluna, sejam formadas progressões aritméticas de cinco termos.

			n	
	65			
				130
		75		
0				

> Calcule:
>
> **a)** a soma dos elementos da quarta linha da figura; **b)** o número que deve ser escrito no lugar de n.

O item **a** dessa questão pode ser resolvido considerando que, na quarta linha da tabela, conhecemos o termo central. Como os cinco números que compõem essa linha formam da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda uma progressão aritmética, podemos expressá-los da seguinte maneira em função da razão r da PA:

$$(75 - 2r, 75 - r, 75, 75 + r, 75 + 2r)$$

Como queremos a soma desses números, temos:

$$S = (75 - 2r) + (75 - r) + 75 + (75 + r) + (75 + 2r)$$

$$S = 5 \cdot 75 \Rightarrow S = 375$$

Para pensar e discutir

1. Se três números estiverem em PA de razão r e o segundo for igual a x, como você representa os outros dois em função de x e de r? 1. $x - r, x, x + r$

2. Desafio: Como você resolveria o item **b** da questão anterior? 2. Resposta pessoal.

Existem duas propriedades de progressão aritmética que podem ser utilizadas na resolução de situações envolvendo esse tipo de sequência. Embora sejam propriedades de verificação imediata, após enunciar cada uma dessas propriedades, a seguir as justificamos conforme o conceito de progressão aritmética.

Em uma progressão aritmética qualquer, podemos observar duas propriedades que relacionam seus termos. Observe abaixo.

Propriedade 1 – Qualquer termo de uma PA, a partir do segundo, é sempre a média aritmética entre os termos anterior e posterior a ele.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ para } n \geq 2$$

Exemplo:

Considerando a progressão aritmética (10, 25, 40, 55, 70, 85, ...), temos, conforme a propriedade:

$$25 = \frac{10 + 40}{2}$$

$$40 = \frac{25 + 55}{2}$$

$$55 = \frac{40 + 70}{2}$$

$$\ldots$$

Justificativa da **propriedade 1**

- Essa propriedade pode ser justificada por meio do conceito de razão de uma progressão aritmética. Assim, se considerarmos genericamente que os números a, b e c são termos consecutivos de uma PA, temos:

$$(\ldots, a, b, c, \ldots) \text{ em PA} \Rightarrow \begin{cases} b - a = r \text{ (I)} \\ c - b = r \text{ (}II\text{)} \end{cases}$$

- Comparando (I) com (II), temos:

$$b - a = c - b$$

$$b + b = a + c$$

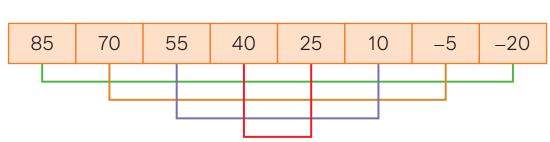
$$2b = a + c \Rightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

O termo central é a média aritmética dos outros dois.

Propriedade 2 – Em uma PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos termos extremos.

Exemplo:

Considerando a progressão aritmética finita (85, 70, 55, 40, 25, 10, –5, –20), temos que os termos equidistantes dos extremos têm a mesma soma.



Acervo editora

Note que, nesse exemplo, a soma de dois termos que são equidistantes dos extremos é igual à soma dos dois termos extremos: 65.

Justificativa da **propriedade 2**

- Para justificar essa propriedade, vamos considerar uma progressão aritmética finita formada por n termos, em que os termos a_p e a_q, abaixo representados, são equidistantes dos extremos:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_p, ..., a_q, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$$

- Se os termos a_p e a_q são equidistantes dos extremos, então a quantidade de termos existente antes de ap é a mesma quantidade de termos existente após a_q, isto é:

$$p - 1 = n - q \text{ (I)}$$

- Utilizando o termo geral da progressão aritmética, temos:

$$a_p = a_1 + (p - 1) \cdot r \text{ (II)} \qquad a_q = a_1 + (q - 1) \cdot r \text{ (III)}$$

- Adicionando membro a membro II com III:

$$a_p + a_q = a_1 + (p - 1) \cdot r + a_1 + (q - 1) \cdot r$$
$$a_p + a_q = a_1 + a_1 + (p - 1 + q - 1) \cdot r$$
$$\Big\downarrow \text{ Substituindo (I)}$$
$$a_p + a_q = a_1 + a_1 + (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{q} + q - 1) \cdot r$$

$$a_p + a_q = a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$a_p + a_q = a_1 + a_n$$

Portanto, a soma de dois termos equidistantes é igual à soma dos termos extremos.

Atividades resolvidas

10. Retomando a questão dos 25 retângulos da página 84, vamos considerar o fato de que, em qualquer linha e em qualquer coluna, temos progressões aritméticas.

$4x$			n	
$3x$	65	z		
$2x$		y		130
x		75		
0				

- Podemos formar uma PA na primeira coluna utilizando x como o segundo elemento.
- Na 3ª linha, o 3º elemento (representado por y) é a média aritmética entre $2x$ e 130, isto é:

$$y = \frac{2x + 130}{2} \Rightarrow y = x + 65 \text{ (I)}$$

- Na 3ª coluna, o terceiro elemento é a média aritmética entre o 2º e o 4º elementos, isto é:

$$y = \frac{z + 75}{2}$$
$$\Big\downarrow \text{ Substituindo (I)}$$
$$x + 65 = \frac{z + 75}{2} \Rightarrow z = 2x + 55 \text{ (II)}$$

- Na 2ª linha, o segundo elemento é a média aritmética entre o 1º e o 3º elementos, ou seja:

$$65 = \frac{3x + z}{2}$$
$$\Big\downarrow \text{ Substituindo (II)}$$
$$130 = 3x + 2x + 55 \Rightarrow x = 15$$

Agora que você conhece o valor de x, é possível preencher o quadro. Você encontrará 105 como o valor correspondente a n.

11. (Uece) Os números reais positivos x, y e z são tais que $\log x$, $\log y$, $\log z$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Nestas condições, podemos concluir acertadamente que entre os números x, y e z existe a relação

a) $2y = x + z$ **b)** $y = x + z$ **c)** $z^2 = xy$ **d)** $y^2 = xz$

- Pode-se utilizar a propriedade de PA em que um termo é a média aritmética entre o termo que o antecede e o termo que o sucede. Entretanto, também podemos utilizar o conceito de PA, e, para obter a relação procurada, empregar propriedade logarítmica:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$
$$\log y - \log x = \log z - \log y$$
$$\log\left(\frac{y}{x}\right) = \log\left(\frac{z}{y}\right)$$
$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y} \Rightarrow y^2 = xz$$

Alternativa **d**.

Para explorar

1. Escreva no caderno 11 números em progressão aritmética. A seguir, junte-se a um colega para investigar a veracidade das afirmações a seguir sobre essa progressão aritmética. 1. Resposta pessoal.

Afirmação 1 – O 4º termo é a média aritmética entre o 3º termo e o 5º termo.
Afirmação 2 – O 10º termo é a média aritmética entre o 9º termo e o 11º termo.
Afirmação 3 – A soma resultante da adição do 2º termo com o 10º termo é igual à soma resultante da adição do 1º termo e do 11º termo.
Afirmação 4 – A soma resultante da adição do 3º termo com o 9º termo é igual à soma resultante da adição do 1º termo com o 11º termo.

2. Responda às questões a seguir, comparando a sequência que você elaborou com a sequência elaborada por um colega.

a) A sequência que você elaborou é diferente da sequência feita pelo colega? 2. a) Resposta pessoal.

b) O que você observou em relação à veracidade das quatro afirmações? Seu colega chegou à mesma conclusão? 2. b) Resposta pessoal.

Progressão aritmética e outras relações

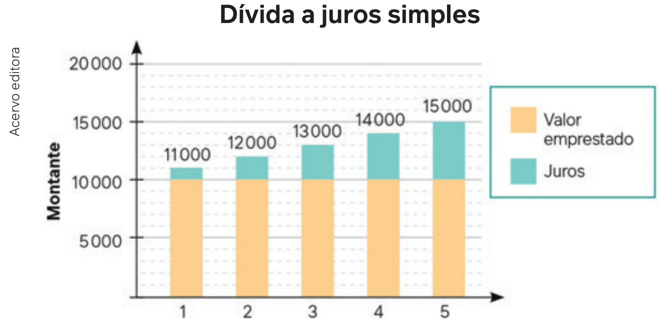
Juros simples e progressão aritmética

Você sabe o que significa juros? Já ouviu falar em juros simples?

Mesmo sem ter observado alguma situação referente ao assunto, você sabe que, quando emprestamos dinheiro de algum banco, pagamos uma compensação por esse empréstimo. Essa compensação é chamada de juros. Também pagamos juros (e multa) quando não quitamos uma conta na data de vencimento.

Vamos supor que Júlia tenha emprestado R$ 10.000,00 de seu pai. Ela combinou que pagaria juros de 10% ao ano na modalidade de juros simples, isto é, os juros seriam calculados anualmente sempre tomando por base o capital emprestado. Para compreender como seria a sequência de montantes (montante = capital + juros) se ela não efetuasse nenhum pagamento ao longo dos cinco primeiros anos, Júlia elaborou o gráfico a seguir.

Dívida a juros simples



Fonte: Dados fornecidos por Júlia (dados fictícios).

Juros simples são os juros cobrados sobre o valor emprestado.

Para pensar e discutir

1. Os juros, ano a ano, estão aumentando? Justifique. 1. Não; resposta pessoal.
2. E os montantes ano a ano? Justifique. 2. Sim; resposta pessoal.
3. Qual será a dívida no final de 10 anos caso Júlia não efetue nenhum pagamento? 3. R$ 20.000,00.

Observando o gráfico elaborado por Júlia, é possível perceber que o crescimento do montante ano a ano é sempre o mesmo. Assim, se considerarmos a sequência formada pelos montantes, estaremos diante de uma particular sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o anterior acrescido dos juros do período, sendo que os juros são sempre os mesmos. Observando a sequência formada pelos montantes ao longo dos cinco primeiros anos, temos uma progressão aritmética:

$$\text{Montantes} \rightarrow \underbrace{(11\,000,\ 12\,000,\ 13\,000,\ 14\,000,\ 15\,000)}_{\rightarrow \text{ PA de razão igual a } 1\,000}$$

No regime de juros simples, os montantes formam uma progressão aritmética em que a razão corresponde ao juro cobrado em cada período, isto é, o percentual aplicado ao capital inicial.

Se considerarmos um capital ***C*** aplicado a uma taxa **i** (na forma decimal) na modalidade de juros simples, os montantes ($\boldsymbol{M_n}$) ao longo de períodos irão formar a seguinte progressão aritmética de razão igual a ***Ci*** (o capital multiplicado pela taxa de juros):

$$M_1 = C + i \cdot C = C \cdot (1 + i) = C + Ci$$
$$M_2 = C \cdot (1 + i) + i \cdot C = C \cdot (1 + i + i) = C \cdot (1 + 2i) = C + 2Ci$$
$$M_3 = C \cdot (1 + 2i) + i \cdot C = C \cdot (1 + 2i + i) = C \cdot (1 + 3i) = C + 3Ci$$
$$M_4 = C \cdot (1 + 3i) + i \cdot C = C \cdot (1 + 3i + i) = C \cdot (1 + 4i) = C + 4Ci$$
$$(\ldots)$$
$$M_n = C \cdot (1 + ni) = C + nCi$$

Agora, observe o que acontece quando aplicamos a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética considerando a sequência dos montantes:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$M_n = M_1 + (n - 1) \cdot iC$$
$$M_n = C(1 + i) + (n - 1) \cdot iC$$
$$M_n = C + iC + niC - iC$$
$$M_n = C + niC \Rightarrow \boldsymbol{M_n = C(1 + ni)}$$

Para explorar

Junte-se a um colega e façam o que se pede a seguir.

Parte 1

Considerem uma dívida de R$ 6.000,00 ao longo de 10 meses, a juros simples de 1,5% ao mês.

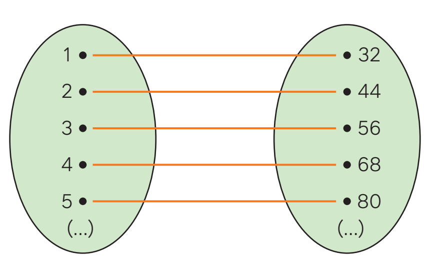
Utilizando planilha eletrônica, elaborem uma tabela e um gráfico de colunas com os valores mês a mês dessa dívida considerando que não houve pagamento. Parte 1 - Resposta no Manual do Professor.

Parte 2

Criem uma situação envolvendo um empréstimo feito na modalidade de juros simples ao longo de 12 meses. Com base nela, escrevam a sequência dos montantes considerando que não houve pagamento ao longo dos 12 meses. Parte 2 - Resposta no Manual do Professor.

Funções e progressão aritmética

Quando escrevemos o termo geral de uma progressão aritmética, expressamos qualquer termo em **função** de sua posição na sequência. Por exemplo, vamos considerar a progressão aritmética (32, 44, 56, 68, 80, ...). No diagrama, representamos a relação entre os índices (que indicam as posições dos termos na sequência) e os termos da PA.



Acervo editora

Agora, observe o que acontece quando obtemos o termo geral dessa progressão aritmética.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$a_n = 32 + (n - 1) \cdot 12$$
$$a_n = 12n + 20$$
$$a_n = f(n) = 12n + 20$$

O termo geral é uma função de *n* (*n* sendo um número natural não nulo que indica a posição do termo na sequência).

Observe o que acontece nessa função quando atribuímos à variável *n* valores naturais iniciando por 1.

$$n = 1 \rightarrow a_1 = f(1) = 12 \cdot 1 + 20 \Rightarrow a_1 = f(1) = 32$$
$$n = 2 \rightarrow a_2 = f(2) = 12 \cdot 2 + 20 \Rightarrow a_2 = f(2) = 44$$
$$n = 3 \rightarrow a_3 = f(3) = 12 \cdot 3 + 20 \Rightarrow a_3 = f(3) = 56$$
$$\ldots$$

Para pensar e discutir

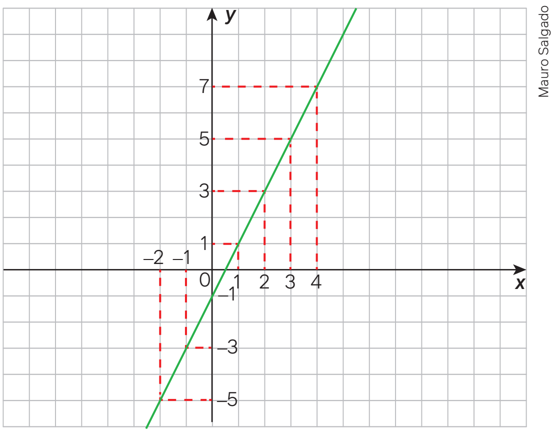
1. Na função obtida no exemplo, isto é, $f(n) = 12n + 20$, qual é o significado do coeficiente da variável *n*? E o que esse coeficiente representa na progressão aritmética? Qual é o significado de $f(10)$ em relação à progressão aritmética? 1. Taxa de crescimento; o valor da razão; o 10º termo.

2. Na função afim definida por $f(x) = -5x + 20$, a sequência $f(1), f(2), f(3), \ldots$ representa uma PA. Qual é a razão dessa PA? 2. -5

Observamos anteriormente a relação entre o termo geral de uma progressão aritmética e a lei de formação de uma função afim. Agora, vamos analisar graficamente uma função afim definida no conjunto dos números reais. Analise a atividade resolvida a seguir.

Atividades resolvidas

12. No plano cartesiano a seguir está esboçado o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1$. Observe alguns desses pontos no gráfico.



Associe o comportamento da função conforme lei de formação e gráfico com progressão aritmética.

- Vamos listar as coordenadas dos pontos indicados com linha tracejada no gráfico na ordem em que eles aparecem, ou seja, da esquerda para a direita.

Valores das abscissas

$(-2, -5)$
$(-1, -3)$
$(0, -1)$
$(1, 1)$
$(2, 3)$
$(3, 5)$
$(4, 7)$

Valores das ordenadas

- Enquanto as abscissas dos pontos aumentam de 1 em 1 (é uma progressão aritmética), as ordenadas aumentam de 2 em 2, isto é, em progressão aritmética de razão 2. Na lei de formação da função afim, a taxa de crescimento é igual a 2.

$$f(x) = 2x - 1$$

Taxa de crescimento da função é igual a razão da progressão aritmética.

13. Marcos emprestou R$ 20.000,00 para seu amigo a uma taxa de 2% ao mês na modalidade de juros simples. Considerando que ele só irá pagar ao final de 10 meses, calcule o montante correspondente à dívida ao final desse período.

- Uma maneira de calcular seria utilizar direto a relação $M_n = C \cdot (1 + ni)$. Nesse caso, a taxa é 2% = 0,02, o capital C é 20 000 e o período de aplicação é de 10 meses, isto é:

$$M_n = C \cdot (1 + ni)$$
$$M_{10} = 20\,000 \cdot (1 + 10 \cdot 0{,}02)$$
$$M_{10} = 20\,000 \cdot 1{,}2 \Rightarrow M_{10} = 24\,000$$

- Outra maneira seria calcular o 10º termo da progressão aritmética formada pelos montantes, sendo que o 1º montante é o primeiro termo da PA e a razão da PA é 2% sobre o capital 20 000.

$$a_{10} = a_1 + 9 \cdot r$$

$r = 0{,}02 \cdot 20\,000 = 400$

$a_1 = 1{,}02 \cdot 20\,000 = 20\,400$

Portanto, o montante após os 10 meses é de R$ 24.000,00

Para pensar e discutir

1. E se considerarmos o valor do empréstimo como 1º termo da PA, qual termo corresponderá ao montante 10 meses depois? 1. 11º

Atividades

32. Considere a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 10$. Responda:

a) A sequência ($f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ...) é uma progressão aritmética? 32. a) Sim.

b) Qual é o valor da diferença $f(30) - f(29)$? A que ele corresponde? 32. b) 2; à razão

33. Considere a progressão aritmética em que estão representados os três primeiros termos (10, 8, 6, ...). Determine:

a) o termo geral dessa progressão aritmética em função de n; 33 a) $a_n = -2n + 12$

b) o 120º termo dessa sequência. 33. b) –228

34. Em cada caso a seguir, a sequência representada é uma progressão aritmética. Determine x.

a) $(4x, x + 2, -x - 6)$ 34. a) $x = 10$

b) $(x^2 - 1, 4x - 1, x + 5)$ 34. b) $x = 1$ ou $x = 6$

35. Considere a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x - 1$.

a) Indique o conjunto imagem dessa função. 35. a) $S = \{-3, -5, -7, -9, ...\}$

b) Esboce no plano cartesiano o gráfico dessa função. 35. b) Resposta no Manual do Professor.

36. Juliana contraiu uma dívida de R$ 1.500,00 com um colega de trabalho. Combinou que pagaria 2% ao mês de juros na modalidade de juros simples e que pagaria o empréstimo e os juros correspondentes em um só pagamento 8 meses depois.

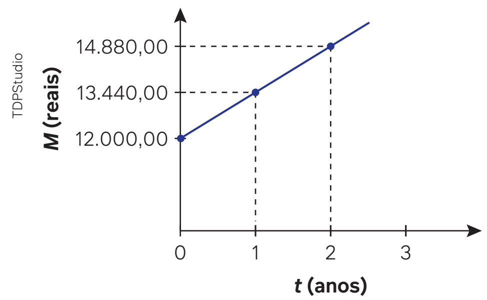
a) Elaborе uma tabela contendo, mês a mês, os juros e os montantes correspondentes. 36. a) Resposta no Manual do Professor.

b) Qual valor ela deverá pagar, no final, somente de juros? 36. b) R$ 240,00.

c) E que valor total deverá pagar? 36. c) R$ 1.740,00.

37. Elabore uma situação de empréstimo a juros simples usando como referência a situação da atividade anterior, porém com dados diferentes. Apresente essa situação a um colega para que ele a resolva e, no final, confira os resultados obtidos. 37. Resposta pessoal.

38. O gráfico abaixo representa um esboço de uma situação do empréstimo de uma quantia ao longo de alguns anos, sendo *M* o montante correspondente.



a) Indique, com base no gráfico, qual foi o capital emprestado. 38. a) R$ 12.000,00.

b) Obtenha a taxa de juros simples correspondente ao empréstimo. 38. b) 12%

c) Obtenha a lei de formação que representa *M* (montante) em função do tempo *t* (anos). 38. c) $M = 12\,000 + 1\,440t$

d) Determine o montante correspondente ao 3º mês, considerando que a dívida não foi paga. 38. d) R$ 16.320,00.

39. Considere uma função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 7{,}2x - 10$.

a) Qual a taxa de crescimento dessa função? 39. a) 7,2

b) Descreva a sequência ($f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, ...) e indique o significado, nessa sequência, da taxa de crescimento dessa função. 39. b) PA de razão 7,2, coincidindo esse valor com a taxa de crescimento da função.

40. Os empresários A e B resolveram fazer doações para uma instituição de caridade no munícipio em que moram. No quadro a seguir estão os valores, em reais, das transferências financeiras que foram programadas para os cinco primeiros meses de 2025.

Empresa	janeiro	fevereiro	março	abril	maio
A	R$ 12.000,00	R$ 11.400,00	R$ 10.800,00	R$ 10.200,00	R$ 9.600,00
B	R$ 300,00	R$ 600,00	R$ 900,00	R$ 1.200,00	R$ 1.500,00

40. Fevereiro de 2026.

Nos meses seguintes, os valores transferidos pelos empresários continuarão no padrão observado na tabela. Em qual mês a transferência feita pelo empresário A será igual a transferência feita pelo empresário B?

41. (UFU-MG) No quadro abaixo, em cada linha e em cada coluna, os elementos formam uma progressão aritmética.

a_1	2	a_3
b_1	b_2	6
3	c_2	c_3

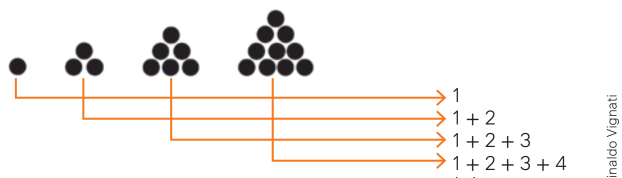
Sabendo-se que as razões das progressões da segunda linha e da segunda coluna são iguais, então $a_1 + c_3$ é igual a

a) 12 **b)** 11 **c)** 10 **d)** 13 41. Alternativa **c**.

Soma dos termos de uma progressão aritmética

Você certamente já ouviu falar dos pitagóricos. No início deste capítulo, foram abordados os números figurados. Os chamados padrões numéricos, associados às formas geométricas, fizeram com que pitagóricos dedicassem boa parte de seu tempo buscando regularidades. Assim, como fruto de suas pesquisas, surgiram os números triangulares, os números quadrados, os números pentagonais etc., conforme descrito anteriormente.

Os números triangulares podem ser obtidos a partir da soma de números em progressão aritmética. Vejamos exemplos.



Agora, observe outra relação muito curiosa atribuída a Nicômaco de Gerasa (60 d.C. – 120 d.C.) que também está relacionada com progressão aritmética: a soma de cubos de números naturais consecutivos é igual ao quadrado da soma desses mesmos números naturais. A seguir, você poderá observar esse resultado e até verificar as igualdades apresentadas.

$1^3 = 1^2$

$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)^2$

(...)

Para pensar e discutir

1. Qual é o resultado de $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)^2$? Explique como calculou. 1. 1 296; resposta pessoal
2. Explique como você calcularia o valor da soma $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + (...) + 20^3$. Utilizaria no cálculo progressão aritmética? 2. Respostas pessoais.

Voltaremos a essa segunda questão logo após compreendermos uma fórmula para o cálculo da soma dos termos de uma progressão aritmética. Iniciamos representando por S_n a soma dos n primeiros termos da progressão:

$$\underbrace{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n}_{\text{Soma dos } n \text{ termos de uma PA.}}$$

A soma dos *n* termos de uma progressão aritmética pode ser calculada pela relação:

$$\mathbf{S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n}$$

Acompanhe a seguir a demonstração dessa relação matemática a partir da 2ª propriedade de progressão aritmética.

Escrevemos a soma dos *n* termos da PA de duas maneiras:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \text{ (I)}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \text{ (II)}$$

Adicionamos membro a membro I e II agrupando os termos do segundo membro de dois em dois:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Observando que dois termos equidistantes dos extremos têm a mesma soma que a dos dois termos extremos:

$$2 \cdot S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ vezes}}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \text{ ou } \underbrace{S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n}_{\text{soma dos } n \text{ primeiros termos da PA}}$$

Observações:

1. De acordo com essa relação matemática, para calcular a soma dos termos de qualquer progressão aritmética, basta conhecer o primeiro termo, o último termo e o número de termos.
2. Quando a progressão aritmética tiver um número ímpar de termos, a soma dos termos da PA pode ser calculada pelo produto do termo médio pelo número de termos.

$$S_n = \underbrace{\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n = (\textbf{termo médio})}_{n \text{ ímpar}} \cdot n$$

Atividades resolvidas

14. Vamos retomar uma questão sobre o valor da soma $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + 20^3$. Calcule essa soma utilizando a soma dos termos de uma progressão aritmética.

- Representando essa soma por x, conforme apresentado anteriormente, temos:

$$x = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + 20^3$$

$$x = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + 20)^2$$

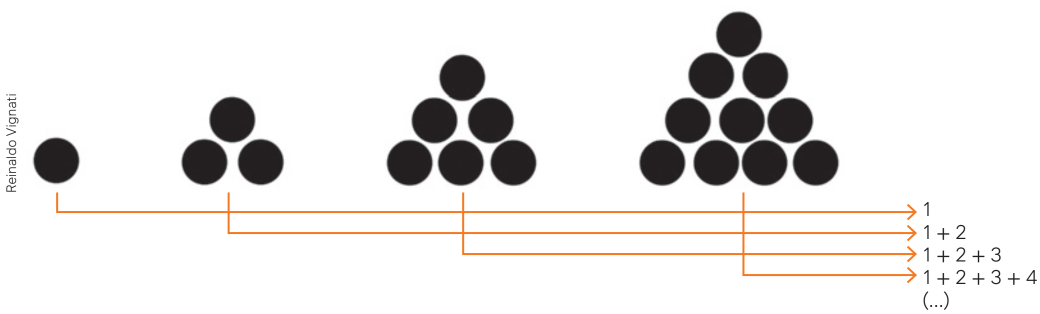
$$\downarrow \text{Fórmula: } S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n$$

$$x = \left[\left(\frac{a_1 + a_{20}}{2}\right) \cdot 20\right]^2$$

$$x = \left[\left(\frac{1 + 20}{2}\right) \cdot 20\right]^2 \Rightarrow x = 210^2 = 44\,100$$

A soma resultante é 44 100.

15. Obtenha, conforme ilustração a seguir, o 1 000º número triangular.



- O 1 000º número triangular pode ser obtido como a soma dos 1 000 primeiros números naturais começando por 1:

1 000º número triangular é igual a $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 1\,000$

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n$$

$$S_{1\,000} = \left(\frac{a_1 + a_{1\,000}}{2}\right) \cdot 1\,000$$

$$S_{1\,000} = \left(\frac{1 + 1\,000}{2}\right) \cdot 1\,000 \Rightarrow S_{1\,000} = 500\,500$$

Portanto, o 1 000º número triangular é 500 500.

16. Dada a progressão aritmética $(1, 5, 9, 13, ..., a_n, ...)$, obtenha a expressão que fornece a soma nos n termos em função de n.

- Obtemos inicialmente a fórmula do termo geral da progressão aritmética:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 4$$

$$a_n = 1 + 4n - 4 \Rightarrow a_n = 4n - 3$$

- Determinando a soma dos n termos em função de n:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n$$

$$S_n = \left(\frac{1 + 4n - 3}{2}\right) \cdot n$$

$$S_n = (2n - 1) \cdot n \Rightarrow S_n = 2n^2 - n$$

Para pensar e discutir

1. Em relação à atividade **resolvida 15**, explique como podemos obter o 25º número triangular. 1. Resposta pessoal.
2. Em relação à PA da **atividade 16**, como é possível calcular o 30º termo utilizando a relação matemática obtida que fornece a soma dos n termos em função do número de termos?

2. $a_{30} = S_{30} - S_{29} = (2 \cdot 30\ 2 - 30) - (2 \cdot 292 - 29) = 1\,770 - 1\,653 = 117$

Atividades

42. Faça o que se pede a seguir.

a) Calcule a soma dos 100 primeiros números naturais ímpares. 42. a) 10 000

b) Calcule a soma dos *n* primeiros números naturais ímpares. 42. b) n^2

43. A expressão $S_n = 2n^2$ representa a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética. Então:

a) determine o primeiro termo da PA; 43. a) 2

b) determine o segundo termo da PA; 43. b) 6

c) obtenha a razão da PA; 43. c) 4

d) calcule o 20º termo dessa sequência. 43. d) 78

44. Considere a progressão aritmética (–10, –6, –2, ...) e faça o que se pede.

a) Obtenha a fórmula que representa o termo geral dessa sequência. 44. a) $a_n = 4n - 14$

b) Determine a expressão matemática que representa a soma dos *n* termos dessa progressão aritmética em função do número de termos *n*. 44. b) $S_n = 2n^2 - 12n$

45. Reúna-se com um colega e façam as atividades a seguir.

a) Elaborem uma progressão aritmética decrescente. 45. a) Resposta pessoal.

b) Escrevam a fórmula do termo geral dessa sequência. 45. b) Resposta pessoal.

c) Com base na fórmula do termo geral, obtenham uma expressão matemática que forneça a soma (S_n) dos seus *n* termos em função apenas do *n*. 45. c) Resposta pessoal.

46. Resolva as situações descritas a seguir.

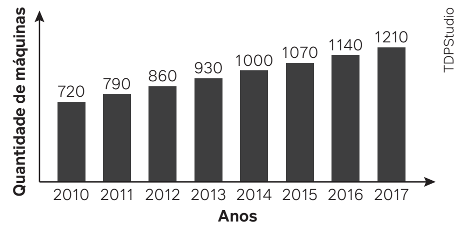
a) Sabe-se que a soma dos 10 termos de uma progressão aritmética é igual a 200. Calcule o 10º termo dessa progressão considerando que o 1º termo é igual a 2. 46. a) 38

b) Em uma progressão aritmética formada por 100 termos, sabe-se que o 3º termo é 10 e o 98º termo é igual a 90. Qual é a soma dos termos dessa progressão aritmética? 46. b) 5 000

c) Em uma progressão aritmética finita, sabe-se que o 1º termo é 3 e o último termo é igual a 31. Se, além disso, a soma de todos os termos for igual a 136, quantos termos tem essa sequência? 46. c) 8 termos

47. Um atleta em sua preparação para uma competição planejou a seguinte rotina diária de treinos: no primeiro dia irá correr 5 km e, a partir do segundo dia, correrá 200 m a mais do que ocorreu no dia anterior. Qual a distância total que ele deverá percorrer nos 10 primeiros dias de treino? 47. 59 km

48. Uma fábrica de máquinas agrícolas teve seu início em 2010 produzindo 720 máquinas. A partir daí, sua produção foi resumida no gráfico a seguir:



Essa fábrica planejou chegar no final do ano de 2025 com um total de 20 000 máquinas. Admitindo que a quantidade de máquinas evolua segundo a mesma razão de crescimento do período mostrado no gráfico ano a ano, responda: Essa fábrica atingirá a meta? 48. A meta não deverá ser atingida.

49. Em uma loja de veículos usados, determinado carro foi financiado em dois anos, com parcelas mensais cobradas da seguinte maneira:

- a primeira parcela será no valor de R$ 1.000,00;
- as demais irão diminuir R$ 20,00 ao mês em relação à anterior.

Após pagar a 24ª parcela, qual será o montante total pago pelo veículo? 49. R$ 18.480,00.

50. (Mack-SP) Se 1 + 4 + 7 + 10 +... + *N* = 925, então o valor de *N* é igual a 50. Alternativa **c**.

a) 69 **b)** 71 **c)** 73 **d)** 75 **e)** 77

51. (Acafe-SC) O proprietário de um cinema está organizando as poltronas para um evento especial. Para atender a demanda desse evento, serão necessárias 540 poltronas. Em função da estrutura da apresentação do evento, foi solicitado que as poltronas fossem distribuídas da seguinte forma: 8 poltronas na primeira fila, 12 poltronas na segunda fila, 16 na terceira fila, e assim por diante. 51. Alternativa **d**.

Com base nessas informações, é correto afirmar:

a) A soma das quantidades de poltronas da primeira e oitava filas é diferente do número de poltronas da décima fila.

b) Seguindo a distribuição solicitada, a décima fila terá mais de 44 poltronas.

c) Serão necessárias 20 filas para organizar as 540 poltronas de acordo com a solicitação do evento.

d) Seguindo a distribuição solicitada, a última fila será composta de 64 poltronas.

52. (UFRGS) Desde a Grécia Antiga, sabe-se que a soma dos números ímpares consecutivos, a partir do 1, é sempre um quadrado perfeito. Como exemplo, tem-se

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

Então, a soma de todos os números ímpares menores do que 100 é 52. Alternativa **c**.

a) 42^2 **b)** 49^2 **c)** 50^2 **d)** 99^2 **e)** 100^2

Progressão geométrica

3

A imagem a seguir foi gerada utilizando um algoritmo em um computador.

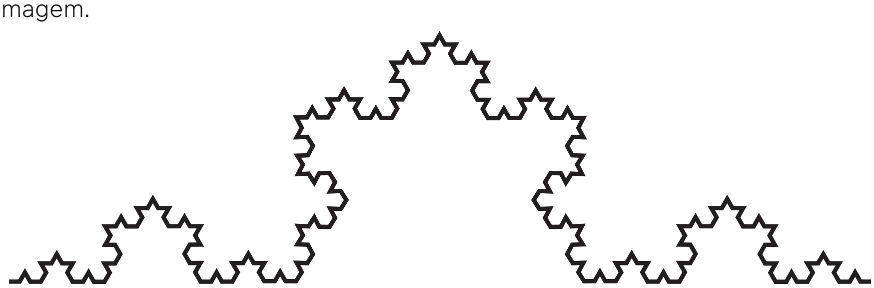
Zulia Z/Shutterstock.com

Fractal tridimensional gerado por computador, criando a ilusão de uma cobra em uma floresta.

Aproximando cada vez mais a imagem, mais detalhes poderão ser observados. Surpreendente é observar que cada forma dentro do conjunto contém um número de formas menores, que contêm um número de outras formas ainda menores, indefinidamente. Essa imagem ilustra a **teoria dos fractais**.

Os primeiros fractais foram descobertos por Karl Weierstrass, Georg Cantor, Helge von Koch e outros no início do século XIX. Como um bom exemplo, temos a curva de Koch, que em uma determinada etapa pode ser representada conforme a imagem.

Tarcísio Garbellini

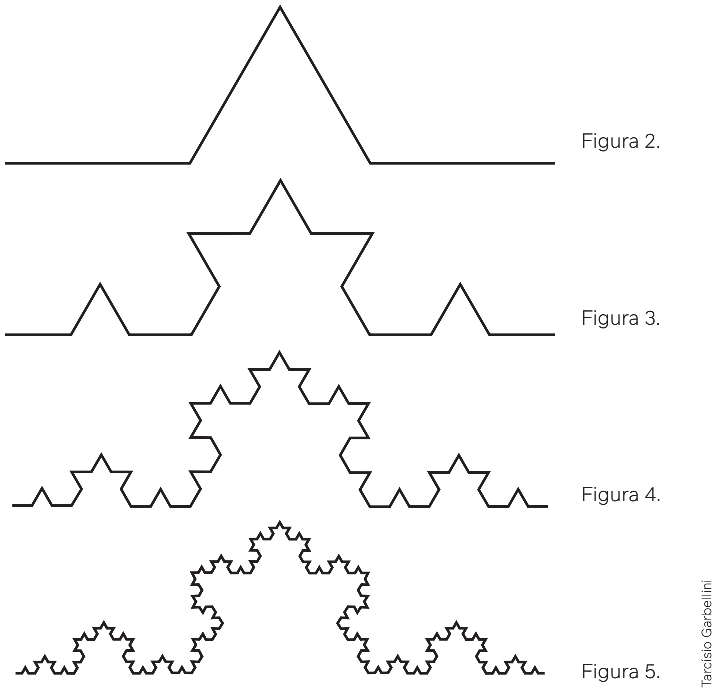


Mas como podemos obter essa figura?

O algoritmo a seguir mostra como ela pode ser obtida.

1. Trace uma linha de determinado comprimento.
2. Divida essa linha em três partes iguais e remova a parte central.
3. Trace dois segmentos idênticos ao retirado e coloque-os lado a lado, construindo assim um triângulo equilátero sem base.
4. Repita esse procedimento indefinidamente para cada segmento da figura.

A ideia desse algoritmo é obter a sequência de figuras a seguir. Sugerimos que você, utilizando uma folha de papel, um lápis e uma régua, faça a construção do fractal passo a passo, conforme o algoritmo. Em seguida, verifique se conseguiu chegar à sequência abaixo.



(...)

Para pensar e discutir

1. Você saberia escrever outro algoritmo para a construção da curva de Koch? Explique. 1. Respostas pessoais.
2. A linha da **figura 2** tem comprimento maior, menor ou igual ao comprimento da linha da **figura 3**? 2. Menor.
3. Se o comprimento da linha da **figura 1** for unitário (1 u.c.), qual número representa o comprimento da linha da **figura 5**? 3. $\frac{256}{81}$ u.c.

Ao analisarmos os comprimentos das linhas das figuras construídas, temos uma **sequência** denominada **progressão geométrica**. Para explicar o conceito de progressão geométrica, vamos utilizar a sequência formada pelos comprimentos dessas linhas, conforme as etapas a seguir. Para isso, com base nos fractais, vamos considerar um a um os comprimentos dessas figuras, porém utilizando para a **figura 1** o comprimento unitário.

Em unidades de comprimento, temos:

- figura 1 $\rightarrow$ 1;
- figura 2 $\rightarrow 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ (são 4 segmentos de comprimento $\frac{1}{3}$);
- figura 3 $\rightarrow 16 \cdot \frac{1}{9} = \frac{16}{9}$ (são 16 segmentos de comprimento $\frac{1}{9}$);
- figura 4 $\rightarrow 64 \cdot \frac{1}{27} = \frac{64}{27}$ (são 64 segmentos de comprimento $\frac{1}{27}$);
- figura 5 $\rightarrow 256 \cdot \frac{1}{81} = \frac{256}{81}$ (são 256 segmentos de comprimento $\frac{1}{81}$);

(...).

A sequência formada $\left(1, \frac{4}{3}, \frac{16}{9}, \frac{64}{27}, \frac{256}{81}, ...\right)$ pode assim ser obtida a partir do segundo termo: cada termo é o anterior multiplicado por $\frac{4}{3}$. Temos aí um exemplo de progressão geométrica.

Progressão geométrica (PG) é toda sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo imediatamente anterior multiplicado por uma constante. Essa constante é chamada de razão da progressão.

Quando os termos são não nulos, há outra maneira de conceituarmos uma progressão geométrica: é a sequência de números na qual o quociente entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante.

Analise a seguir exemplos de progressão geométrica.

Exemplo 1

Iniciando pelo número 10, vamos formar uma sequência em que cada número a partir do segundo é o dobro do termo imediatamente anterior, isto é:

$$\underbrace{(10, 20, 40, 80, 160, \ldots)} \rightarrow \textbf{PG crescente} \text{ de razão igual a } 2$$

Exemplo 2

Iniciando pelo número 1 000, vamos formar uma sequência em que os números vão diminuindo 10% em relação ao que vem imediatamente antes, isto é, cada número a partir do segundo é 90% do termo anterior.

$$\underbrace{(1\,000, 900, 810, 729, \ldots)} \rightarrow \textbf{PG decrescente} \text{ de razão igual a } 0{,}9$$

Exemplo 3

Iniciando pelo número 3, vamos construir uma sequência em que cada número a partir do segundo é o termo imediatamente anterior multiplicado pelo número negativo –2.

$$\underbrace{(3, -6, 12, -24, 48, -96, \ldots)} \rightarrow \textbf{PG oscilante} \text{ de razão igual a } -2$$

Para pensar e discutir

1. É possível termos uma progressão geométrica constante? Exemplifique. 1. Sim; resposta pessoal.
2. Quando uma progressão geométrica é oscilante? Exemplifique. 2. Respostas pessoais.
3. Podemos ter uma progressão geométrica decrescente com razão positiva? Exemplifique. 3. Sim; resposta pessoal.
4. Qual é a razão da progressão geométrica formada pelos comprimentos das linhas da curva de Koch exemplificada no início deste tópico? 4. $\frac{4}{3}$

Termo geral de uma progressão geométrica

Há uma relação que nos possibilita obter qualquer termo de uma progressão geométrica conhecendo somente a posição do termo, o primeiro termo e a razão da sequência. Essa relação é chamada de **fórmula do termo geral da progressão geométrica**. Observe como podemos obtê-la.

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$$
$$a_5 = a_4 \cdot q = (a_1 \cdot q^3) \cdot q \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^4$$
$$a_6 = a_5 \cdot q = (a_1 \cdot q^4) \cdot q \Rightarrow a_6 = a_1 \cdot q^5$$
$$(\ldots)$$

Observando que o expoente da razão, nos casos particulares, é uma unidade inferior ao índice do termo considerado, podemos dizer que o termo a_n, que ocupa a n-ésima posição na sequência, é dado por:

$$\text{nº termo} \rightarrow \underbrace{\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}} \rightarrow \text{fórmula do termo geral da PG}$$

Atividades resolvidas

17. Obtenha a fórmula do termo geral da progressão geométrica (1 024, 512, 256, ..., a_n, ...).

- Como conhecemos o primeiro termo e a razão da progressão geométrica, podemos estabelecer uma fórmula que represente qualquer termo em função de sua posição na sequência.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$a_n = 1\,024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$a_n = 2^{10} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$a_n = \frac{2^{10}}{2^{n-1}}$$
$$a_n = 2^{10-n+1}$$
$$a_n = 2^{11-n}$$

18. Uma progressão geométrica tem seu termo geral dado por $a_n = \frac{2}{3^n}$, sendo n um número natural diferente de zero. Determine os cinco primeiros termos dessa sequência e indique a razão da PG.

- Atribuindo valores para n, temos:

$$n = 1 \rightarrow a_1 = \frac{2}{3^1} \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3}$$
$$n = 2 \rightarrow a_2 = \frac{2}{3^2} \Rightarrow a_2 = \frac{2}{9}$$
$$n = 3 \rightarrow a_3 = \frac{2}{3^3} \Rightarrow a_3 = \frac{2}{27}$$
$$n = 4 \rightarrow a_4 = \frac{2}{3^4} \Rightarrow a_4 = \frac{2}{81}$$
$$n = 5 \rightarrow a_5 = \frac{2}{3^5} \Rightarrow a_5 = \frac{2}{243}$$

A sequência é uma progressão geométrica de razão igual a $\frac{1}{3}$.

19. Considere a progressão geométrica finita $\left(\frac{1}{1\,024}, \frac{1}{512}, \frac{1}{256}, \frac{1}{128}, ..., 64\right)$. Quantos termos há ao todo nessa sequência?

- Como conhecemos o primeiro termo, o último termo e também a razão, utilizamos a fórmula do termo geral da progressão geométrica.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$64 = \frac{1}{1\,024} \cdot 2^{n-1}$$

- A equação exponencial obtida é resolvida deixando os dois membros da igualdade com a mesma base.

$$2^6 = \frac{1}{2^{10}} \cdot 2^{n-1}$$
$$2^6 = 2^{n-1-10}$$
$$2^6 = 2^{n-11}$$
$$6 = n - 11 \Rightarrow n = 17$$

Portanto, a progressão geométrica é formada por 17 termos.

Para explorar

Junte-se a mais dois colegas para explorar a teoria dos fractais.

A sequência abaixo representa a construção do chamado "floco de neve" de Koch. Ela inicia com um triângulo equilátero, conforme a **figura 1**.

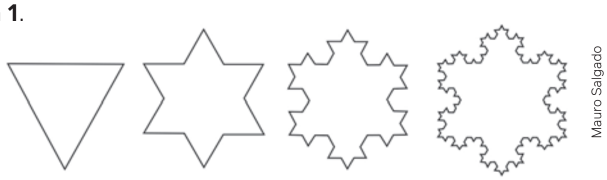


Figura 1. Figura 2. Figura 3. Figura 4.

Façam o que se pede a seguir.

1. Escrevam um algoritmo que representa a formação do "floco de neve". 1. Resposta pessoal.

2. Escrevam uma sequência que representa o número de segmentos em cada figura. 2. (3, 12, 48, 192, ...)

3. Determinem o número de segmentos existentes na n-ésima figura dessa sequência. 3. $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

4. Escrevam uma sequência que representa o perímetro de cada figura considerando que na **figura 1** o comprimento de cada lado é unitário (1 u.c.). 4. $\left(3, 4, \frac{16}{3}, \frac{64}{9}, ...\right)$

5. Façam uma pesquisa a respeito dos fractais e redijam um texto comentando os fatos pesquisados.
5. Resposta pessoal.

Atividades

53. Na progressão geométrica $(10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, ...)$, determine:

a) a razão; 53. a) $q = 10^{-1}$

b) o termo geral. 53. b) $a_n = 10^{-n}$

54. Obtenha a quantidade de termos da progressão geométrica finita $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, ..., 243\right)$. 54. 8

55. Em uma progressão geométrica, sabe-se que o 1º termo é 3 e o 5º termo é 30 000. Qual deverá ser o valor da razão dessa PG? 55. 10 ou –10

56. Obtenha:

a) o 6º termo da progressão geométrica (1, 4, ...);
56. a) 1 024

b) o 7º termo da progressão geométrica (1; 0,5; 0,25; ...);
56. b) 0,015625

c) o 8º termo da progressão geométrica (–1, 2, –4, ...).
56. c) 128

57. Escreva uma progressão geométrica de sete termos, sendo o primeiro termo igual a 1 e o sétimo igual a 729.
57. (1, 3, 9, 27, 81, 243, 729) ou (1, –3, 9, –27, 81, –243, 729).

58. A progressão geométrica (–3, 9, –27, ...) é classificada como oscilante. Nessa sequência, determine:

a) o 8º termo; 58. a) 6 561

b) a fórmula do termo geral. 58. b) $a_n = (-3)^n$

59. O termo geral de uma progressão geométrica é representado por $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. Determine:

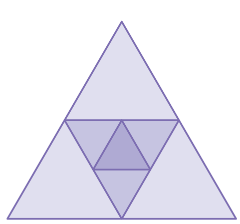
a) o primeiro termo; 59. a) 2

b) a razão da PG; 59. b) 3

c) o 7º termo. 59. c) 1 458

60. Sabe-se que o número de bactérias de uma colônia dobra a cada dia que passa. Se hoje há 100 mil dessas bactérias, qual o total delas no final de 5 dias?
60. 1 600 000

61. Roberta desenhou em seu caderno um 1º triângulo equilátero de área igual a 10 cm². Ligando os pontos médios dos lados desse triângulo obteve um 2º triângulo no centro da figura. Ligando os pontos médios dos lados do 2º triângulo obteve o 3º triângulo, e continuou esse processo sucessivamente, como sugere a figura a seguir.



TDPStudio

a) Qual é a área do 2º triângulo? 61. a) $\frac{10}{4}$ cm²

b) Qual é a área do 3º triângulo? 61. b) $\frac{10}{16}$ cm²

c) Qual é a área do n-ésimo triângulo? 61. c) $10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

62. (Enem) Para comemorar o aniversário de uma cidade, a prefeitura organiza quatro dias consecutivos de atrações culturais. A experiência de anos anteriores mostra que, de um dia para o outro, o número de visitantes do evento é triplicado. É esperada a presença de 345 visitantes para o primeiro dia do evento. Uma representação possível do número esperado de participantes para o último dia é:

a) 3×345.

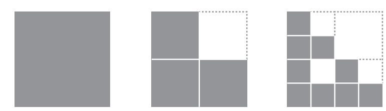
b) $(3 + 3 + 3) \times 345$.

c) $3^3 \times 345$. 62. Alternativa **c**.

d) $3 \times 4 \times 345$.

e) 34×345.

63. (UFRGS-RS) Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.



Etapa 1. Etapa 2. Etapa 3.

Tarcísio Garbellini

Na Etapa 1, há um único quadrado com lado 10. Na Etapa 2, esse quadrado foi dividido em quatro quadrados congruentes, sendo um deles retirado, como indica a figura. Na Etapa 3 e nas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos quadrados da etapa anterior. Nessas condições, a área restante na Etapa 6 será de: 63. Alternativa **e**.

a) $100 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5$.

b) $100 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6$.

c) $100 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5$.

d) $100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6$.

e) $100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$.

64. (IFSul-RS) Conforme a Agência da ONU para os Refugiados (Acnur), temos testemunhado o aumento do deslocamento forçado de pessoas em todo o mundo, ocasionado por guerras e conflitos. Em 2014, segundo esta agência, estes deslocamentos afetavam 59,5 milhões de pessoas. Se o número de deslocamentos forçados crescer anualmente, segundo uma progressão geométrica de razão 1,14, então, em 2015 esse número será de: 64. Alternativa **b**.

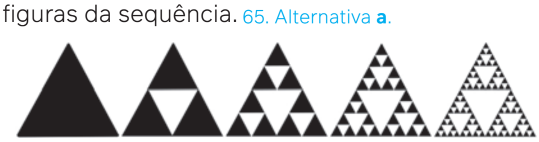
a) 60,54 milhões de pessoas.

b) 67,83 milhões de pessoas.

c) 120,14 milhões de pessoas.

d) 127,33 milhões de pessoas.

65. (UFRN) Os vértices dos triângulos brancos construídos são os pontos médios dos lados dos triângulos escuros da figura anterior. Denominamos a_1, a_2, a_3, a_4, e a_5, respectivamente, as áreas das regiões escuras da primeira, segunda, terceira, quarta e quinta figuras da sequência. 65. Alternativa **a**.



Reinaldo Vignati

Podemos afirmar que a_1, a_2, a_3, a_4, e a_5, estão, nessa ordem, em progressão geométrica de razão:

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{4}$

Propriedades de uma progressão geométrica

Assim como aconteceu com o estudo de progressão aritmética, também existem propriedades que podem ser utilizadas em **progressão geométrica**. São propriedades que podem ser observadas por meio de exemplos. Entretanto, apresentamos as justificativas matemáticas para elas.

> **Propriedade 1:** Qualquer termo de uma PG, a partir do segundo, é sempre em módulo a média geométrica entre os termos anterior e posterior a ele.
>
> $$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}, \text{ para } n \geq 2$$

Exemplo:
Considerando a progressão geométrica (2, –6, 18, –54, 162, –486, ...), temos, conforme a propriedade:

$$|-6| = \sqrt{2 \cdot 18}$$
$$|18| = \sqrt{(-6) \cdot (-54)}$$
$$|-54| = \sqrt{18 \cdot 162}$$
$$(...)$$

Justificativa:

- Essa propriedade pode ser justificada com base no conceito de razão de uma progressão geométrica. Assim, se considerarmos genericamente que os números a, b e c são termos consecutivos de uma PG, então vale:

$$(..., a, b, c, ...) \text{ em PG} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{a} = q \text{ (I)} \\ \dfrac{c}{b} = q \text{ (II)} \end{cases}$$

- Comparando (I) com (II), temos:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$
$$b^2 = a \cdot c$$
$$\sqrt{b^2} = \sqrt{a \cdot c}$$
$$|b| = \sqrt{a \cdot c} \longrightarrow \text{O termo central é, em módulo, a média geométrica dos outros dois.}$$

Em geral, temos para um número real x:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

> **Propriedade 2:** Em uma PG finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos termos extremos.

Exemplo:
Considerando a progressão geométrica (2, –6, 18, –54, 162, –486, 1 458; –4 374), temos, conforme a propriedade:

(2, –6, 18, –54, 162, –486, 1 458, –4 374)

$$(-54) \cdot 162 = 2 \cdot (-4\,374)$$
$$18 \cdot (-486) = 2 \cdot (-4\,374)$$
$$(-6) \cdot 1\,458 = 2 \cdot (-4\,374)$$

Justificativa:

- Quando consideramos o produto de dois termos equidistantes dos extremos em uma progressão geométrica finita formada por n termos e os comparamos com o produto dos termos extremos, observe o que ocorre:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_r, ..., a_s, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$$

- Se os termos a_r e a_s são equidistantes dos extremos, então a quantidade de termos que existe antes de a_r é a mesma quantidade de termos que existe após a_s, isto é:

$$r - 1 = n - s \text{ (I)}$$

- Utilizando o termo geral da progressão geométrica, temos:

$$a_r = a_1 \cdot q^{r-1} \text{ (II)}$$
$$a_s = a_1 \cdot q^{s-1} \text{ (III)}$$

- Multiplicando membro a membro (II) com (III):

$$a_r \cdot a_s = (a_1 \cdot q^{r-1}) \cdot (a_1 \cdot q^{s-1})$$
$$a_r \cdot a_s = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{r-1+s-1}$$
$$\downarrow \text{(I)}$$
$$a_r \cdot a_s = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n-s+s-1}$$
$$a_r \cdot a_s = a_1 \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^{n-1}}_{a_1 \cdot q^{n-1} = a_n}$$
$$a_r \cdot a_s = a_1 \cdot a_n$$

$\longrightarrow$ O produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos termos extremos, em uma PG finita.

Atividades resolvidas

20. Considere que $(x - 3, x, x + 6)$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica. Obtenha os três termos dessa sequência.

- Conforme a 1ª propriedade, o termo central é, em módulo, a média geométrica dos outros dois termos:

$$|a_2| = \sqrt{a_1 \cdot a_3}$$
$$|x| = \sqrt{(x-3) \cdot (x+6)}$$
$$\downarrow |x| = \sqrt{x^2}$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(x-3) \cdot (x+6)}$$
$$\downarrow \text{elevando ao quadrado}$$
$$x^2 = (x-3) \cdot (x+6)$$
$$x^2 = x^2 + 6x - 3x - 18$$
$$-3x = -18$$
$$x = 6 \Rightarrow (3, 6, 12)$$

21. Na progressão geométrica $(5, x, y, z, t, 160)$ determine o valor do produto $y \cdot z$.

- Como a progressão geométrica tem 6 termos e os termos y e z são equidistantes dos extremos, temos, conforme a 2ª propriedade da PG:

$$y \cdot z = 5 \cdot 160$$
$$y \cdot z = 800$$

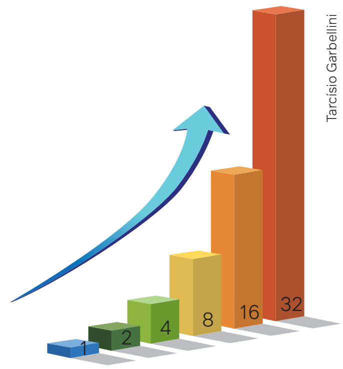
- Outro procedimento é obter os termos dessa progressão geométrica, já que conhecemos o primeiro e o sexto termos:

$$a_6 = a_1 \cdot q^5$$
$$160 = 5 \cdot q^5$$
$$32 = q^5$$
$$q = 2 \Rightarrow (5, 10, 20, 40, 80, 160)$$

Assim, o produto procurado é $y \cdot z = 20 \cdot 40 = 800$.

Progressão geométrica e outras relações

A ilustração abaixo evidencia um crescimento em progressão geométrica que também pode ser dito crescimento exponencial.



Para saber onde ocorre esse tipo de crescimento, de forma aproximada, basta observar o que as autoridades de saúde denominam como epidemia, por exemplo, causada por um vírus: número de casos acentuados em um pequeno intervalo de tempo. As chamadas funções exponenciais descrevem, de forma aproximada, esses fenômenos.

Veremos agora que a progressão geométrica está relacionada com função exponencial, com logaritmos e com juros compostos, justamente para descrever comportamentos diversos de crescimento.

Juros compostos, logaritmos e progressão geométrica

A seguinte situação é um exemplo bem interessante relacionado a juros compostos.

Infográfico clicável
Juros compostos

> Em quanto tempo certa quantia aplicada a uma taxa fixa de 1% ao mês, no regime de juros compostos, irá duplicar?

Para resolver essa situação, independentemente do valor aplicado, vamos primeiro observar uma relação existente entre juros compostos e progressão geométrica. Em uma aplicação de progressão aritmética, no início deste capítulo, vimos uma fórmula que possibilita calcular o montante gerado por um capital *C* aplicado à taxa de *i*, mas na modalidade de juros simples. Em relação a juros compostos, isto é, juros sobre juros, a fórmula é a seguinte:

$$\boldsymbol{M_n = C \cdot (1 + i)^n}$$

Para obter essa relação, devemos compreender que em juros compostos o juro incide sobre o montante anterior e não sobre o capital inicial, como ocorre com os juros simples. Considerando um capital *C* aplicado a uma taxa fixa *i* durante *n* períodos, temos:

$$M_1 = C + i \cdot C = C \cdot (1 + i)$$
$$M_2 = C \cdot (1 + i) + i \cdot C \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2$$
$$M_3 = C \cdot (1 + i)^2 + i \cdot C \cdot (1 + i)^2 = C \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^3$$
$$M_4 = C \cdot (1 + i)^3 + i \cdot C \cdot (1 + i)^3 = C \cdot (1 + i)^3 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^4$$
$$(\ldots)$$

$\boldsymbol{M_n = C \cdot (1 + i)^n} \longrightarrow$ Fórmula para o cálculo do montante na modalidade juros compostos.

Para pensar e discutir

1. Como se comporta a sequência formada pelos montantes? 1. PG de razão $1 + i$.
2. Utilizando a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, como você obtém a fórmula do cálculo do montante gerado pela aplicação a juros compostos de um capital *C* a uma taxa fixa de *i* ao período?
2. Resposta pessoal.

No volume 3 desta coleção ainda teremos um capítulo especial sobre Matemática Financeira. Nele veremos mais detalhadamente o cálculo envolvendo aplicações financeiras na modalidade de juros compostos e na modalidade de juros simples. Aqui a ideia é evidenciar a relação existente entre progressão geométrica e juros compostos. Nas duas aplicações a seguir, é possível também verificar a necessidade do emprego de logaritmos.

Atividades resolvidas

22. Rafael aplicou R$ 20.000,00 a uma taxa fixa de 0,7% ao mês na modalidade de juros compostos. Se ele não fizer nenhuma retirada ao longo de 8 meses, qual será o montante ao final do 8º mês?

- Podemos calcular o montante substituindo o capital, a taxa e o número de meses na fórmula que fornece o montante, isto é:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$
$$M_8 = 20\,000 \cdot (1 + 0{,}007)^8$$
$$M_8 = 20\,000 \cdot 1{,}007^8$$
$$M_8 \cong 20\,000 \cdot 1{,}05739 \Rightarrow M_8 \cong 21\,147{,}80$$

Portanto, o montante, ao final do 8º mês, é de aproximadamente R$ 21.147,80.

Também podemos utilizar a fórmula do termo geral da PG, em que o primeiro termo é o montante ao final do 1º mês, a razão é 1 + 0,007 e o número de termos é igual a 8. Verifique.

$$a_1 = M_1 = 20\,000 \cdot 1{,}007 = 20\,140$$
$$a_8 = M_8 = a_1 \cdot q^7$$
$$a_8 = M_8 = 20\,140 \cdot 1{,}007^7$$
$$M_8 \cong 20\,140 \cdot 1{,}05004 \Rightarrow M_8 \cong 21\,147{,}80$$

23. Vamos retomar a seguinte situação:

Em quanto tempo certa quantia aplicada a uma taxa fixa de 1% ao mês, no regime de juros compostos, irá duplicar?

- Como o montante será o dobro do capital aplicado, temos:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$
$$2C = C \cdot (1 + 0{,}01)^n$$
$$2 = 1{,}01^n$$

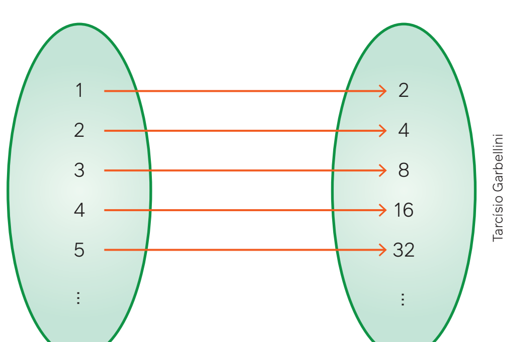
- Essa equação exponencial pode ser resolvida considerando os logaritmos decimais dos dois membros da igualdade e utilizando uma propriedade de logaritmos:

$$\log 2 = \log 1{,}01^n$$
$$\log 2 = n \cdot \log 1{,}01$$
$$\Big\downarrow \text{calculadora}$$
$$0{,}30103 \cong n \cdot 0{,}00432$$
$$\frac{0{,}30103}{0{,}00432} \cong n \Rightarrow n \cong 69{,}68287$$

- Como n é um número natural que representa o número de meses, para $n = 69$ o montante não irá duplicar o valor investido. Para $n = 70$, teremos a primeira vez que o capital será duplicado, ou seja, serão necessários 70 meses para que o capital investido duplique.

Funções e progressão geométrica

Quando escrevemos o termo geral de uma progressão geométrica, expressamos qualquer termo em função de sua posição na sequência. Por exemplo, vamos considerar a progressão geométrica (2, 4, 8, 16, 32, ...). No diagrama a seguir, representamos a relação entre os índices (que indicam as posições dos termos na sequência) e os termos da PG.



Agora, observe o que acontece quando obtemos o termo geral dessa progressão geométrica.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$$
$$a_n = 2^n$$
$$\underbrace{a_n = f(n) = 2^n}$$

O termo geral é uma **função de *n*** ($n \in \mathbb{N}^*$), com n indicando a posição do termo na sequência.

Atividades resolvidas

24. Na função exponencial obtida no exemplo anterior, isto é, $f(n) = 2^n$, o que a base representa em relação à progressão geométrica?

- A base 2 representa a razão, pois em uma progressão geométrica a razão é o quociente entre um termo e o termo antecedente:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \qquad q = 2^{n-(n-1)}$$
$$q = \frac{2^n}{2^{n-1}} \qquad q = 2^1 \Rightarrow q = 2$$

25. Na função definida por $f(x) = 2 \cdot 3^x$, obtenha os cinco primeiros termos da sequência $(f(1), f(2), f(3), ...)$ e determine o valor da razão da progressão geométrica correspondente.

- Os termos podem ser obtidos atribuindo-se os valores para x:

$$f(1) = 2 \cdot 3^1 \Rightarrow f(1) = 6 \qquad f(4) = 2 \cdot 3^4 \Rightarrow f(4) = 162$$
$$f(2) = 2 \cdot 3^2 \Rightarrow f(2) = 18 \qquad f(5) = 2 \cdot 3^5 \Rightarrow f(5) = 486$$
$$f(3) = 2 \cdot 3^3 \Rightarrow f(3) = 54$$

A progressão geométrica tem razão igual a 3.

26. Mostre que uma função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$) transforma uma progressão aritmética de razão r em uma progressão geométrica de razão a^r.

- Vamos considerar que $(x_1, x_2, x_3, ...)$ formem uma progressão aritmética de razão r. Calculando as imagens dos termos dessa sequência na função exponencial, temos:

$$f(x_1) = a^{x_1}$$
$$f(x_2) = a^{vx_2} = a^{x_1 + r} = a^{x_1} \cdot a^r$$
$$f(x_3) = a^{x_3} = a^{x_1 + 2r} = a^{x_1} \cdot a^{2r}$$
$$f(x_4) = a^{x_4} = a^{x_1 + 3r} = a^{x_1} \cdot a^{3r}$$
$$(...)$$

Observe que a sequência formada é uma progressão geométrica de razão q, tal que:

$$q = a^r$$

Para pensar e discutir

1. Mostre que uma função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$) transforma uma progressão geométrica de termos positivos e de razão q em uma progressão aritmética de razão $\log_a q$.

1. Resposta pessoal.

Atividades

66. A lei de formação da função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ é $f(x) = 4 \cdot 5^{-x}$. Faça o que se pede.

a) Obtenha a sequência formada pelos valores de: $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ e $f(5)$. 66. a) $\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{25}, \frac{4}{125}, \frac{4}{625}, \frac{4}{3\,125}\right)$

b) Classifique essa sequência. 66. b) PG decrescente de razão igual a $\frac{1}{5}$.

67. Considere a função logarítmica definida por $f(x) = \log_2 x$. Obtenha e classifique a sequência correspondente aos valores de $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$, ... 67. (0, 1, 2, 3, ...) PA crescente de razão igual a 1.

68. Bruna contraiu um empréstimo de R$ 5.000,00 com a taxa fixa de 2,5% ao mês na modalidade de juros compostos.

a) Elabore um quadro com os montantes dessa dívida ao longo dos 6 primeiros meses considerando que não houve nenhum pagamento nesse período. 68. a) Resposta no Manual do Professor.

b) Classifique a sequência formada pelos montantes. 68. b) PG de razão 1,025.

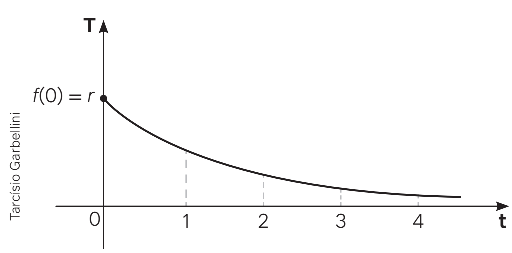
69. Utilizando logaritmos (em calculadora científica) calcule em quantos meses a dívida de Bruna, conforme dados da atividade anterior, irá superar o dobro do valor do empréstimo supondo não haver nenhum pagamento nesse período. 69. 29

70. Suponha que o preço de determinado equipamento se desvaloriza 10% ao ano nos seus 5 primeiros anos de uso. Se esse equipamento novo custou R$ 10.000,00, qual será o seu valor em reais após os 5 anos de uso? 70. Alternativa **d**.

a) R$ 5.550,00
b) R$ 5.804,00
c) R$ 6.204,30
d) R$ 5.904,90
e) R$ 5.745,20

71. Atribua um valor para um carro zero e, com base nele, elabore uma tabela com os valores desde a compra até os seus primeiros 5 anos de uso. Utilize o mesmo percentual de redução do valor do carro da atividade anterior. Ao final, calcule o percentual correspondente à desvalorização total do carro nesse período. 71. Resposta pessoal.

72. (UFU-MG) Assuma que a função exponencial de variável real $T = f(t) = r \cdot e^{k \cdot t}$, em que r e k são constantes reais não nulas, representa a variação da temperatura T ao longo do tempo t (em horas) com $0 \leq t \leq 4$.



Sabendo que os valores $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$ formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e soma igual a $\frac{255}{128}$, então o valor de r é um número múltiplo de: 72. Alternativa **c**.

a) 9 **b)** 5 **c)** 3 **d)** 7

73. (Acafe-SC) Uma pessoa deseja comprar um carro, o qual pode ser adquirido pagando-se uma entrada e o saldo devedor em 6 parcelas que se encontram em progressão geométrica. Na hora de pagar a entrada, o cliente foi informado que a segunda parcela seria de R$ 12.800,00 e a quinta parcela seria de R$ 1.600,00. Sendo o valor da entrada na compra desse carro equivalente a 15% do total do valor das prestações, analise as afirmações a seguir.

I. O valor da entrada corresponde, aproximadamente, a 30% do valor da primeira prestação.

II. O valor do carro é superior a R$ 60.000,00.

III. O total das três últimas prestações é inferior a 15% do valor do carro.

IV. O valor das três primeiras prestações juntas é superior a $\frac{3}{4}$ do valor do carro.

Todas as afirmações corretas estão em: 73. Alternativa **c**.

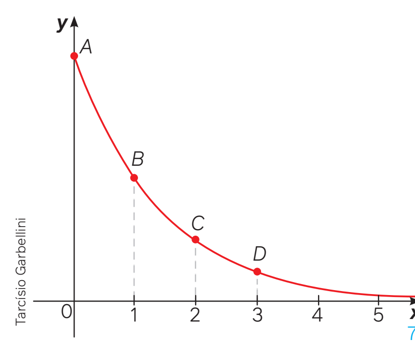
a) I – II – III
b) II – IV
c) I – III – IV
d) III – IV

74. Júlia observou que um carro zero km, ao final de cada ano, tem seu valor diminuído em aproximadamente 10% em função da depreciação do bem. Considere que isso continua acontecendo nos próximos 7 anos.

a) Nessas condições, se V_0 representa o valor do carro zero km, obtenha uma função que possibilite calcular o valor desse carro em função do tempo t em anos, sendo $0 \leq t \leq 7$. 74. a) $V = V_0 \cdot 0{,}90^t$

b) Sabendo que o valor de um carro zero km é igual a R$ 32.000,00, nas condições apresentadas, calcule o valor aproximado desse carro ao final de 6 anos. Use uma calculadora. 74. b) R$ 17.000,00

75. Parte do gráfico de uma função real definida por $f(x) = \frac{4}{2^x}$ está representado a seguir. Os pontos A, B, C e D estão indicados.



75. a) 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$

a) Calcule os valores das ordenadas desses pontos.

b) As ordenadas dos pontos A, B, C e D, nessa ordem, formam uma progressão geométrica. Qual é a razão dela? 75. b) $\frac{1}{2}$

76. Bruna montou o quadro a seguir para verificar, ano a ano (nos 5 primeiros anos), o montante correspondente a um empréstimo de R$ 1.000,00, a juros compostos, caso ela não efetuasse nenhum pagamento.

Ano	Montante (R$)
1	1.060,00
2	1.123,60
3	1.191,02
4	1.262,48
5	1.338,23

a) Qual é a taxa de juros anual que está sendo cobrada? 76. a) 6%

b) Esses montantes estão em progressão geométrica? Qual é a razão? 76. b) Sim; 1,06.

c) Expresse o montante M em função do tempo t dado em anos. 76. c) $M(t) = 1000 \cdot (1{,}06)^t$

Soma dos termos de uma progressão geométrica

Há uma lenda sobre a criação do jogo de xadrez em que o inventor solicitou ao rei que lhe desse, como pagamento pela invenção, 1 grão de trigo para a 1ª casa, 2 grãos de trigo para a 2ª casa, 4 grãos de trigo para a 3ª casa e assim sucessivamente até a 64ª casa. Essa sequência é uma progressão geométrica, conforme a seguir:

Shutterstock_Macrovector

- 1ª casa: 1 grão
- 2ª casa: 2 grãos
- 3ª casa: 4 grãos
- 4ª casa: 8 grãos
  (...)
- 64ª casa: 2^{63} grãos

Se desejarmos saber o total de grãos de trigo que será necessário precisaremos determinar a seguinte soma:

$$\underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}}_{\text{Soma dos termos da PG}}$$

De acordo com a lenda, o calculista se assustou com a quantidade de grãos de trigo correspondente a esse valor, isto é, 18 446 744 073 709 551 615 grãos.

Existe uma relação matemática que permite calcular esta soma.

> Em uma progressão geométrica finita em que o primeiro termo é a_1, a razão é $q (q \neq 1)$ e o último termo é a_n, a soma dos n termos é dada por:
>
> $$\boldsymbol{S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}}, \text{ com } q \neq 1$$

Exemplo:

Na situação apresentada, a soma de todos os termos é:

$$S_{64} = \frac{a_{64} \cdot q - a_1}{q - 1}$$

$$S_{64} = \frac{2^{63} \cdot 2 - 1}{2 - 1} \Rightarrow S_{64} = 2^{64} - 1$$

E como podemos justificar a fórmula dos termos da PG?

Justificativa:

- Vamos considerar a seguinte igualdade:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$\downarrow \text{ multiplicando por } q$$

$$S_n q = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \ldots + a_{n-2} q + a_{n-1} q + a_n q$$

$$\downarrow (*)$$

$$S_n q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_n q$$

$$S_n q = (a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n) + a_n q$$

$$\downarrow (**)$$

$$S_n q = (S_n - a_1) + a_n q$$

$$S_n q - S_n = a_n q - a_1$$

$$S_n (q - 1) = a_n q - a_1 \Rightarrow S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

Para pensar e discutir

1. Na justificativa da relação matemática, o que ocorreu na passagem (*)? E na passagem (**)? 1. Respostas pessoais.
2. Por que esse procedimento não se aplica para calcular a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão igual a 1? 2. O denominador da fórmula obtida não pode ser igual a zero.
3. Se a razão da PG for igual a 1, como você calculará a soma de todos os seus termos? 3. Multiplicando o primeiro termo pela quantidade de termos.
4. Se você substituir na fórmula da soma da PG o termo a_n por $a_1 \cdot q^{n-1}$, qual será a fórmula da soma dos termos obtida? 4. $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, $q \neq 1$

Atividades resolvidas

27. Dada a progressão geométrica (7, 14, 28, ..., 3 584), obtenha a soma de todos os seus termos.

- Conforme a fórmula da soma, temos:

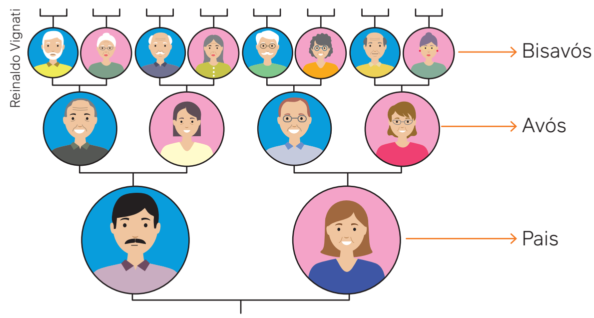
$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{3\,584 \cdot 2 - 7}{2 - 1}$$

$$S_n = \frac{7\,168 - 7}{1} \Rightarrow S_n = 7\,161$$

Portanto, a soma de todos os termos é 7 161.

28. No esquema a seguir está representada a árvore genealógica de uma pessoa composta dos pais, quatro avós, oito bisavós e assim por diante. Considerando-se 15 gerações de antepassados, qual é o número de ancestrais dessa pessoa?



- A sequência formada pelo número de antepassados em cada geração constitui uma progressão geométrica de razão 2 em que:

1ª geração: 2
2ª geração: 4
3ª geração: 8
(...)

- Cálculo do número de antepassados da 15ª geração:

$$a_{15} = a_1 \cdot q^{14}$$

$$a_{15} = 2 \cdot 2^{14} \Rightarrow a_{15} = 2^{15}$$

- Cálculo da quantidade total de antepassados nas 15 primeiras gerações:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

$$S_{15} = \frac{a_{15} \cdot q - a_1}{q - 1}$$

$$S_{15} = \frac{2^{15} \cdot 2 - 2}{2 - 1}$$

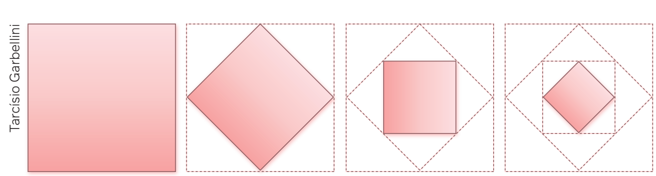
$$S_{15} = \frac{2^{16} - 2}{1}$$

$$S_{15} = 65\,563 - 2 \Rightarrow S_{15} = 65\,561$$

Portanto, são 65 561 antepassados.

Limite da soma dos termos de uma progressão geométrica

Considere que você desenhou um quadrado de lado com medida unitária. Com base nele, desenhou outro quadrado ligando os pontos médios dos lados do quadrado anterior. Continuou esse processo indefinidamente, como sugere a ilustração a seguir.



Para pensar e discutir

1. Qual é a relação entre a área do 1º quadrado e do 2º quadrado da sequência?
1. O 2º quadrado tem a metade da área do 1º quadrado.

2. As áreas dos quadrados formam uma progressão geométrica. Qual é a razão dessa sequência? 2. $\frac{1}{2}$

3. Adicionando-se as áreas dos infinitos quadrados construídos, qual será a tendência do resultado?
3. Resposta pessoal.

Na situação apresentada, tanto a sequência formada pelas medidas dos lados dos quadrados construídos quanto a sequência formada pelas áreas desses quadrados formam **progressões geométricas**. Como os quadrados construídos ficam cada vez menores, a tendência é que a medida do lado e também a área se aproximem cada vez mais de zero. Para obtermos a "tendência" da soma das áreas, por exemplo, dos infinitos quadrados construídos que formam uma progressão geométrica, precisaremos obter uma relação matemática com base na fórmula da soma dos termos uma PG finita.

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$

a_n tende a zero
Notação: $a_n \to 0$

n tende ao infinito
Notação: $n \to \infty$

Se o número de termos tende ao infinito e o último termo tende a zero, vamos indicar por S o limite (tendência dessa soma) que podemos representar por:

$$S = \lim_{a_n \to 0}(S_n) \Rightarrow S = \lim_{a_n \to 0}\left(\frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}\right)$$

Se temos que $a_n \to 0$ (tende a zero, ou seja, fica cada vez mais próximo de zero) à medida que $n \to \infty$ (tende ao infinito, que significa arbitrariamente grande), faz sentido considerar $a_n = 0$:

$$S = \frac{0 \cdot q - a_1}{q - 1}$$

$$S = \frac{-a_1}{q - 1} \Rightarrow S = \frac{a_1}{1 - q} \longrightarrow \text{limite da soma}$$

Em uma progressão geométrica em que o número de termos tende ao infinito e o termo geral tende a zero, o limite da soma de seus termos é dado por:

$$\mathbf{S = \frac{a_1}{1 - q}}$$

sendo a_1 o primeiro termo e q a razão da sequência.

Observações:

1. Na obtenção dessa fórmula, utilizamos $S = \lim_{a_n \to 0}\left[\frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}\right]$. O assunto "Limites" é estudado em Matemática do Ensino Superior; aqui o mencionamos para justificar a relação obtida.

2. Quando dizemos $a_n \to 0$ em uma PG, isso ocorre se em módulo a razão for menor que 1, isto é, $|q| < 1$.

Atividades resolvidas

29. Utilizando o limite da soma dos termos de uma progressão geométrica, obtenha a fração geratriz da dízima periódica 0,444...

- Inicialmente vamos obter a fração geratriz da dízima periódica a partir de um artifício, sem a utilização de progressão geométrica:

$$x = 0{,}444\ldots \text{ (I)}$$

$$\downarrow \cdot 10$$

$$10 \cdot x = 10 \cdot 0{,}444\ldots$$
$$10x = 4{,}444\ldots \text{ (II)}$$

- Fazendo (II) – (I) membro a membro:

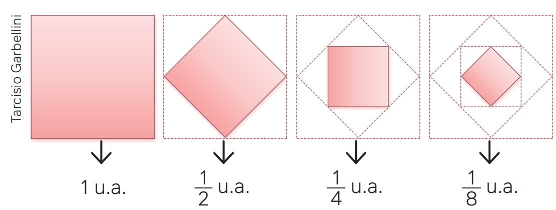
$$10x - x = 4{,}444\ldots - 0{,}444\ldots$$
$$9x = 4$$
$$x = \frac{4}{9}$$

- Utilizando o limite da soma dos termos de uma progressão geométrica:

$$x = 0{,}444...$$
$$x = 0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + ...$$
$$\downarrow \text{Limite da soma}$$
$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$
$$S = \frac{0{,}4}{1 - 0{,}1}$$
$$S = \frac{0{,}4}{0{,}9} \Rightarrow S = \frac{4}{9}$$

Portanto, $\frac{4}{9}$ é a fração geratriz da dízima periódica 0,444...

30. Retornando à situação dos quadrados, conforme figura a seguir, vamos calcular o limite da soma das áreas dos infinitos quadrados, considerando que o primeiro desses quadrados tem área igual a 1 u.a.



- Observe que a sequência das áreas é uma progressão geométrica com infinitos termos. Queremos calcular o limite da soma dos termos dessa sequência, isto é:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$
$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$S = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S = 2$$

Portanto, o limite da soma das áreas desses infinitos quadrados é igual a 2.

Para explorar

Junte-se a um colega para fazer o que se pede a seguir.

1. Retomem a situação do quadrado, formem a sequência das medidas dos lados dos quadrados construídos e calculem:

a) o limite da soma dos termos da progressão geométrica formada pelas medidas dos lados dos quadrados construídos; 1. a) $S = 2 + \sqrt{2}$

b) o limite da soma dos termos da progressão geométrica formada pelos perímetros dos quadrados construídos. 1. b) $S = 8 + 4\sqrt{2}$

2. Verifiquem o que acontece com o limite da soma quando, na situação anterior (item **1**), substituímos o quadrado por triângulo equilátero, ou seja, por meio de um triângulo equilátero de lado unitário, construímos infinitos triângulos equiláteros ligando os pontos médios dos lados. 2. $S = 2$; $S = 6$

3. Apresentem aos demais colegas suas conclusões, conferindo-as. 3. Resposta pessoal.

Atividades

77. Utilizando o limite da soma dos termos de uma progressão geométrica, obtenha a fração geratriz das dízimas periódicas:

a) 0,5555... 77. a) $\frac{5}{9}$

b) 0,212121... 77. b) $\frac{21}{99}$

78. Em uma progressão geométrica, o primeiro termo é 10 e a razão é 2. Calcule a soma dos 10 primeiros termos. 78. 10 230

79. Utilizando o limite da soma dos termos de uma progressão geométrica, faça o que se pede.

a) Resolva a equação $x + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} + ... = 64$. 79. a) 48

b) Obtenha na forma de fração o valor de y considerando que: 79. b) $\frac{1}{999}$

$y = 0{,}001 + 0{,}000001 + 0{,}000000001 + ...$

80. Considere que, na progressão geométrica finita $(1, 2, 4, ..., a_n)$, a soma de todos os seus termos é igual a 1 023. Determine:

a) o último termo dessa PG; 80. a) 512

b) o número de termos dessa PG. 80. b) 10

81. Na equação $1 + x^2 + x^4 + ... + x^{2n} + ... = \frac{25}{16}$, o primeiro membro representa a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica. Determine:

a) a razão da progressão geométrica em função de x; 81. a) x^2

b) o 25º termo dessa progressão em função de x; 81. b) x^{48}

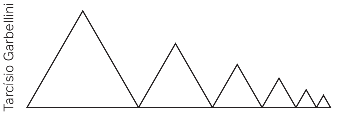
c) a solução da equação. 81. c) $S = \left\{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\right\}$

82. Determinado tipo de plantação de árvore frutífera foi atacado por uma praga desconhecida. Seus frutos foram apodrecendo dia após dia, obedecendo a uma progressão geométrica em que o primeiro termo é igual a 2 e a razão igual a 3. No 10º dia apodreceram os últimos frutos existentes.

a) Calcule quantos frutos apodreceram no 10º dia. 82. a) 39 366

b) Quantos frutos havia? 82. b) 59 048

83. (UFRGS-RS) A sequência representada na figura a seguir é formada por infinitos triângulos equiláteros. O lado do primeiro triângulo mede 1, e a medida do lado de cada um dos outros triângulos é $\frac{2}{3}$ da medida do lado do triângulo imediatamente anterior.

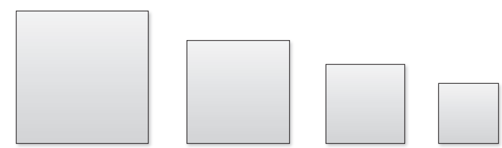


Tarcísio Garbellini

A soma dos perímetros dos triângulos dessa sequência infinita é: 83. Alternativa **a**.

a) 9 **b)** 12 **c)** 15 **d)** 18 **e)** 21

84. Elabore uma situação similar à da questão anterior, porém que envolva quadrados cujas medidas vão diminuindo em progressão geométrica.



Tarcísio Garbellini

Após a elaboração da situação, faça o que se pede.

a) Resolva a situação. 84. a) Resposta pessoal.

b) Apresente-a a um colega para que ele a resolva e, então, confrontem os resultados obtidos. 84. b) Resposta pessoal.

85. Considerando que $E = 1 + 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + ...$, determine o valor de $\log_2 E$. 85. 1

86. Qual é o número natural x correspondente a $x = 4 + 8 + 16 + ... + 2\ 048$? 86. 4 092

87. Em 5 meses observou-se que o faturamento de uma loja aumentou 20% de um mês para o outro. No terceiro mês, o faturamento foi de R$ 28.800,00. Calcule a soma dos faturamentos desta loja ao final dos 5 meses. 87. R$ 148.832,00

88. Uma função exponencial tem a lei de formação dada por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. 88. $S = 2 - 2^{-100}$

Determine o valor de $S = f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(100)$.

Atividades finais

1. Em uma progressão aritmética, a fórmula do termo geral é dada por $a_n = 5n - 1$. Determine: 1. a) $r = 5$

a) a razão dessa sequência; 1. b) $S_n = \frac{5}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$

b) a expressão que representa S_n que indica a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética.

2. Uma progressão aritmética pode ser crescente, decrescente ou constante. Qual é a condição para que uma progressão aritmética seja constante? 2. Razão igual a zero.

3. Em uma progressão aritmética, o primeiro termo é igual a 40, a razão é igual a 20 e o último termo é igual a 2 000. Quantos são os termos dessa progressão aritmética? 3. 99 termos

4. Qual é o termo geral da progressão aritmética (3, 7, 11, ...)? 4. $a_n = 4n - 1$

5. Em uma progressão aritmética cujo termo geral é $a_n = -7n + 10$, qual é o significado do coeficiente de n? 5. Razão.

6. Considere a função afim definida por $f(x) = 4x - 7$. Classifique a sequência $(f(1), f(2), f(3), ...)$. 6. PA de razão 4.

7. Utilizando progressão geométrica obtenha a fração que gera a dízima periódica correspondente à soma $0{,}32 + 0{,}0032 + 0{,}000032 + ...$ 7. $\frac{32}{99}$

8. Se em uma sequência numérica o quociente entre um termo e seu antecessor é constante, qual é a denominação dessa sequência? 8. Progressão geométrica.

9. Uma progressão geométrica pode ser crescente, decrescente, oscilante ou constante. Qual é a condição para que possamos ter uma progressão geométrica constante? 9. Razão igual a 1 ou primeiro termo nulo.

10. Obtenha o termo geral da progressão geométrica:

a) (3, 9, 27, ...). 10. a) $a_n = 3^n$

b) (3, 6, 12, ...). 10. b) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

11. Qual é a condição para termos uma progressão geométrica oscilante?
11. A razão negativa e primeiro termo não nulo.

Questões de vestibulares e Enem

12. (IFCE) Numa progressão geométrica, o segundo e o sétimo termos valem, respectivamente, 32 e 243. Nessa progressão, o quarto termo é o número:

a) 64 **b)** 72 **c)** 56 **d)** 48 **e)** 36

12. Alternativa **b**.

13. (FGV-SP) Três números formam uma progressão geométrica. A média aritmética dos dois primeiros é 6, e a do segundo com o terceiro é 18. Sendo assim, a soma dos termos dessa progressão é igual a:

a) 18 **b)** 36 **c)** 39 **d)** 42 **e)** 48

13. Alternativa **c**.

14. (Ifal) Num triângulo equilátero de lado L, constrói-se outro triângulo equilátero nos pontos médios de seus lados. Esse processo é feito indefinidamente, gerando infinitos outros triângulos equiláteros. Então, podemos dizer que o limite da soma dos perímetros desses triângulos vale: 14. Alternativa **c**.

a) $2L$. **c)** $6L$. **e)** $10L$.

b) $4L$. **d)** $8L$.

15. (UFRN) O nono termo de uma progressão geométrica A, de razão q, é 1 792 e seu quarto temo é 56. Dessa forma, o quarto termo de outra progressão geométrica, B, com razão $q + 1$ cujo primeiro termo é igual ao primeiro termo da progressão A, é:

a) 189 **b)** 243 **c)** 729 **d)** 946

15. Alternativa **a**.

16. (UFRGS-RS) O valor de $\log 2^2 + \log 2^3 + \log 2^4 + ... + \log 2^{50}$ é 16. Alternativa **b**.

a) $\log 2^{1247}$ **c)** $\log 2^{1472}$ **e)** $\log 8^{59}$

b) $\log 2^{1274}$ **d)** $\log 2^{59}$

17. (UEA-AM) O salário de determinado estagiário em uma empresa, em janeiro, era de R$ 1.500,00. Esse salário teve um acréscimo mensal constante, sempre sobre o valor recebido no mês anterior, durante os meses de fevereiro, março, abril e maio. Se o salário no mês de maio foi de R$ 5.000,00, o salário do mês de abril foi de 17. Alternativa **c**.

a) R$ 3.250,00 **d)** R$ 2.375,00

b) R$ 4.575,00 **e)** R$ 2.950,00

c) R$ 4.125,00

18. (Fuvest-SP) Números figurados são números que expressam o total de pontos em certas configurações geométricas. Um exemplo de números figurados são os triangulares, os quais são números naturais que podem ser representados geometricamente na forma de um triângulo. Os quatro primeiros números triangulares estão ilustrados na figura I. Apesar de o número 1 não representar um triângulo, ele é considerado um número triangular.

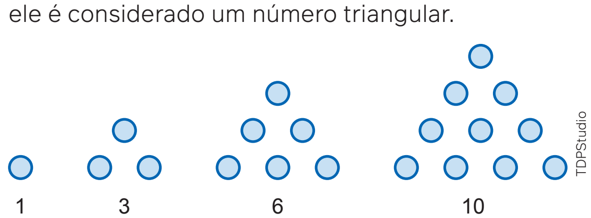


Figura I

Outro exemplo de número figurado é o número oblongo, o qual representa o total de pontos de um quadro retangular em que o número de colunas é uma unidade a mais do que o número de linhas. Os quatro primeiros números oblongos estão ilustrados na figura II. Apesar do número 2 não representar um quadro retangular, ele é considerado um número oblongo.

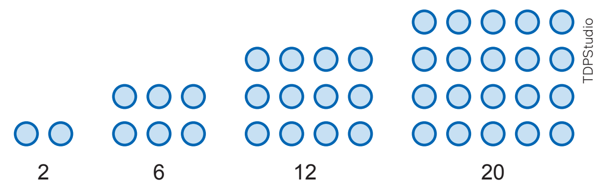


Figura II

A respeito de números triangulares e números oblongos, assinale a alternativa correta. 18. Alternativa **d**.

a) 162 é o 15º número triangular.

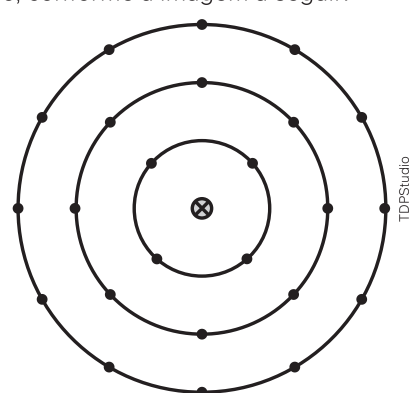
b) O 13º número triangular é primo e o 30º número oblongo é ímpar.

c) 156 não é um número oblongo, nem triangular.

d) 210 é um número triangular e oblongo.

e) A diferença entre dois números triangulares consecutivos são termos de uma progressão geométrica.

19. (UFT-TO) Uma agricultora vai fazer um plantio circular de jiló, conforme a imagem a seguir:



A agricultora instalou no centro do canteiro um aspersor (equipamento de irrigação) giratório. As linhas de plantio são circunferências concêntricas ao ponto onde está localizado o aspersor. Na primeira linha de plantio a agricultora plantou 4 pés de jiló, na segunda plantou 8 pés, na terceira plantou 12 e assim sucessivamente até o limite máximo de alcance do aspersor, que é um raio de 10 metros.

Conforme ilustrado na imagem, neste sistema de plantio, a primeira linha de plantio é uma circunferência com um metro de raio, a segunda tem dois metros de raio, a terceira tem 3 metros de raio e assim sucessivamente.

Com base nessas informações, é correto afirmar que a quantidade de pés de jilós que podem ser plantados dentro do alcance do aspersor é:

19. Alternativa **d**.

a) 40 **c)** 110

b) 80 **d)** 220

20. (FMJ-SP) Uma progressão aritmética (PA) crescente possui 30 termos e a soma dos 3 menores termos é igual a 18. Se o maior termo é 30 vezes o menor termo, a razão dessa PA é 20. Alternativa **c**.

a) 4 **b)** 6 **c)** 3 **d)** 5 **e)** 2

21. (Fuvest-SP) Joana comprou um celular e dividiu o pagamento em 24 parcelas mensais que formam uma progressão aritmética crescente. As três primeiras parcelas foram de R$ 120,00, R$ 126,00 e R$ 132,00. Sabendo que, ao final, constatou-se que Joana não pagou a 19ª parcela, o valor pago por ela foi:

a) R$ 3.954,00
b) R$ 4.026,00
c) R$ 4.200,00
d) R$ 4.308,00
e) R$ 4.382,00

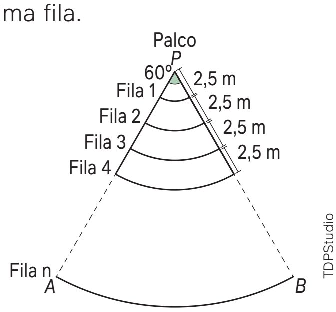
21. Alternativa **d**.

22. (FGV-SP) O primeiro termo de uma progressão aritmética é $a_1 = 1$, e a média dos 2 021 primeiros termos é 102. A razão desta progressão aritmética é

a) 0,10
b) 0,15
c) 0,20
d) 0,25
e) 0,30

22. Alternativa **a**.

23. (Famerp-SP) A figura representa as n filas de assentos de um teatro, com o palco em *P*. As filas estão igualmente espaçadas e são arcos de 60° de circunferência de centro *P*, sendo $\overset{\frown}{AB}$ o arco da n-ésima fila. Sabe-se, ainda, que a fila 1 tem 6 assentos, a fila 2 tem 10 assentos, a fila 3 tem 14 assentos, e assim sucessivamente em progressão aritmética até a n-ésima fila.



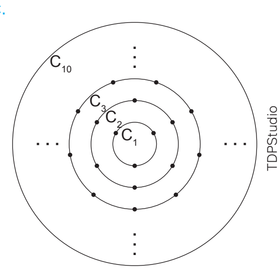
Se a área do teatro, correspondente ao setor circular de centro *P* e arco $\overset{\frown}{AB}$, é de 600π m^2, sua capacidade máxima de número de assentos é igual a

a) 1 440
b) 2 112
c) 1 760
d) 2 496
e) 1 248

23. Alternativa **e**.

24. (UEG-GO) Na figura a seguir, os pontos em cada círculo $\{C_1, C_2, ..., C_{10}\}$ são vértices de polígonos regulares cuja quantidade de pontos cresce em progressão aritmética. A medida do ângulo central do arco de quaisquer dois pontos consecutivos no círculo C_{10} é 24. Alternativa **c**.

a) $\frac{\pi}{36}$ rad
b) $\frac{\pi}{18}$ rad
c) $\frac{\pi}{15}$ rad
d) $\frac{\pi}{12}$ rad
e) $\frac{\pi}{10}$ rad



25. (Mack-SP) Flávio, Luiz, Marcos e Wesley participaram de uma competição de natação na modalidade revezamento medley 4 × 100 m. Flávio nadou os primeiros 100 m da prova no estilo borboleta; seguido de Luiz, que realizou os 100 m no nado costas; depois o Marcos, no nado peito, e, para finalizar, o Wesley nadou os últimos 100 m no estilo crawl, totalizando o tempo de 3 minutos e 36 segundos de prova. Se o tempo de Marcos foi de 60 s e os tempos de Wesley, Flávio e Luiz, nessa ordem, estavam em progressão aritmética de razão 2, então o tempo de Luiz foi de

a) 50 s
b) 51 s
c) 52 s
d) 53 s
e) 54 s

25. Alternativa **e**.

26. (Uece) A sequência de números inteiros positivos, que segue, foi construída do seguinte modo: o primeiro termo é igual a dois; o segundo termo é igual ao primeiro somado com quatro; o terceiro termo é igual ao segundo somado com dois; o quarto termo é igual ao terceiro somado com quatro; o quinto termo é igual ao quarto somado com dois; o sexto é igual ao quinto somado com quatro; ... e assim sucessivamente (2, 6, 8, 12, 14, 18, ...). Considerando essa sequência, pode-se afirmar corretamente que o centésimo primeiro termo é igual a 26. Alternativa **c**.

a) 304 **b)** 298 **c)** 302 **d)** 300

27. (UTFPR) Uma *startup* de tecnologia, com potencial de crescimento, possuía 5 clientes em janeiro de 2023, em fevereiro de 2023 a *startup* conquistou 2 novos clientes, o mesmo ocorreu nos próximos 4 meses. Quantos clientes a *startup* terá no final de junho de 2023? 27. Alternativa **e**.

a) 12 **b)** 13 **c)** 17 **d)** 21 **e)** 15

28. (Unicamp-SP) Três números reais distintos *a*, *b*, *c* são tais que *a*, *b*, *c* e *ab*, *bc*, *ca* formam, nessas ordens, duas progressões aritméticas de mesma razão. O valor do produto *abc* é 28. Alternativa **c**.

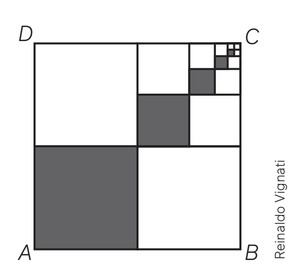
a) 1 **b)** 1/8 **c)** –1 **d)** 6

29. (Uece) Sejam *a* e *b* números reais positivos e distintos. Se $0 < a < 1$, e se a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = b \cdot a^x$, então o valor da "soma infinita" $f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) + ...$ é 29. Alternativa **b**.

a) $\frac{a^2b}{1-a}$ **b)** $\frac{ab}{1-a}$ **c)** $\frac{b}{1-a}$ **d)** $\frac{b^2}{1-a}$

30. (UPF-RS) A região em cinza do quadrado *ABCD* se repete infinitamente de acordo com o padrão representado na figura, originando sempre mais quadrados. Dessa maneira, a parte do quadrado *ABCD* que ficará colorida é: 30 Alternativa **c**.

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{5}{4}$
e) $1\frac{1}{2}$



31. (Uerj) Considere a seguinte equação:

$$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \ldots = 18,\ x \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que o primeiro membro dessa equação é a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, o valor de x é igual a: 31. Alternativa **d**.

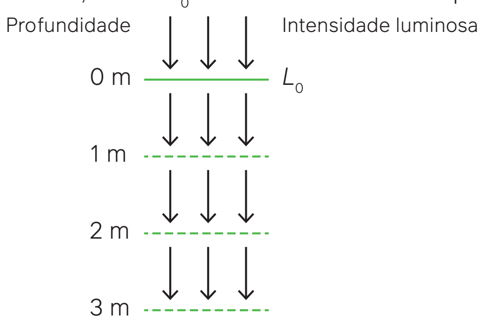
a) 6 **b)** 8 **c)** 10 **d)** 12

32. (Enem) A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1380 metros da praça.

Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R$ 8.000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é 32. Alternativa **c**.

a) R$ 512.000,00
b) R$ 520.000,00
c) R$ 528.000,00
d) R$ 552.000,00
e) R$ 584.000,00

33. (Enem) O esquema mostra como a intensidade luminosa decresce com o aumento da profundidade em um rio, sendo L_0 a intensidade na sua superfície.



Acervo da editora

Considere que a intensidade luminosa diminui, a cada metro acrescido na profundidade, segundo o mesmo padrão do esquema. A intensidade luminosa correspondente à profundidade de 6 m é igual a 33. Alternativa **d**.

a) $\frac{1}{9} \cdot L_0$

b) $\frac{16}{27} \cdot L_0$

c) $\frac{32}{243} \cdot L_0$

d) $\frac{64}{729} \cdot L_0$

e) $\frac{128}{2187} \cdot L_0$

34. (Enem) O pacote de salgadinho preferido de uma menina é vendido em embalagens com diferentes quantidades. A cada embalagem é atribuído um número de pontos na promoção:

"Ao totalizar exatamente 12 pontos em embalagens e acrescentar mais R$ 10,00 ao valor da compra, você ganhará um bichinho de pelúcia".

Esse salgadinho é vendido em três embalagens com as seguintes massas, pontos e preços:

Massa da embalagem (g)	Pontos da embalagem	Preço (R$)
50	2	2,00
100	4	3,60
200	6	6,40

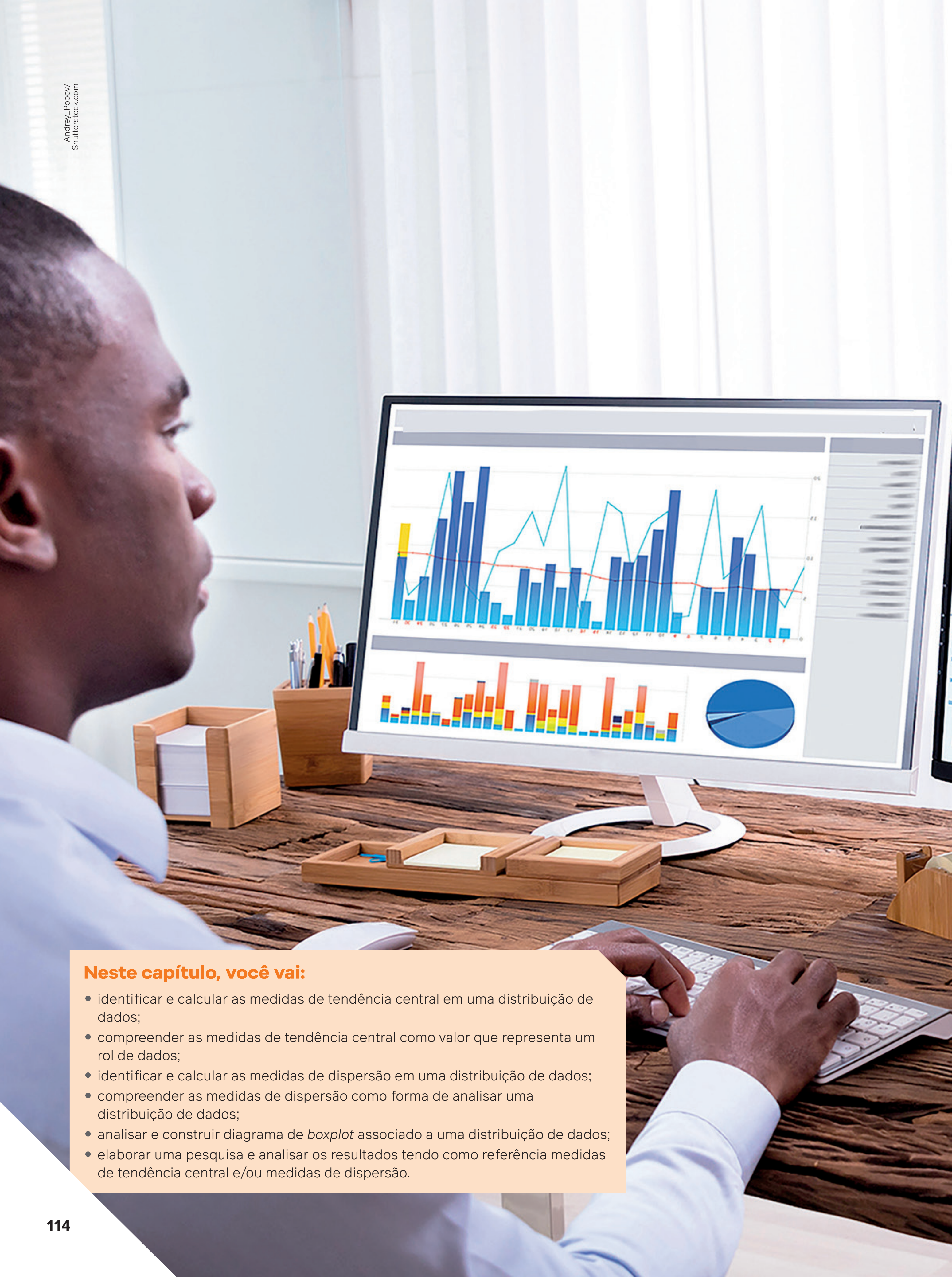
A menor quantia a ser gasta por essa menina que a possibilite levar o bichinho de pelúcia nessa promoção é: 34. Alternativa **c**.

a) R$ 10,80
b) R$ 12,80
c) R$ 20,80
d) R$ 22,00
e) R$ 22,80

Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão dos assuntos e objetivos trabalhados ao longo do presente capítulo.

Objetivos de aprendizagem	Sim	É necessário retomar
Obtenho os termos de uma sequência com base na fórmula do termo geral ou da fórmula de recorrência.		
Compreendo o conceito de progressão aritmética, suas propriedades e a fórmula do termo geral.		
Relaciono progressão aritmética com função afim e com juros simples.		
Compreendo a relação matemática para a soma dos termos de uma progressão aritmética.		
Resolvo e elaboro problemas envolvendo progressão aritmética.		
Compreendo o conceito de progressão geométrica, suas propriedades e a fórmula do termo geral.		
Relaciono progressão geométrica com função exponencial e com juros compostos.		
Compreendo a relação matemática para o cálculo da soma dos termos de uma progressão geométrica finita e do limite da soma dos infinitos termos de uma progressao geométrica em que o último termo tende a zero.		
Resolvo e elaboro problemas envolvendo progressão geométrica.		



Andrey_Popov/
Shutterstock.com

Neste capítulo, você vai:

- identificar e calcular as medidas de tendência central em uma distribuição de dados;
- compreender as medidas de tendência central como valor que representa um rol de dados;
- identificar e calcular as medidas de dispersão em uma distribuição de dados;
- compreender as medidas de dispersão como forma de analisar uma distribuição de dados;
- analisar e construir diagrama de *boxplot* associado a uma distribuição de dados;
- elaborar uma pesquisa e analisar os resultados tendo como referência medidas de tendência central e/ou medidas de dispersão.

CAPÍTULO

3

Estatística descritiva

Um dos principais usos das análises estatísticas é na visualização de dados e indicadores que auxiliam na tomada de decisões para políticas públicas, empresas, entre outros contextos.

Por meio de técnicas que utilizam várias formas de organizar, resumir e representar um conjunto de dados, a estatística descritiva fornece um resumo útil de muitos tipos de dados, o que favorece sua leitura e análise. Neste capítulo, você vai estudar algumas dessas técnicas, o que possibilitará a interpretação crítica de situações socioeconômicas utilizando medidas de tendência central (média, moda e mediana) e medidas de dispersão (variância e desvio-padrão).

1. **Você já ouviu falar de algumas das medidas citadas no texto? Quais delas? Em quais situações?** 1. Resposta pessoal.
2. **Converse com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e procure saber como essas técnicas contribuem para os estudos nessa área.** 2. Resposta pessoal.

1 Medida de tendência central

Quais habilidades são necessárias ou desejáveis para selecionar uma pessoa entre tantas para ocupar uma vaga em uma empresa?

insta_photos/Shutterstock.com

Grupo de trabalho.

Arriscamos aqui destacar uma habilidade que cada vez mais se mostra necessária: **tomada de decisão**. Para que isso ocorra, o profissional ou futuro profissional deve saber analisar as informações apresentadas antes de tomar alguma decisão.

Quanto mais confiáveis e abrangentes são as informações sobre um problema, maior a probabilidade de se tomar uma decisão que, de fato, resolva de forma satisfatória a situação. Nesse sentido, a análise estatística apurada pode ser uma excelente ferramenta.

Podemos, entretanto, ter uma quantidade imensa de dados coletados em uma pesquisa. Para que tenhamos uma ideia global a respeito desses dados, elencamos números ou índices que possam representá-los adequadamente. São as medidas de tendência central.

Vamos exemplificar!

Considere que você é o técnico de um time de basquetebol. O time está disputando uma decisão importante. Há dois jogadores que atuam na mesma posição e os dados dos últimos jogos dos quais participaram estão indicados na ilustração a seguir.

JOGADOR A
Participou o tempo inteiro em 5 jogos e fez a seguinte quantidade de pontos por jogo:
1º jogo: 22 pontos
2º jogo: 23 pontos
3º jogo: 20 pontos
4º jogo: 19 pontos
5º jogo: 21 pontos

Mauro Salgado

JOGADOR B
Participou o tempo inteiro em 6 jogos e fez a seguinte quantidade de pontos por jogo:
1º jogo: 34 pontos
2º jogo: 12 pontos
3º jogo: 10 pontos
4º jogo: 35 pontos
5º jogo: 22 pontos
6º jogo: 13 pontos

Para pensar e discutir

1. Existe algum dado em comum quanto ao desempenho desses jogadores? 1. Os dois têm a mesma média de pontos por jogo.
2. Quais critérios você usaria para escolher um deles? Justifique. 2. Resposta pessoal.

Veremos agora as chamadas **medidas de tendência central**: são medidas expressas por valores que representam, de algum modo, um conjunto de valores apresentados. Entre essas medidas, estão: **média** (média aritmética), **moda** e **mediana**.

Média aritmética

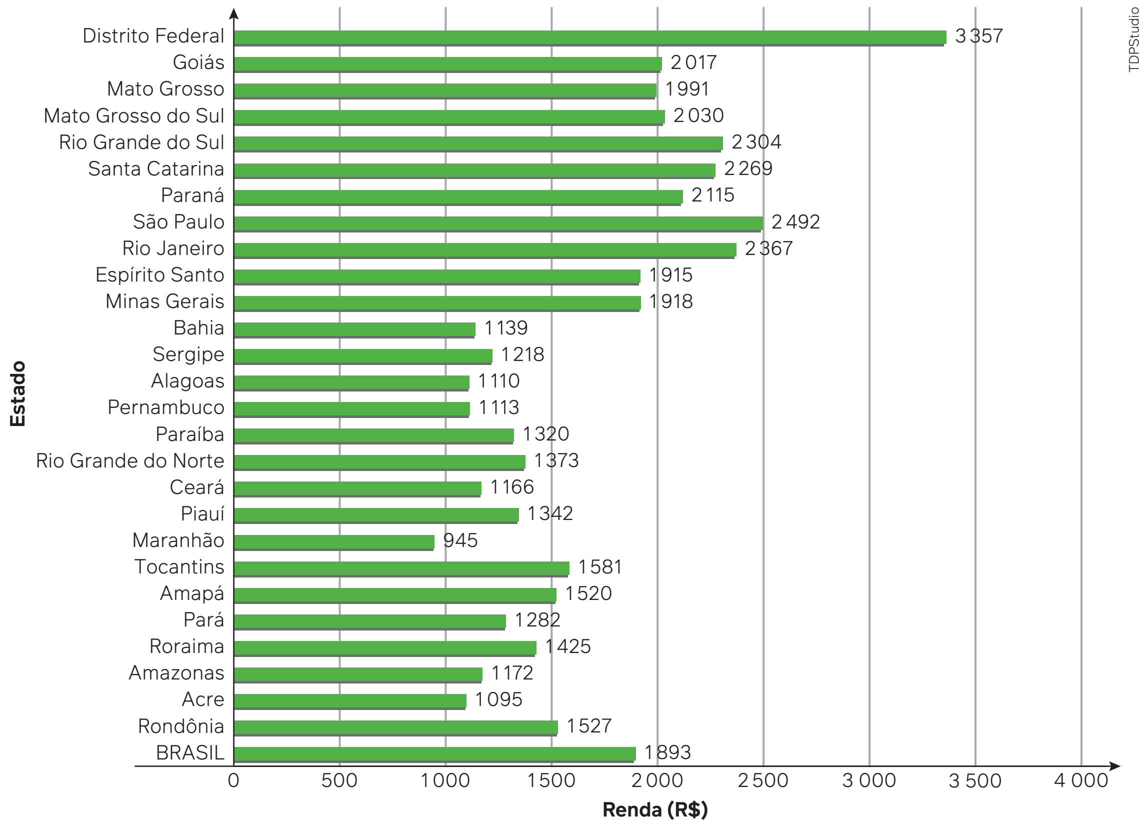
A seguir, estão indicadas algumas frases que são, de certa maneira, comuns no dia a dia das pessoas e representam diferentes contextos.

- Uma pessoa em nosso município vive em média 65 anos.
- A duração da viagem é de 6 horas, em média.
- Pedro trabalha em média 40 horas semanais.
- Aumentou no último ano a renda *per capita* da população brasileira.

Nas três primeiras frases, há a palavra *média*. Mesmo que na última frase ela não seja usada de forma direta, podemos dizer que implicitamente está presente. Você sabe o que é renda *per capita* e como calculá-la?

O gráfico abaixo apresenta a renda *per capita* em 2023 de cada um dos estados e do Distrito Federal e a média nacional.

Renda *per capita* no Brasil em 2023 por estado, em R$



Fonte: IBGE divulga rendimento domiciliar *per capita* 2023 para Brasil e unidades da Federação. [Rio de Janeiro]: IBGE, 28 fev. 2024. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/39262-ibge-divulga-rendimento-domiciliar-per-capita-2023-para-brasil-e-unidades-da-federacao. Acesso em: 9 ago. 2024.

Para pensar e discutir

1. Como é feito o cálculo da renda *per capita* de um estado brasileiro ou do Distrito Federal? Pesquise o significado de renda *per capita*. 1. Resposta pessoal.
2. E como é calculada a renda *per capita* brasileira? 2. Resposta pessoal.
3. Como, em sua opinião, é a distribuição da renda *per capita* brasileira? 3. Resposta pessoal.

Esse foi um exemplo da utilização de média aritmética, ou simplesmente, média:

Dados os n valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ de uma variável, a **média aritmética** é o valor M_a, tal que:

$$\boldsymbol{M_a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}}$$

Observação:

Essa relação, que representa a média aritmética dos n valores, também pode ser representada utilizando o símbolo de somatório:

$$M_a = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Leitura do símbolo $\sum_{i=1}^{n} x_i$:

Somatório de todos os valores de x_i, em que i é um número inteiro que vai de 1 até n.

Vamos analisar a seguir exemplos relacionados à média aritmética.

Atividades resolvidas

1. Laura observou que, na fatura que fornece o consumo de água em metros cúbicos de sua casa, constam os seguintes valores, nos últimos 10 meses:

19 jun.	19 jul.	19 ago.	19 set.	19 out.	19 nov.	19 dez.	20 jan.	20 fev.	20 mar.
44	40	44	42	39	34	30	22	21	38

Calcule a média aritmética de consumo em metros cúbicos nesses 10 meses e, a seguir, faça um gráfico de colunas indicando os consumos e também a média dos consumos.

- Cálculo da média de consumo em metros cúbicos por mês:

$$M_a = \frac{44 + 40 + 44 + 42 + 39 + 34 + 30 + 22 + 21 + 38}{10}$$

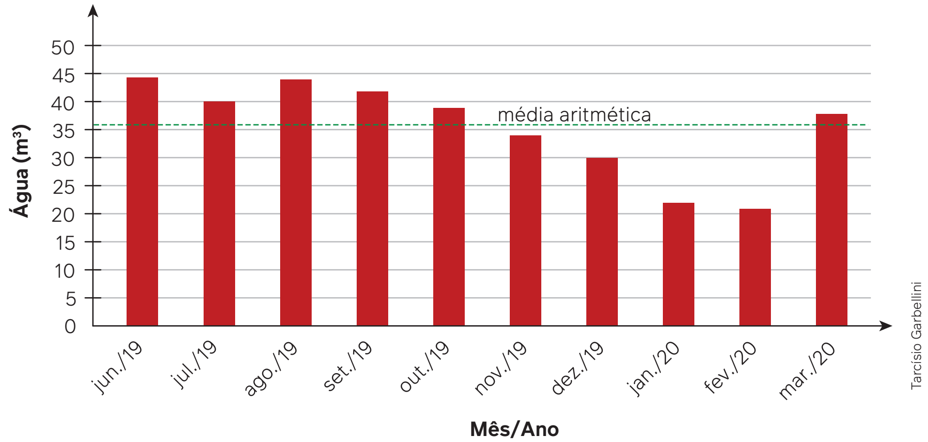
$$M_a = \frac{354}{10}$$

$$M_a = 35,4$$

Assim, o consumo médio de água é 35,4 m^3 por mês considerando os últimos 10 meses.

- Utilizando uma planilha eletrônica, podemos desenhar o gráfico, em que a linha horizontal tracejada indica o consumo médio nesses 10 meses.

Consumo mensal de água



Fonte: Dados coletados por Laura (dados fictícios).

Para pensar e discutir

1. No exemplo apresentado, a média obtida corresponde ao consumo de um dos meses observados? 1. Não.
2. Se você multiplicar a média de consumo pelo correspondente número de meses, o que obtém? 2. O total de consumo.
3. Se você diminuísse 5 metros cúbicos em cada mês, o que iria acontecer com a média? Justifique cada uma de suas respostas. 3. Diminuiria 5 m^3. Resposta pessoal.
4. Que tal pensarmos um pouco mais sobre o consumo de nossas casas? Faça um levantamento das contas de água (ou de energia elétrica) da casa em que mora. Calcule o consumo médio dos últimos seis meses, por exemplo. Depois, troque ideias com os colegas sobre as médias obtidas e, principalmente, pense no consumo sustentável, propondo atitudes que possam ser tomadas para diminuir o consumo e evitar qualquer tipo de desperdício. 4. Resposta pessoal.

2. Seis colegas de trabalho resolvem levantar a quantidade de dinheiro de cada um para auxiliar na compra de um bolo para comemorar o aniversário de outro colega que não estava presente naquele momento.

a) Calcule a média aritmética desses valores.

- Cálculo do valor médio, em reais, desse grupo de pessoas:

$$M_a = \frac{2 + 100 + 2 + 2 + 0 + 2}{6}$$

$$M_a = \frac{108}{6}$$

$$M_a = 18$$

Portanto, o valor médio é 18 reais.

b) Esse valor obtido pela média aritmética representa adequadamente o valor em reais que cada amigo do grupo possui? Justifique.

- Observe que 4 pessoas entre 6 possuem a quantia de 2 reais. Assim, o valor médio obtido de 18 reais não é representativo. O valor 100 reais, que corresponde à quantia de uma das 6 pessoas, foi responsável por “distorcer” a distribuição dos valores em torno da média.

Portanto, o valor médio não representa adequadamente o valor em reais que cada elemento do grupo possui.

3. Em uma pesquisa de satisfação, houve uma sondagem sobre os serviços prestados pela empresa Gama. A pesquisa foi feita por telefone com as últimas 1 000 pessoas que utilizaram seus serviços. Cada pessoa tinha que dar uma nota de 1 a 10. Havia a orientação de que, quanto menor a nota, menor o grau de satisfação e, analogamente, quanto maior a nota, maior o grau de satisfação. O resultado foi organizado na seguinte tabela.

Pesquisa de satisfação

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frequência	10	30	80	256	300	180	70	50	20	4

Fonte: Gerência da empresa Gama (dados fictícios).

Calcule a nota média obtida por esse grupo de pessoas.

- A variável de interesse aqui é o nível de satisfação. Logo, há maior frequência de notas 4, 5 e 6. Portanto, temos uma indicação de que os serviços estão sendo classificados como regulares. Vamos calcular a média para verificar:

$$M_a = \frac{10 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 80 \cdot 3 + 256 \cdot 4 + 300 \cdot 5 + 180 \cdot 6 + 70 \cdot 7 + 50 \cdot 8 + 20 \cdot 9 + 4 \cdot 10}{10 + 30 + 80 + 256 + 300 + 180 + 70 + 50 + 20 + 4}$$

$$M_a = \frac{10 + 60 + 240 + 1\,024 + 1\,500 + 1\,080 + 490 + 400 + 180 + 40}{1\,000}$$

$$M_a = \frac{5\,024}{1\,000}$$

$$M_a = 5{,}024$$

Assim, a média é de aproximadamente 5.

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal.

1. No cálculo da média, qual é o motivo de, por exemplo, multiplicar a nota 6 por 180? Explique.

2. Se 4 pessoas entre 1 000 deram nota 10, é de se esperar que essa nota não terá muito "peso" na média. Você concorda? Justifique explicando o significado da utilização da palavra peso. 2. Sim. Resposta pessoal.

3. Quanto maior a frequência de uma nota, maior o "peso" dessa nota no cálculo da média? Justifique.

3. Sim. Resposta pessoal.

Importante:

No cálculo da média aritmética (aqui, para simplificar, utilizamos apenas média) feito no exemplo anterior, observamos valores que são repetidos – no caso, uma mesma nota sendo dada por diversas pessoas. Assim, multiplicamos a nota pelo número de repetições no cálculo da média. Essa média também pode ser chamada de média aritmética ponderada.

A **média aritmética ponderada** dos n valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ de uma variável, com pesos $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$, respectivamente, é o valor M_p, tal que:

$$M_p = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + ... + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n}$$

No cálculo da média (simples ou ponderada) de um conjunto de valores, podemos agrupá-los em classes. É o caso, por exemplo, da distribuição das alturas de um grupo de pessoas. Qual é o procedimento para o cálculo da média quando os valores estão agrupados?

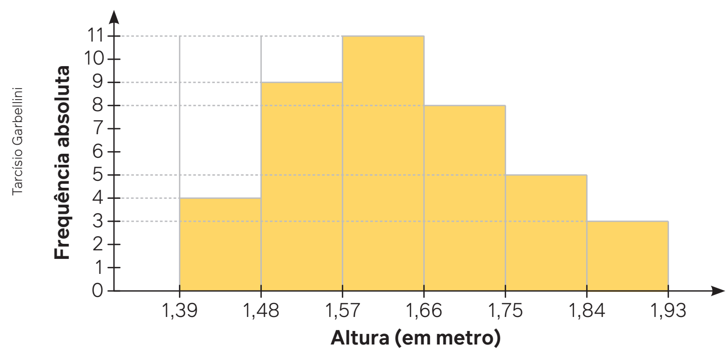
Para entender, vamos explorar uma situação fictícia.

Para explorar

Junte-se a dois colegas para fazer esta atividade.

Considerem que a distribuição das alturas dos estudantes de uma turma A do Ensino Médio do Colégio Aprendendo a Fazer foi representada no histograma a seguir.

Alturas: turma A



Fonte: Coordenação do Colégio Aprendendo a Fazer (dados fictícios).

Observe que essas alturas estão separadas em determinados intervalos. Assim, por exemplo, existem 4 estudantes dessa turma que têm a altura no intervalo [1,39; 1,48[. Esse intervalo representa uma classe de alturas.

1. Elaborem uma tabela com base no histograma. Organizem-na de acordo com os intervalos em que as alturas estão distribuídas e com as frequências absolutas. Além disso, para cada classe, indiquem a média aritmética das alturas. 1. Resposta no Manual do Professor.

2. Investiguem como calcular a média das alturas dessa turma e calculem-na. 2. Resposta pessoal.

Atividades

1. Considere que, em uma avaliação diagnóstica composta de 4 etapas, as notas obtidas por Ricardo sejam as seguintes:

Resultado de Ricardo	
Etapas	**Notas**
1	7,0
2	6,0
3	8,0
4	7,0

Calcule a nota média obtida por Ricardo nessas 4 etapas, considerando que:

a) Todas as etapas tenham o mesmo peso; 1. a) 7,0

b) Os pesos das etapas 1, 2, 3 e 4 sejam respectivamente 1, 1, 2 e 4. 1. b) 7,125

2. Júlia monitorou as temperaturas máximas da cidade em que mora durante os 20 primeiros dias de um mês. Organizou essas informações no quadro a seguir.

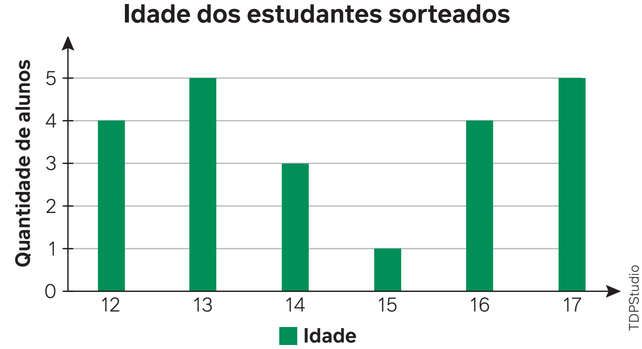
Temperatura (°C)	Frequência
37	9
36	4
35	2
34	5

Calcule a temperatura média entre as temperaturas máximas obtidas por Júlia nesses 20 dias. 2. 35,85 °C

3. Considere que a média aritmética entre os números A e B é 5, enquanto a média ponderada entre esses mesmos números, com pesos 2 e 3, respectivamente, é igual a 5,2. Calcule o produto entre os números A e B. 3. 24

4. Um levantamento entre os 22 estudantes de um curso de língua estrangeira apontou a seguinte distribuição entre as idades.

Idade dos estudantes sorteados



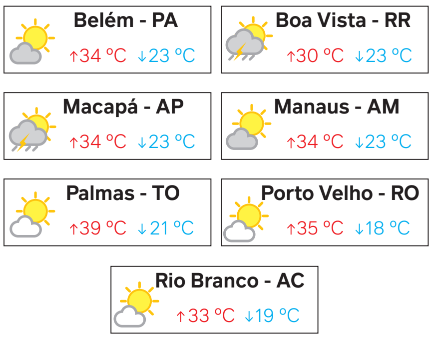
Fonte: Coordenação do curso (dados fictícios).

a) Qual é a idade média desse grupo de estudantes? 4. a) 14,5 anos

b) Quantos desses estudantes estão abaixo da média obtida? 4. b) 12

5. A seguir está a previsão do tempo para as capitais da Região Norte do Brasil para o dia 12 de agosto de 2024.

Temperatura das capitais da Região Norte do Brasil em 12 de agosto de 2024



Reinaldo Vignati

Fonte: BRASIL. Instituto Nacional de Meteorologia. *Previsão de tempo*. Brasília, DF: INMET, 2024. Disponível em: https://portal.inmet.gov.br/. Acesso em: 12 ago. 2024.

a) Entre as temperaturas máximas previstas, há alguma mais frequente? Qual? 5. a) Sim; 34 °C.

b) Entre as temperaturas mínimas previstas, há alguma mais frequente? Qual? 5. b) Sim; 23 °C.

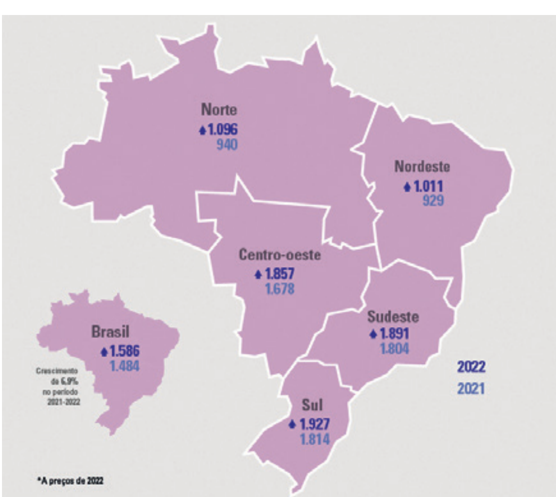
c) Qual é a média aproximada entre as temperaturas máximas previstas? 5. c) 34,1 °C

d) Qual é a média aproximada entre as temperaturas mínimas previstas? 5. d) 21,4 °C

6. Analise as informações presentes na ilustração.

Rendimento médio mensal real *per capita* (R$) por grandes regiões e Brasil

IBGE



BRITTO, V. Em 2022, mercado de trabalho e Auxílio Brasil permitem recuperação dos rendimentos. [Rio de Janeiro]: IBGE, 11 maio 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/36857-em-2022-mercado-de-trabalho-e-auxilio-brasil-permitem-recuperacao-dos-rendimentos. Acesso em: 9 ago. 2024.

a) Elabore um pequeno texto comparando os rendimentos médios *per capita* entre as regiões no ano de 2022 e entre as regiões e a média do Brasil. 6. a) Resposta pessoal.

b) Elabore um pequeno texto fazendo comparações por região entre os rendimentos médios *per capita* de 2021 e 2022. 6. b) Resposta pessoal.

7. (Uncisal) Em cada bimestre, uma faculdade exige a realização de quatro tipos de avaliação, calculando a nota bimestral pela média ponderada dessas avaliações. Se o quadro apresenta as notas obtidas por uma aluna nos quatro tipos de avaliações realizadas e os pesos dessas avaliações, sua nota bimestral foi aproximadamente igual a 7. Alternativa **d.**

Avaliação	Nota	Peso
Prova escrita	6,00	4
Avaliação continuada	7,00	4
Seminário	8,00	2
Trabalho em grupo	9,00	2

a) 8,6 **b)** 8,0 **c)** 7,5 **d)** 7,2 **e)** 6,8

8. (UFRGS) A tabela a seguir mostra o tempo de uso diário de um dispositivo eletrônico por um aluno, durante cinco dias da semana com aulas a distância, em sua escola, no ano de 2021.

Dia da semana	Tempo (em minutos)
Segunda-feira	240
Terça-feira	180
Quarta-feira	180
Quinta-feira	240
Sexta-feira	120

Nessas condições, o tempo médio diário de uso do dispositivo eletrônico por esse aluno é 8. Alternativa **a.**

a) superior a três horas.
b) superior a quatro horas.
c) superior a cinco horas.
d) inferior a duas horas.
e) inferior a três horas.

9. (Ufam) Três estudantes, A, B e C, estão matriculados em um curso de francês. Segundo os critérios de avaliação, o professor optou por fazer três provas. Para que seja aprovado nesse curso, o estudante deverá ter a média aritmética das notas das três provas maior ou igual a 7. Na tabela a seguir, estão dispostas as notas que cada estudante tirou em cada prova:

Estudante	1ª prova	2ª prova	3ª prova
A	5	9	8
B	7	8	4
C	8	6	7

Com base nas informações dadas, podemos afirmar que: 9. Alternativa **a.**

a) Somente o estudante B não será aprovado.
b) Somente o estudante C não será aprovado.
c) Somente os estudantes A e B não serão aprovados.
d) Somente os estudantes A e C não serão aprovados.
e) Somente os estudantes B e C não serão aprovados.

Moda

Em algumas situações, ao calcular a média aritmética dos valores de um conjunto de dados, percebemos que ela não representa adequadamente esse conjunto de valores. Isso ocorre, por exemplo, quando a diferença entre valores é muito grande. Vamos retornar ao exemplo que usamos antes.

"Seis colegas de trabalho resolvem levantar a quantidade de dinheiro de cada um para auxiliar na compra de um bolo para comemorar o aniversário de outro colega que não estava presente naquele momento."

Vimos que a média aritmética dessas quantias é de 18 reais e concluímos que ela não representa adequadamente o conjunto de valores. Nesse exemplo, há uma diferença muito grande entre o menor e o maior valor do grupo e também uma concentração de valores menores (2 reais) em relação a apenas um valor maior (100 reais).

Para pensar e discutir

1. Se a média aritmética não representa adequadamente o grupo de valores, qual é o valor que melhor representa esse conjunto? Justifique. 1. Dois. Resposta pessoal.
2. O conjunto formado pelas idades dos estudantes de sua turma pode ser representado por qual idade? 2. Resposta pessoal.

Na situação discutida, utilizamos outra medida de tendência central, a **moda**. Como a média aritmética não é representativa do grupo de valores em reais, pois existe um valor (100 reais) que "distorce" a média, utilizamos o valor mais frequente para representar.

Moda de um conjunto de valores é o elemento que ocorre com mais frequência.

Representaremos a moda por M_o.

Exemplo:

Em uma rede de supermercados trabalham 100 funcionários. Ao longo de um ano verificou-se o seguinte quadro de faltas.

Número de faltas	Quantidade de funcionários
0	50
1	17
2	15
3	10
4	6
5	2

O dado mais frequente dessa distribuição é zero. São 50 funcionários que não tiveram qualquer falta ao longo do ano. Assim, dizemos: Moda = zero ($M_o = 0$).

A moda é uma medida de tendência central que nos permite obter uma medida rápida do conjunto de valores; basta observar aquele que é mais frequente. Entretanto, é importante compreender que nem sempre há valores repetidos. Por outro lado, em algumas situações haverá mais de um valor com a mesma frequência. Vamos exemplificar!

Atividades resolvidas

4. Um levantamento sobre as idades de estudantes de uma das turmas do 2º ano do Ensino Médio resultou na seguinte tabela de frequência:

Idade	Número de estudantes
13	1
14	5
15	20
16	4

Calcule a média das idades desse grupo de estudantes e faça a comparação com a moda das idades deles.

- Cálculo da média das idades dos estudantes:

$$M_a = \frac{1 \cdot 13 + 5 \cdot 14 + 20 \cdot 15 + 4 \cdot 16}{1 + 5 + 20 + 4}$$

$$M_a = \frac{13 + 70 + 300 + 64}{30}$$

$$M_a = \frac{447}{30} \Rightarrow M_a = 14{,}9$$

Portanto, a média das idades é 14,9 anos.

- Observando a idade mais frequente (aparece 20 vezes), temos que:

$$M_o = 15$$

Nesse caso, a moda e a média aritmética são muito próximas.

> Se todos os elementos de um conjunto de dados têm a mesma frequência, ele é dito **amodal**.
> Caso um conjunto de elementos apresente duas modas, ele é dito **bimodal**. Se apresentar três modas, será **trimodal**, e assim por diante.

5. Uma rede de farmácias fez um levantamento sobre as quantidades de determinado medicamento no estoque de suas 22 lojas espalhadas em um mesmo estado. O resultado foi resumido no seguinte diagrama de ramos e folhas:

0	3	4	5	5	7	9
1	2	2				
2	1	1	1	1		
3	0	1	1	1	1	5
4	2	5	5			
6	0					

Qual é a moda entre as quantidades do medicamento existente nas farmácias?

- Interpretando os dados que aparecem no diagrama, temos que as quantidades 21 e 31 têm frequência igual a 4. Assim, a distribuição tem duas modas (bimodal): a quantidade 21 e a quantidade 31.

Para explorar

Esta atividade deve ser feita coletivamente.

Etapa 1 **Etapa 1**: Resposta de acordo com os dados coletados.

Com a turma, colete a idade em anos completos dos colegas, a quantidade de canetas que cada um tem e o mês de aniversário. Depois responda às questões.

1. Qual idade mais se repete no grupo de estudantes de sua turma?

2. Qual é a quantidade de canetas mais frequente entre os estudantes da turma?

3. Qual é o mês do ano em que há mais aniversariantes da turma?

Etapa 2 **Etapa 2**: Resposta pessoal.

Observando as informações acima, indique, com a turma, o que é mais adequado para representar os dados do grupo: a média aritmética ou a moda? Justifique a resposta.

Etapa 3 **Etapa 3**: Resposta pessoal.

Elabore com a turma uma situação envolvendo valores ou dados em que a moda seja mais representativa do que a média aritmética.

Mediana

A prefeitura de um município brasileiro e a Secretaria de Educação resolveram fazer uma campanha nas escolas para incentivar a leitura. Nessa campanha, divulgaram fotografias de pessoas lendo, fizeram palestras acerca da importância da leitura e outras medidas que visavam conduzir as pessoas a buscar livros na biblioteca das escolas.

Rubens Chaves/Pulsar Imagens

Mulher lendo livro na Biblioteca Municipal Sarabaquê, na Aldeia de Carapicuíba, SP, 2015.

Assim, ao iniciar a campanha, primeiramente solicitaram que Laura, a responsável pela biblioteca municipal, fizesse um levantamento da quantidade de livros que as pessoas emprestaram nos últimos dias.

Após algum tempo, Laura resolveu levantar, nos últimos 24 dias úteis, a quantidade de livros emprestados por dia. Colocou essas quantidades em ordem crescente neste quadro:

11	16	17	17	17	18	19	20	21	22	22	**23**	**23**	23	23	24	24	24	24	24	24	25	25	25

Posições centrais

Acervo editora

Ela fez o cálculo da média aritmética desses valores e determinou a moda, porém resolveu também obter o termo central dessa distribuição, lembrando de um conceito de Estatística que havia estudado. Como a quantidade de dias analisados é par, não existe termo central na distribuição. Nesse caso, considerou os dois valores que ocupavam as **posições centrais**.

Para pensar e discutir

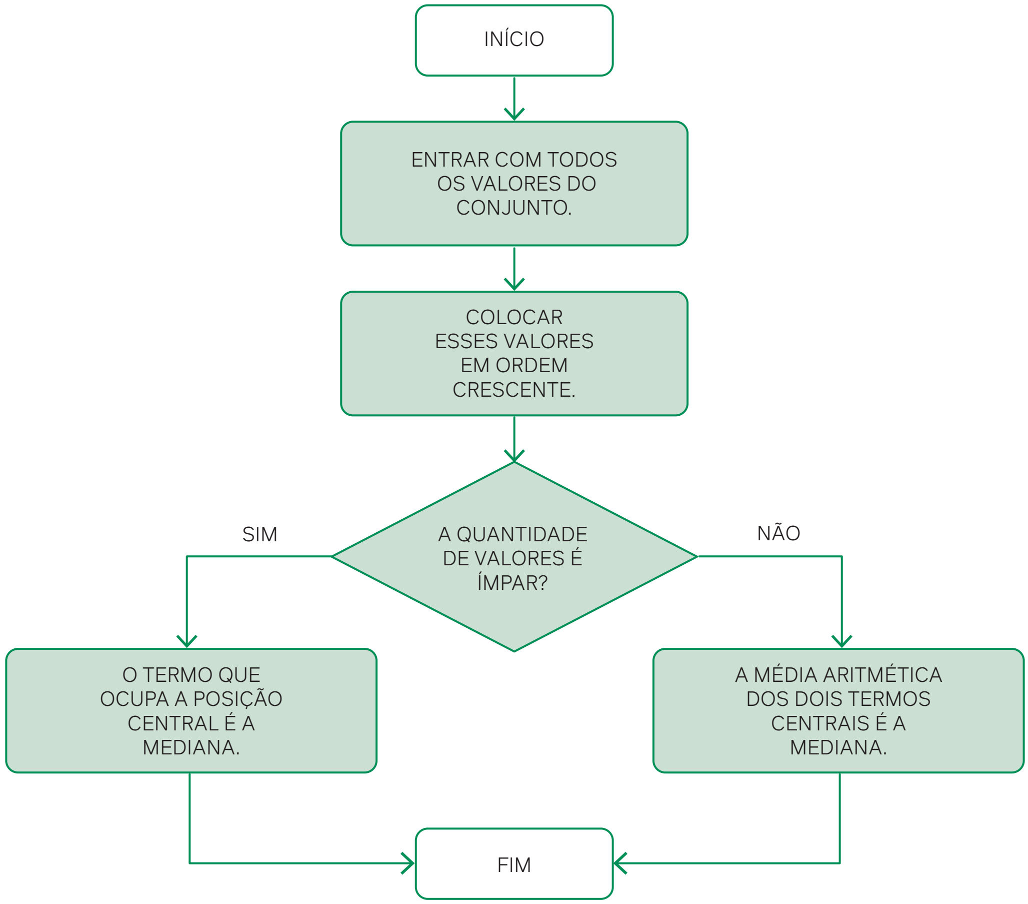
1. Qual é a moda das quantidades diárias de retiradas de livros nos 24 dias analisados? 1. 24
2. Quais são os dois valores que ocupam o centro da distribuição? Qual é a média aritmética desses valores? 2. Os dois valores são iguais a 23; média: 23.
3. Calcule a média aritmética de todos os valores e compare-a com a média aritmética dos dois valores que estão no centro da distribuição. É o mesmo valor? 3. 21,29; não
4. Se você inserisse a média da quantidade de livros dos 24 dias, ela ficaria na posição central? Explique. 4. Não; resposta pessoal.

Na discussão proposta anteriormente, você analisou uma distribuição de valores de uma variável colocados em ordem crescente, observando a posição central (no nosso exemplo, "posições centrais"). A ideia é que você observe que podemos ter outra medida de posição central que também pode representar um conjunto de valores: a **mediana**.

A **mediana** de um conjunto finito de valores, dispostos em ordem crescente ou decrescente, é o valor central, se o conjunto tiver um número ímpar de elementos, ou é a média aritmética dos dois valores centrais, se o conjunto tiver um número par de elementos.

Representamos mediana por M_e.

Agora que você já observou um exemplo relacionado à obtenção da mediana, podemos, por meio de um fluxograma, descrever um processo que nos propicie obter a mediana de um conjunto de valores conhecidos.



Acervo editora

Analise a seguir alguns exemplos utilizando a mediana.

Atividades resolvidas

6. Um grupo de 13 pessoas de uma mesma família está reunido. O quadro a seguir apresenta as idades dessas 13 pessoas em ordem crescente.

5	6	7	10	12	14	16	22	26	32	34	36	70

a) Obtenha a mediana da distribuição das idades das 13 pessoas.

b) Calcule a média aritmética das idades desse grupo de pessoas e, depois, responda: a média aritmética representa adequadamente esse grupo de pessoas?

- Item **a)** - Como são 13 elementos nessa distribuição de idades, o 7º elemento (idade de 16 anos) separa esse grupo em dois. Portanto, a mediana das idades é igual a 16 anos, isto é: $M_e = 16$.
- Item **b)** - Cálculo da média aritmética das idades das pessoas:

$$M_a = \frac{5 + 6 + 7 + 10 + 12 + 14 + 16 + 22 + 26 + 32 + 34 + 36 + 70}{13}$$

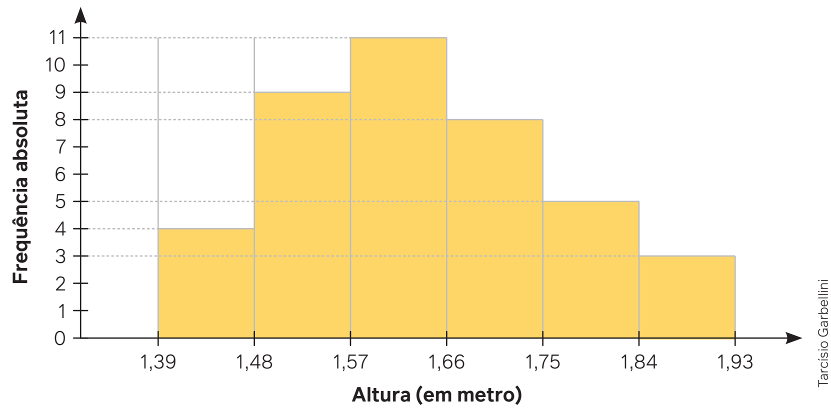
$$M_a = \frac{290}{13}$$

$$M_a \cong 22$$

- A média de idade de 22 anos não representa adequadamente esse grupo. Note que essa média estaria à direita da posição central, evidenciando, assim, que a idade de 70 anos tem um “peso maior” nessa distribuição.

7. No histograma abaixo está a distribuição das alturas dos estudantes de uma turma A do Ensino Médio do Colégio Aprendendo a Fazer. Essas informações já foram utilizadas para o cálculo de média aritmética.

Alturas: turma A



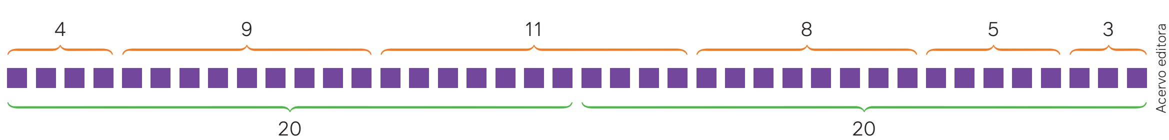
Fonte: Colégio Aprendendo a Fazer (dados fictícios).

Com base nas informações do histograma, foi construída a seguinte tabela, com as frequências de cada classe de alturas e o valor médio das alturas em cada classe.

Classes das alturas	Frequência absoluta	Valor médio da classe
1,39 ⊢ 1,48	4	1,435
1,48 ⊢ 1,57	9	1,525
1,57 ⊢ 1,66	11	1,615
1,66 ⊢ 1,75	8	1,705
1,75 ⊢ 1,84	5	1,795
1,84 ⊢ 1,93	3	1,885
Total	40	–

Determine a mediana correspondente a essa distribuição de alturas.

- Observando o total de 40 (número par), os valores que ocupam "posições centrais" na distribuição são os correspondentes ao 20º e ao 21º valores médios. De acordo com as frequências, temos que:



Cálculo da mediana:

$$M_e = \frac{(20º\ \text{valor}) + (21º\ \text{valor})}{2}$$

$$M_e = \frac{1{,}615 + 1{,}615}{2} \Rightarrow M_e = 1{,}615$$

Assim, a altura que representa a mediana das alturas é 1,615 m.

Observações:
De modo geral, podemos dizer que a mediana é utilizada quando:

1. Queremos obter o ponto que divide a distribuição de valores em partes iguais.

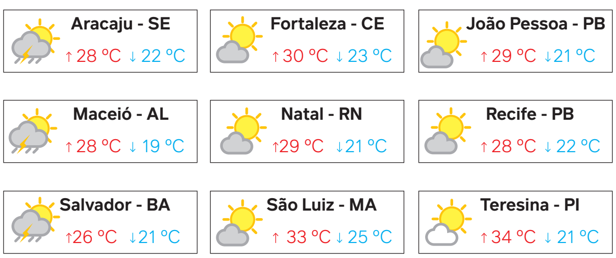
2. Podemos dizer que a mediana serve para representar um conjunto de valores quando existem valores extremos que acabam afetando em demasia a média aritmética.

3. Estamos dando uma informação sobre o resultado de uma pesquisa. Observe as frases a seguir.
   - 50% dos votos válidos da eleição vão para o candidato A.
   - Na avaliação em Matemática, metade dos estudantes conseguiu média acima de 6 pontos.

Atividades

10. Abaixo está indicada a previsão de temperatura para as capitais da Região Nordeste para o dia 25 de julho de 2024.

Temperatura das capitais da Região Nordeste do Brasil em 25 de julho de 2024



Reinaldo Vignati

Fonte: BRASIL. Instituto Nacional de Meteorologia. *Previsão de tempo*. Brasília, DF: INMET, 2024. Disponível em: https://portal.inmet.gov.br. Acesso em: 25 jul. 2024.

Conforme essa previsão:

a) Obtenha a média aritmética aproximada entre as temperaturas máximas dessas nove capitais. 10. a) 29,4 °C

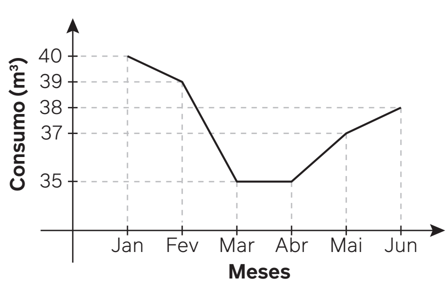
b) Indique a moda entre as temperaturas máximas dessas nove capitais. 10. b) 28 °C

c) Indique a mediana entre as temperaturas máximas dessas nove capitais. 10. c) 29 °C

d) Comparando as medidas de tendência central, indique, justificando, qual delas representa o grupo de temperaturas máximas dessas nove capitais. 10. d) Resposta pessoal.

11. O gráfico de segmentos a seguir foi utilizado para representar o consumo de água de uma residência em metros cúbicos ao longo dos seis primeiros meses de um ano.

Evolução do consumo de água



TDPStudio

a) Obtenha a média mensal do consumo em metros cúbicos dessa residência no 1º semestre. 11. a) Aproximadamente 37,3 m^3.

b) Qual é a moda de consumo? 11. b) A moda de consumo é de 35 m^3.

c) E a mediana? 11. c) A mediana de consumo é de 37,5 m^3.

12. Os dados do quadro a seguir representam as informações dos 10 primeiros dias de um mês sobre a chuva precipitada, em milímetros.

Dia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Volume (mm)	20	8	1	2	12	24	36	2	2	3

Em relação ao volume de chuva precipitado por dia, obtenha os valores da média aritmética, da mediana e da moda. 12. 11 mm; 5,5 mm; 2 mm, respectivamente

13. (Cesgranrio-RJ) Considere o conjunto:
{15; 17; 21; 25; 25; 29; 33; 35}
A média, a mediana e a moda desse conjunto de dados são, respectivamente, 13. Alternativa **d.**

a) 1, 2 e 3.

b) 5, 7 e 9.

c) 7, 9 e 5.

d) 25, 25, e 25.

e) 25, 27 e 29.

14. No quadro a seguir estão indicadas todas as idades e o número de policiais de determinado município.

Idade	Número de policiais
25	12
28	15
30	25
33	15
35	10
40	8

a) Qual é a quantidade total de policiais desse município? 14. a) 85

b) Indique uma medida de tendência central que represente a idade desse grupo de policiais e justifique sua escolha. 14. b) Resposta pessoal.

15. (Enem) Os estudantes de uma turma escolar foram divididos em dois grupos. Um grupo jogaria basquete enquanto o outro jogaria futebol. Sabe-se que o grupo de basquete é formado pelos estudantes mais altos da classe e tem uma pessoa a mais do que o grupo de futebol. A tabela seguinte apresenta informações sobre as alturas dos estudantes da turma.

Média	Mediana	Moda
1,65	1,67	1,70

Os estudantes P, J, F e M medem, respectivamente, 1,65 m, 1,66 m, 1,67 m e 1,68 m, e as suas alturas não são iguais à de nenhum outro colega da sala. Segundo essas informações, argumenta-se que os estudantes P, J, F e M jogaram, respectivamente, 15. Alternativa **c.**

a) basquete, basquete, basquete, basquete.

b) futebol, basquete, basquete, basquete.

c) futebol, futebol, basquete, basquete.

d) futebol, futebol, futebol, basquete.

e) futebol, futebol, futebol, futebol.

16. (TJAP–FCC) O diagrama de ramo e folhas a seguir corresponde às idades dos 40 funcionários de um setor de um órgão público em uma determinada data.

1	8 8 9
2	0 1 1 2 2 2 7 8 8 9
3	1 3 3 3 3 4 4 4 5 6 7 8 8 8
4	0 1 2 2 3 4 8 9
5	1 5 8
6	2 5

A soma da mediana e da moda destas idades é igual a:
16. Alternativa **a.**

a) 67,0.

b) 66,5.

c) 66,0.

d) 65,5.

e) 65,0.

17. (UFU-MG) Um açougueiro atendeu, nos quatro primeiros dias de uma semana, respectivamente, 20, 17, 16 e 19 pessoas. Considerando-se os atendimentos realizados na sexta-feira e no sábado, a média do número de pessoas atendidas, ao longo de todos esses dias da semana, foi de 21 pessoas. Se a moda referente às quantidades de pessoas atendidas diariamente é maior do que 20, logo, a maior quantidade de pessoas atendidas em um único dia é igual a:
17. Alternativa **c.**

a) 22.

b) 33.

c) 27.

d) 34.

18. (Enem) O gerente de uma concessionária apresentou a seguinte tabela em uma reunião de dirigentes. Sabe-se que ao final da reunião, a fim de elaborar metas e planos para o próximo ano, o administrador avaliará as vendas, com base na mediana do número de automóveis vendidos no período de janeiro a dezembro.

Mês	Número de automóveis vendidos
Janeiro	25
Fevereiro	20
Março	30
Abril	35
Maio	40
Junho	50
Julho	45
Agosto	35
Setembro	60
Outubro	55
Novembro	70
Dezembro	65

Qual foi a mediana dos dados apresentados?
18. Alternativa **b.**

a) 40,0

b) 42,5

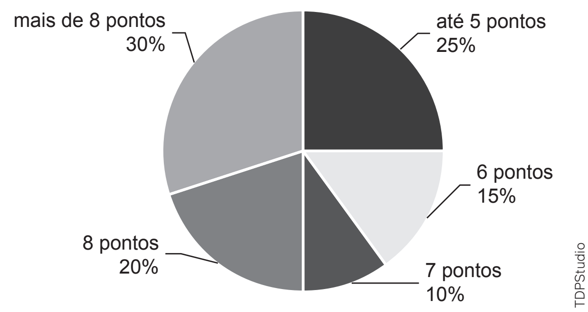
c) 45,0

d) 47,5

e) 50,0

19. (UFJF-MG) Após corrigir um teste formado por 10 questões de múltipla escolha, no qual cada questão valia 1 ponto, o professor divulgou o gráfico seguinte:

Frequência de notas



De acordo com o gráfico, a mediana da distribuição das notas obtidas nesse teste é 19. Alternativa **d.**

a) 6,5

b) 6,8

c) 7,0

d) 7,5

e) 8,0

20. (UEPG-PR) Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 5. Depois de sortear 20 bolas desta urna, com reposição, e anotar o número obtido em cada retirada, organizou-se o seguinte quadro de distribuição de frequências:

Número obtido	Frequência
1	3
2	5
3	4
4	2
5	6

A partir do que foi exposto, assinale o que for correto. 20. 19 (01 + 02 + 16)

01) A média da distribuição de frequências é 3,15.

02) A moda da distribuição de frequências é 5.

04) A média da distribuição de frequências é um número inteiro.

08) A mediana da distribuição de frequências é 3,5.

16) A mediana da distribuição de frequências pertence ao intervalo [3, 4).

Para explorar

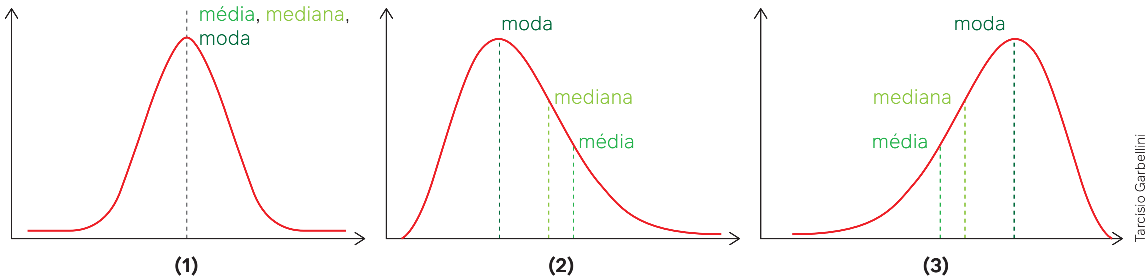
Junte-se a três colegas para fazer esta atividade.

Parte 1

Leiam e interpretem as informações a seguir.

Considerem que vocês estão diante de um histograma que representa a distribuição de um conjunto de valores, como representado abaixo. Da forma que esse histograma está, podemos traçar uma curva como a que está indicada a seguir. Em Estatística, ela é chamada de **curva normal**.

Além de representarem medidas de tendência central, a média aritmética, a mediana e a moda são chamadas de medidas de posição central. Entretanto, dependendo da posição que elas ocupam uma em relação às outras, podemos classificar essa distribuição de valores (o que está representado no eixo horizontal) em três casos principais:



(1) → $M_a = M_o = M_e$
As três medidas ocupam a mesma posição: dizemos que a distribuição é perfeitamente simétrica.

(2) → $M_o < M_e < M_a$
Distribuição assimétrica, enviesada para a direita.

(3) → $M_a < M_e < M_o$
Distribuição assimétrica, enviesada para a esquerda. Parte 1: Orientação no Manual do Professor.

Parte 2

Pesquisem em livros de Estatística na biblioteca mais próxima ou em *sites* de busca um exemplo de distribuição simétrica das medidas de tendência central e façam um histograma com esses valores.

Parte 2: Resposta pessoal.

Parte 3

Ainda nessa pesquisa, encontrem um exemplo de distribuição assimétrica enviesada para a esquerda e façam um histograma com esses valores. Parte 3: Resposta pessoal.

Parte 4

Também encontrem um exemplo de distribuição assimétrica enviesada para a direita e façam um histograma com esses valores. Parte 4: Resposta pessoal.

Parte 5

Elaborem um relatório que explique esses três casos e suas conclusões. Parte 5: Resposta pessoal.

Medidas de dispersão

2

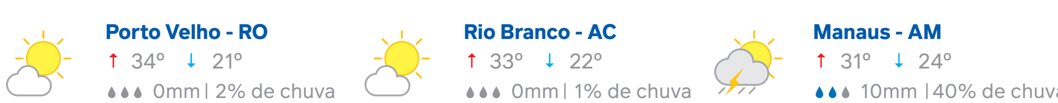
Um conjunto de valores pode ser convenientemente representado por meio dos chamados valores de **tendência central**: média aritmética, mediana e moda são os mais utilizados. Dizemos que essas medidas podem servir de comparação, dando a posição de qualquer elemento desse conjunto de valores; por exemplo, o valor A está abaixo da média, ou o valor B é superior à mediana e diferente da moda.

Mas, quando se trata de interpretar os dados, será que as medidas de tendência central são suficientes?

Andrey_Popov/Shutterstock.com

Analista de dados utilizando diferentes tipos de gráfico e tabela para auxiliar em tomadas de decisão.

Pode haver situações em que a média, a moda ou mesmo a mediana não sejam suficientes para caracterizar perfeitamente uma distribuição de valores para tomar uma decisão. Um exemplo simples é o que você pode observar quando está diante da previsão do tempo que aparece nas mídias. Observe a previsão do tempo das três capitais da Região Norte, indicadas a seguir.



Reinaldo Vignati

Temperaturas mínimas e máximas e volume de chuva em três capitais da Região Norte em 10 de junho de 2024.
Fonte: PREVISÃO do tempo para todas as Regiões do Brasil. *Climatempo*, São Paulo, 10 jun. 2024. Disponível em: https://www.climatempo.com.br/brasil. Acesso em: 10 jun. 2024.

Se calcularmos as médias entre as temperaturas mínima e máxima de cada uma dessas cidades, obtemos os seguintes valores:

Porto Velho: $M_a = \dfrac{34 + 21}{2} \Rightarrow M_a = 27{,}5\ °C$

Rio Branco: $M_a = \dfrac{33 + 22}{2} \Rightarrow M_a = 27{,}5\ °C$

Manaus: $M_a = \dfrac{31 + 24}{2} \Rightarrow M_a = 27{,}5\ °C$

Para pensar e discutir

1. Comparando as médias entre essas temperaturas, o que você pode concluir? 1. Resposta pessoal.

2. Observando apenas as médias das temperaturas nas três cidades, o que esses valores "escondem" que é importante considerar quando se fala em temperatura? 2. Resposta pessoal.

Quando estamos analisando um grupo de valores, além das medidas de tendência central, existem também as **medidas de dispersão**. Entre essas medidas vamos abordar: **amplitude**, **variância** e **desvio-padrão**.

Amplitude total

Você já ouviu falar em amplitude térmica?

Essa medida nada mais é do que a diferença, por exemplo, em determinado dia em uma localidade, entre as temperaturas máxima e mínima.

Quando você consulta a previsão do tempo na internet para sua cidade, normalmente observa os dias da semana, sinais que indicam se vai chover ou não e, também, as temperaturas mínima e máxima.

Observe, por exemplo, a previsão do tempo para a cidade de Curitiba ao longo de alguns dias. Com base nesses dados, vamos obter as amplitudes térmicas na ordem em que os dados estão apresentados ao longo dos sete primeiros dias.

Zig Koch/Pulsar Imagens

Jardim Botânico em Curitiba, capital do estado do Paraná, 2022.

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo
Máxima	28 °C	26 °C	25 °C	24 °C	24 °C	24 °C	19 °C
Mínima	12 °C	13 °C	12 °C	10 °C	10 °C	12 °C	9 °C
Amplitude	16 °C	13 °C	13 °C	14 °C	14 °C	12 °C	10 °C

Fonte: PREVISÃO do tempo para Jardim Botânico. *Accuweather*, [*s. l.*] , 6 jun. 2024. Disponível em: https://www.accuweather.com/pt/br/jardim-bot%C3%A2nico/2732355/weather-forecast/2732355. Acesso em: 6 jun. 2024.

Note que ao longo desses dias a maior amplitude térmica é de 16 °C e a menor é de 10 °C.

Caso queira observar as temperaturas em estados das regiões Norte e Nordeste, verificará que as amplitudes térmicas são baixas devido aos climas tropical e equatorial, que apresentam temperaturas altas praticamente o ano todo.

Para pensar e discutir

1. Qual é a amplitude térmica da capital de seu estado prevista para amanhã? Pesquise. 1. Resposta pessoal.
2. Em quais locais do mundo se constata a maior amplitude térmica diária? Pesquise e procure expressar justificativas para essa característica. 2. Resposta pessoal.

Em Estatística, quando analisamos a amplitude total entre os valores de uma variável, estamos obtendo uma medida de dispersão dos dados dessa variável. Para explicar isso melhor, vamos retomar uma situação vista neste capítulo, que ilustramos a seguir.

JOGADOR A
Participou o tempo inteiro em 5 jogos e fez a seguinte quantidade de pontos por jogo:
1º jogo: 22 pontos
2º jogo: 23 pontos
3º jogo: 20 pontos
4º jogo: 19 pontos
5º jogo: 21 pontos

Mauro Salgado

JOGADOR B
Participou o tempo inteiro em 6 jogos e fez a seguinte quantidade de pontos por jogo:
1º jogo: 34 pontos
2º jogo: 12 pontos
3º jogo: 10 pontos
4º jogo: 35 pontos
5º jogo: 22 pontos
6º jogo: 13 pontos

Calculando a média aritmética dos pontos dos dois jogadores para obter a média por jogo, temos:

$$\text{Jogador A: } M_{a_A} = \frac{22 + 23 + 20 + 19 + 21}{5} = \frac{105}{5} = 21 \Rightarrow M_{a_A} = 21$$

$$\text{Jogador B: } M_{b_B} = \frac{34 + 12 + 10 + 35 + 22 + 13}{6} = \frac{126}{6} = 21 \Rightarrow M_{b_B} = 21$$

Os dois têm a mesma média de pontos por jogo. Entretanto, observe que, mesmo sendo uma quantidade diferente de jogos, o jogador A é mais regular que o jogador B. Essa regularidade pode ser observada pela **amplitude total** (vamos representar por $\boldsymbol{A_T}$) dos pontos de cada jogador:

$$\text{Jogador A: } A_{T_A} = 23 - 19 \Rightarrow A_{T_A} = 4$$

$$\text{Jogador B: } A_{T_B} = 35 - 10 \Rightarrow A_{T_B} = 25$$

Para um técnico que pretende escalar um desses dois jogadores para determinado jogo, a média aritmética pode esconder algo considerado importante em um jogador: regularidade. E o jogador A tem essa característica. Entretanto, dependendo da situação, da importância do jogo e de seus critérios como técnico, a escolha do jogador B também pode ser interessante.

Isso se deve ao fato de que esse jogador, apesar de não ter a regularidade do outro, pode estar em um dia inspirado e fazer um número grande de pontos. De qualquer maneira, a amplitude é uma medida que auxilia na tomada de decisão.

A **amplitude total** de um conjunto de valores é a diferença entre o maior e o menor elemento desse conjunto.

Observação:
A amplitude total avalia a dispersão dos valores de um conjunto. Quanto maior a amplitude, mais dispersos esses valores se encontram, e quanto menor a amplitude, menor a dispersão entre eles.

Atividades resolvidas

8. Vamos retomar os dados das alturas utilizados anteriormente para obter a amplitude total desse grupo de valores.

Distribuição das alturas: turma A							
Classes das alturas	1,39 ⊢ 1,48	1,48 ⊢ 1,57	1,57 ⊢ 1,66	1,66 ⊢ 1,75	1,75 ⊢ 1,84	1,84 ⊢ 1,93	TOTAL
Frequência absoluta	4	9	11	8	5	3	40

- De acordo com o conceito de amplitude total, fazemos a diferença entre a maior e a menor altura do conjunto de alturas, isto é:

$$A_T = 1{,}93 - 1{,}39$$

$$A_T = 0{,}54 \Rightarrow 0{,}54 \text{ m} = 54 \text{ cm}$$

Assim, a amplitude total dessa distribuição de alturas é igual a 54 cm.

Importante:

Há um cuidado quando se utiliza a amplitude total como medida de dispersão. Ela tem o inconveniente de levar em consideração somente os valores extremos do conjunto de dados, sem observar os intermediários. Sendo assim, utilizamos a amplitude total como uma indicação aproximada da dispersão dos dados no conjunto de valores. Nesse sentido, a amplitude representa, como você observou nos exemplos, uma medida de cálculo rápido.

Se a ideia é considerar a totalidade dos valores, outras medidas de dispersão são mais adequadas: **variância** e **desvio-padrão**. Essas medidas serão obtidas ainda neste capítulo.

9. No rol a seguir estão as idades em anos completos de um grupo de pessoas que praticam esportes regularmente em uma quadra poliesportiva.

14, 14, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 18, 19, 19, 21, 30, 31, 32, 32, 33, 35, 36, 39, 39, 40, 41

Em sua opinião, a distribuição de frequência das idades desse grupo é homogênea? Justifique.

- Podemos inicialmente obter as medidas de tendência central:

Média: **25 anos** (soma das idades dividido por 25)

Moda (bimodal): **16 anos** e **17 anos** (cada uma aparece 4 vezes)

Mediana: **19 anos** (13ª posição)

- As medidas de tendência central não são suficientes para concluirmos sobre a distribuição das idades desse grupo. Calculamos então a amplitude total:

$A_T = 41 - 14$

$A_T = 27$

Note que a amplitude é muito elevada se comparada, por exemplo, com as medidas de tendência central. Logo, dizemos que a distribuição das idades é não homogênea.

Para explorar

Junte-se a um colega para esta atividade. Vocês deverão utilizar *sites* de busca.

Parte 1 Parte 1: Resposta de acordo com os dados coletados.

Façam um levantamento da previsão do tempo de sua cidade durante sete dias e, depois, respondam:

a) Entre as temperaturas máximas, qual é o valor da temperatura média?

b) Entre as temperaturas mínimas, qual é o valor da temperatura média?

c) Em qual dia dessa previsão teremos a maior amplitude térmica?

d) E em qual dia teremos a menor amplitude térmica?

Parte 2 Parte 2: Resposta de acordo com os dados coletados.

Pesquisem as temperaturas mínimas e máximas em determinado dia nas capitais dos estados da região em que vocês moram.

a) Calculem as amplitudes das temperaturas que vocês pesquisaram para cada capital.

b) Com base nessas amplitudes, analisem as variações de temperaturas na região.

Parte 3 Parte 3: Respostas pessoais.

Escolham um produto que esteja à venda (carro, bicicleta, aparelho de TV, computador etc.). Depois:

a) Delimitem bem o modelo do produto.

b) Pesquisem em pelo menos cinco lugares o preço desse produto à vista.

c) Calculem a amplitude dos preços pesquisados.

d) Escrevam uma frase sobre a variação dos preços desse mesmo produto e utilizem como argumento a amplitude. Além disso, apontem, em termos percentuais, de quanto pode ser a variação do menor para o maior valor.

Variância e desvio-padrão

Vimos que a amplitude total aponta, de maneira simples e rápida, a dispersão dos valores de um conjunto. Entretanto, analisa apenas os extremos, deixando de lado os demais ou a média dos valores que poderia representar o conjunto.

A **variância** e o **desvio-padrão** são medidas que analisam a dispersão dos valores levando em conta a média deles e a dispersão de cada um (desvio) em relação à média dos valores. Vamos considerar uma situação em que alguns candidatos disputam uma vaga de emprego.

Zivica Kerkez/Shutterstock.com

Candidato cumprimenta com um aperto de mãos a entrevistadora de um processo seletivo.

A empresa Zeta atua no mercado financeiro. Num processo seletivo para a ocupação de um cargo de gerência, acabou aprovando quatro candidatos após algumas etapas exigidas na seleção. Os demais foram desclassificados.

As duas candidatas e os dois candidatos selecionados nas quatro etapas tiveram os nomes omitidos, apenas sendo indicados com letras. Assim, os avaliadores teriam que utilizar apenas os dados da tabela com as notas em cada etapa para decidir quem seria o escolhido.

Processo seletivo					
	Etapa 1	**Etapa 2**	**Etapa 3**	**Etapa 4**	**Média**
Candidato A	4	6	6	8	6
Candidato B	6	4	9	5	6
Candidato C	5	9	5	5	6
Candidato D	4	5	8	7	6

Fonte: Empresa Zeta (dados fictícios).

Inicialmente, os avaliadores observaram que, coincidentemente, os quatro candidatos obtiveram a mesma média, não sendo possível classificar o candidato escolhido por esse critério. Decidiram, então, observar a variância V das notas atribuídas para cada candidato nas quatro etapas.

Analise como eles calcularam a **variância** (depois iremos conceituar) das notas de cada candidato:

Candidato A: $V_A = \dfrac{(4-6)^2 + (6-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2}{4} = \dfrac{4+0+0+4}{4} \Rightarrow V_A = 2$

Candidato B: $V_B = \dfrac{(6-6)^2 + (4-6)^2 + (9-6)^2 + (5-6)^2}{4} = \dfrac{0+4+9+1}{4} \Rightarrow V_B = 3{,}5$

Candidato C: $V_C = \dfrac{(5-6)^2 + (9-6)^2 + (5-6)^2 + (5-6)^2}{4} = \dfrac{1+9+1+1}{4} \Rightarrow V_C = 3$

Candidato D: $V_D = \dfrac{(4-6)^2 + (5-6)^2 + (8-6)^2 + (7-6)^2}{4} = \dfrac{4+1+4+1}{4} \Rightarrow V_D = 2{,}5$

Para pensar e discutir

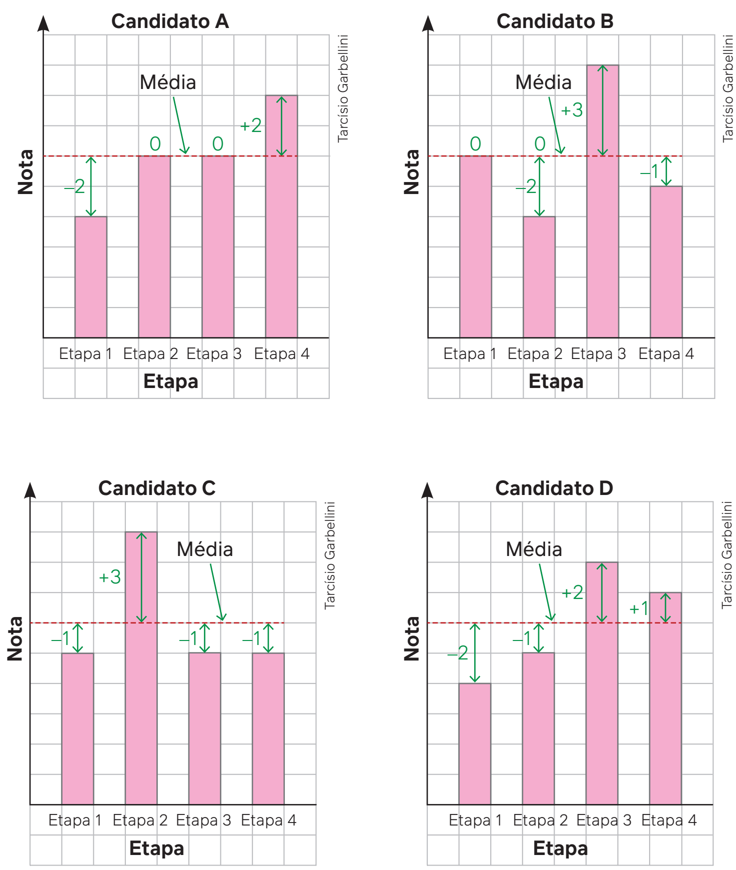
1. Observando os cálculos anteriores, responda: Como foi calculada a variância das notas de cada candidato? Explique detalhadamente com base na interpretação desses cálculos. 1. Resposta pessoal.

2. Em qual dos candidatos você percebe uma menor amplitude entre as notas obtidas nas quatro etapas? Qual é a conclusão? 2. A, C e D; resposta pessoal.

3. Em qual dos candidatos obteve-se a menor variância? Explique o que significa essa medida. 3. Resposta pessoal.

Agora que você já interpretou a situação, vamos conceituar a variância como **medida de dispersão**. Antes, precisamos retomar a situação observando a média aritmética das notas de cada candidato e a diferença entre cada nota e a média aritmética. Essa diferença é chamada **desvio**. Vamos representar os **desvios** (positivos ou negativos) das notas em relação à média.

Processo seletivo



Fonte: Empresa Zeta (dados fictícios).

Note que, se você calcular a soma dos desvios das notas para cada um dos candidatos, essa soma será igual a zero. Elevando ao quadrado as diferenças desses valores em relação à média e, depois, calculando a média aritmética dos resultados obtidos, chegamos à medida variância.

A **variância** de um conjunto de valores é definida como a média aritmética dos quadrados dos desvios desses valores em relação à média aritmética deles.

Em símbolos, se $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são os valores e M_a é a média aritmética desses valores, a variância V é dada por:

$$V = \frac{(x_1 - M_a)^2 + (x_2 - M_a)^2 + (x_3 - M_a)^2 + \ldots + (x_n - M_a)^2}{n}$$

A variância indica o quão distante está cada valor da média. Quanto menor a variância, mais próximos os valores estão da média, e, quanto maior a variância, mais distantes os valores estão da média.

Importante:

Como a variância é obtida com base nos quadrados dos desvios, ela é um número em unidade quadrada em relação à variável correspondente ao grupo de valores. Assim, se o grupo de valores em questão são as alturas de pessoas dadas em metros, a variância estará em metros quadrados. Por isso, para termos uma medida de dispersão na mesma unidade dos valores do grupo, utilizamos o desvio-padrão.

> **Desvio-padrão**, representado por D_P, é a raiz quadrada da variância V.
>
> Notação: $\boldsymbol{D_P = \sqrt{V}}$

Atividades resolvidas

10. Calcule o desvio-padrão para o conjunto de notas de cada candidato a uma vaga de gerência na Empresa Zeta (situação vista anteriormente) com base nas variâncias calculadas.

- Utilizando o conceito de desvio-padrão, temos:

Candidato A: $V_A = 2 \Rightarrow D_{P_A} = \sqrt{2} \cong 1{,}414$

Candidato B: $V_B = 3{,}5 \Rightarrow D_{P_B} = \sqrt{3{,}5} \cong 1{,}871$

Candidato C: $V_C = 3 \Rightarrow D_{P_C} = \sqrt{3} \cong 1{,}732$

Candidato D: $V_D = 2{,}5 \Rightarrow D_{P_D} = \sqrt{2{,}5} \cong 1{,}581$

Portanto, o candidato A apresenta o conjunto de notas com o menor desvio-padrão. Assim como você observou na variância, esse é o candidato mais regular em relação ao desempenho nas provas. Se, além da média, tivermos a regularidade como um critério de escolha, esse deverá ser o candidato mais bem avaliado.

11. Calcule o desvio-padrão de cada um dos jogadores de basquete, conforme pontuação apresentada anteriormente, para compará-los.

JOGADOR A

Participou o tempo inteiro em 5 jogos e fez a seguinte quantidade de pontos por jogo:

1º jogo: 22 pontos
2º jogo: 23 pontos
3º jogo: 20 pontos
4º jogo: 19 pontos
5º jogo: 21 pontos

Mauro Salgado

JOGADOR B

Participou o tempo inteiro em 6 jogos e fez a seguinte quantidade de pontos por jogo:

1º jogo: 34 pontos
2º jogo: 12 pontos
3º jogo: 10 pontos
4º jogo: 35 pontos
5º jogo: 22 pontos
6º jogo: 13 pontos

- Já calculamos a média de pontos dos dois jogadores, obtendo os seguintes resultados:

Jogador A: $M_{a_A} = 21$

Jogador B: $M_{a_B} = 21$

- Cálculo da variância:

Jogador A

$$V_A = \frac{(22-21)^2 + (23-21)^2 + (20-21)^2 + (19-21)^2 + (21-21)^2}{5}$$

$$V_A = \frac{1+4+1+4+0}{5}$$

$$V_A = 2$$

Jogador B

$$V_B = \frac{(34-21)^2 + (12-21)^2 + (10-21)^2 + (35-21)^2 + (22-21)^2 + (13-21)^2}{6}$$

$$V_B = \frac{169+81+121+196+1+64}{6}$$

$$V_B \cong 105{,}3$$

- Cálculo do desvio padrão:

Jogador A

$D_{P_A} = \sqrt{2} \cong 1{,}414$

Jogador B

$D_{P_B} \cong \sqrt{105{,}3} \cong 10{,}262$

Portanto, o jogador A tem o menor desvio-padrão. Por isso, dizemos que seu desempenho, em se tratando do número de pontos por partida, é mais regular comparado ao do jogador B.

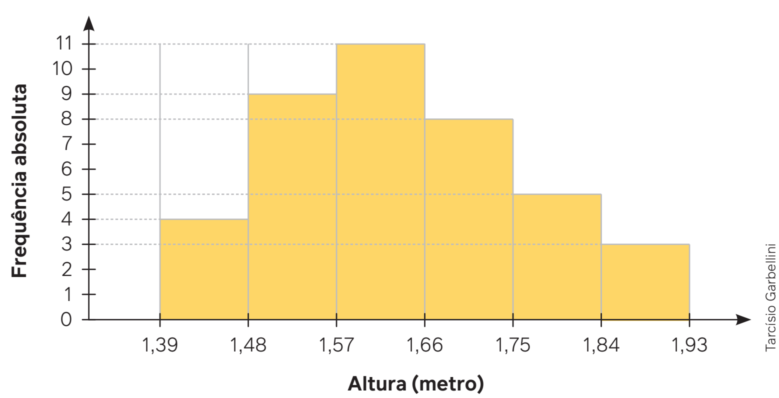
Para pensar e discutir

1. Apenas com base no conjunto de valores de uma variável, é possível analisar a regularidade sem haver a necessidade de calcular o desvio-padrão? Exemplifique. 1. Em alguns casos, é possível. Resposta pessoal.
2. Se o desvio-padrão for um número muito próximo de zero, qual será a conclusão sobre a distribuição dos valores correspondentes no conjunto de valores? 2. Resposta pessoal.
3. Qual é a diferença entre variância e desvio-padrão? 3. Resposta pessoal.

12. Retomando a situação apresentada nesta unidade sobre a distribuição das frequências das alturas da turma A do Colégio Aprendendo a Fazer, calcule o desvio-padrão das alturas dos estudantes.

- Retomamos as informações do histograma:

Alturas: turma A



Fonte: Coordenação do Colégio Aprendendo a Fazer (dados fictícios).

- Construímos, a partir do histograma anterior, o seguinte quadro, com as frequências de cada classe de alturas e o valor médio das alturas em cada classe:

Classes das alturas	Frequência absoluta	Valor médio das classes
1,39 ⊢ 1,48	4	1,435
1,48 ⊢ 1,57	9	1,525
1,57 ⊢ 1,66	11	1,615
1,66 ⊢ 1,75	8	1,705
1,75 ⊢ 1,84	5	1,795
1,84 ⊢ 1,93	3	1,885

- Calculamos a média das alturas:

$$M_a = \frac{4 \cdot 1{,}435 + 9 \cdot 1{,}525 + 11 \cdot 1{,}615 + 8 \cdot 1{,}705 + 5 \cdot 1{,}795 + 3 \cdot 1{,}885}{4 + 9 + 11 + 8 + 5 + 3}$$

$$M_a = \frac{5{,}740 + 13{,}725 + 17{,}765 + 13{,}640 + 8{,}975 + 5{,}655}{40}$$

$$M_a = \frac{65{,}500}{40} \Rightarrow M_a \cong 1{,}638$$

- Cálculo da variância:

$$V \cong \frac{4 \cdot (1{,}435 - 1{,}638)^2 + 9 \cdot (1{,}525 - 1{,}638)^2 + 11 \cdot (1{,}615 - 1{,}638)^2}{40} +$$

$$+ \frac{8 \cdot (1{,}705 - 1{,}638)^2 + 5 \cdot (1{,}795 - 1{,}638)^2 + 3 \cdot (1{,}885 - 1{,}638)^2}{40}$$

$$V \cong \frac{0{,}164 + 0{,}115 + 0{,}006 + 0{,}036 + 0{,}123 + 0{,}183}{40}$$

$$V \cong \frac{0{,}627}{40} \Rightarrow V \cong 0{,}016$$

- Cálculo do desvio-padrão:

$$D_P = \sqrt{V}$$

$$D_P \cong \sqrt{0{,}016} \Rightarrow D_P \cong 0{,}126$$

Assim, temos que o desvio-padrão das alturas do grupo de estudantes é de aproximadamente 12,6 cm, pois 0,126 m = 12,6 cm. Além disso, podemos dizer que a média das alturas dos estudantes da turma A é 1,638 m, com erro aproximado de 0,126 m para mais ou 0,126 m para menos.

Para pensar e discutir

1. Quais valores de cada classe foram utilizados para calcular o valor médio? 1. Os extremos de cada classe.
2. Como foi calculada a média aritmética da distribuição das frequências das alturas dos 40 estudantes? 2. Resposta pessoal.
3. Tendo como referência o desvio-padrão, como você analisa o conjunto formado pelas alturas dos 40 estudantes? 3. Resposta pessoal.

Observações:

1. Além do desvio-padrão, há o desvio médio, que também pode ser utilizado como uma medida de dispersão. O desvio médio, representado por D_M, dos valores se $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, sendo M_a a média aritmética desses valores, é calculado pela expressão:

$$D_M = \frac{|x_1 - M_a| + |x_2 - M_a| + |x_3 - M_a| + ... + |x_n - M_a|}{n}$$

2. O desvio médio avalia a variabilidade dos dados em torno da média aritmética, enquanto o desvio-padrão representa o quanto um conjunto de dados é uniforme, isto é, o grau de dispersão do conjunto.

Bem, agora que já estudamos as medidas de dispersão e as medidas de tendência central, podemos fazer uma breve comparação estabelecendo uma relação entre elas. Em relação às medidas de tendência central, as medidas de dispersão em Estatística têm as características a seguir.

- Complementam as informações contidas nas medidas de posição central.
- Indicam o afastamento dos dados em relação à medida de posição central.
- Revelam que, quanto maior a dispersão, menor a informação contida na medida de posição central.

Para explorar

Esta atividade deve ser feita em grupos utilizando planilha eletrônica.

1. Façam um levantamento sobre as alturas de todos os estudantes da turma. 1. Resposta pessoal.
2. Dividam essas alturas em quatro classes. 2. Resposta pessoal.
3. Elaborem uma tabela (utilizando planilha eletrônica) que contenha essas classes de alturas, a frequência e o valor médio de cada classe. 3. Resposta pessoal.
4. Com base nessas informações, construam um histograma com as alturas. 4. Resposta pessoal.
5. Calculem, então, a variância e o desvio-padrão. 5. Resposta pessoal.
6. Com base no desvio-padrão, façam uma análise da distribuição das alturas da turma. 6. Resposta pessoal.
7. Ao final da atividade, escolham um relator para apresentar à turma o texto expressando a análise elaborada. 7. Resposta pessoal.

Atividades

21. O quadro a seguir contém o número de reclamações diárias (de segunda-feira a sexta-feira) resolvidas via telefone por quatro atendentes sobre os produtos de uma grande empresa.

Atendente	**Quantidade de reclamações diárias resolvidas**				
	Segunda-feira	**Terça-feira**	**Quarta-feira**	**Quinta-feira**	**Sexta-feira**
Adriana	8	12	15	9	11
Carlos	11	10	8	11	12
Joana	15	12	16	10	11
Antônio	10	9	11	12	8

21. a) Carlos e Antônio; resposta pessoal.

a) Observando apenas essas quantidades, é possível afirmar que dois entre os quatro atendentes, durante a semana, têm maior "regularidade" na quantidade diária de reclamações resolvidas? Explique.

b) Entre os dois que você mencionou, qual é o mais regular? Justifique. 21. b) Ambos têm a mesma amplitude; resposta pessoal.

c) Quais são as médias diárias de atendimentos dos quatro funcionários?

d) Obtenha os desvios-padrão das quantidades de reclamações diárias ao longo da semana.

e) Com base no cálculo da média e do desvio-padrão, faça uma análise do número de chamadas em média, apontando o erro para mais e para menos nessa análise. 21. c) $M_{a\,\text{Adriana}} = 11$; $M_{a\,\text{Carlos}} = 10{,}4$; $M_{a\,\text{Joana}} = 12{,}8$; $M_{a\,\text{Antônio}} = 10$

21. e) Resposta pessoal.

22. Junte-se a um colega para fazer esta atividade. 21. d) $D_{p\,\text{Adriana}} \cong 2{,}45$; $D_{p\,\text{Carlos}} \cong 1{,}36$; $D_{p\,\text{Joana}} \cong 2{,}32$; $D_{p\,\text{Antônio}} \cong 1{,}41$

I. Elaborem, como na situação anterior, outra situação para o cálculo não apenas da média como também do desvio-padrão. 22. I. Resposta pessoal.

22. II. Resposta pessoal.

II. Com base nas médias e nos desvios-padrão, analisem a distribuição dos valores na situação em questão.

III. Apresentem essa situação para que outra dupla calcule as médias e os desvios-padrão com base nos valores obtidos na análise da sua dupla. Em caso de discordância, discutam com a turma toda a análise.

22. III. Resposta pessoal.

23. Ao realizar um levantamento de dados sobre um determinado conjunto, o pesquisador observou que todos os 100 elementos dele tinham o mesmo valor igual a 7. Determine:

a) a média aritmética dessa distribuição de valores; 23. a) 7

b) a variância dessa distribuição; 23. b) Zero.

c) o desvio médio dessa distribuição; 23. c) Zero.

d) o desvio-padrão dessa distribuição. 23. d) Zero.

24. Ao analisar um conjunto de dados A e um conjunto de dados B, um estatístico obteve para o conjunto A um desvio-padrão igual a 2,1, e para o conjunto B um desvio-padrão igual a 1,2. Analise as afirmações a seguir e indique **V** ou **F** para as que são verdadeiras ou falsas, respectivamente.

I. A média aritmética dos valores do conjunto A é maior do que a média aritmética dos valores do conjunto B; 24. I. F

II. A variância dos valores do conjunto A é maior do que a variância dos valores do conjunto B; 24. II. V

III. O conjunto A tem os valores mais homogêneos do que o conjunto B; 24. III. F

IV. O conjunto B tem os valores mais homogêneos do que o conjunto A. 24. IV. V

25. Oito amigos de um bairro vão participar de uma competição. Em uma etapa de preparação, o profissional responsável pelas orientações físicas fez um levantamento das massas dos amigos e organizou-as no seguinte quadro:

50 kg	55 kg	62 kg	70 kg
75 kg	80 kg	88 kg	88 kg

Em relação a esses dados, determine:

a) a média; 25. a) 71 kg

b) a mediana; 25. b) 72,5 kg

c) a moda; 25. c) 88 kg

d) o desvio médio; 25. d) 11,75 kg

e) a variância; 25. e) 181,75 kg

f) o desvio-padrão. 25. f) Aproximadamente 13,48 kg

26. O idealizador de um curso *on-line* de Matemática fez um levantamento das vendas individuais de seu curso ao longo de um ano e obteve o seguinte resultado:

Mês	jan.	fev.	mar.	abr.	maio	jun.	jul.	ago.	set.	out.	nov.	dez.
Quantidade	15	17	22	20	8	17	25	10	12	48	15	55

Calcule o desvio-padrão dessas quantidades de venda. 26. Aproximadamente 14.

27. Dois candidatos em um concurso obtiveram as seguintes notas:

Candidato	Nota 1	Nota 2	Nota 3	Nota 4
A	87	69	73	89
B	87	89	92	78

a) Determine a média das notas de cada candidato; 27. a) A: 79,5; B: 86,5.

b) A partir do desvio-padrão, indique qual desses candidatos foi mais regular nas quatro notas.

27. b) O candidato B.

28. (FGV–SP) Uma lista de quatro números inteiros tem média 7 e a diferença entre o maior e o menor dos números igual a 24. A moda e a mediana da lista são, ambas, iguais a 8. Assim, o desvio-padrão da lista é igual a

a) $\sqrt{69}$ **b)** $\sqrt{70}$ **c)** $\sqrt{71}$ **d)** $\sqrt{72}$ **e)** $\sqrt{73}$

28. Alternativa **e.**

29. (UPE) Ao realizar o levantamento das famílias de uma pequena cidade do interior, cujos filhos são beneficiários de algum programa social, um pesquisador obteve os seguintes dados:

Beneficiados em Programa Social	
Número de filhos	**Quantidade de famílias**
5	03
4	07
3	21
2	28
1	23
0	18
	Total: 100

Com base nessas informações, é correto afirmar que o desvio-padrão do número de filhos dessa amostra é de, aproximadamente: 29. Alternativa **a.**

a) 1,4 **b)** 1,8 **c)** 2,0 **d)** 2,5 **e)** 6,7

30. (Enem) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso, o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio-padrão dos dois candidatos.
Dados dos candidatos do concurso:

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio-padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é 30. Alternativa **b.**

a) Marco, pois a média e a mediana são iguais.

b) Marco, pois obteve o menor desvio-padrão.

c) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.

d) Paulo, pois obteve a maior mediana.

e) Paulo, pois obteve o maior desvio-padrão.

3 Outra forma de análise de dados

Ao observar a imagem a seguir, muitas pessoas lembrarão do mercado financeiro. O trabalho com gráficos auxilia na compreensão de problemas e situações que envolvem um grande número de informações, permitindo tomadas de decisão mais efetivas para cada tipo de problema. Neste tópico, estudaremos o diagrama de caixa, também conhecido como *boxplot*, e como esse tipo de representação está relacionado às medidas de tendência central e de dispersão.

kenchiro168/Shutterstock.com

Profissionais analisam dados utilizando gráficos estatísticos no ambiente de trabalho. O uso de ferramentas como gráficos de barras, linhas e *boxplots* é essencial para a visualização e interpretação de dados no mercado de trabalho.

Utilizando quartis e o diagrama *boxplot*

Vimos, em medidas de tendência central, que a mediana caracteriza um conjunto de dados devido à sua posição central em relação à distribuição deles quando colocados em ordem crescente (ou decrescente). A mediana, portanto, separa o conjunto de dados em dois grupos com a mesma quantidade. Existem também outras medidas relacionadas à mediana que se baseiam na posição em relação a um conjunto de dados: são os **quartis**, os **percentis** e os **decis**.

Nosso interesse, no momento, são apenas os quartis.

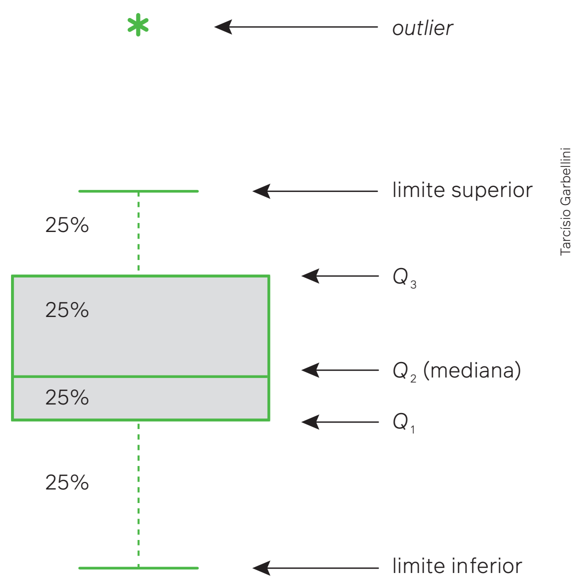
> Os **quartis** de um conjunto de dados, colocados em ordem crescente, são os valores que separam esse conjunto em quatro partes iguais.

Como o conjunto de valores colocados em ordem crescente será dividido em quatro partes iguais, teremos três quartis, conforme a figura a seguir.

1º quartil (Q_1): valor que separa os 25% menores dados da distribuição.
2º quartil (Q_2): valor que coincide com a mediana.
3º quartil (Q_3): valor que separa os 25% maiores dados da distribuição.

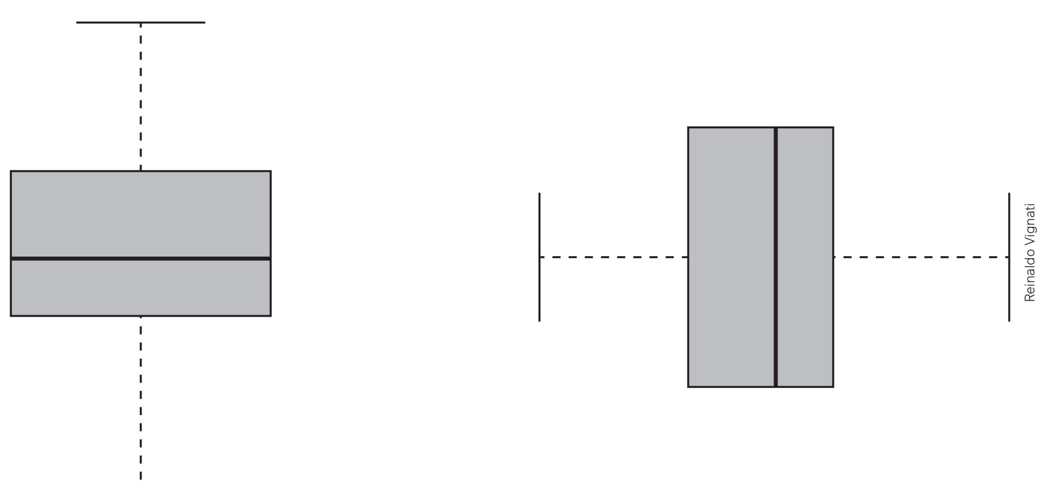
Definidos os quartis, podemos representar o conjunto de valores por meio do **diagrama de caixas** ou ***boxplot***. Observe, a seguir, como esse diagrama é formado.

- O *boxplot* é um diagrama formado por um retângulo, também chamado caixa, dentro do qual estão representados 50% dos valores de um conjunto. A mediana é indicada por uma linha que divide esse retângulo.



- Os outros 50% dos valores da distribuição são representados por duas hastes, cada uma correspondendo a 25% dos dados. A haste que fica abaixo da caixa representa os menores dados do conjunto e a haste que fica acima da caixa, os maiores. No final de cada haste, estão indicados os limites inferior e superior, respectivamente.
- Os pontos fora desses limites são considerados valores discrepantes, também chamados *outliers*, que são indicados por asteriscos ou bolinhas.

O *boxplot* pode ser representado em duas posições, vertical ou horizontal, como ilustrado a seguir.



O *boxplot* é empregado, de modo geral, para representar a distribuição de um conjunto de dados, evidenciando informações importantes, como mediana, quartis, valores mínimos, valores máximos, além de possíveis valores discrepantes (os *outliers*).

E como se elabora um *boxplot*?

Na elaboração de um *boxplot*, precisamos identificar cinco números em um conjunto de dados, identificados conforme a ilustração anterior: menor valor (limite inferior), maior valor (limite superior), mediana ou segundo quartil (Q_2), primeiro quartil (Q_1) e terceiro quartil (Q_3).

Na atividade resolvida a seguir, mostramos passo a passo a elaboração de um *boxplot*.

Atividades resolvidas

13. Um grupo de 14 pessoas de uma empresa foi monitorado espontaneamente para contabilizar a quantidade de minutos em que cada uma delas, em determinada manhã, acessou as redes sociais no computador. O quadro a seguir apresenta o tempo individual dessas 14 pessoas em ordem crescente.

5	5	6	8	10	12	**14**	**16**	22	26	32	34	36	80

Elabore um *boxplot* para analisar a distribuição dos tempos de acesso às redes sociais no computador desse conjunto de pessoas.

- Como são 14 termos, a mediana (2º quartil) é calculada como média aritmética entre os "termos centrais":

$$M_e = \frac{14 + 16}{2} = 15$$

- Como são sete termos à esquerda e sete termos à direita da mediana, o 1º quartil corresponderá ao valor 8 minutos (mediana dos termos menores) e o 3º quartil corresponderá ao valor 32 minutos (mediana dos termos maiores):

$$Q_1 = 8$$
$$Q_3 = 32$$

- Marcamos em um eixo os cinco valores importantes: menor valor, 1º quartil, 2º quartil, 3º quartil e maior valor. Quanto às hastes, é importante saber que o comprimento de cada uma é, no máximo, igual a 1,5 $(Q_3 - Q_1)$. No caso, temos:

$$Q_3 - Q_1 = 32 - 8 = 24$$

- Cálculo do comprimento máximo da haste:

$$1{,}5 \cdot 24 = 36$$

- O comprimento da haste inferior será dado pela diferença entre o 1º quartil e o menor valor da distribuição:

$$Q_1 - 5 = 8 - 5 = 3$$

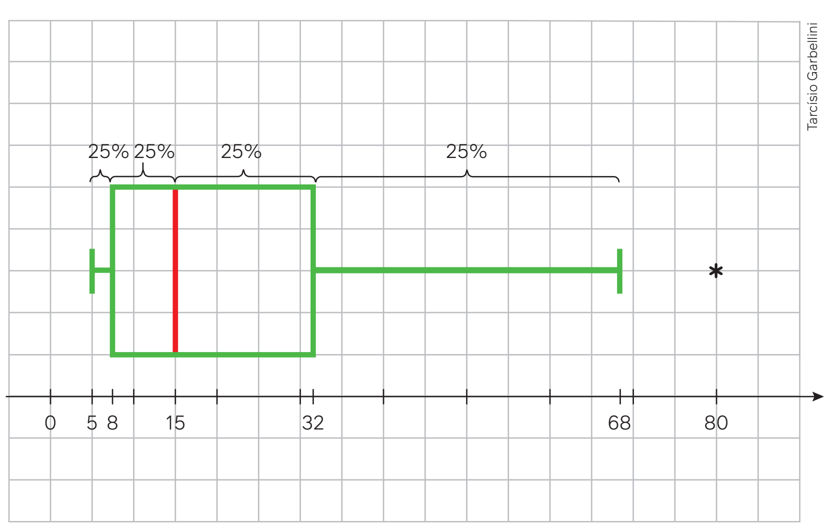
Sendo esse comprimento menor que 36, o limite inferior é o menor valor da distribuição, ou seja, 5. O comprimento da haste superior seria dado pela diferença entre o maior valor da distribuição e o 3º quartil:

$$80 - Q_3 = 80 - 32 = 48$$

Como esse comprimento ultrapassa 36, o limite máximo será dado por:

$32 + 36 = 6$. Então, o limite máximo será 68.

- Todos os dados acima do limite máximo serão ***outliers***. Esse é o caso do valor 80.

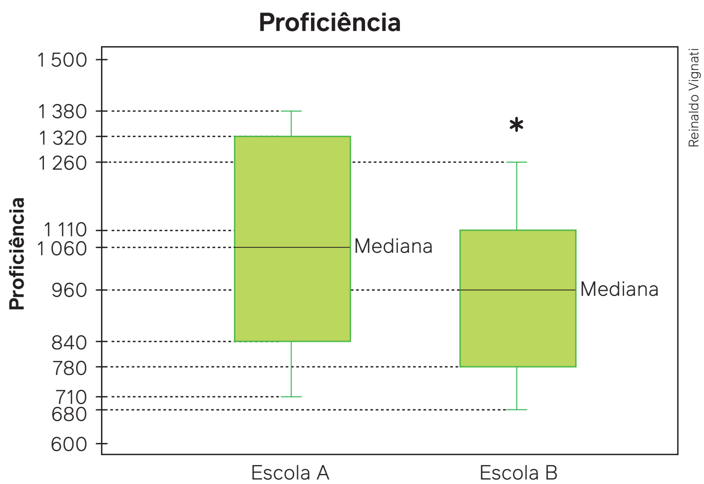


Lembrando que um quarto corresponde a 25%, veja como o *boxplot* representa claramente a distribuição dos dados, possibilitando verificar se estão concentrados ou espalhados em cada quarto do diagrama. A caixa e o comprimento das hastes fornecem uma leitura rápida de como os dados estão distribuídos.

Para pensar e discutir

1. Analise o *boxplot* construído anteriormente e redija um texto comparando a distribuição dos dados em cada quarto do diagrama (onde estão mais espalhados? Onde estão mais concentrados?). Quando apresentar argumentos para cada afirmação, cite o comprimento das hastes e a distância entre a mediana e o 1º quartil, assim como a distância entre a mediana e o 3º quartil. 1. Resposta pessoal.
2. Elabore um desafio para um colega resolver oralmente: esboce um *boxplot* sem números para que ele analise a distribuição dos dados representados em cada quarto, tendo como referência apenas as distâncias entre a mediana e o 1º e o 3º quartil, o comprimento das hastes, além de possíveis *outliers*. Depois, resolva o desafio que seu colega elaborará. 2. Resposta pessoal.

14. Em avaliações educacionais, a proficiência é uma medida que representa os resultados de aprendizagem dos estudantes. Observe o *boxplot* a seguir, em que estão representados os valores da proficiência em Matemática dos estudantes de duas escolas.



Com base no gráfico, verifique se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa. Justifique as afirmativas verdadeiras e reescreva as afirmativas falsas para corrigi-las.

Afirmação I: Cada caixa representa a proficiência de 25% dos estudantes da escola correspondente.

Afirmação II: Na escola B, 25% dos estudantes têm proficiência entre 680 e 780.

Afirmação III: Na escola A, um quarto dos estudantes tem proficiência acima de 1 320, valores que não são atingidos pelo grupo que representa a escola B.

Afirmação IV: O grupo de estudantes da escola B é mais homogêneo que o grupo de estudantes da escola A.

Afirmação V: Em nenhuma das duas escolas há estudantes cujo resultado individual seja discrepante em relação ao grupo que representa a escola.

- Analisando cada uma das afirmativas, temos:

Afirmação I – Falsa.

Justificativa: Cada caixa representa a proficiência de 50% dos estudantes de cada escola, sendo 25% abaixo da mediana e 25% acima da mediana.

Afirmação II – Verdadeira.

Justificativa: A haste inferior está representada entre esses dois valores.

Afirmação III – Verdadeira.

Justificativa: 25% dos estudantes da escola A têm proficiência entre 1 320 e 1 380, valores que são atingidos apenas por 1 estudante da escola B, representado por *outlier*, o que significa que não representa todo o grupo da escola.

Afirmação IV – Verdadeira.

Justificativa: os dados da escola B estão mais concentrados que os dados da escola A.

Afirmação V – Falsa.

Há 1 estudante com resultado discrepante na escola B, representado por *outlier*.

Na atividade resolvida anterior, tivemos de analisar dois diagramas. As afirmações feitas para a verificação de verdadeiro ou falso auxiliam na construção de referenciais para outras análises relacionadas à distribuição de valores.

Para explorar

Junte-se a dois colegas para fazer esta atividade. Respostas pessoais.

Vejam os três diagramas *boxplot* representados a seguir. No primeiro, a distribuição dos dados é homogênea. No segundo, os menores valores, representados pela haste da esquerda, estão muito espalhados em relação aos maiores valores, representados pela haste da direita, que estão mais concentrados. No terceiro diagrama acontece o contrário: os menores valores estão bem concentrados em relação aos maiores valores, que se apresentam bem espalhados.

Tarcísio Garbellini

Etapa 1

Vocês devem elaborar individualmente três conjuntos de dados (A, B e C), cada um com 20 valores, de modo que o conjunto A seja representado pelo primeiro diagrama, o conjunto B pelo segundo diagrama e o conjunto C pelo terceiro diagrama.

Etapa 2

Troquem as produções entre vocês para que cada um confira se os conjuntos elaborados pelos colegas atendem às condições solicitadas, discutindo possíveis divergências.

Atividades

31. Junte-se a outros dois colegas para fazer esta atividade.

Em uma empresa com 40 funcionários, observou-se a quantidade de atrasos maiores que 5 minutos ao longo de um ano de trabalho. O resultado foi representado no diagrama de ramo e folhas a seguir.

0	0							
1	0	1						
2	2							
3	1							
4	0	0	1	2				
5	0	0	1	3	6			
6	2	4	5	7				
7	0	0	2	5	5	8		
8	0	0	1	1	1	2	2	8
9	0	1	5	6				
10	0	2	4	8				

a) Com base nesses dados, construam o diagrama *boxplot*.
Existem recursos digitais que auxiliam na elaboração desse tipo de diagrama. Caso queiram, pesquisem como funcionam. 31. a) Resposta no Manual do Professor.

b) Após a construção do diagrama, analisem a distribuição dos valores e façam um texto que será discutido com os colegas dos outros grupos. 31. b) Resposta pessoal.

c) Em caso de discrepância de dados ou análise incompleta de algum dos trios, a turma deverá discutir essas divergências e formular um texto único sobre a análise dos dados com base nos textos elaborados pelos grupos. 31. c) Resposta pessoal.

32. (Dataprev) O *boxplot* é um gráfico construído com base no resumo dos cinco números, constituído por:

a) Valor mínimo, 1º quartil (Q_1), mediana (2º quartil Q_2), 3º quartil (Q_3) e valor máximo. 32. Alternativa **a**.

b) Valor mínimo, média, moda, 1º quartil (Q_1) e desvio médio.

c) Valor mínimo, 1º quartil (Q_1), coeficiente de correlação, mediana e valor máximo.

d) 1º quartil (Q_1), 2º quartil (Q_2), 3º quartil (Q_3), desvio-padrão e valor máximo.

e) Média, moda, mediana, desvio-padrão e valor máximo.

33. Com base no conjunto de valores a seguir, faça o que se pede.

5	6	6	7	7	8	8	8	10	10	10	10	11	11

33. a) $Q_1 = 7$; $Q_2 = 8$; $Q_3 = 10$; limite superior = 11; limite inferior = 5.

a) Determine os cinco números necessários para a construção do diagrama *boxplot*.

b) Construa no caderno o diagrama *boxplot* correspondente a esses dados. 33. b) Resposta no Manual do Professor.

34. Junte-se a um colega para fazer esta atividade. Efetuem os cálculos usando uma calculadora.

Etapa 1

Em uma indústria metalúrgica, uma peça metálica deve ter 75 cm de comprimento. Colheu-se uma amostra de 10 peças do fornecedor A e foram obtidas as medidas a seguir.

75,93	73,34
76,95	74,04
75,47	75
73,6	76,18
74,85	75,33

34. Etapa 1 $Q_1 = 74{,}04$; $Q_2 = 75{,}16$; $Q_3 = 75{,}93$; limite superior = 76,95; limite inferior = 73,34.

Obtenham as cinco medidas necessárias para a construção do diagrama *boxplot*.

Etapa 2

Também foi colhida uma amostra de 10 peças do fornecedor B, com as medidas a seguir.

74,94	74,75
75,25	74,65
75,44	74,94
74,62	74,92
75,35	75,46

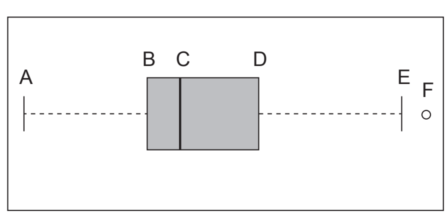
34. Etapa 2 $Q_1 = 74{,}45$; $Q_2 = 74{,}94$; $Q_3 = 75{,}35$; limite superior = 75,46; limite inferior = 74,62.

Obtenham as cinco medidas para a construção do diagrama *boxplot*. 34. Respostas no Manual do Professor.

Etapa 3

Façam, em um mesmo eixo, os dois diagramas *boxplot*. Com base neles, comparem a distribuição das medidas dos dois fornecedores em relação à distribuição dos dados. 34. Etapa 3 Resposta no Manual do Professor.

35. (FGV-SP) Em um trabalho de pesquisa, as idades das pessoas são: 23, 27, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 42, 56 e 58. Deseja-se construir um *boxplot* similar ao gráfico a seguir.



Reinaldo Vignati

No *bloxplot* acima, os valores das estatísticas nas posições indicadas pelas letras A, B, C, D, E e F são:

a) A = 23, B = 32, C = 35, D = 42, E = 56, F = 58

b) A = 17, B = 32, C = 35, D = 42, E = 57, F = 58

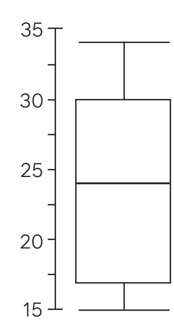
c) A = 23, B = 32, C = 37, D = 42, E = 57, F = 58

d) A = 17, B = 23, C = 35, D = 56, E = 57, F = 59

e) A = 23, B = 32, C = 35, D = 42, E = 57, F = 58

35. Alternativa **a**.

36. (Vunesp) A seguinte figura ilustra um conjunto de medições de temperatura de uma determinada localidade conforme a técnica *boxplot*, apresentando uma escala em graus Celsius. Não há ocorrência de *outliers*.



Reinaldo Vignati

É possível afirmar que 36. Alternativa **b**.

a) a temperatura máxima é igual a 35 °C.

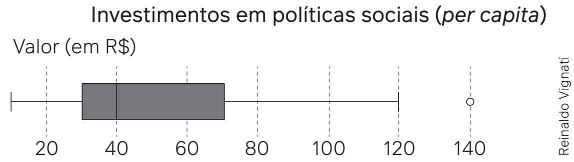
b) pelo menos 75% das medições são iguais ou inferiores a 30 °C.

c) mais que 50% das medições são maiores que 25 °C.

d) a temperatura máxima é igual a 30 °C.

e) até 75% das medições são iguais ou superiores a 15 °C.

37. (Vunesp) Analise o *boxplot* a seguir, que traz informações sobre o valor de investimentos *per capita* em política social durante um mês em determinado município.



Em relação ao gráfico apresentado, é possível afirmar que 37. Alternativa **d**.

a) 25% das pessoas analisadas estão entre os valores de R$ 40,00 e R$ 60,00.

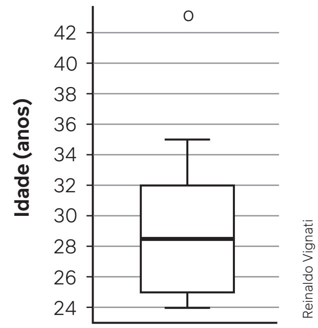
b) não há *outlier* no gráfico analisado.

c) a moda deste conjunto é R$ 40,00.

d) a mediana do conjunto de dados apresentados é de R$ 40,00.

e) o primeiro quartil possui o valor R$ 40,00.

38. (PC-BA) Observe o gráfico do tipo *boxplot* ou diagrama de caixas a seguir e assinale a opção correta a partir do que é mostrado: 38. Alternativa **e**.



a) O 3º quartil está acima de 34.

b) O 1º quartil está abaixo de 24.

c) O limite superior está acima de 36.

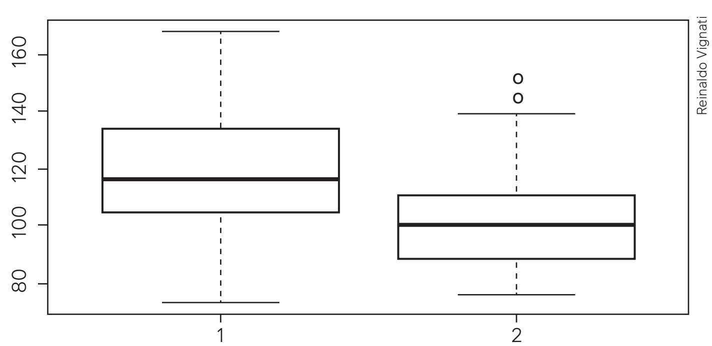
d) O 2º quartil está abaixo de 28.

e) Não temos *outliers* abaixo do limite inferior.

39. (UFG-GO) Qual gráfico é indicado para apresentar o primeiro e terceiro quartis, a mediana e a possível presença de *outlier*? 39. Alternativa **c**.

a) Histograma. **b)** Dispersão. **c)** *Boxplot*. **d)** Setor.

40. (Uespi) Considere a variável nível de glicose para as populações dos grupos "1" e "2" com *boxplot* dos grupos dado pela figura. [...]



São feitas 3 afirmações a respeito da distribuição da glicose

I. A distribuição do Grupo 1 tem o primeiro quartil maior do que a mediana do Grupo 2;

II. O Grupo 1 apresenta uma variabilidade maior do que o Grupo 2, se usarmos a distância interquartílica como medida de dispersão;

III. Não há valores discrepantes no Grupo 2.

Qual das alternativas está correta? 40. Alternativa **c**.

a) Todas estão corretas.

b) Apenas a II está correta.

c) I e II estão corretas.

d) Apenas I está correta.

e) Apenas III está correta.

Análise e contexto

Estatística

Agora que você já estudou as medidas de tendência central e as medidas de dispersão, propomos que, após a leitura do texto a seguir sobre a história da estatística, seja feita uma pesquisa, em todas as suas etapas. Junte-se a quatro ou cinco colegas para essa atividade.

Breve história da Estatística

Desde remota antiguidade, os governos têm se interessado por informações sobre suas populações e riquezas, tendo em vista, principalmente, fins militares e tributários. O registro de informações perde-se no tempo. Confúcio relatou levantamentos feitos na China, há mais de 2000 anos antes da era cristã. No antigo Egito, os faraós fizeram uso sistemático de informações de caráter estatístico, conforme evidenciaram pesquisas arqueológicas. Desses registros também se utilizaram as civilizações pré-colombianas dos maias, astecas e incas. É conhecido de todos os cristãos o recenseamento dos judeus, ordenado pelo imperador Augusto.

[...]

Com o Renascimento, foi despertado o interesse pela coleta de dados estatísticos, principalmente por suas aplicações na administração pública. A obra pioneira de Francesco Sansovini (1521-1586), representante da orientação descritiva dos estatísticos italianos, publicada em 1561, é um exemplo dessa época.

[...]

Entretanto, mais amplos e gerais foram os estudos feitos pelos alemães, especialmente por Gottfried Achenwall (1719-1772), professor da Universidade Göttingen, a quem se atribui ter criado o vocábulo “estatística”, em 1746. Contudo, nada mais fizeram do que dar melhor sistematização e definição da mesma orientação descritiva dos estatísticos italianos.

Acreditar nessas atividades como o começo da história da Estatística é deixar de compreender o verdadeiro significado da Estatística. Podemos dizer que o desenvolvimento da Estatística teve origem nas aplicações, pois nenhuma disciplina tem interagido tanto com as demais disciplinas em suas atividades do que ela, dado que é por sua natureza a ciência do significado e do uso dos dados. Daí [...] sua importância como instrumento auxiliar na pesquisa científica.

A primeira tentativa para se tirar conclusões a partir de dados numéricos foi feita somente no século 17, na Inglaterra, com o que foi denominado *Aritmética Política*, que evoluiu para o que se chama hoje de demografia. Contudo, só começou realmente a existir como disciplina autônoma no raiar do século 20, o verdadeiro início da Estatística Moderna.

A tentativa acima referida foi feita por John Graunt (1620-1674), um próspero negociante londrino de tecidos que[,] em 1662, publicou um pequeno livro *intitulado Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index and Made upon the Bills of Mortality*. Sua análise foi baseada sobre razões e proporções de fatos vitais, nos quais ele observou uma regularidade estatística num grande número de dados. Por seu trabalho foi eleito *Fellow of the Royal Society* (F.R.S.), sociedade científica fundada em 1660, por Carlos II.

Os dados usados por Graunt compreendiam uma série anual de 1604 a 1660, coletados nas paróquias de Londres, de onde ele tirou as seguintes conclusões: que havia maior nascimento de crianças do sexo masculino, mas havia distribuição aproximadamente igual de ambos os sexos na população geral; maior mortalidade nas zonas urbanas em relação às zonas rurais.

Graunt era cônscio de ser leigo no assunto, pois não era médico, nem matemático, nem político, mas apenas uma mente curiosa que utilizou com lógica uma análise, pode-se dizer “científica”, dos registros disponíveis sobre mortalidade. Com seus dados, elaborou uma tábua de vida rudimentar, baseada apenas na sobrevivência nas idades de 6 a 76 anos.

Foi *William Petty* (1623-1683), contemporâneo e continuador de Graunt, quem denominou de Aritmética Política [a] nova arte de raciocinar por meio de dados sobre fatos relacionados com o governo. Em 1683, ele publicou sua obra *Five Essays on Political Arithmetic* e sugeriu que fosse criada uma repartição de registro de estatísticas vitais, mas isso só se consolidou no século 19, com o Dr. William Farr (1807-1883), contribuidor original da estatística médica. Note-se que a denominação posterior de Estatística acabou por incluir a Estatística Descritiva e a Aritmética Política.

Dos trabalhos desse período, sem dúvida, o mais importante foi o do astrônomo inglês Edmond Halley (1656-1742), que em 1693 construiu a primeira tábua de sobrevivência, elaborada com os registros vitais da cidade alemã de Breslau (atual Wroclaw, Polônia), referentes ao período de 1687 a 1691, elemento básico para o cálculo de seguros de vida. Embora o seguro comercial tivesse sido praticado pelos babilônios e fosse conhecido dos gregos e dos romanos, Halley é, com justiça, considerado o criador do cálculo atuarial. Deve ser ainda mencionado o nome de Richard Price (1723-1791), o fundador da atuária, na Inglaterra.

MEMÓRIA, J. M. P. *Breve história da Estatística*. Brasília, DF: Embrapa Informação Tecnológica, 2004. p. 11-14.

1. O texto menciona o "verdadeiro significado da Estatística". Reflitam e respondam: como a Estatística pode ser utilizada a favor das pessoas? 1. Resposta pessoal.

2. De acordo com o texto, a primeira tentativa de elaborar conclusões com base em dados numéricos foi denominada Aritmética Política. Pensem em como os dados estatísticos são utilizados atualmente e, depois, escrevam um pequeno parágrafo relacionando essa denominação ao uso que, muitas vezes, se faz da Estatística. 2. Resposta pessoal.

3. Revejam todas as etapas de uma pesquisa, já estudadas em anos anteriores. Após essa breve retomada, façam o que se pede a seguir. 3. Resposta pessoal.

- Elaborem uma pesquisa que será aplicada a três turmas do Ensino Médio de sua escola, ao menos uma das questões a ser pesquisada deve se referir a um valor numérico.
- Procedam a todas as etapas da pesquisa.
- Ao final, utilizando medidas de tendência central e/ou medidas de dispersão, elaborem um texto comparando as três turmas pesquisadas em relação aos dados obtidos da questão ou das questões com valor numérico.
- Apresentem a conclusão aos outros grupos.

Atividades finais

1. Sobre medidas de tendência central, responda:

a) Quais são as medidas mais utilizadas? 1. a) Média, moda e mediana.

b) Como você calcula a média aritmética de 5 valores? 1. b) Dividindo por 5 a soma dos 5 valores.

c) E como você obtém a mediana de 5 valores? 1. c) Resposta no Manual do Professor.

d) Como você obtém a mediana de 6 valores? 1. d) Resposta no Manual do Professor.

e) O que indica a moda de uma distribuição de valores? 1. e) O elemento mais frequente.

f) A média aritmética representa adequadamente os dados de um conjunto de valores? Explique. 1. f) Nem sempre; resposta pessoal.

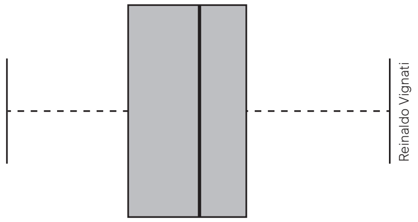
2. Sobre medidas de dispersão, responda:

a) Quais são as medidas de dispersão estudadas na unidade? 2. a) Amplitude, variância, desvio médio e desvio-padrão.

b) Como você calcula o desvio-padrão de um conjunto de valores? 2. b) Resposta no Manual do Professor.

c) Quanto maior o desvio-padrão de uma amostra, menor a dispersão desses valores? 2. c) Não.

3. Sobre o diagrama *boxplot*, responda:



a) Quais são os cinco valores utilizados para a construção de um diagrama *boxplot*? 3. a) Mínimo, máximo, mediana, 1º quartil, 3º quartil.

b) Qual desses valores tem a mesma posição no diagrama que o 2º quartil? 3. b) A mediana.

Questões de vestibulares e Enem

4. (Famema-SP) Em uma pesquisa foram utilizadas 50 mudas de determinado tipo de planta com alturas diferentes. A tabela mostra o número de mudas e suas respectivas alturas.

Número de mudas	Altura da muda (em cm)
18	10
7	13
9	8
16	4,5

Considerando as alturas de todas essas mudas, a média, a moda e a mediana são, respectivamente,

a) 8,5 cm; 18 cm; 8 cm.
b) 8,3 cm; 18 cm; 9 cm.
c) 8,3 cm; 10 cm; 9 cm.
d) 8,3 cm; 18 cm; 8 cm.
e) 8,8 cm; 18 cm; 8 cm.

4. Alternativa **c**.

5. (UEA-AM) A média dos números de calçados de 20 jogadores de uma equipe de boliche é 41 e os números desses calçados estão registrados na tabela:

37	44	43	42	43
39	40	42	41	40
42	42	40	41	41
44	38	39	40	42

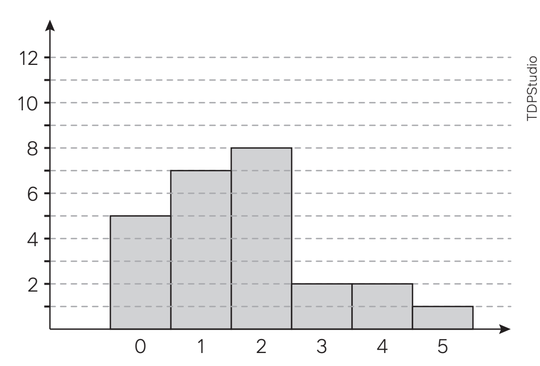
Seja M a moda dos números dessa tabela. Se os jogadores dessa equipe cujos números de calçados são menores do que 40 forem substituídos por jogadores cuja numeração de calçado é M, a nova média dos números dos 20 calçados será 5. Alternativa **b**.

a) 41,5 **b)** 41,75 **c)** 42 **d)** 42,25 **e)** 42,5

6. (FMC-SP) Os números 4 (quatro), 5 (cinco), 7 (sete) e 8 (oito) representam as notas de quatro alunos em um teste. O desvio-padrão desse conjunto de notas é um número que pertence ao intervalo: 6. Alternativa **b**.

a) (0, 1) **b)** (1, 2) **c)** (2, 3) **d)** (3, 4) **e)** (4, 5)

7. (Fempar-PR) O histograma a seguir informa as frequências do número de faltas observadas por aluno numa turma formada por 25 estudantes em certo mês.



Com base nas informações do histograma, conclui-se, por exemplo, que 8 alunos faltaram 2 vezes no período. A mediana do número de faltas observadas é 7. Alternativa **b**.

a) 2,25 **b)** 2,00 **c)** 1,88 **d)** 1,68 **e)** 1,50

8. (UFPR) Em um grupo de 6 pessoas, a média das idades é 17 anos, a mediana é 16,5 anos e a moda é 16 anos. Se uma pessoa de 24 anos se juntar ao grupo, a média e a mediana das idades do grupo passarão a ser, respectivamente: 8. Alternativa **b**.

a) 17 anos e 17 anos.
b) 18 anos e 17 anos.
c) 18 anos e 16,5 anos.
d) 20,5 anos e 20,25 anos.
e) 20,5 anos e 16,5 anos.

9. (FGV-SP) Em uma academia 40 praticantes de halterofilismo marcaram em uma planilha o maior peso que conseguiram levantar em um sábado e calcularam a média aritmética desses pesos, obtendo o valor de 55 kg. No domingo, alguns praticantes conseguiram levantar 10 kg a mais do que o maior peso que tinham conseguido no dia anterior e os demais só conseguiram igualar a marca do sábado, de maneira que no domingo a média aritmética dos maiores pesos levantados pelas 40 pessoas foi 57 kg. O número de praticantes que conseguiram superar a marca do sábado foi 9. Alternativa **e**.

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7 **e)** 8

10. (FMJ-SP) Considere a sequência de números 1, 2, 2, 3, 3, 3, ..., 30, 30, que contém um número 1, dois números 2, três números 3 e assim sucessivamente até trinta números 30. A mediana dessa sequência de números é

a) 22 10. Alternativa **a**. **b)** 15,5 **c)** 18 **d)** 21,5 **e)** 15

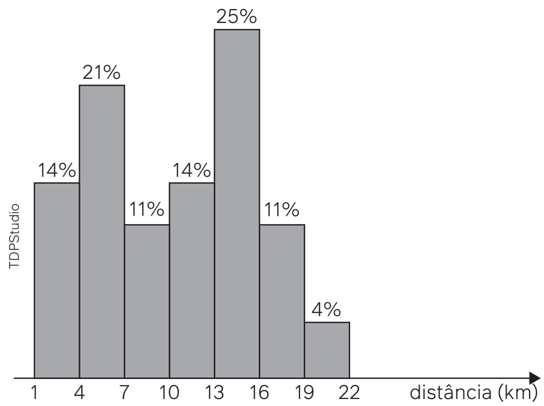
11. (UPE) Um professor aplicou uma prova para 315 estudantes de uma escola. A coordenação da escola deseja saber se o índice de aprovação (percentual de estudantes aprovados) foi igual ou superior a 50%. Dada a alta quantidade de notas a analisar, o professor decidiu utilizar um programa de computador para obter essa resposta de forma mais rápida e prática, pois já possui todos esses dados em uma planilha. Ele deve escolher uma medida estatística, cujo valor numérico seja capaz de indicar, por si só, a resposta para o questionamento.
Qual medida estatística deve ser escolhida pelo professor? 11. Alternativa **b**.

a) Média **b)** Mediana **c)** Moda **d)** Variância **e)** Desvio padrão

12. (Obmep) A professora Brenda aplicou uma prova para 25 estudantes e cometeu um erro ao escrever a nota da aluna Aline, registrando 3,6 ao invés de 8,6. Com esse erro, a média das notas foi 7,2. Qual passou a ser a média das notas depois de corrigido esse erro? 12. Alternativa **b**.

a) 7,3 **b)** 7,4 **c)** 7,45 **d)** 7,5 **e)** 7,6

13. (FGV-SP) As distâncias, em km, entre a residência e o trabalho de um grupo de trabalhadores foram representadas em um histograma.



Para determinar a mediana desse conjunto de dados foi traçada uma reta vertical que dividiu o histograma em uma região à esquerda e uma região à direita, de maneira que a área dessas regiões fosse a mesma. O valor da mediana dessas distâncias corresponde à abscissa da reta construída, que é, aproximadamente 13. Alternativa **a**.

a) 10,9 km **b)** 11,5 km **c)** 12,9 km **d)** 13,0 km **e)** 14,5 km

14. (UPE) No verão de 2018, uma grande loja de eletrodomésticos registrou o número de unidades de ventiladores vendidas durante 10 dias consecutivos, conforme a tabela abaixo. Com isso, foi possível verificar qual o volume de vendas por dia e a variação do número de vendas de um dia para o dia seguinte.

Número de unidades vendidas por dia									
Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5	Dia 6	Dia 7	Dia 8	Dia 9	Dia 10
46	53	38	45	49	53	47	47	51	53

Qual a moda das variações do número de vendas diárias no período considerado? 14. Alternativa **d**.

a) 53 **b)** 15 **c)** 7 **d)** 4 **e)** 2

15. (UFMS) A despesa mensal de uma família foi de R$ 6.240,00, durante os primeiros 3 meses, R$ 6.780,00 durante os próximos 4 meses e R$ 7.236,00 durante os últimos 5 meses de um ano. Se a economia total durante o ano foi de R$ 7.080,00, qual foi a renda média mensal da família? 15. Alternativa **e**.

a) R$ 6.245,00 **b)** R$ 6.752,00 **c)** R$ 6.834,00 **d)** R$ 6.957,50 **e)** R$ 7.425,00

16. (Enem) Um gerente decidiu fazer um estudo financeiro da empresa onde trabalha analisando as receitas anuais dos três últimos anos. Tais receitas são apresentadas no quadro.

Ano	Receita (bilhão de reais)
I	2,2
II	4,2
III	7,4

Estes dados serão utilizados para projetar a receita mínima esperada para o ano atual (ano IV), pois a receita esperada para o ano IV é obtida em função das variações das receitas anuais anteriores, utilizando a seguinte regra: a variação do ano IV para o ano III será igual à variação do ano III para o II adicionada à média aritmética entre essa variação e a variação do ano II para o I.

O valor da receita mínima esperada, em bilhão de reais, será de: 16. Alternativa **c**.

a) 10,0. **b)** 12,0. **c)** 13,2. **d)** 16,8. **e)** 20,6.

17. (Enem) O quadro apresenta a quantidade de um pão vendido em uma semana em uma padaria.

Dia da semana	Número de pães vendidos
Domingo	250
Segunda-feira	208
Terça-feira	215
Quarta-feira	251
Quinta-feira	187
Sexta-feira	187
Sábado	186

O dono da padaria decidiu que, na semana seguinte, a produção diária desse tipo de pão seria igual ao número de pães vendidos no dia da semana em que tal quantidade foi a mais próxima da média das quantidades vendidas na semana.

O dia da semana utilizado como referência para a quantidade de pães a serem produzidos diariamente foi:

a) domingo. **b)** segunda-feira. **c)** terça-feira. **d)** quarta-feira. **e)** sábado.

17. Alternativa **c**.

18. (Enem) Um país decide investir recursos na educação em suas cidades que tenham um alto nível de analfabetismo. Os recursos serão divididos de acordo com a idade média da população que é analfabeta, conforme apresentado no quadro.

Recurso	Idade média da população analfabeta (M)
I	$M \leq 22$
II	$22 < M \leq 27$
III	$27 < M \leq 32$
IV	$32 < M \leq 37$
V	$M > 37$

Uma cidade desse país possui $\frac{60}{100}$ do total de analfabetos de sua população composto de mulheres. A média de idade das mulheres analfabetas é de 30 anos, e a média de idade dos homens analfabetos é de 35 anos.

Considerando a média de idade da população analfabeta dessa cidade, ela receberá o recurso: 18. Alternativa **c**.

a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

19. (Enem) Os 100 funcionários de uma empresa estão distribuídos em dois setores: Produção e Administração. Os funcionários de um mesmo setor recebem salários de valores iguais. O quadro apresenta a quantidade de funcionários por setor e seus respectivos salários.

Setor	Quantidade de funcionários	Salário (em real)
Produção	75	2.000,00
Administração	25	7.000,00

A média dos salários dos 100 funcionários dessa empresa, em real, é 19. Alternativa **c**.

a) 2.000,00 **b)** 2.500,00 **c)** 3.250,00 **d)** 4.500,00 **e)** 9.000,00

20. (Enem) O preparador físico de um time de basquete dispõe de um plantel de 20 jogadores, com média de altura igual a 1,80 m. No último treino antes da estreia em um campeonato, um dos jogadores desfalcou o time em razão de uma séria contusão, forçando o técnico a contratar outro jogador para recompor o grupo. Se o novo jogador é 0,20 m mais baixo que o anterior, qual é a média de altura, em metro, do novo grupo? 20. Alternativa **c**.

a) 1,60 **b)** 1,78 **c)** 1,79 **d)** 1,81 **e)** 1,82

21. (Enem) Dois amigos abriram um restaurante. No primeiro ano, o custo total com as despesas do restaurante chegou a 250 mil reais. A receita neste ano foi de 325 mil reais, obtendo assim um lucro de 75 mil reais (diferença entre a receita e o custo total). A tabela representa o custo total e a receita nos cinco primeiros anos.

Ano	Custo total (milhar de real)	Receita (milhar de real)
Primeiro	250	325
Segundo	270	355
Terceiro	290	350
Quarto	280	365
Quinto	260	305

De acordo com a tabela, a média anual do lucro, em milhar de real, ao longo dos cinco anos é: 21. Alternativa **b**.

a) 60.

b) 70.

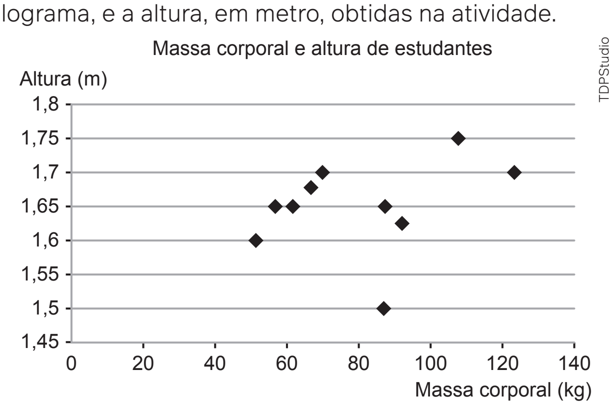
c) 75.

d) 80.

e) 85.

22. (Enem) Um professor, para promover a aprendizagem dos estudantes em estatística, propôs uma atividade. O objetivo era verificar o percentual de estudantes com massa corporal abaixo da média de um grupo de estudantes. Para isso, usando uma balança e uma fita métrica, avaliou uma amostra de dez estudantes, anotando as medidas observadas. O gráfico apresenta a massa corporal, em quilograma, e a altura, em metro, obtidas na atividade.

Após a coleta de dados, os estudantes calcularam a média dos valores obtidos, referentes à massa corporal e à altura, obtendo, respectivamente, 80 kg e 1,65 m. Qual é o percentual de estudantes dessa amostra com massa corporal abaixo da média e altura acima da média? 22. Alternativa **b**.



a) 10

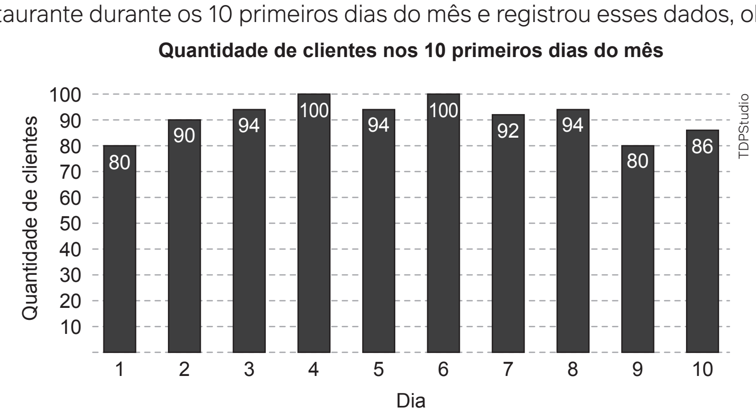
b) 20

c) 30

d) 50

e) 70

23. (Enem) Restaurantes geralmente se deparam com o problema de definir a quantidade de alimentos a serem preparados para cada dia. Diante desse problema, o gerente de um restaurante anotou as quantidades de clientes que almoçaram em seu restaurante durante os 10 primeiros dias do mês e registrou esses dados, obtendo este gráfico:



Ele considerou a moda da distribuição das quantidades de clientes que almoçaram em seu restaurante nesses 10 primeiros dias do mês como uma boa medida para dimensionar a quantidade de alimentos a serem preparados diariamente. O valor da moda dessa distribuição é 23. Alternativa **d**.

a) 90

b) 91

c) 93

d) 94

e) 97

24. (Enem) A amplitude é uma medida estatística que detecta a variabilidade dos dados de uma amostra. Ela pode ser utilizada como critério de qualidade da produção na indústria de peças, indicando, por exemplo, a necessidade do descarte de um lote defeituoso.

Uma fábrica analisou cinco unidades de cada um dos cinco lotes da produção de um tipo de peça que, por projeto, devem ter comprimento igual a 10 cm. As medidas, em centímetro, dessas unidades estão distribuídas a seguir:

- Lote I: 9,80; 10,30; 10,30; 10,30 e 10,30
- Lote II: 10,55; 10,58; 10,58; 10,60 e 10,60
- Lote III: 9,80; 9,80; 10,00; 10,00 e 10,20
- Lote IV: 9,90; 9,90; 9,90; 10,20 e 10,20
- Lote V: 9,30; 9,30; 9,50; 9,50 e 9,50

Foi determinado o descarte do lote que apresentasse a maior amplitude. De acordo com o critério adotado, a fábrica descartará o lote 24. Alternativa **a**.

a) I **b)** II **c)** III **d)** IV **e)** V

25. (Enem) A nota final de um estudante em uma disciplina é dada pela mediana das notas de suas quatro provas. Cinco estudantes dessa disciplina obtiveram as notas apresentadas no quadro.

Estudante	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 4
I	85	45	90	45
II	80	70	70	75
III	75	75	75	55
IV	85	35	35	90
V	60	70	70	75

O professor dessa disciplina pediu a cada estudante que calculasse sua nota final e lhe apresentasse o resultado obtido. Os resultados informados pelos estudantes foram:

- Estudante I: 77;
- Estudante II: 70;
- Estudante III: 70;
- Estudante IV: 60;
- Estudante V: 70.

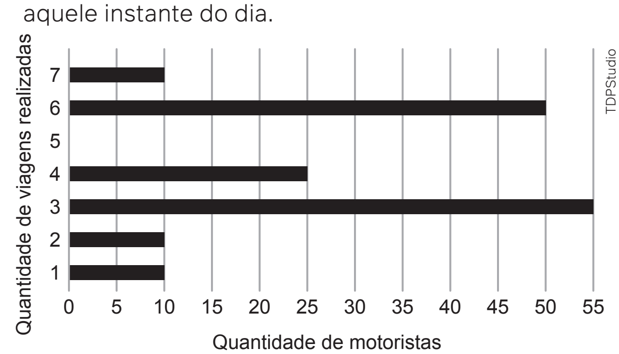
Qual(is) estudantes) acertou(aram) sua nota final?

a) I **c)** II e III **e)** IV e V

b) III **d)** II e V

25. Alternativa **e**.

26. (Enem) Uma empresa de transporte faz regularmente um levantamento do número de viagens realizadas durante o dia por todos os 160 motoristas cadastrados em seu aplicativo. Em um certo dia, foi gerado um relatório, por meio de um gráfico de barras, no qual se relacionaram a quantidade de motoristas com a quantidade de viagens realizadas até aquele instante do dia.



Comparando os valores da média, da mediana e da moda da distribuição das quantidades de viagens realizadas pelos motoristas cadastrados nessa empresa, obtém-se 26. Alternativa **e**.

a) mediana = média < nota.

b) mediana = moda < nota.

c) mediana < média < moda.

d) moda < média < mediana.

e) moda < mediana < média.

Autoavaliação

Autoavalie sua compreensão dos assuntos e objetivos trabalhados ao longo do capítulo.

Objetivos de aprendizagem	Sim	É necessário retomar
Identifico e calculo as medidas de tendência central em uma distribuição de dados.		
Compreendo as medidas de tendência central como um valor que representa um rol de dados.		
Identifico e calculo as medidas de dispersão em uma distribuição de dados.		
Compreendo as medidas de dispersão como forma de analisar uma distribuição de dados.		
Analiso e construo diagramas de *boxplot* associados a uma distribuição de dados.		
Elaboro uma pesquisa e analiso os resultados tendo como referência medidas de tendência central e/ou medidas de dispersão.		

ByDroneVideos/Shutterstock.com

Neste capítulo, você vai:

- identificar e compreender diferentes transformações isométricas;
- resolver e elaborar problemas relacionados às transformações isométricas;
- identificar e compreender diferentes transformações homotéticas;
- obter relações métricas em triângulos retângulos por meio da semelhança de triângulos;
- resolver e elaborar problemas com o uso de relações trigonométricas em triângulos quaisquer.

CAPÍTULO

4

Geometria das transformações e triângulos

Pedras portuguesas no calçadão da Praia de Copacabana, Rio de Janeiro (RJ), maio de 2019.

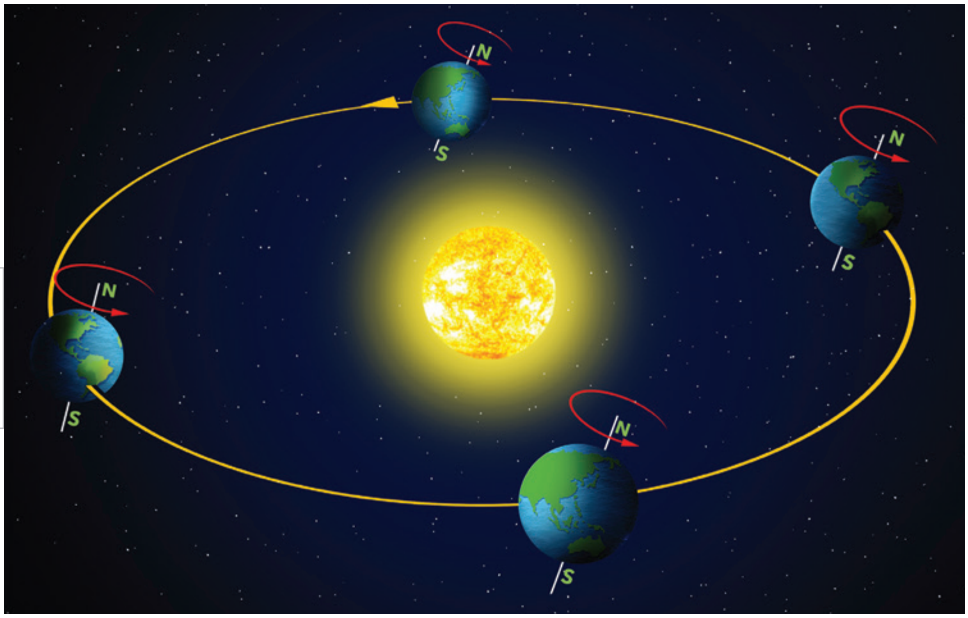
Os mosaicos são conhecidos desde os tempos antigos, foram utilizados por diversas civilizações e são até hoje empregados no revestimento de pisos, tetos e painéis de paredes, além de serem utilizados em trabalhos de artesanato. Neste capítulo, você vai estudar a geometria das transformações e terá a oportunidade de analisar como a matemática está presente nesse tipo de trabalho.

1. **Como você pensa que os mosaicos são formados?** 1. Resposta pessoal.
2. **Como você considera que a matemática está presente na formação de um mosaico?** 2. Resposta pessoal.

1 Geometria das transformações

A ilustração a seguir representa dois movimentos que relacionam o planeta Terra ao astro maior, o Sol: o movimento de translação e o movimento de rotação. Um deles leva cerca de 365 dias para se completar, e o outro, aproximadamente 24 horas.

O esquema está representado com cores-fantasia e as dimensões das estruturas não seguem a proporção real.

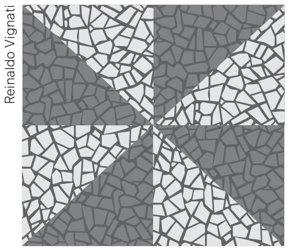


Esquema representativo dos movimentos de rotação e translação da Terra. Rotação é o giro que a Terra realiza em torno de seu próprio eixo; translação é o movimento que ela faz em torno do Sol.

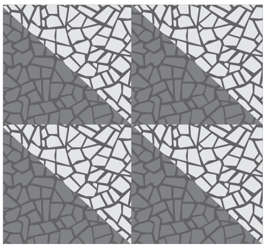
Durante a órbita da Terra, ela pode estar mais próxima (periélio) ou mais afastada (afélio) do Sol. A menor distância é de aproximadamente 147 milhões de quilômetros, enquanto a maior é de aproximadamente 152 milhões de quilômetros.

Na disciplina de Geografia, você poderá conhecer mais detalhadamente esses dois movimentos. Queremos agora mencionar a existência deles em situações mais voltadas à Geometria.

Olhando para determinados ladrilhamentos de calçadas, por exemplo, podemos encontrar os movimentos de rotação e translação. Assim, considere estas duas sugestões de ladrilhamento para uma calçada envolvendo peças escuras e claras em formato de triângulo retângulo.



Sugestão 1.



Sugestão 2.

Para pensar e discutir

1. O que significa fazer uma translação? Exemplifique. 1. Deslocar uma figura por certa distância e em certa direção; resposta pessoal.
2. E uma rotação? Exemplifique. 2. Girar uma figura em torno de seu centro de rotação ; resposta pessoal.
3. Nas duas sugestões de ladrilhamento, você identifica rotação? E translação? 3. Resposta pessoal.
4. Poderia indicar uma terceira posição de ladrilhamento dessas peças? 4. Resposta pessoal.

Os ladrilhos (e mosaicos) representam obras de arte em que a Geometria Plana, com suas formas, acaba servindo, algumas vezes, de inspiração. Associar essas formas com movimentos de rotação, translação e de reflexão aumenta significativamente as possibilidades quando pensamos em ladrilhamentos.

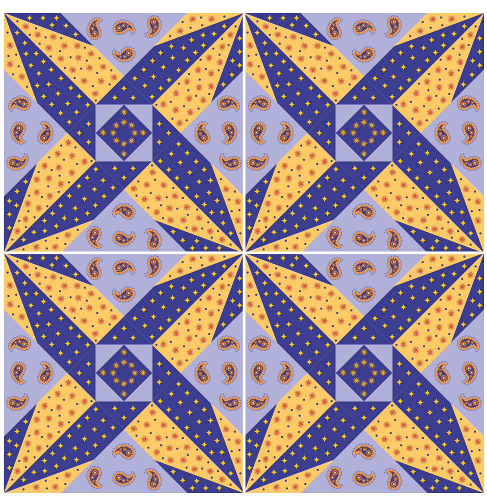
jeangill/iStockphoto.com

Parede de azulejos do século XVI no Palácio Nasrid, em Alhambra, Espanha.

Transformações isométricas

A ilustração a seguir exemplifica uma composição de quatro ladrilhos em que transformações isométricas podem ser verificadas. Observe que existe um quadrado no centro de cada ladrilho, em torno do qual parecem girar quadriláteros amarelos e azuis, alternados (movimento de rotação). Observe também a composição dos quatro ladrilhos. A figura formada tem um centro, em torno do qual parecem girar algumas figuras; entre elas, dois tipos de quadrado e os quadriláteros azuis e amarelos.

Inna G/Shutterstock.com



Exemplo de composição de ladrilhos com transformações isométricas.

Para pensar e discutir

1. Você identificou, em cada ladrilho e na composição dos quatro ladrilhos, os possíveis movimentos anteriormente mencionados? 1. Resposta pessoal.

2. Identifique outros exemplos de movimento que envolvam o formato das figuras. 2. Resposta pessoal.

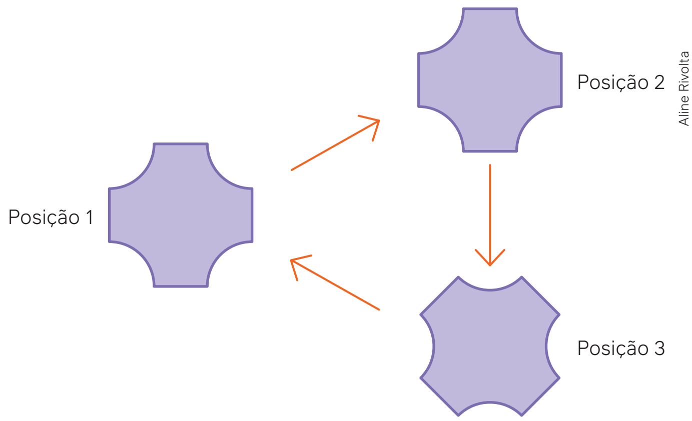
Na composição anterior, o desenho de um ladrilho envolve figuras geométricas girando em torno de um mesmo ponto. O conceito de isometria, que abordaremos aqui, exige que as figuras sejam de mesmo tamanho. Utilizamos a composição de ladrilhos para que você analisasse uma situação real. Agora, vejamos o conceito de isometria.

Isometria é uma transformação geométrica que preserva o formato e o tamanho da figura, ou seja, é a transformação de uma figura em outra congruente, alterando apenas sua posição.

Na palavra **isometria**, o prefixo **iso** significa “igual”, e o termo **metria** quer dizer “medida”.

Assim, podemos dizer que estamos diante de uma transformação isométrica quando não há alteração nem do formato nem do tamanho da figura, há apenas uma mudança da posição.

Observe, por exemplo, uma **mesma figura** em três posições diferentes.

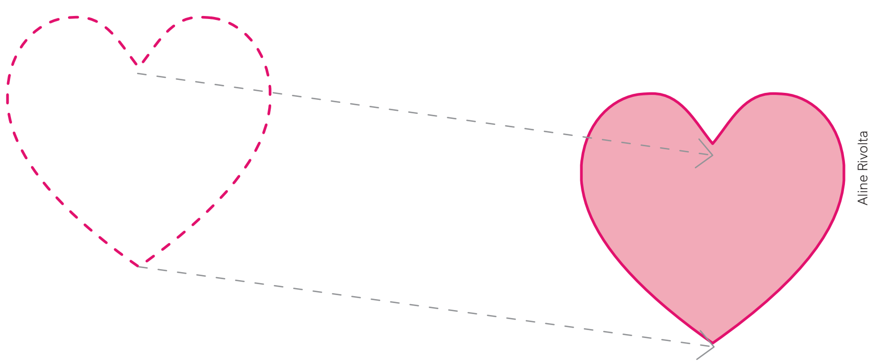


Analisando essas posições ocupadas por uma mesma figura, podemos destacar que:

- da posição 1 para a posição 2, a figura foi simplesmente deslocada no sentido e na direção da seta;
- da posição 2 para a posição 3, a figura foi deslocada no sentido e na direção da seta e sofreu um giro (rotação) em torno de seu centro;
- da posição 3 para a posição 1, a figura foi deslocada no sentido e na direção da seta e sofreu um giro (rotação) em torno de seu centro.

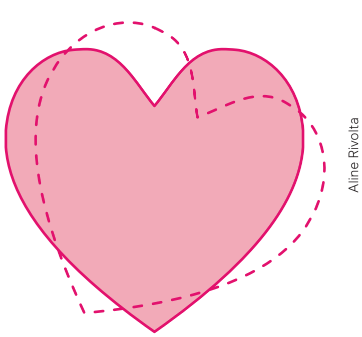
Para artistas, desenhistas, arquitetos e engenheiros, as transformações isométricas representam movimentos ou técnicas para produzir diferentes posições de uma mesma figura quando se tem um referencial. Veja a seguir os tipos básicos de transformação isométrica que mantêm o formato e o tamanho de uma figura.

- **Translação**: Desloca-se uma figura a certa distância e em certa direção.



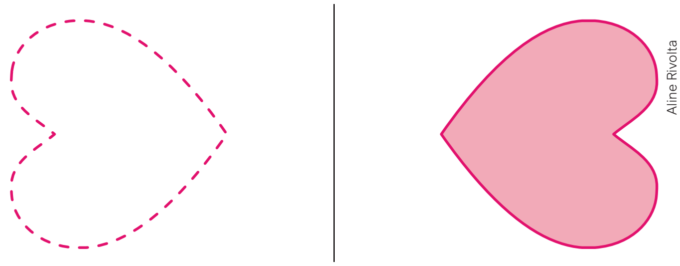
A figura com linha tracejada em rosa representa a posição inicial nessa translação.

- **Rotação**: Gira-se a figura em torno de seu centro de rotação.



A figura com linha tracejada representa a posição inicial nessa rotação.

- **Reflexão**: Rebate-se a figura em relação a determinado eixo de tal forma que o ponto original e seu correspondente na reflexão estejam à mesma distância do eixo de reflexão.



Vídeo
Movimentos da Lua

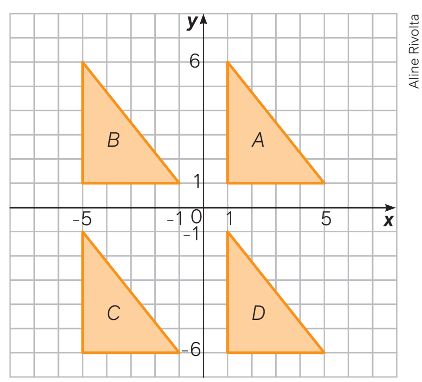
A figura com linha tracejada representa a posição inicial nessa reflexão. Já a linha vertical representa o eixo de simetria.

É claro que podemos ter uma composição desses movimentos. Assim, você pode ter uma figura resultante, por exemplo, de uma translação seguida de uma rotação ou de uma rotação seguida de uma reflexão, entre outras possibilidades.

O plano cartesiano pode ser utilizado para compreender melhor essas transformações. Analise cada um dos seguintes exemplos de transformações feitas no plano cartesiano.

Atividades resolvidas

1. No plano cartesiano, foram representados quatro triângulos retângulos *A, B, C* e *D* de mesmas medidas.



a) Comparando esses triângulos dois a dois, quais movimentos podem ser identificados?

b) Quais são as coordenadas dos vértices dos triângulos *A* e *B*? O que aconteceu com as coordenadas dos pontos correspondentes de *A* para *B*?

c) Quais são as coordenadas dos vértices dos triângulos *C* e *D*? O que aconteceu com as coordenadas dos pontos correspondentes de *C* para *D*?

d) O que aconteceu com as coordenadas dos pontos correspondentes de *C* para *A*?

- Item **a)** Comparando um triângulo com outro qualquer, o único movimento feito foi o de translação.
- Item **b)** Pela figura, temos as seguintes coordenadas dos vértices:

Triângulo *A*: coordenadas (1, 1), (5, 1) e (1, 6).

Triângulo *B*: coordenadas (–5, 1), (–1, 1) e (–5, 6).

Os pontos correspondentes do triângulo *A* para o triângulo *B* tiveram uma diminuição em suas abscissas de 6 unidades (deslocamento para esquerda), não alterando as ordenadas.

- Item **c)** Pela figura, temos as seguintes coordenadas dos vértices:

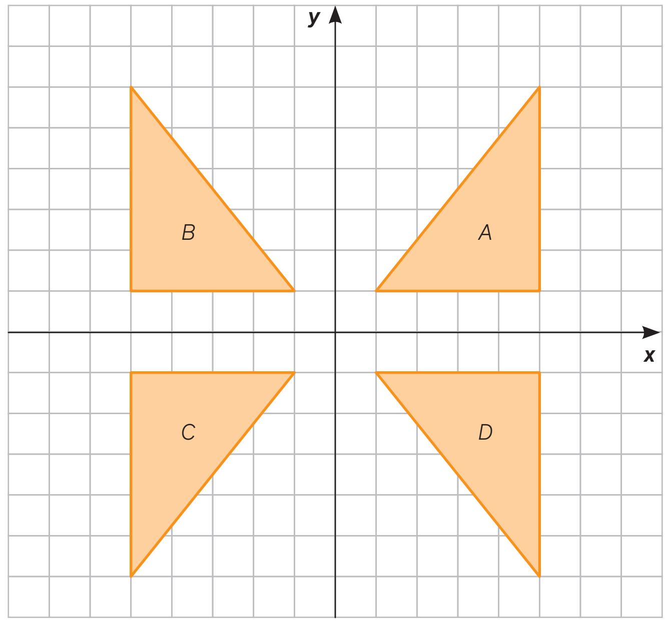
Triângulo *C*: coordenadas (–5, –6), (–1, –6) e (–5, –1).

Triângulo *D*: coordenadas (1, –6), (5, –6) e (1, –1).

Os pontos correspondentes do triângulo *C* para o triângulo *D* tiveram um aumento em suas abscissas de 6 unidades (deslocamento para direita), não alterando as ordenadas.

- Item **d)** As abscissas dos pontos correspondentes foram aumentadas em 6 unidades, enquanto as ordenadas foram aumentadas em 7 unidades.

2. No plano cartesiano, há um triângulo em quatro posições diferentes indicadas pelas letras *A*, *B*, *C* e *D*.



Aline Rivolta

1. Reflexão em torno do eixo das abscissas e reflexão em torno do eixo das ordenadas.

a) Que movimento ocorreu comparando as posições dos triângulos *A* e *B*?

b) Explique o movimento do triângulo *A* para o triângulo *C*.

- Item **a)** Conforme a figura, há uma reflexão em torno do eixo das ordenadas do triângulo *A* para o triângulo *B* ou do triângulo *B* para o triângulo *A*.

Para pensar e discutir

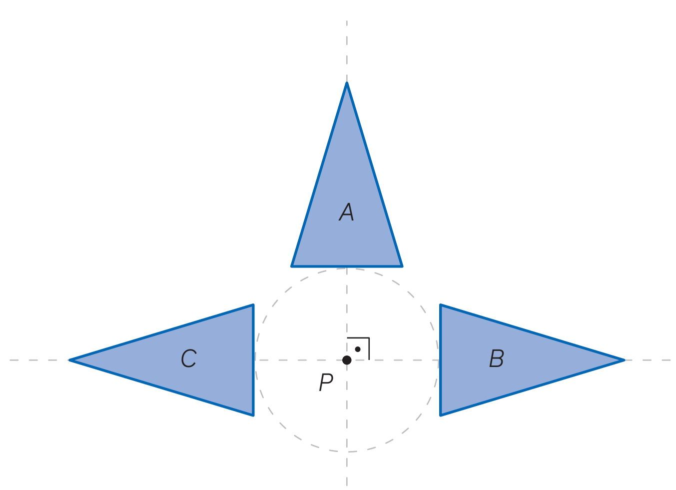
1. Que movimento ocorreu comparando as posições dos triângulos *A* e *D*? E *C* e *D*?

2. Qual é a explicação do movimento do triângulo *D* para o triângulo *B*?

2. Resposta pessoal.

- Item **b)** Do triângulo *A* para o triângulo *C*, faz-se uma reflexão em torno do eixo *x* (obtendo o triângulo *D*) e depois uma reflexão em torno do eixo *y* para obter o triângulo *C*, ou apenas uma reflexão em torno da origem (0, 0). Entretanto, pode-se também pensar numa rotação de 180° no sentido horário do triângulo *A* em relação à origem do sistema de coordenadas cartesianas para se obter o triângulo *C*.

3. Observe um triângulo isósceles em três posições diferentes. A circunferência tracejada e as duas retas perpendiculares tracejadas auxiliam a perceber os movimentos de rotação, para os quais o ponto *P* pode ser utilizado como referência.



Aline Rivolta

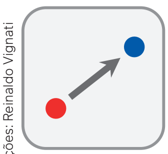
a) Considere um ponto qualquer no triângulo *A* e o correspondente nos triângulos *B* e *C*. O que esses pontos mantêm em comum numa rotação?

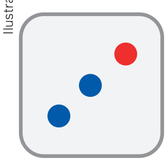
b) Como você explica o movimento para obter *B* de *C*? E para obter *A* de *C*?

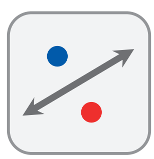
- Item **a)** Os pontos correspondentes estão à mesma distância do ponto *P*, pois houve apenas movimento de rotação.
- Item **b)** Movimento de *C* para obter *B*: o triângulo *C* sofre uma rotação de 180° no sentido horário em torno do ponto *P*, ou, de forma equivalente, o triângulo *C* sofre uma rotação de 180° no sentido anti-horário em torno do ponto *P*.
- Movimento de *C* para obter *A*: o triângulo *C* sofre uma rotação de 90° no sentido horário em torno do ponto *P*, ou, de forma equivalente, o triângulo *C* sofre uma rotação de 270° no sentido anti-horário em torno do ponto *P*.

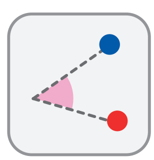
As construções exemplificadas anteriormente podem ser feitas em folhas quadriculadas no plano cartesiano. Entretanto, existem *softwares* de geometria dinâmica que podem ser usados como ferramenta para facilitar as construções e a realização de movimentos de isometria. Nesse sentido, vale a pena você examinar e explorar tutoriais de *softwares* de geometria dinâmica. Neles, você encontra ícones como os que estudaremos a seguir.

Ilustrações: Reinaldo Vignati


Movimento de translação por um vetor


Movimento de reflexão em torno de um ponto


Movimento de reflexão em torno de uma reta


Movimento de rotação em torno de um ponto

Para explorar

Junte-se a três ou quatro colegas nesta atividade e faça o que se pede a seguir.

1. Pesquisem tutoriais de construções em *software* de geometria dinâmica. Explorem nesses tutoriais os ícones mencionados e suas finalidades. Nesse sentido, sugerimos a repetição das construções exemplificadas neles. 1. Resposta pessoal.

2. Elaborem e construam as figuras geométricas indicadas a seguir.

a) Um polígono regular que é transladado no plano segundo uma direção e uma distância prefixadas. 2. a) Resposta pessoal.

b) Um desenho que não seja geométrico e que sofre uma translação segundo uma direção e uma distância prefixadas. 2. b) Resposta pessoal.

c) Um polígono não regular que sofre uma rotação em torno de um ponto preestabelecido e de um ângulo predeterminado. 2. c) Resposta pessoal.

d) Um desenho que não seja geométrico que sofre uma rotação em torno de um ponto preestabelecido e de um ângulo predeterminado. 2. d) Resposta pessoal.

e) Um polígono regular que sofre uma reflexão em torno de uma reta preestabelecida. 2. e) Resposta pessoal.

f) Um desenho que não seja geométrico que sofre uma reflexão em torno de uma reta preestabelecida. 2. f) Resposta pessoal.

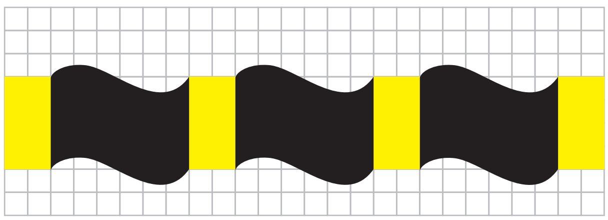
3. Elaborem um desenho qualquer e, com ele, façam pelo menos dois movimentos diferentes relacionados à reflexão, rotação ou translação. 3. Resposta pessoal.

4. Apresentem um pequeno relatório correspondente às três partes anteriores desta atividade. Nesse relatório, abordem a importância do *software* de geometria dinâmica. Ao final, cada equipe deverá apresentá-lo para a turma. 4. Resposta pessoal.

Atividades

1. Para definir a decoração de uma faixa na parede da escola, foi feito um concurso. Rodrigo apresentou a sugestão a seguir, em uma folha quadriculada.

Aline Rivolta



Responda:

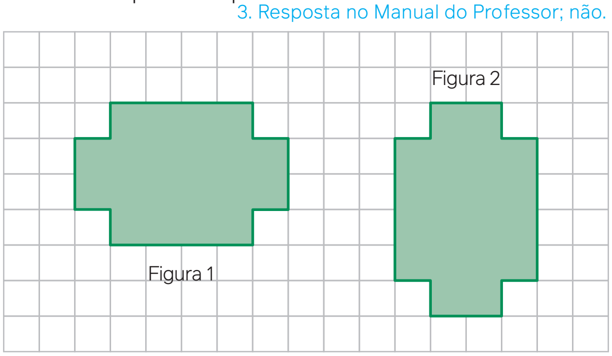
a) Considerando a primeira peça amarela, como são obtidas as outras peças amarelas? 1. a) Com translações para a direita de 6 em 6 quadradinhos.

b) Qual é o tipo de transformação isométrica de uma peça de cor preta para outra? 1. b) Translação.

2. Utilizando as figuras de mesmo formato apresentadas por Rodrigo, elabore em papel quadriculado outra faixa. As cores podem ser diferentes. 2. Resposta pessoal.

3. Quais transformações devem ser aplicadas à **figura 1** para que ela fique na posição da **figura 2**? Existe apenas um tipo de resposta? 3. Resposta no Manual do Professor; não.

Aline Rivolta



4. Junte-se a um colega para fazer esta atividade. 4. Resposta pessoal.

I. Elaborem em papel quadriculado, como na atividade anterior, a transformação de uma figura por meio de translações e rotações.

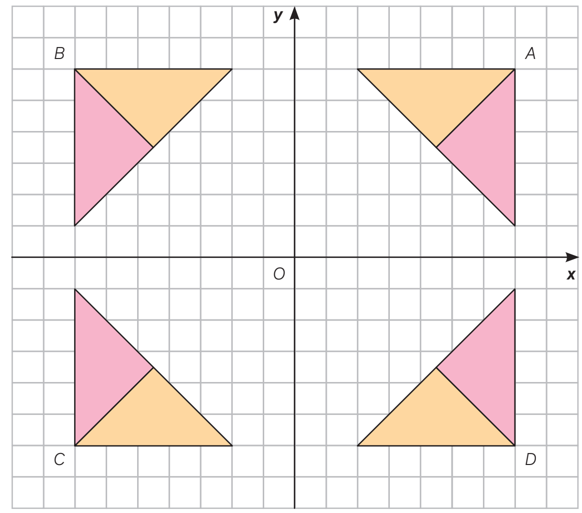
II. Escrevam em uma folha à parte as transformações necessárias para que, da figura inicial, se possa chegar à figura final.

III. Apresentem apenas o desenho a outra dupla de colegas para que eles escrevam quais são as transformações necessárias.

IV. Confrontem e discutam as respostas com a dupla que trabalhou com vocês.

5. O triângulo colorido *A* é a figura inicial de uma representação no plano cartesiano. As figuras *B*, *C* e *D* podem ser obtidas da figura *A* por meio de transformações isométricas.

Aline Rivolta



a) Descreva como obter, da figura *A*, as figuras *B*, *C* e *D*. 5. a) Resposta pessoal.

b) Descreva como obter, da figura *D*, a figura *C*. 5. b) Resposta pessoal.

c) As figuras *A* e *C* são simétricas em relação à origem? Justifique. 5. c) Não; resposta pessoal.

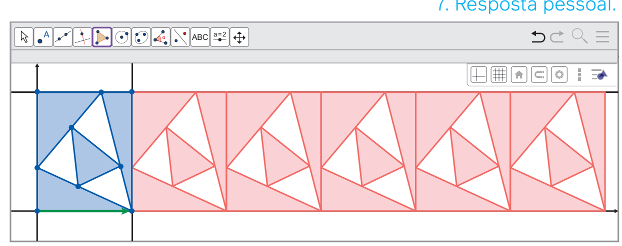
6. Com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica, você pode, como ilustrado na próxima atividade, criar faixas decorativas utilizando transformações isométricas.

a) Elabore, num *software* de geometria dinâmica ou em folha quadriculada, uma faixa decorativa utilizando uma forma geométrica diferente da que aparece na figura da **atividade 7**. 6. a) Resposta pessoal.

b) Apresente-a aos demais colegas indicando o tipo de transformação isométrica que utilizou. 6. b) Resposta pessoal.

7. Junte-se a um colega para fazer esta atividade. 7. Resposta pessoal.

Reinaldo Vignati



Parte 1

Pesquisem em *sites* de busca uma faixa decorativa que possa ser reproduzida por transformações de rotação. Imprimam ou desenhem essa faixa para apresentar aos colegas. Na apresentação, indiquem a transformação de rotação.

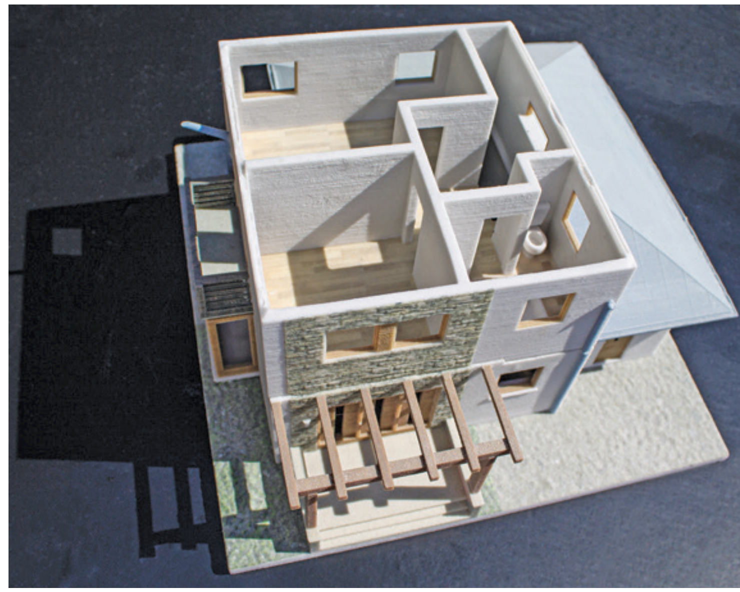
Parte 2

Pesquisem em *sites* de busca quadros que utilizem alguma transformação isométrica. Imprimam numa folha essa obra para apresentar aos colegas. Na apresentação, indiquem a transformação isométrica observada.

Transformações homotéticas

Nem todas as profissões que existiam há alguns poucos anos sobreviveram. Com a utilização de ferramentas computacionais cada vez mais presentes no trabalho e na vida das pessoas, observou-se mudanças na atuação das pessoas em algumas profissões. Um exemplo simples dessas mudanças pode ser constatado na elaboração de projetos para a construção civil. Há não muito tempo, profissionais dessa área utilizavam equipamentos bem diferentes dos poderosos recursos tecnológicos que atualmente empregam para elaborar a planta de um edifício, por exemplo, ou para ilustrar como ficará um ambiente depois de decorado.

A produção de uma maquete para representar uma casa ou um prédio, por exemplo, hoje pode ser feita com impressora 3D. A ilustração representa isso. Lembre-se de que uma maquete é uma representação "reduzida" de uma construção a ser feita.

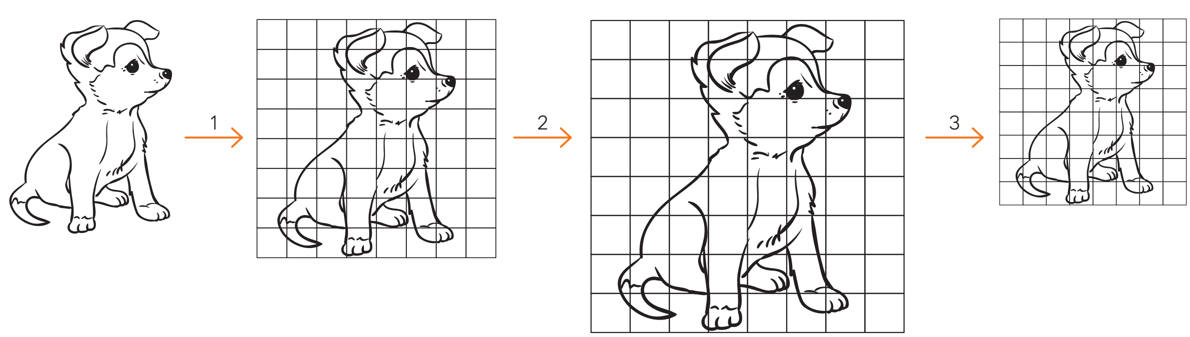


Inveru/Shutterstock.com

Modelo de casa produzida por meio de impressão 3D.

A redução ou a ampliação de uma figura é uma transformação homotética. Quando você estudou semelhanças de figuras planas, estava fazendo transformações; porém, trabalhando mais a questão métrica que envolve as medidas tanto de comprimento quanto de área.

O nosso interesse maior agora está nesse outro tipo de construção, isto é, como podemos ampliar ou reduzir uma figura. Uma das ideias mais simples está sugerida na sequência de figuras a seguir, em que, em uma malha quadriculada, reproduz-se uma figura original para, então, ampliá-la ou reduzi-la.



Reinaldo Vignati

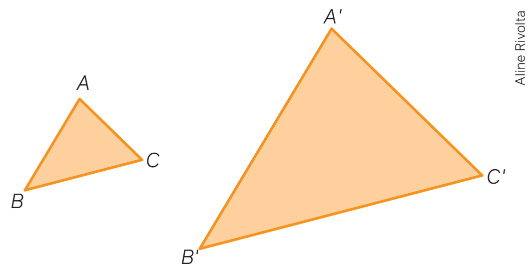
Para pensar e discutir

1. Em que situações utilizamos uma redução ou uma ampliação? Cite exemplos. 1. Resposta pessoal.
2. O que aconteceu entre o desenho original e o que está indicado na seta 1? 2. Foi reproduzido em malha quadriculada.
3. Como podemos obter, do desenho reproduzido na malha quadriculada, os desenhos indicados pelas setas 2 e 3? 3. Aumentando e diminuindo o tamanho dos quadradinhos, respectivamente.

Quando ampliamos ou reduzimos uma figura, preservamos seu formato; porém, aumentamos ou reduzimos, respectivamente, seu tamanho. Estamos diante de uma transformação conhecida como homotetia.

Homotetia é uma transformação geométrica que altera o tamanho de uma figura, preservando seu formato.

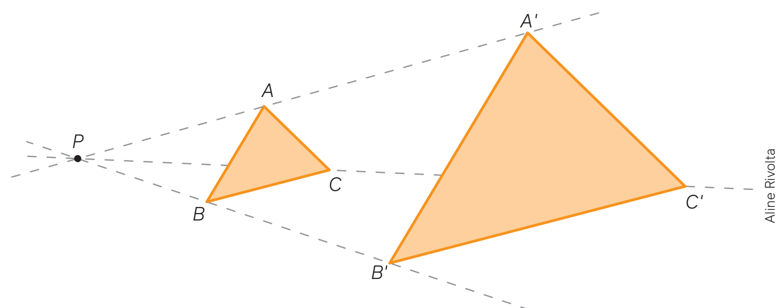
Dizemos que a homotetia é um tipo de transformação geométrica que, quando aplicada, por exemplo, a um desenho, preserva seu formato (portanto, seus ângulos) e o desenho é reduzido ou ampliado (podendo até ser copiado).



Como ampliar ou reduzir determinada figura?

Vamos examinar inicialmente um triângulo ampliado. Os ângulos correspondentes têm medidas iguais, já os lados correspondentes têm medidas proporcionais. A razão entre essas medidas chama-se razão de semelhança, também chamada de razão de homotetia:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \longrightarrow \text{Razão de homotetia: } k$$



Agora, ainda utilizando o triângulo, observe o que acontece quando ligamos pontos correspondentes por meio de linhas tracejadas: elas se encontrarão num ponto P que é denominado centro de homotetia.

Para obter a figura correspondente à transformação, liga-se cada ponto da figura inicial a um ponto fixo. Marca-se, com base nesse ponto, a nova distância, que é o resultado da multiplicação da distância inicial pela razão. Observe que o centro, cada ponto inicial e o seu equivalente transformado encontram-se sobre uma mesma reta, como na figura. Entretanto, esse centro de homotetia pode ser interno ou externo em relação à figura. Vamos exemplificar nas situações resolvidas a seguir!

Atividades resolvidas

4. Se, na construção anterior, tivermos $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$, sendo k um número real positivo, qual será a razão $\frac{A'P}{AP}$? E a razão $\frac{B'P}{BP}$? E a razão $\frac{C'P}{CP}$? Justifique.

- Como os triângulos PAB e $PA'B'$ são semelhantes, temos:

$$\frac{A'P}{AP} = \frac{A'B'}{AB} = k$$

- Como os triângulos PBC e $PB'C'$ são semelhantes, temos:

$$\frac{B'P}{BP} = \frac{B'C'}{BC} = k$$

- Como os triângulos PAC e $PA'C'$ são semelhantes, temos:

$$\frac{C'P}{CP} = \frac{A'C'}{AC} = k$$

Assim, essas razões são iguais a k.

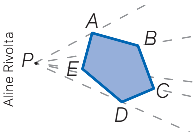
Para pensar e discutir

1. Ainda em relação aos triângulos ABC e $A'B'C'$ construídos, responda:

Em termos de ampliação, qual é o significado de k assumir o valor 2? 1. Os lados do triângulo ABC têm o dobro das medidas dos lados do triângulo $A'B'C'$.

5. Explique como triplicar um pentágono utilizando um ponto P como centro de homotetia.

- Construímos inicialmente o pentágono, marcamos um ponto externo P e o ligamos por meio de retas tracejadas a cada um dos vértices A, B, C, D e E do polígono.

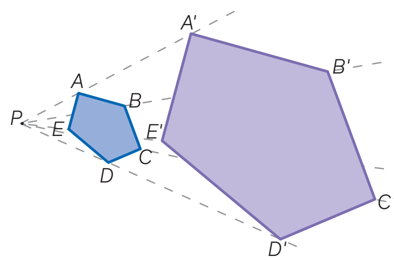


Aline Rivolta

- Como queremos triplicar a figura, temos que a razão de homotetia deve ser 3, ou seja, $k = 3$. Para obter a ampliação, temos de marcar os novos vértices A', B', C', D' e E' nas retas tracejadas de tal maneira que suas distâncias ao ponto P sejam iguais ao triplo das distâncias dos vértices correspondentes do pentágono inicial ao ponto P, ou seja:

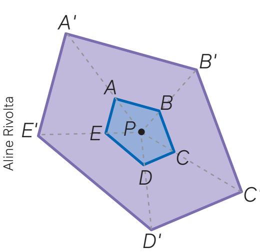
$$\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB} = \frac{PC'}{PC} = \frac{PD'}{PD} = \frac{PE'}{PE} = 3 \rightarrow \begin{cases} PA' = 3 \cdot PA \\ PB' = 3 \cdot PB \\ PC' = 3 \cdot PC \\ PD' = 3 \cdot PD \\ PE' = 3 \cdot PE \end{cases}$$

- Assim, temos a seguinte figura:



Aline Rivolta

- Outra maneira é considerar que o centro de homotetia é interno ao polígono. Nesse caso, também precisamos ligar o ponto P, por meio de retas tracejadas, aos vértices do pentágono.



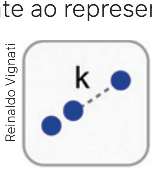
Aline Rivolta

Considerando essa última atividade, discuta com seus colegas respostas para as questões a seguir.

Para pensar e discutir

1. Compare as duas maneiras apresentadas para ampliar uma figura e responda: Os resultados obtidos são os mesmos? Justifique. 1. Sim; resposta pessoal.
2. O que aconteceria, na **atividade resolvida 5**, se fizéssemos $k = 0{,}3$ como razão de homotetia? 2. Uma redução.
3. Qual será o valor de k para que que ampliação seja de 50%? Justifique. 3. $k = 1{,}5$; resposta pessoal.
4. Esses dois procedimentos também podem ser utilizados para fazer uma redução? 4. Sim.

Nos *softwares* de geometria dinâmica, temos o recurso de ampliar ou reduzir uma figura qualquer, indicado normalmente por um ícone semelhante ao representado a seguir.



Reinaldo Vignati

→ Homotetia de razão k

Antes de fazer a próxima atividade, recomendamos que você conheça detalhadamente essa ferramenta, o que pode facilitar sua compreensão. A primeira parte da atividade a seguir consiste exatamente em consultar esses tutoriais.

Para explorar

Junte-se a três ou quatro colegas nesta atividade e faça o que se pede a seguir.

1. Pesquisem tutoriais de construções em um *software* de geometria dinâmica. Explorem o ícone mencionado anteriormente e suas finalidades. Sugerimos repetir as construções exemplificadas nos tutoriais. 1. Resposta pessoal.

2. Elaborem e construam as figuras indicadas a seguir.

a) Um polígono regular que é ampliado e reduzido de acordo com uma razão de ampliação e redução preestabelecida. 2. a) Resposta pessoal.

b) Um desenho sem forma geométrica definida que é ampliado e reduzido de acordo com uma razão de ampliação e redução preestabelecida. 2. b) Resposta pessoal.

c) Um polígono não regular que sofre uma ampliação de razão igual a 3. 2. c) Resposta pessoal.

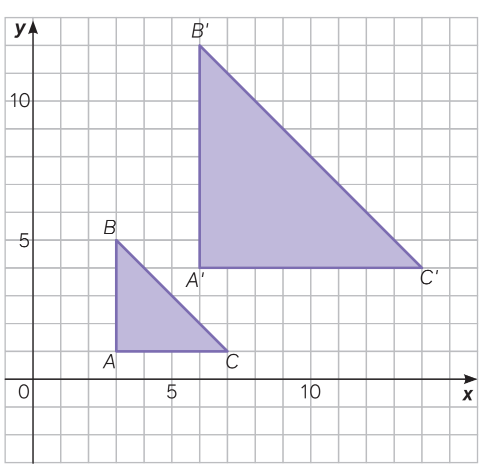
d) Um desenho qualquer que não seja geométrico definido e que sofre uma redução de 50%. 2. d) Resposta pessoal.

3. Elaborem um desenho qualquer e, com base nele, façam pelo menos duas construções: uma redução e uma ampliação. 3. Resposta pessoal.

4. Apresentem um pequeno relatório das três partes desta atividade. Nesse relatório, abordem a importância do *software* de geometria dinâmica e apontem as dificuldades encontradas. Ao final, apresentem o relatório para a turma. 4. Resposta pessoal.

Atividades

8. No plano cartesiano, estão representados dois triângulos retângulos isósceles que são semelhantes. A medida do lado de cada quadradinho indica coordenadas inteiras. Assim, por exemplo, as coordenadas do vértice *A* do triângulo menor são (3, 1).



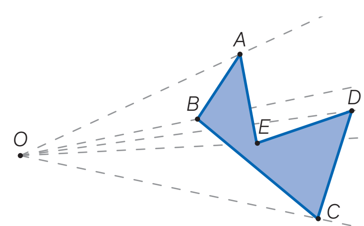
Aline Rivolta

a) Determine a razão de semelhança do triângulo menor para o triângulo maior, nessa ordem. 8. a) 2

b) Obtenha as coordenadas dos vértices dos dois triângulos. 8. b) *A*(3, 1), *B*(3, 5), *C*(7, 1), *A'*(6, 4), *B'*(6, 12) e *C'*(14, 4).

c) Quais são as coordenadas do centro de homotetia dessa transformação? Justifique. 8. c) (0, –2); resposta pessoal.

9. Como exemplificado na figura a seguir, você deverá fazer um polígono (que pode ser não convexo) formado por cinco lados e definir um ponto que represente o centro de homotetia bem afastado da figura. 9. Respostas pessoais.



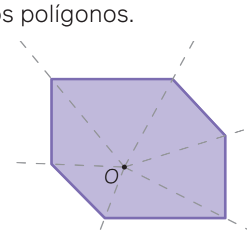
Aline Rivolta

Utilizando compasso, régua e esquadros (se necessário), trace as retas ligando o centro de homotetia com os vértices do polígono. Depois, faça:

a) uma redução do polígono;

b) uma ampliação do polígono.

10. Na figura a seguir, está representado um polígono convexo com seis lados, um ponto que representa o centro de homotetia, localizado no interior do polígono, e as linhas tracejadas ligando esse centro aos vértices dos polígonos.



Aline Rivolta

Utilizando como exemplo essa ilustração, desenhe um polígono convexo qualquer e represente internamente o centro de homotetia. Então, ligue esse centro por meio de linhas retas com os vértices e, utilizando instrumentos de desenho geométrico, faça:

a) uma redução desse polígono; 10. a) Resposta pessoal.

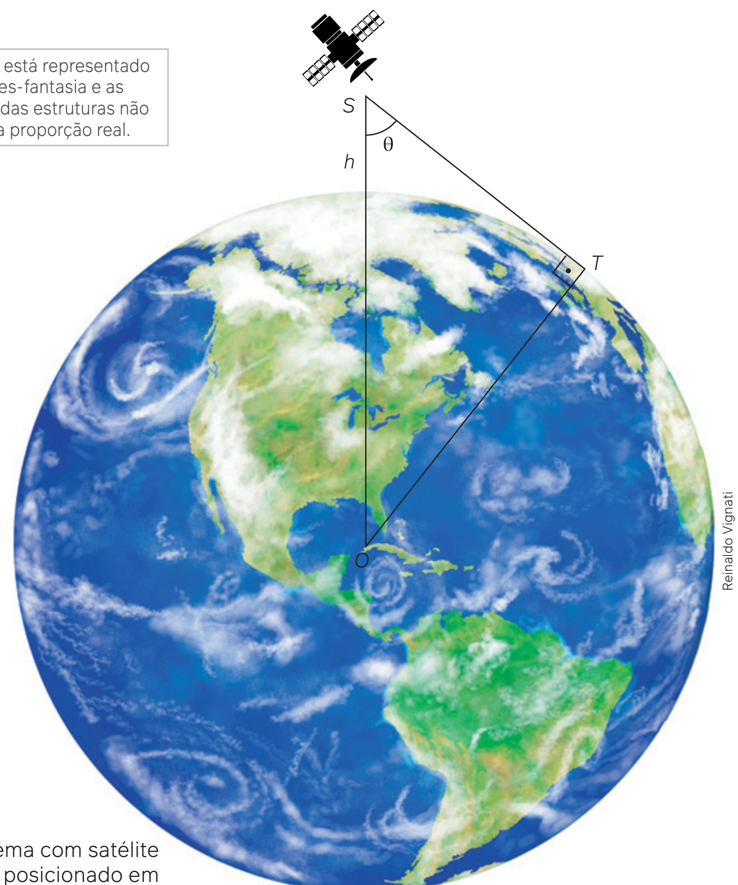
b) duas ampliações desse polígono. 10. b) Resposta pessoal.

Triângulos: relações trigonométricas

2

Um dos problemas mais intrigantes da história da Matemática foi resolvido pelos gregos na Antiguidade: o cálculo do raio da Terra, considerando-a com o formato de uma esfera. Eratóstenes foi quem chegou a uma excelente aproximação dessa medida. Não falaremos aqui do procedimento que ele adotou, porém vamos atualizar o problema resolvendo-o de outra maneira.

O esquema está representado com cores-fantasia e as dimensões das estruturas não seguem a proporção real.



Esquema com satélite posicionado em determinada altura da Terra para realizar medições.

Na representação totalmente fora de escala para facilitar a visualização, um satélite se encontra a uma altura h da superfície da Terra (ponto S) em determinado momento de sua órbita. Por meio de instrumentos, ele consegue obter a medida do ângulo perpendicular à Terra, de centro no ponto O, e a distância ao ponto T na linha do horizonte indicada na figura.

Para pensar e discutir

1. Se o ponto O representa o centro da Terra, o que representa $\overline{OT}$? 1. O raio da Terra.

2. E $\overline{OS}$? 2. A soma das medidas do raio da Terra e da altura h.

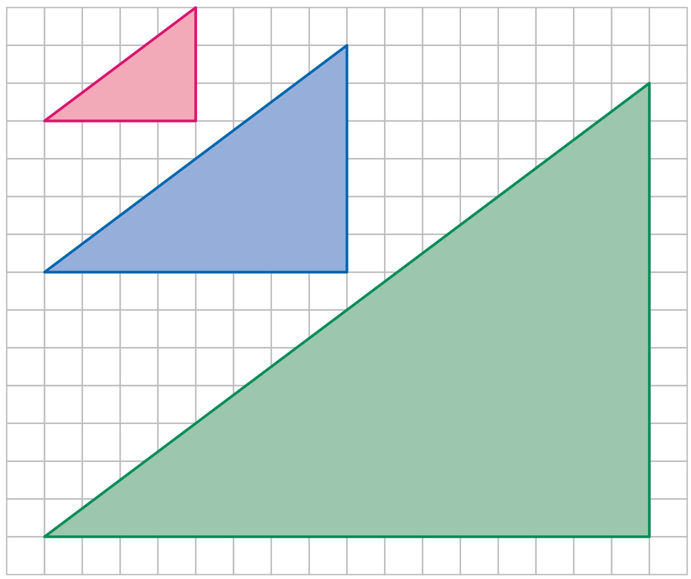
3. Qual é a medida do ângulo formado por $\overline{OT}$ e $\overline{ST}$? Justifique. 3. 90°; resposta pessoal.

Note que, entre as questões que colocamos para discussão, não pedimos que você calcule a medida do raio da Terra, pois voltaremos a essa situação.

Neste tópico, vamos desenvolver conceitos básicos, porém importantes, em uma área da disciplina de Matemática: a **Trigonometria**. Esse estudo está intimamente ligado ao cálculo de distâncias inacessíveis.

Trigonometria no triângulo retângulo

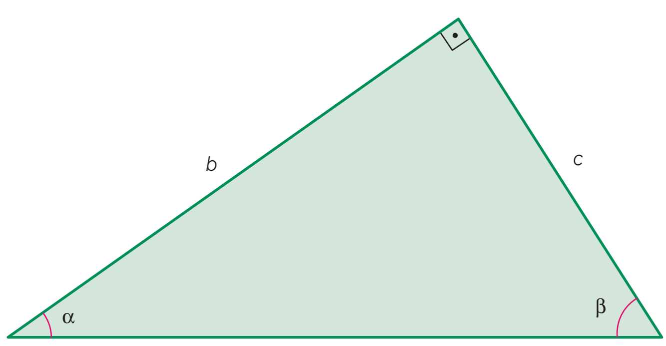
No tópico anterior, retomamos o estudo de semelhança de triângulos. Vamos considerar agora a semelhança entre triângulos que são retângulos. Você mesmo pode traçar, com o auxílio de régua em uma folha quadriculada, triângulos retângulos semelhantes, utilizando como unidade de comprimento a medida de cada lado da malha quadriculada, como representado a seguir. Lembre-se de que, em um triângulo retângulo, os dois lados que formam o ângulo reto são chamados de catetos e o lado oposto ao ângulo reto é a hipotenusa.


Aline Rivolta

Para pensar e discutir

1. Ao comparar esses triângulos retângulos dois a dois, o que permanece inalterado? 1. A forma.
2. O que muda nessa comparação de um triângulo para o outro? 2. As medidas dos lados, proporcionalmente.
3. Quais são as medidas dos lados desses triângulos usando o lado do quadradinho como unidade de comprimento? Explique como obteve as medidas da hipotenusa. 3. Menor: 3 u.c., 4 u.c e 5 u.c.; médio: 6 u.c., 8 u.c. e 10 u.c.; maior: 12 u.c., 16 u.c. e 20 u.c.; resposta pessoal.

Em um triângulo retângulo, como representado a seguir, dois ângulos internos são agudos e complementares, isto é, a soma de suas medidas é 90°. Nesse triângulo, temos:

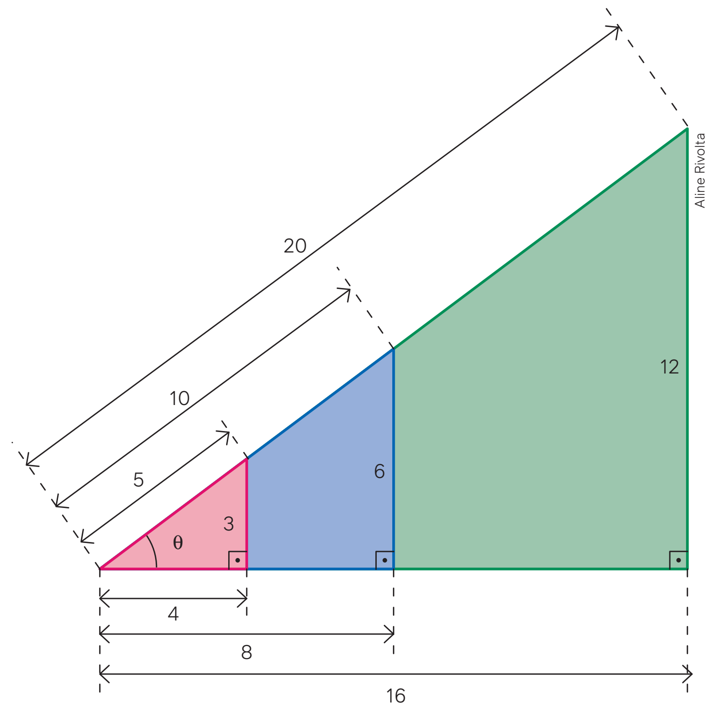


Aline Rivolta

- medida dos catetos: *b* e *c*;
- medida da hipotenusa: *a*;
- medida dos ângulos agudos: α e β;
- relação: $\alpha + \beta = 90°$.

Vamos considerar agora os triângulos do início da página, porém, sobrepostos, como indica a figura na página a seguir. Destacamos nela um dos ângulos agudos desses triângulos semelhantes e as medidas dos lados, tendo como unidade de comprimento a medida do lado da malha quadriculada.

Como os triângulos são semelhantes, os lados correspondentes têm medidas proporcionais. Vamos observar o que acontece quando calculamos em cada triângulo as razões entre seus lados tendo como referência o ângulo agudo θ indicado:



- Cálculo da razão entre as medidas do **cateto oposto** e do **cateto adjacente** ao ângulo θ.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Triângulo menor: } \dfrac{3}{4} = 0{,}75 \\ \text{Triângulo médio: } \dfrac{6}{8} = 0{,}75 \\ \text{Triângulo maior: } \dfrac{12}{16} = 0{,}75 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Razão constante para o mesmo ângulo.}$$

- Cálculo da razão entre as medidas do **cateto oposto** ao ângulo θ e da **hipotenusa**.

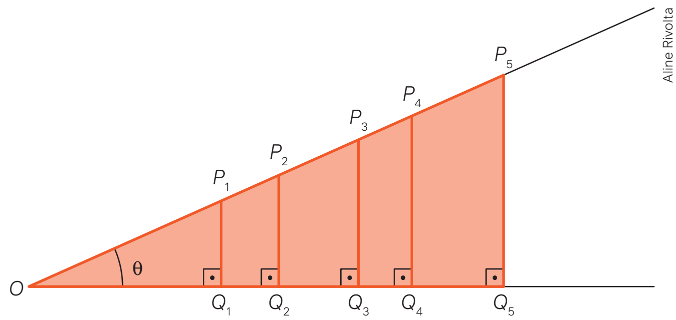
$$\left.\begin{array}{l} \text{Triângulo menor: } \dfrac{3}{5} = 0{,}6 \\ \text{Triângulo médio: } \dfrac{6}{10} = 0{,}6 \\ \text{Triângulo maior: } \dfrac{12}{20} = 0{,}6 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Razão constante para o mesmo ângulo.}$$

- Cálculo da razão entre as medidas do **cateto adjacente** ao ângulo θ e da **hipotenusa**.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Triângulo menor: } \dfrac{4}{5} = 0{,}8 \\ \text{Triângulo médio: } \dfrac{8}{10} = 0{,}8 \\ \text{Triângulo maior: } \dfrac{16}{20} = 0{,}8 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Razão constante para o mesmo ângulo.}$$

Essas razões constantes ocorrem para o mesmo ângulo agudo em um triângulo retângulo. São denominadas, respectivamente, de **tangente**, **seno** e **cosseno** de um ângulo agudo em um triângulo retângulo. Sendo θ esse ângulo agudo, representaremos essas razões por **tg** $\boldsymbol{\theta}$, **sen** $\boldsymbol{\theta}$ e **cos** $\boldsymbol{\theta}$, respectivamente. Observe, na figura da página a seguir, que, a partir de um ângulo θ qualquer, podemos construir quantos triângulos retângulos semelhantes quisermos.

Em todos esses triângulos, teremos as razões constantes para o mesmo ângulo:



Razão tangente: $\frac{P_1Q_1}{OQ_1} = \frac{P_2Q_2}{OQ_2} = \frac{P_3Q_3}{OQ_3} = \frac{P_4Q_4}{OQ_4} = \frac{P_5Q_5}{OQ_5} = \ldots = \textbf{tg}\ \boldsymbol{\theta}$

Razão seno: $\frac{P_1Q_1}{OP_1} = \frac{P_2Q_2}{OP_2} = \frac{P_3Q_3}{OP_3} = \frac{P_4Q_4}{OP_4} = \frac{P_5Q_5}{OP_5} = \ldots = \textbf{sen}\ \boldsymbol{\theta}$

Razão cosseno: $\frac{OQ_1}{OP_1} = \frac{OQ_2}{OP_2} = \frac{OQ_3}{OP_3} = \frac{OQ_4}{OP_4} = \frac{OQ_5}{OP_5} = \ldots = \textbf{cos}\ \boldsymbol{\theta}$

Para um ângulo agudo de medida **θ** em um triângulo retângulo, temos:

$$\textbf{tg}\ \boldsymbol{\theta} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo}}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo}}$$

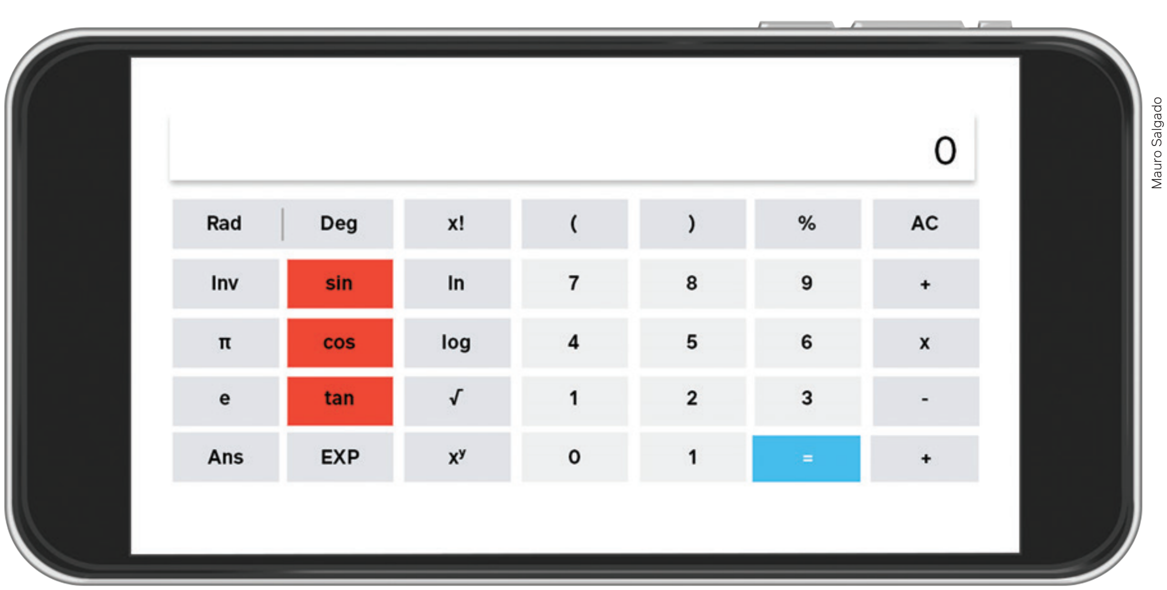
$$\textbf{sen}\ \boldsymbol{\theta} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\textbf{cos}\ \boldsymbol{\theta} = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Em uma calculadora científica, os valores dessas razões trigonométricas podem ser obtidos de forma imediata, bastando saber a medida do ângulo agudo para o qual queremos determinar essas razões. Veja na imagem a ilustração de uma calculadora de celular.

Você também poderá obter uma boa aproximação por meio de construções em triângulos retângulos utilizando instrumentos de medidas de ângulos (transferidor) e de comprimento (régua).

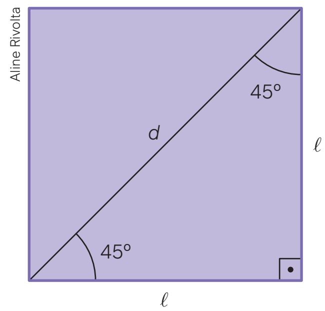
Nesse caso, quanto mais precisas forem tais medidas, mais próximas dos valores obtidos na calculadora serão as razões trigonométricas.

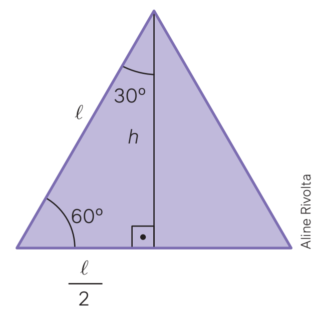


Modelo de calculadora científica em um celular.

Na Geometria Plana, para os ângulos de medidas 30°, 45° e 60°, as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente podem ser obtidas considerando relações entre medidas dos lados, das diagonais (quadrado) e da altura (triângulo). Nesse caso, utilizamos o quadrado e o triângulo equilátero. A diagonal do quadrado o divide em dois triângulos retângulos isósceles congruentes de ângulos agudos iguais a 45°. Já no triângulo equilátero, a altura relativa a um dos lados possibilita obter dois triângulos retângulos congruentes de ângulos agudos que medem 30° e 60°.

Mapa clicável
Triângulos na história





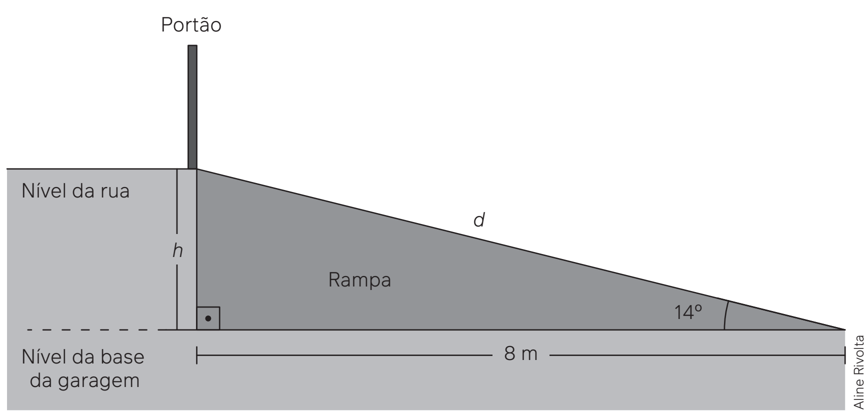
Para pensar e discutir

1. Qual relação expressa a medida d da diagonal em função da medida ℓ do lado do quadrado? Explique como a obteve. 1. $d = \ell\sqrt{2}$; resposta pessoal.
2. Qual relação expressa a medida h da altura em função da medida ℓ do lado do triângulo equilátero? Explique como obteve sua resposta. 2. $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$; resposta pessoal.
3. Quais são as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente para os ângulos agudos 30°, 45° e 60°? Organize uma tabela desses valores no caderno. 3. Resposta no Manual do Professor.

Você pode utilizar as razões trigonométricas para determinar medidas desconhecidas em triângulos retângulos. Assim, por exemplo, se conhecermos apenas um dos lados de um triângulo retângulo e a medida de um dos ângulos agudos, as medidas dos outros dois lados podem ser determinadas. Observe e discuta com os colegas as atividades resolvidas a seguir.

Atividades resolvidas

6. No desenho está representada uma rampa de acesso a uma garagem de um supermercado. Vamos determinar a medida da altura dessa rampa e seu comprimento com base na medida da inclinação da rampa (14°) e na medida 8 m, indicadas na figura.



- Utilizando uma calculadora, temos, com aproximação de duas casas decimais, as seguintes razões trigonométricas para o ângulo 14°:

$$\text{sen } 14° \cong 0{,}24$$
$$\cos 14° \cong 0{,}97$$
$$\text{tg } 14° \cong 0{,}25$$

- Cálculo de *h* (em metros): como conhecemos a medida do cateto adjacente ao ângulo e queremos a medida do cateto oposto, utilizamos a tangente.

$$\text{tg } 14° = \frac{h}{8}$$

$$0{,}25 \cong \frac{h}{8} \Rightarrow h \cong 2$$

- Cálculo de *d* (em metros): Como conhecemos a medida do cateto adjacente ao ângulo e queremos a medida da hipotenusa, utilizamos o cosseno.

$$\cos 14° = \frac{8}{d}$$

$$0{,}97 \cong \frac{8}{d}$$

$$d \cong \frac{8}{0{,}97} \Rightarrow d \cong 8{,}25$$

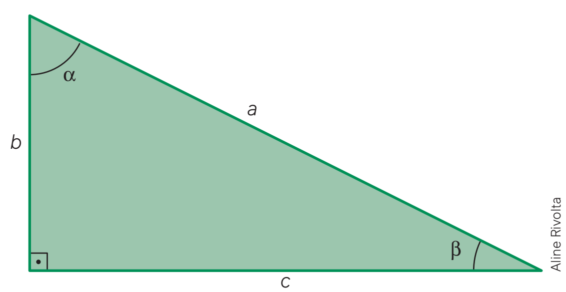
Para pensar e discutir

1. Qual é a importância das rampas utilizadas em lugares públicos, como calçadas? 1. Resposta pessoal.

2. Como você determina, utilizando as razões trigonométricas, o ângulo de inclinação de uma rampa? 2. Resposta pessoal.

7. Os dois ângulos agudos em um triângulo retângulo são complementares, isto é, a soma de suas medidas é igual a 90°. Na figura estão indicadas as medidas α e β de dois ângulos agudos e as medidas dos lados desse triângulo. Prove que vale a seguinte relação:

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$



Vídeo
Rampas de acessibilidade

- Calculando as razões trigonométricas para o ângulo α:

$$\text{sen } \alpha = \frac{c}{a} \qquad \cos \alpha = \frac{b}{a} \qquad \text{tg } \alpha = \frac{c}{b}$$

- Agora, observe o que acontece quando adicionamos os quadrados do seno e do cosseno do ângulo α:

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}$$

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \frac{c^2 + b^2}{a^2}$$

$$\downarrow c^2 + b^2 = a^2 \text{ (T. de Pitágoras)}$$

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow (\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

Para simplificar, essa última relação é escrita como: **sen² α + cos² α = 1**. Ela é chamada de **relação fundamental da Trigonometria**.

Atividades

11. Ainda em relação ao triângulo representado na figura anterior, faça o que se pede: 11. a) sen $\beta = \frac{b}{a}$; cos $\beta = \frac{c}{a}$; tg $\beta = \frac{b}{c}$

a) Obtenha o seno, o cosseno e a tangente do ângulo agudo β em função das medidas indicadas.

b) Comparando o seno e o cosseno de ângulos complementares α e β no triângulo retângulo, qual é a conclusão?
11. b) O seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

c) Qual é a relação entre os valores das tangentes desses dois ângulos?
11. c) Nos ângulos complementares, as tangentes são inversas uma da outra

d) Qual resultado obtemos na soma sen² β + cos² β? Justifique. 11. d) 1; resposta pessoal.

12. Quando as medidas dos lados de um triângulo retângulo são proporcionais aos números 3, 4 e 5, o triângulo é dito pitagórico. Sendo k a constante de proporcionalidade, responda:

a) Quais são os possíveis valores assumidos pelo seno de um ângulo agudo nesse triângulo? 12. a) 0,6 ou 0,8

b) Quais são os valores para o cosseno de um ângulo agudo nesse triângulo? 12. b) 0,6 ou 0,8

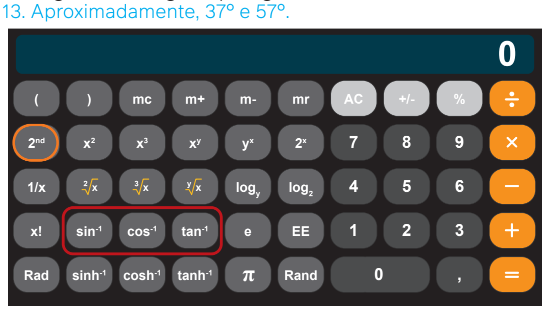
c) E para a tangente de um ângulo agudo nesse triângulo? 12. c) 0,75 ou aproximadamente 1,33

13. Junte-se a um colega para fazer esta atividade. Vocês precisarão de uma calculadora científica, que pode ser a de um *smartphone*, como a mostrada a seguir. Quando, nesse tipo de calculadora, apertamos a tecla "2nd", que está destacada, aparecem três teclas envolvendo seno, cosseno e tangente: elas representam arco seno, arco cosseno e arco tangente. Após a calculadora fornecer o valor do seno – por exemplo, de 0,5 –, quando apertamos a tecla "$\sin^{-1}$", ela fornecerá a medida do ângulo correspondente – no caso, no visor da calculadora aparecerá 30, que significa 30 graus.

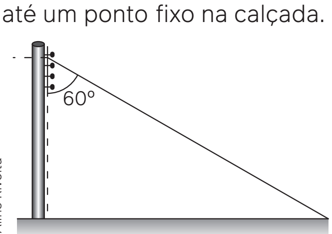
Utilizando esse recurso tecnológico, retorne à atividade anterior para determinar, com base nas informações obtidas para seno, cosseno e tangente, as medidas em graus dos dois ângulos agudos do triângulo retângulo pitagórico.

13. Aproximadamente, 37° e 57°.

Aline Rivolta



14. No desenho a seguir está ilustrado um poste e um cabo de aço bem esticado, que vai da parte superior do poste até um ponto fixo na calçada.

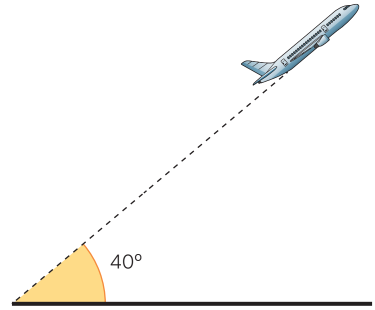


Aline Rivolta

Elabore e resolva um problema que envolva medidas do cabo e da altura do poste de acordo com a figura. Em seguida, troque esse problema com um colega para que ele o resolva. 14. Resposta pessoal.

15. Considere que, ao decolar, um avião segue, durante algum tempo, em uma direção que forma 40° com o chão, como sugere a figura a seguir. Se, durante esse tempo, ele percorre aproximadamente 5 000 m, qual é a altura aproximada em que ele se encontra em relação ao chão? Explique como a obteve.

15. Aproximadamente 3 215 m; resposta pessoal.



Reinaldo Vignati

16. Utilizando uma calculadora científica como recurso auxiliar, responda às questões a seguir sobre as razões trigonométricas de ângulos agudos.

a) Aumentando a medida de um ângulo agudo entre 0° e 90°, o que acontece com os valores das tangentes obtidas? 16. a) Aumentam.

b) E com os valores dos cossenos obtidos? 16. b) Diminuem.

c) E com os valores dos senos obtidos? 16. c) Aumentam.

d) Para um ângulo agudo muito próximo de 90°, o que você conclui em relação aos valores correspondentes para a tangente, o cosseno e o seno? 16. d) Resposta pessoal.

e) Para um ângulo agudo muito próximo de 0°, o que você conclui em relação aos valores correspondentes para a tangente, o cosseno e o seno? 16. e) Resposta pessoal.

17. (IFCE) Em um triângulo isósceles, os lados de mesma medida formam um ângulo de 40° e medem 7 cm cada. Se denotarmos por w a medida, em cm, do terceiro lado do triângulo, é verdade que:

a) $\text{sen } 20° = \frac{w}{7}$.

b) $\text{sen } 40° = \frac{w}{7}$.

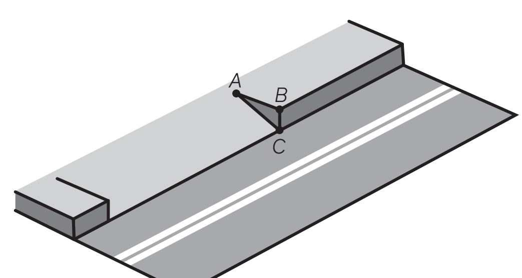
c) $\text{sen } 20° = \frac{w}{14}$.

d) $\text{sen } 40° = \frac{2w}{7}$.

e) $\text{sen } 20° = \frac{2w}{7}$.

17. Alternativa **c**.

18. (Unifesp) De acordo com a norma brasileira de regulamentação de acessibilidade, o rebaixamento de calçadas para travessia de pedestres deve ter inclinação constante e não superior a 8,33% (1 : 12) em relação à horizontal. Observe o seguinte projeto de rebaixamento de uma calçada cuja guia tem altura $BC = 10$ cm.



Reinaldo Vignati

a) Calcule a medida de $\overline{AB}$ na situação limite da regulamentação. 18. a) $AB = 120$ cm

b) Calcule o comprimento de $\overline{AC}$ na situação em que a inclinação da rampa é de 5%. Deixe a resposta final com raiz quadrada. 18. b) $10\sqrt{401}$ cm

Análise e contexto

Distâncias inacessíveis e trigonometria

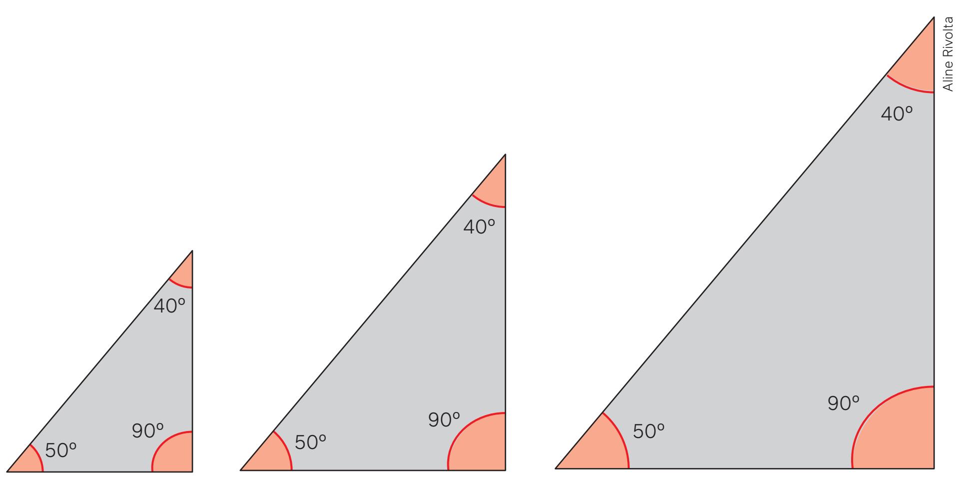
No texto a seguir, você poderá observar a relação da trigonometria com o cálculo de distâncias inacessíveis e sua ligação com a Astronomia. Junte-se a um colega para essa leitura.

Razões trigonométricas

Ao contrário do que se poderia imaginar, nem sempre é tão fácil assim entender os triângulos, e no fim da Antiguidade ainda resta esclarecer muitos pontos. Para conhecer bem um triângulo, precisamos basicamente de seis informações: o comprimento dos três lados e as medidas dos três ângulos.

Mas há um detalhe para fazer uso da trigonometria em campo, muitas vezes é bem mais fácil medir o ângulo entre duas direções do que a distância entre dois pontos. E o exemplo mais claro disso é a astronomia. Medir a distância entre as estrelas observadas no céu noturno é uma questão muito difícil, e vários séculos ainda serão necessários para encontrar uma resposta. Em compensação, medir o ângulo formado por essas estrelas uma com as outras ou acima do horizonte é bem mais fácil. Basta um simples oitante, antepassado do sextante. Da mesma forma, um geógrafo que precise traçar o mapa de um território poderá facilmente medir os ângulos de um triângulo formado por três montanhas. Para tanto, precisa apenas de uma alidade, que nada mais é que um transferidor dotado de um sistema de mira. E para orientar o mapa no espaço, uma simples bússola permite-lhe medir o ângulo entre o norte e determinada direção. Medir a distância entre as três montanhas, em compensação, exige a organização de uma expedição bem mais pesada e cálculos nitidamente mais complexos. Alexandre e seus bematistas não nos deixam mentir!

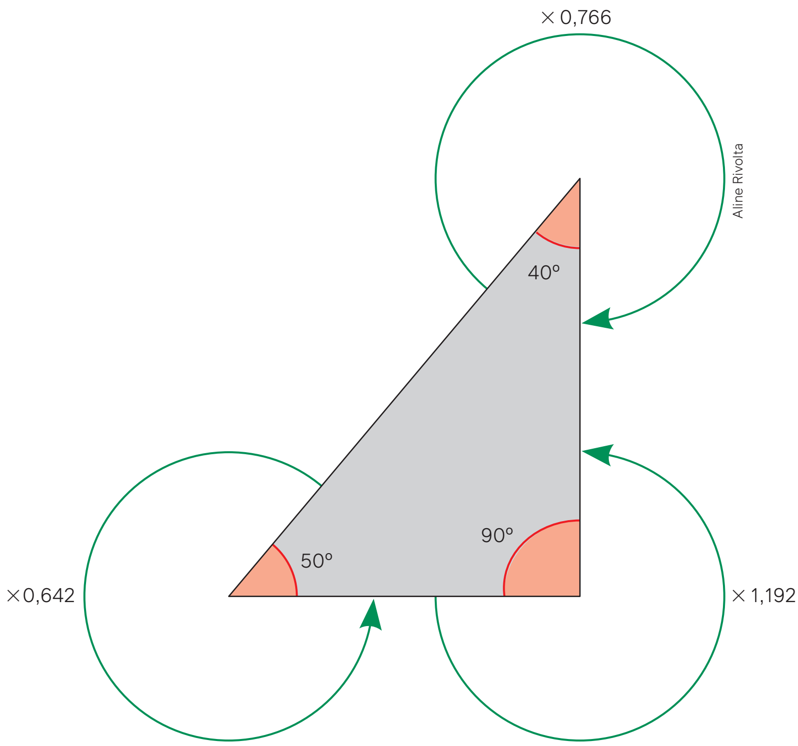
O objetivo então é o seguinte: como ter acesso a todas as informações de um triângulo medindo a menor quantidade possível de distâncias? Ao fazer essa pergunta, os trigonômetras enfrentam um problema semelhante ao apresentado pelo círculo de Arquimedes, um milênio antes. Para começar, conhecendo todos os ângulos de um triângulo, porém nenhum de seus lados, é possível deduzir sua forma, mas não seu tamanho. A prova disso é que os triângulos abaixo têm todos os mesmos ângulos, mas as medidas de seus lados são diferentes.



Todos eles, no entanto, têm as mesmas proporções. Se nos perguntarmos, por exemplo, por qual número será necessário multiplicar o comprimento do lado maior para obter o menor, encontraremos o mesmo resultado nos três triângulos: 0,64! Mais ou menos da mesma forma como o perímetro de um círculo sempre é obtido multiplicando-se seu diâmetro por π, qualquer que seja o tamanho.

Enfim ... quase 0,64. Esse número é apenas aproximado. Como no caso do π, essa proporção não pode ser calculada com precisão, e teremos que nos contentar com valores aproximados. Um pouco mais de precisão nos daria 0,64278, mas ainda não é perfeito. A escrita decimal desse número tem uma infinidade de algarismos depois da vírgula. O mesmo ocorre nas outras razões que podem ser calculadas nesses triângulos. Assim, passamos do lado maior ao médio multiplicando por cerca de 0,766, e do menor ao médio multiplicando por cerca de 1,192.

Como é impossível atribuir valores exatos a essas três razões, os matemáticos lhes deram nomes, para melhor ajudá-las. Diferentes palavras foram usadas em diferentes lugares e épocas, mas hoje empregamos respectivamente os nomes de “cosseno”, “seno” e “tangente”. Numerosas variantes também foram inventadas e exploradas, para em seguida cair no esquecimento. Um exemplo é o “seked”, usado pelos egípcios para avaliar a inclinação de suas pirâmides. Outro é a corda introduzida pelos gregos, e que corresponde a uma razão num triângulo isósceles.



Mas as razões trigonométricas apresentariam um novo problema. Seus valores variam de um triângulo a outro. Assim, as razões 0,642, 0,766 e 1,192 só são válidas nos triângulos com ângulos de 40°, 50° e 90°. Em compensação, se tivermos um triângulo retângulo com ângulos de 20°, 70° e 90°, o cosseno, o seno e a tangente serão de aproximadamente 0,342, 0,940 e 2,747! Em suma, a missão dos matemáticos em trigonometria é muito mais ampla do que se supunha. Não se trata apenas de encontrar um número, nem mesmo três, mas de tabelas inteiras de números que variam em função de todos os ângulos possíveis que terão de ser calculados!

[...]

Em suma, calcular tabelas trigonométricas cada vez mais precisas é uma tarefa sem fim, à qual se dedicaram gerações seguidas de matemáticos. Só com o advento das calculadoras eletrônicas no século XX, eles se livraram desse fardo.

[...]

Os cientistas do mundo árabe desempenhariam um papel primordial, não só por sua contribuição à escrita de tabelas mais precisas mas também, e sobretudo pelo uso que delas fariam. Eles levariam ao auge a arte de jogar com esses dados e utilizá-los da maneira mais eficaz possível.

LAUNAY, M. *A fascinante história da Matemática*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019. p. 112-117.

1. No texto, há uma referência que utiliza como exemplos três triângulos de ângulos internos 40°, 50° e 90°. Esses triângulos são semelhantes entre si, comparando dois a dois? Justifique. 1. Sim; resposta pessoal.

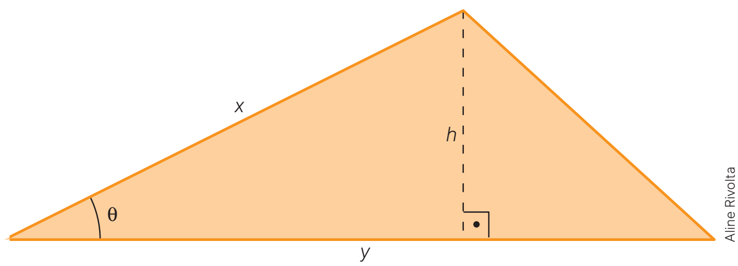
2. Conhecendo-se as medidas dos três ângulos de um triângulo, esse triângulo fica “bem determinado”? Justifique.
2. Não; resposta pessoal.

3. O que representam, no texto, os valores 0,642, 0,766 e 1,192?
3. Valores aproximados para sen 40° (ou cos 50°); cos 40° (ou sen 50°) e tg 40°.

Resolução de problemas

Utilizando as razões trigonométricas para os ângulos agudos de um triângulo retângulo, podemos resolver problemas diversos que envolvam distâncias, como já mostramos anteriormente. Antes, porém, vamos retomar uma relação matemática para o cálculo da área de um triângulo conhecendo as medidas de dois lados de um triângulo e a medida do ângulo entre eles.

Assim, considerando que x e y representam as medidas de dois lados de um triângulo qualquer e θ representa a medida do ângulo entre eles, traçamos a altura de medida h relativamente ao lado de medida y, conforme a figura.



$$\text{sen}\ \theta = \frac{h}{x} \Rightarrow x \cdot \text{sen}\ \theta = h$$

Como a área de um triângulo pode ser determinada pela metade do produto das medidas da base e da altura, temos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot y \cdot h$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot y \cdot x \cdot \text{sen}\ \theta \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \text{sen}\ \theta$$

Para pensar e discutir

1. Dois lados de um triângulo medem 10 cm e 12 cm, e a medida do ângulo entre eles é igual a 20°. Qual é a área desse triângulo? 1. Aproximadamente 20,5 cm^2.

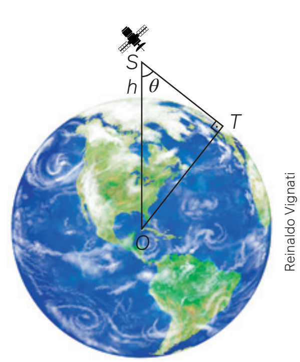
2. Se o ângulo entre os dois lados duplicar, a área irá duplicar também? Justifique. 2. Não; resposta pessoal.

Em topografia, a fórmula acima é muito útil para calcular áreas, principalmente das superfícies que podem ser subdivididas em triângulos. Para cada triângulo, basta saber as medidas de dois de seus lados e do ângulo entre eles.

Em posse de uma calculadora, as razões trigonométricas no triângulo retângulo possibilitam, entre outras coisas, o cálculo de distâncias inacessíveis para as medidas, como mostraremos a seguir. Como primeiro exemplo, vamos retomar o cálculo do raio da Terra.

Atividades resolvidas

8. Na ilustração, o satélite está no ponto S a uma altura h da superfície da Terra. Nessa representação, θ é o ângulo entre a perpendicular à Terra e a linha do horizonte. Queremos a medida do raio r da Terra.



- Como o triângulo *SOT* é retângulo em *T* (a tangente a uma circunferência ou esfera, no ponto de tangência, forma ângulo reto), temos que:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{OT}{OS} \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{r}{r+h}$$

$$r \cdot \text{sen}\,\theta + h \cdot \text{sen}\,\theta = r$$

$$h \cdot \text{sen}\,\theta = r - r \cdot \text{sen}\,\theta$$

$$h \cdot \text{sen}\,\theta = r \cdot (1 - \text{sen}\,\theta)$$

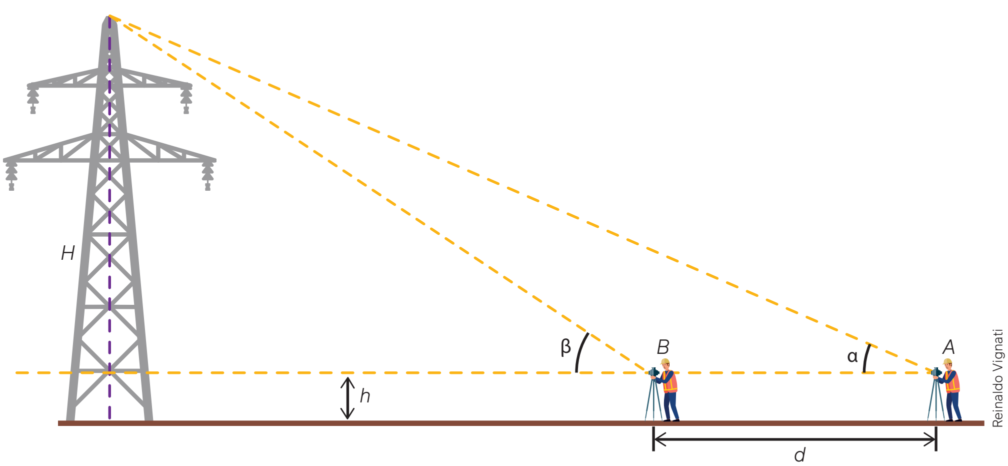
$$\frac{h \cdot \text{sen}\,\theta}{1 - \text{sen}\,\theta} = r \Rightarrow r = \frac{h \cdot \text{sen}\,\theta}{1 - \text{sen}\,\theta}$$

Assim, conhecendo a medida do ângulo θ e a altura *h* do satélite, podemos determinar o raio da Terra.

Já mencionamos o caso das rampas construídas para o acesso de carros ou pessoas. Nessas construções, o cálculo com as razões trigonométricas é fundamental. Podemos também calcular a altura de uma montanha, a altura de um prédio ou a largura de um rio utilizando triângulos retângulos.

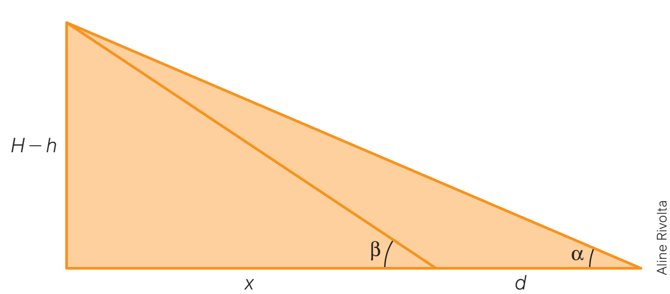
9. Cálculo da altura de uma torre de transmissão

No desenho a seguir, estão representadas uma torre de transmissão e um topógrafo com o teodolito para medir os ângulos. Considere que, inicialmente, o teodolito de altura *h* está no ponto *A* e mede o ângulo indicado α. Após deslocar o teodolito pela distância *d*, está no ponto *B* e mede o ângulo indicado β.



Qual a medida da altura *H* em função das medidas indicadas na figura?

- Com base na situação apresentada, esboçamos os seguintes triângulos retângulos relacionando as medidas indicadas:



- Utilizando a tangente do ângulo agudo nos dois triângulos, temos:

Triângulo maior

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{H-h}{d+x} \Rightarrow d \cdot \text{tg}\,\alpha + x \cdot \text{tg}\,\alpha = H - d \qquad \text{(I)}$$

Triângulo menor

$$\text{tg}\,\beta = \frac{H-h}{x}$$

$$x \cdot \text{tg}\,\beta = H - h \Rightarrow x = \frac{H-h}{\text{tg}\,\beta} \qquad \text{(II)}$$

- Substituindo (II) em (I) e isolando H:

$$d \cdot \text{tg}\,\alpha + \frac{(H-h)}{\text{tg}\,\beta} \cdot \text{tg}\,\alpha = H - h$$

$$d \cdot \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta + (H-h) \cdot \text{tg}\,\alpha = (H-h) \cdot \text{tg}\,\beta$$

$$d \cdot \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta = (H-h) \cdot \text{tg}\,\beta - (H-h) \cdot \text{tg}\,\alpha$$

$$d \cdot \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta = (H-h) \cdot (\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha)$$

$$\frac{d \cdot \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha} = H - h$$

$$h + \frac{d \cdot \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha} = H \rightarrow \text{altura procurada}$$

Para pensar e discutir

1. O que representa na situação descrita na página anterior a medida h?
1. Altura do teodolito em relação ao solo.

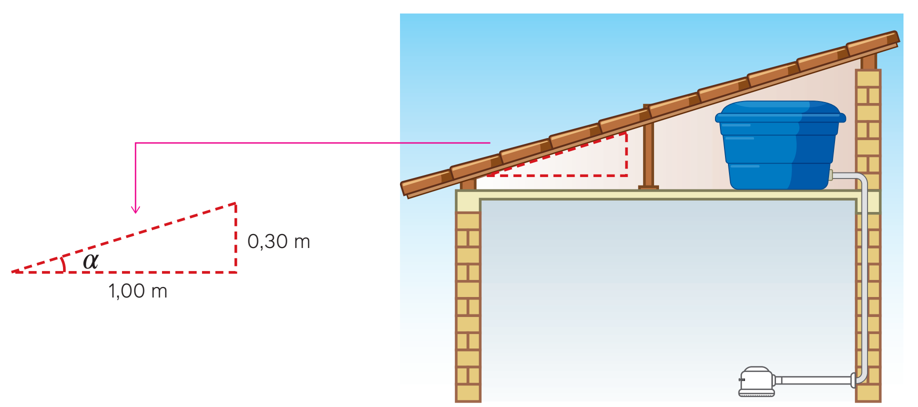
2. Se essa medida for desprezada, qual será a relação que possibilita obter a altura da torre?
2. Basta fazer $h = 0$.

3. Em que situação a medida h é desnecessária?
3. Resposta pessoal.

Observe que a relação matemática obtida no exemplo anterior "modela" esse tipo de situação. Temos a solução de um problema que topógrafos enfrentam, embora, atualmente, existam outros procedimentos que utilizam equipamentos sofisticados. Apenas para comentar, bastaria, com bastante cuidado, pois se está próximo de uma torre de transmissão, utilizar um *drone* para determinar a altura da torre.

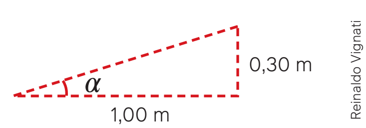
10. A inclinação de um telhado

Quando da construção de uma casa é comum se falar em "caimento" do telhado. Os profissionais que trabalham em obras utilizam porcentagem ao se referirem ao "caimento". Assim, por exemplo, dizer que o "caimento" do telhado será 30% significa que, a cada 1 m na horizontal, o telhado deve subir 0,30 m na vertical. Observe o esquema abaixo:



Utilizando uma calculadora, obtenha a medida do ângulo de inclinação do telhado representado na ilustração.

- Retomando o triângulo retângulo da figura anterior, indicando o ângulo de inclinação por α, calculamos a tangente desse ângulo:



$$\text{tg}\,\alpha = \frac{0{,}30}{1{,}00}$$

$$\text{tg}\,\alpha = 0{,}30$$

- Com o auxílio de uma calculadora científica (utilizaremos de um computador), determinamos a medida do ângulo, conforme algoritmo a seguir:

Digitamos:	**0,30**
Selecionamos:	**Trigonometria**
Apertamos a tecla:	**2^{nd}**
Apertamos a tecla:	**$\tan^{-1}$**

No visor da calculadora, aparecerá o valor aproximado de 16,7, isto é, 16,7°.

Para explorar

Cálculo da largura de um rio

Considere que uma ponte será construída em determinado ponto de um rio. Na ilustração abaixo, a extensão da ponte é indicada pela linha tracejada que vai do ponto *A* ao ponto *B*. Você está ao lado do topógrafo e seu teodolito, na margem que contém o ponto *A*. Na outra margem, está situada uma estaca exatamente no ponto *B*, que é visível da margem oposta.

Vista do Rio Paraná, em Foz do Iguaçu (PR), com baixo nível de água devido ao período de seca em fevereiro de 2016.

Junte-se a três colegas para fazer esta atividade.

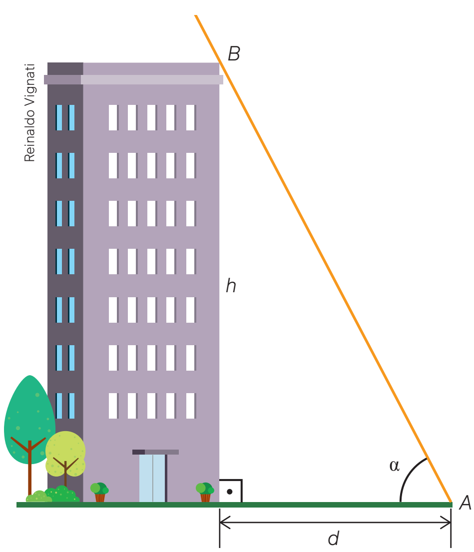
1. Elaborem um procedimento que possibilite calcular o comprimento da ponte (indicado pelo segmento *AB*) com as seguintes condições: 1. Resposta pessoal.

- vocês estão na margem que está indicado o ponto *A*;
- não poderão atravessar o rio;
- poderão utilizar trena para obter algum comprimento na margem do rio que estão;
- poderão utilizar o teodolito para medir ângulos;
- poderão utilizar calculadora científica.

2. Apresentem à turma o procedimento elaborado para esse cálculo. 2. Resposta pessoal.

Atividades

19. Na ilustração, o ângulo α indica a inclinação do raio solar em determinada hora do dia e a distância *d* representa o comprimento da sombra desse prédio de altura *h* no mesmo momento.



Resolva, com um colega, os problemas a seguir. Consultem tabelas de razões trigonométricas na internet ou utilizem uma calculadora científica.

a) Se o comprimento da sombra for um terço da altura do prédio, qual será a medida aproximada do ângulo $\boldsymbol{\alpha}$? 19. a) Aproximadamente 72°.

b) Se o ângulo for igual a 80° e a distância *d* for de 4 metros, qual será a altura do prédio? 19. b) Aproximadamente 22,7 m.

c) Determinem a distância do ponto *A* ao ponto *B* em função de *h* e de α. 19. c) $AB = \frac{h}{\text{sen } \alpha}$

d) Determinem a distância do ponto *A* ao ponto *B* em função de *d* e de α. 19. d) $AB = \frac{d}{\cos \alpha}$

20. Em relação à **atividade resolvida 10** a respeito da inclinação do telhado, faça o que se pede.

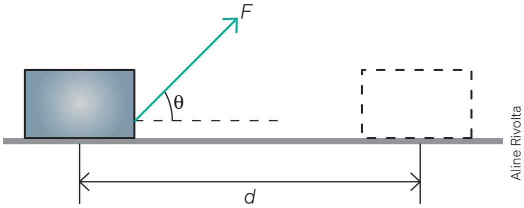
a) Escreva o algoritmo para a determinação do ângulo α cujo valor de tg $\alpha = 0{,}30$, mas utilizando a calculadora científica de um aplicativo de aparelho de *smartphone*. 20. a) Resposta pessoal.

b) O que significa um telhado com inclinação de 100%? 20. b) Um telhado com inclinação 45°.

21. Na disciplina de Física, o trabalho T realizado por uma força constante F é dado por:

$$T = F \cdot d \cdot \cos \theta$$

Onde F corresponde ao módulo da força que age sobre o corpo, d corresponde ao módulo do deslocamento efetivado por ele e θ corresponde ao ângulo entre eles.
Analise a situação da figura abaixo e responda:



a) Para $\theta = 45°$, qual é a relação matemática para T em função de F e d? 21. a) $F \cdot d \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}71 \cdot F \cdot d$

b) Para $\theta = 60°$, qual é a relação matemática para T em função de F e d? 21. b) $F \cdot d \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5 \cdot F \cdot d$

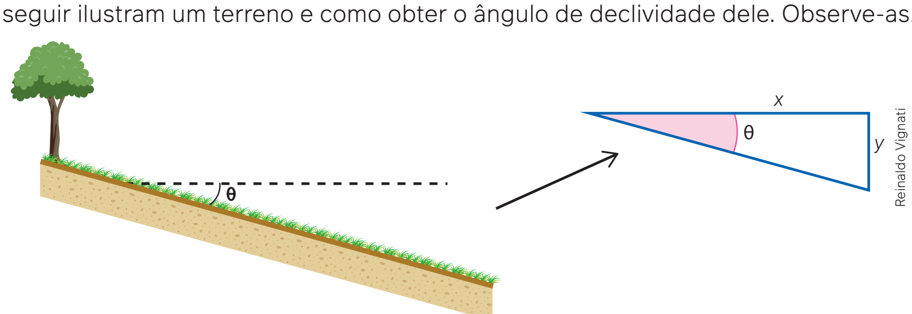
c) Para qual valor de θ vale a relação $T = F \cdot d$? 21. c) $\theta = 0°$

22. Junte-se a mais um colega para fazer esta atividade. Observe atentamente a fotografia da rampa do Palácio do Planalto, em Brasília (DF).

Palácio do Planalto, Brasília (DF), maio de 2017.

Nessa fotografia, aparece um homem em pé bem ao lado da rampa (encostado nela). Considerando que a altura desse homem seja de aproximadamente 1,75 m, é possível ter uma ideia da inclinação dessa rampa em relação à horizontal. Explique como obter a inclinação dessa rampa. 22. 14°; resposta pessoal

23. As figuras a seguir ilustram um terreno e como obter o ângulo de declividade dele. Observe-as.



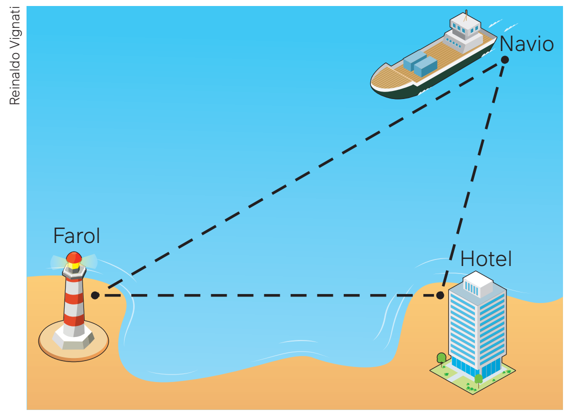
Elabore uma explicação de como você pode determinar a medida do ângulo que indica a declividade de um terreno. 23. Resposta pessoal.

24. (Cotil-SP) O prefeito de uma cidade turística pretende construir um teleférico unindo o parque cultural ao topo de uma montanha de 200 m de altura, como mostra a figura abaixo. Considerando que a plataforma de embarque do teleférico deve estar a uma altura de 5 m do chão e que o pico da montanha possa ser observado sob um ângulo de 30°, determine a distância percorrida pelo teleférico do ponto de embarque ao topo da montanha.
24. Alternativa **c**.

a) 350 m **b)** 370 m **c)** 390 m **d)** 410 m

Trigonometria em um triângulo qualquer

Existem situações relacionadas ao cálculo de distâncias inacessíveis em triângulos que não são retângulos. Para esses casos, é possível considerarmos a altura relativa a um dos lados com o objetivo de obtermos ângulo reto e, então, empregarmos as razões trigonométricas seno e cosseno. Como resultado desse procedimento, duas relações importantes são obtidas: a lei dos senos e a lei dos cossenos.



O esquema está representado com cores-fantasia e as dimensões das estruturas não seguem a proporção real.

Na ilustração, estão indicados um navio parado no oceano, um farol e um hotel, ambos situados no continente. Em linha reta, a distância entre o farol e o hotel é de aproximadamente 5 km. Alguém situado no farol mede o ângulo navio-farol-hotel, correspondente a 32°. Já outra pessoa situada no hotel mede o ângulo navio-hotel-farol, correspondente a 103°. Qual é a distância entre o navio e o farol? E entre o hotel e o navio?

Para pensar e discutir

1. Se, na ilustração acima, as distâncias forem proporcionais às distâncias reais, como você poderá calcular as distâncias solicitadas? Explique pensando em escala ou em proporção. 1. Resposta pessoal.
2. Sem conhecer a escala da ilustração, mas sabendo a distância entre o farol e o hotel e também as medidas dos ângulos, conforme fornecidas, como você calcularia as distâncias? 2. Resposta pessoal.

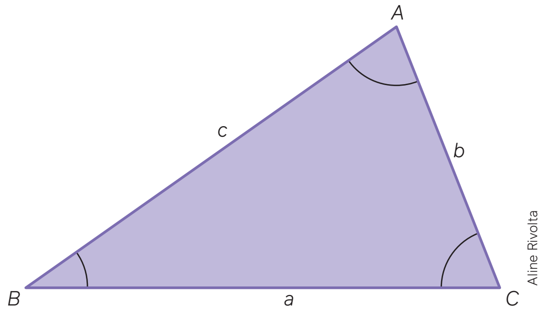
O triângulo com vértices nos pontos correspondentes ao navio, ao farol e ao hotel não é retângulo; entretanto, é bem provável que você tenha, na discussão sugerida, pensado em obter um triângulo retângulo desenhando a altura relativa a um dos lados. O caminho está correto.

Sugerimos que você retorne a essa situação após o desenvolvimento da lei dos cossenos e da lei dos senos. Quando fizer isso, poderá apresentar outras maneiras de resolvê-la.

O procedimento de traçar a altura relativa a um dos lados possibilita obter dois resultados que auxiliam no cálculo de distâncias inacessíveis, conforme veremos a seguir.

Lei dos cossenos

Na ilustração está representado um triângulo qualquer. Quando falarmos em triângulo qualquer, apenas para reforçar, podemos também estar diante de um triângulo retângulo.



Para simplificar um pouco as indicações dos lados e dos ângulos, vamos assumir que os vértices A, B e C também indicam as medidas dos correspondentes ângulos internos do triângulo. Outro detalhe: ao ângulo de medida A está oposto o lado de medida a, ao ângulo de medida B está oposto o lado de medida b e, analogamente, ao ângulo de medida C está oposto o lado de medida c.

Lei dos cossenos

Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos o dobro do produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

A lei dos cossenos pode ser interpretada simbolicamente por qualquer uma das seguintes relações:

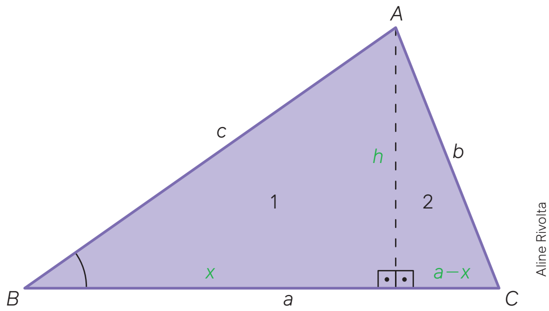
$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A}$$

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B}$$

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C}$$

Essas relações podem ser obtidas, conforme veremos a seguir, por meio de dois triângulos obtidos ao traçarmos a altura relativa a um dos lados.

No desenho, vamos considerar que o segmento correspondente à altura de medida h divide o lado de medida a em dois segmentos, um de medida x e outro de comprimento $a - x$:



- No triângulo retângulo 1, temos as seguintes relações com base na razão cosseno e no Teorema de Pitágoras:

$$\cos B = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos B \qquad \text{(I)}$$

$$c^2 = x^2 + h^2 \qquad \text{(II)}$$

- No triângulo retângulo 2, com base no Teorema de Pitágoras:

$$b^2 = (a - x)^2 + h^2$$

$$b^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2 \qquad \text{(III)}$$

- Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos: $b^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2$

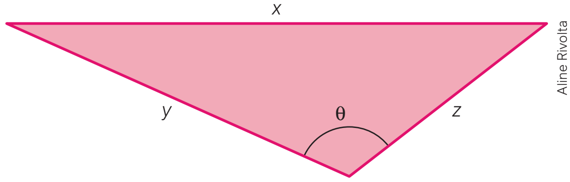
$$b^2 = a^2 - 2a \cdot (c \cdot \cos B) + (c^2)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \longrightarrow \text{Lei dos cossenos para o lado } b$$

Observe que o ângulo B, que consideramos nessa demonstração é um ângulo agudo (medida menor que 90°). E se o ângulo B fosse obtuso, essa relação também seria válida.

Atividades resolvidas

11. Considere o triângulo abaixo, em que as medidas dos três lados estão representadas por x, y e z e a medida do ângulo entre os lados y e z está indicada por θ.



a) Como fica a lei dos cossenos para o cálculo da medida x?

b) Considere que o ângulo θ tenha 90°. Utilizando a lei dos cossenos, qual relação você obtém para a medida x? Utilize, se necessário, uma calculadora.

- Item **a)** Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos \theta$$

- Item **b)** Substituindo a medida do ângulo θ por 90°, temos:

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos 90°$$

$$\downarrow \cos 90° = 0 \text{ (Calculadora)}$$

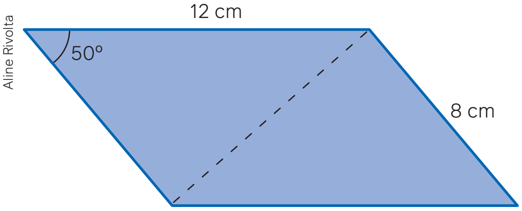
$$x^2 = y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cdot 0$$

$$x^2 = y^2 + z^2$$

> O teorema de Pitágoras pode ser obtido a partir da lei dos cossenos considerando o ângulo reto entre dois de seus lados e observando que cos 90° = 0.

12. No paralelogramo abaixo conhecemos as medidas dos lados e precisamos determinar a medida da diagonal representada. Utilize uma calculadora, se necessário.

Aline Rivolta



- Sendo x a medida da diagonal indicada na figura, temos dois triângulos congruentes em que x é o lado oposto ao ângulo de 50° e os dois lados que formam esse ângulo medem 8 cm e 12 cm. Pela lei dos cossenos:

$$x^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 50°$$

$$x^2 = 64 + 144 - 192 \cdot \cos 50°$$

$$x^2 = 208 - 192 \cdot \cos 50°$$

- Utilizando uma calculadora, obtém-se o valor aproximado para cosseno de 50°:

$$x^2 \cong 208 - 192 \cdot 0{,}643$$

$$x^2 \cong 208 - 123{,}456$$

$$x^2 \cong 84{,}544 \Rightarrow x \cong 9{,}195$$

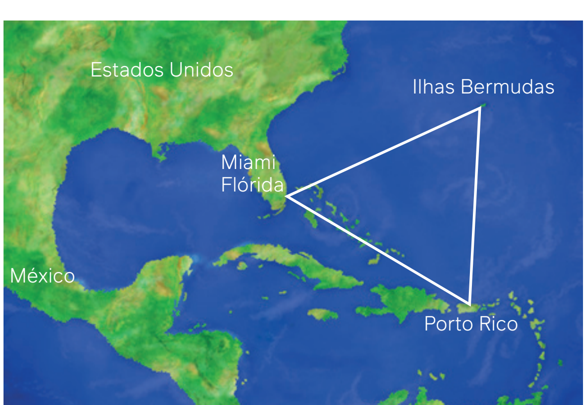
Portanto, a medida da diagonal é aproximadamente 9,195 cm.

Para pensar e discutir

1. Se a medida de um ângulo interno do paralelogramo acima é 50°, qual é a medida dos outros ângulos internos? Justifique. 1. 50°, 130° e 130°; resposta pessoal.
2. Utilizando a lei dos cossenos, explique como obter a medida da outra diagonal. Qual é essa medida? 2. Aproximadamente 18,206 cm.

13. A representação a seguir é do famoso Triângulo das Bermudas, onde se acredita haver algo misterioso associado ao estranho desaparecimento de embarcações e aviões.

Reinaldo Vignati



Representação simplificada em cores-fantasia e dimensões dos elementos sem escala.

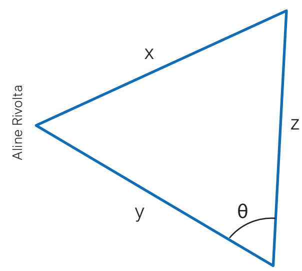
Esquema representativo, elaborado com base em imagem de satélite, do Triângulo das Bermudas no Oceano Atlântico, que engloba Miami, Porto Rico e Ilhas Bermudas, formando uma região triangular.

Utilizando *sites* de pesquisa, obtém-se que as distâncias entre esses locais são:

- de Porto Rico a Miami: 1 631 km;
- de Porto Rico a Ilhas Bermudas: 1 576 km;
- de Miami a Ilhas Bermudas: 1 665 km.

Qual é a medida do ângulo interno do triângulo cujo vértice é Porto Rico?

- Utilizando a lei dos cossenos para determinar o ângulo com o vértice em Porto Rico (indicado por θ no triângulo abaixo):



Para pensar e discutir

1. Utilizando uma calculadora, complete essa resolução indicando a medida aproximada do ângulo θ ao lado. 1. $\theta \cong 62{,}53°$

$x^2 = y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos\theta$

$1\,665^2 = 1\,631^2 + 1\,576^2 - 2 \cdot 1\,631 \cdot 1\,576 \cdot \cos\theta$

$2\,772\,225 = 2\,660\,161 + 2\,483\,776 - 5\,140\,912 \cdot \cos\theta$

$5\,140\,912 \cdot \cos\theta = 2\,371\,712$

$\cos\theta \cong 0{,}4613$

14. Ainda em relação à situação anterior, calcule a área correspondente à região do Triângulo das Bermudas.

- Utilizando as medidas dos dois lados do triângulo que formam o ângulo de medida aproximada de 63°, temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot y \cdot z \cdot \text{sen}\,\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 1\,631 \cdot 1\,576 \cdot \underbrace{\text{sen}\,63°}_{\text{sen}\,63° \,\cong\, 0{,}891}$$

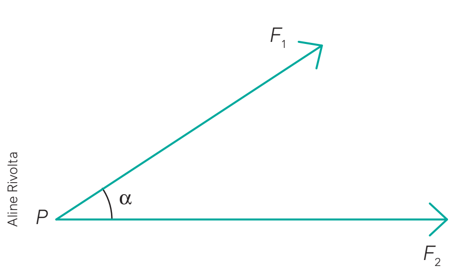
$$A \cong 0{,}5 \cdot 1\,631 \cdot 1\,576 \cdot 0{,}891$$

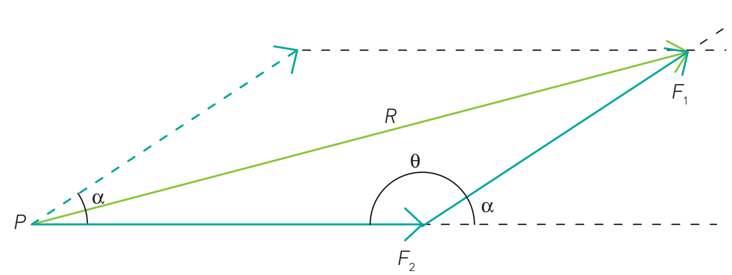
$$A \cong 1\,145\,138$$

Portanto, uma área de aproximadamente 1 145 138 quilômetros quadrados.

15. Regra do paralelogramo

Duas forças de intensidades (módulos) F_1 e F_2, quando aplicadas em um mesmo corpo, podem ser substituídas por uma força apenas de intensidade R, denominada resultante. Na ilustração a seguir, essas forças são representadas por vetores e, considerando que o ângulo entre essas duas forças é α, a direção e o sentido da resultante podem ser obtidos pela chamada regra do paralelogramo, conforme sugere a figura à direita.





Sendo F_1 e F_2 os módulos das duas forças aplicadas em um corpo P, o módulo da resultante pode ser obtido pela relação matemática abaixo:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha$$

Justifique essa relação a partir da lei dos cossenos e considerando que dois ângulos suplementares têm cossenos opostos.

- Observando o triângulo formado pelos módulos de F_1, F_2 e a resultante R, temos, pela lei dos cossenos que:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\theta$$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cos(180° - \alpha)$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot (-\cos\alpha)$$

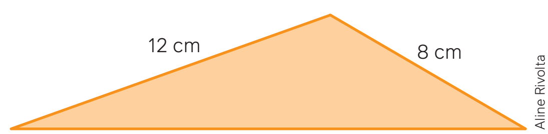
$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha$$

Se A e B são ângulos suplementares, prova-se que eles têm o mesmo valor do seno e valores opostos de cosseno. Em símbolos:

$$A + B = 180° \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } A = \text{sen } B \\ \cos A = -\cos B \end{cases}$$

Atividades

25. O desenho a seguir representa um triângulo em que dois lados medem 12 cm e 8 cm. Esses dois lados formam um ângulo de 120°. Qual é a medida do lado oposto a esse ângulo? 25. Aproximadamente 17,4 cm.



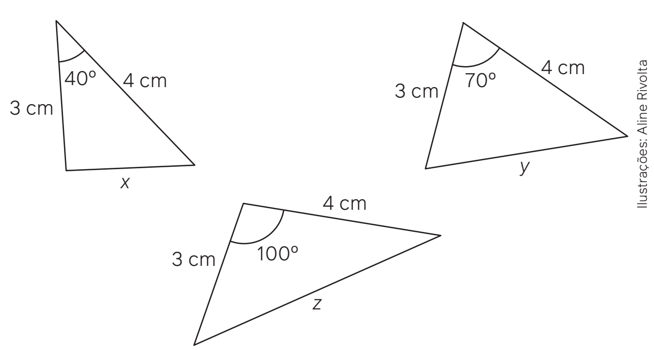
26. Utilizando como referência a regra do paralelogramo para o cálculo da resultante de duas forças aplicadas a um mesmo corpo, considere duas forças de mesma intensidade F aplicadas a um corpo formando um ângulo de 120°.

a) Faça um desenho para representar a situação. 26. a) Resposta no Manual do Professor.

b) Obtenha o módulo da resultante R em função do módulo F das componentes. 26. b) $R = F\sqrt{3}$

27. Elabore uma situação que envolva o cálculo da resultante entre duas forças aplicadas a um mesmo corpo. Você deve indicar as intensidades dessas forças em Newtons e o ângulo entre essas forças. Resolva a situação e apresente-a a um colega para que ele também a resolva. Ao final, confrontem os resultados. 27. Resposta pessoal.

28. Junte-se a um colega para fazer esta atividade. Nos três triângulos apresentados a seguir, dois lados medem 3 cm e 4 cm e os ângulos entre esses dois lados medem 40°, 70° e 100°, respectivamente.

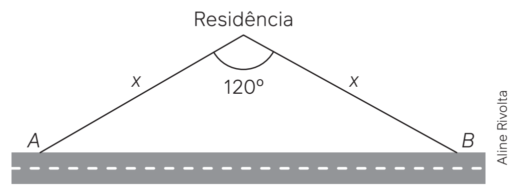


a) Utilizando a lei dos cossenos e uma calculadora, obtenham as medidas aproximadas dos lados indicados por x, y e z. 28. a) $x \cong 2{,}57$ cm; $y \cong 4{,}10$ cm; $z \cong 5{,}40$ cm

b) Se os ângulos aumentam de 30° em 30°, mantendo as medidas dos lados que o formam, as medidas dos lados opostos também aumentam na mesma razão? 28. b) Não.

29. Junte-se a mais um colega para fazer esta atividade. Considerem que um terreno tenha formato triangular com medidas iguais a 60 m, 90 m e 110 m. Utilizando apenas a calculadora científica e a lei dos cossenos, determinem aproximadamente a medida dos três ângulos internos desse triângulo. Expliquem o procedimento utilizado para determinar essas medidas. 29. Aproximadamente 33°, 55° e 92°; resposta pessoal.

30. Duas calçadas de comprimento x, como indica o desenho, serão feitas ligando um ponto de uma residência à rua até os pontos A e B. Sabe-se que a distância entre os pontos A e B é de 250 m. O desenho a seguir representa a situação, indicando a medida 120° do ângulo formado entre as direções das duas calçadas no ponto onde está a residência.



a) Determine o comprimento total das calçadas utilizando razões trigonométricas no triângulo retângulo. Para isso, trace a altura do triângulo em relação ao lado AB. Explique como calculou x. 30. a) Aproximadamente 288,68 m; resposta pessoal.

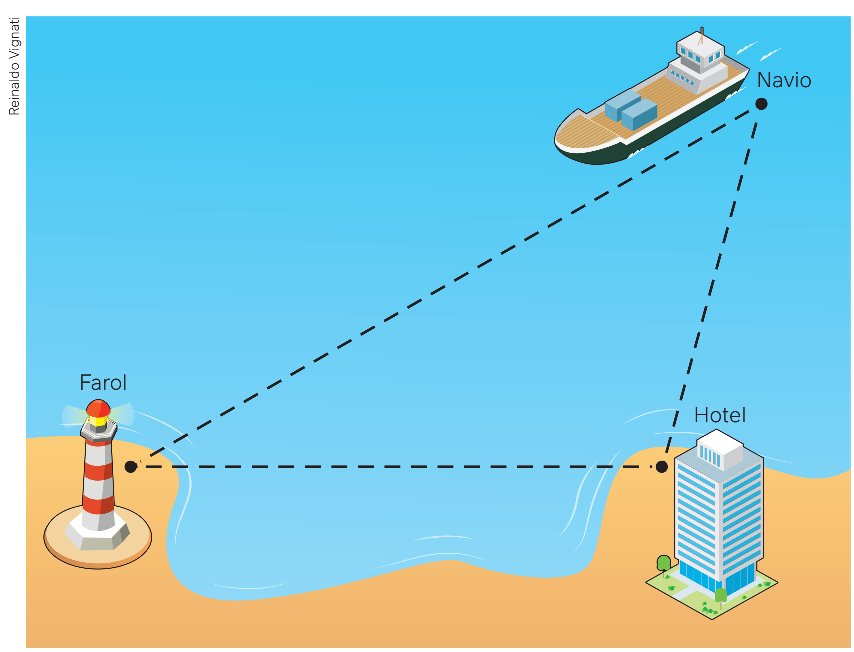
b) Resolva o item **a** utilizando lei dos cossenos. 30. b) Resposta no Manual do Professor.

31. (UFPR) Dois navios deixam um porto ao mesmo tempo. O primeiro viaja a uma velocidade de 16 km/h em um curso de 45° em relação ao norte no sentido horário. O segundo viaja a uma velocidade de 6 km/h em um curso de 105° em relação ao norte, também no sentido horário. Após uma hora de viagem, a que distância se encontrarão separados os navios, supondo que eles tenham mantido o mesmo curso e velocidade desde que deixaram o porto? 31. Alternativa **b.**

a) 10 km **b)** 14 km **c)** 15 km **d)** 17 km **e)** 22 km

Lei dos senos

Vamos retomar o triângulo utilizado na obtenção da lei dos cossenos, conforme ilustração a seguir.



O esquema está representado com cores-fantasia e as dimensões das estruturas não seguem a proporção real.

Utilizamos as mesmas representações das medidas dos ângulos internos e das medidas dos lados que são opostos a esses ângulos. A ideia agora é obtermos outra relação envolvendo esses elementos.

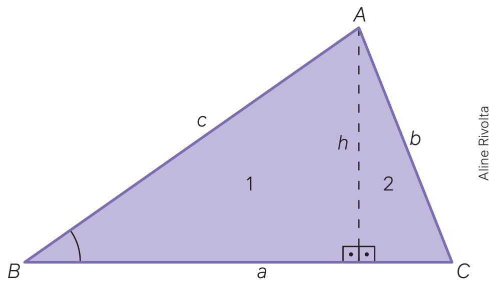
Lei dos senos

Em qualquer triângulo, o quociente entre a medida de cada lado e o valor do seno do ângulo oposto é constante. Essa constante é a medida do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Considerando um triângulo inscrito em uma circunferência de raio r, de lados medindo a, b e c, cujos ângulos opostos são respectivamente A, B e C, a lei dos senos pode ser interpretada simbolicamente por:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2r$$

- A lei dos senos pode ser obtida, conforme veremos a seguir, com base em dois triângulos obtidos ao traçarmos a altura h relativamente a um dos lados, isto é:



Considerando, nos triângulos retângulos 1 e 2, os senos dos ângulos B e C, respectivamente, temos:

$$\text{sen } B = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \text{sen } B \qquad \text{(I)}$$

$$\text{sen } C = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{sen } C \qquad \text{(II)}$$

- Igualando (I) com (II), temos:

$$c \cdot \text{sen } B = b \cdot \text{sen } C$$

$$\frac{c}{\text{sen } C} = \frac{b}{\text{sen } B}$$

- Se traçarmos a altura do triângulo em relação a outro lado do triângulo chegaremos, analogamente, à conclusão de que:

$$\frac{c}{\text{sen } C} = \frac{a}{\text{sen } A} \text{ ou } \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{a}{\text{sen } A}$$

Portanto, teremos: $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$

Note que ainda falta mostrar que essa razão entre as medidas dos lados e dos senos dos ângulos opostos é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita. A relação obtida acima é suficiente para o trabalho com cálculo de distâncias inacessíveis, que não necessita da medida do diâmetro da circunferência circunscrita. Entretanto, vamos brevemente justificar o motivo de essa razão ser o diâmetro da circunferência com base em três resultados geométricos:

Resultado 1

Qualquer triângulo sempre admite uma circunferência que o circunscreve.

Resultado 2

Ângulos inscritos em uma circunferência correspondentes a um mesmo arco são congruentes.

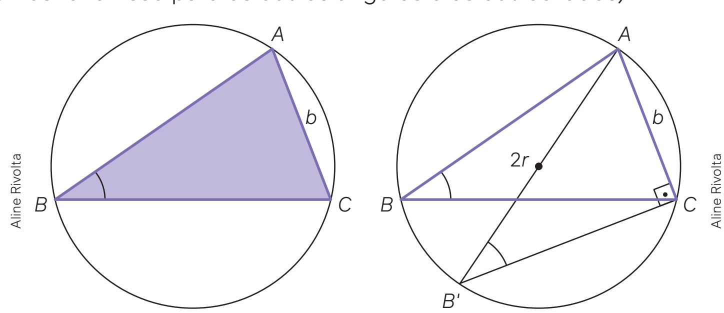
Resultado 3

Se um dos lados de um triângulo inscrito em uma circunferência for o diâmetro dela, então o triângulo será retângulo. O ângulo reto será o oposto a esse lado.

Sugerimos que esses três resultados, abordados no Ensino Fundamental, sejam investigados por meio de construções utilizando recursos de geometria dinâmica. Orientações no Manual do Professor.

Voltando ao triângulo inicial, sabemos que ele admite uma circunferência circunscrita.

Vamos considerar apenas o ângulo no vértice B (ou ângulo inscrito na circunferência) e o lado oposto a ele de medida b (também podemos fazer isso para os outros ângulos e os outros lados).



Como o ângulo relativamente ao vértice B' tem a mesma medida do ângulo interno em B e o triângulo $AB'C$ é retângulo em C, temos, de acordo com a razão trigonométrica, o seno de um ângulo agudo em um triângulo retângulo, que:

$$\text{sen } B = \frac{b}{2r} \Rightarrow 2r = \frac{b}{\text{sen } B}$$

Fazendo isso para os outros dois ângulos, chegaremos à conclusão de que:

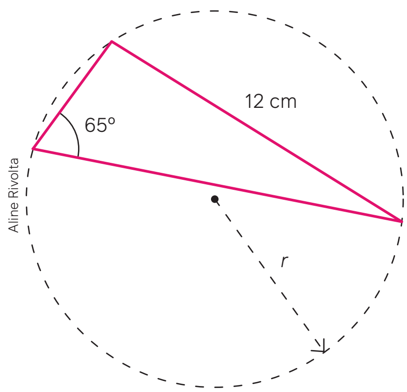
$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C} = 2r \longrightarrow$ Lei dos senos para triângulo inscrito em uma circunferência de raio r.

A seguir, apresentamos algumas situações resolvidas para que você as analise com bastante atenção. Caso necessário, refaça-as em seu caderno.

Atividades resolvidas

16. Considere que você conhece apenas dois elementos de um triângulo: a medida de um de seus ângulos é 65° e a medida do lado oposto a esse ângulo é 12 cm. Esses dois elementos do triângulo são suficientes para determinar a medida do raio da circunferência que o circunscreve.

- Com base na medida de um ângulo, na medida do lado oposto a esse ângulo e utilizando a lei dos senos, podemos determinar a medida do raio da circunferência circunscrita, como sugere a figura a seguir.



$$\frac{a}{\text{sen } A} = 2r$$

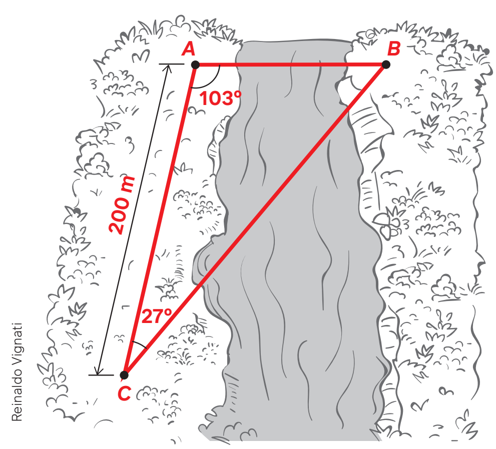
$$\frac{12}{\text{sen } 65°} = 2r$$

$$\frac{12}{0{,}9063} = 2r$$

$$13{,}2406 \cong 2r \Rightarrow r \cong 6{,}62$$

Portanto, o raio mede aproximadamente 6,62 cm.

17. O desenho a seguir, representa um local onde será construída uma ponte que ligará o ponto A ao ponto B. No levantamento feito pelo topógrafo, ele obteve a distância entre os pontos A e C (na mesma margem do rio) e dois ângulos internos indicados no triângulo nesses dois vértices. Qual é o comprimento da ponte a ser construída?



- Conforme lei dos senos para o triângulo representado, e observando que 27° + 103° + B = 180°, temos:

$$\frac{AB}{\text{sen } 27°} = \frac{200}{\text{sen } 50°}$$

Calculadora

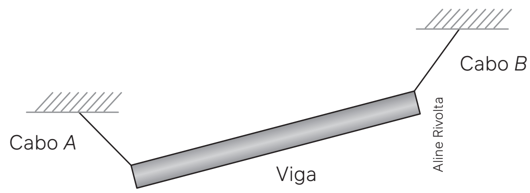
$$\frac{AB}{0{,}454} \cong \frac{200}{0{,}766}$$

$$AB \cong \frac{200 \cdot 0{,}454}{0{,}766} \Rightarrow AB \cong 118{,}538$$

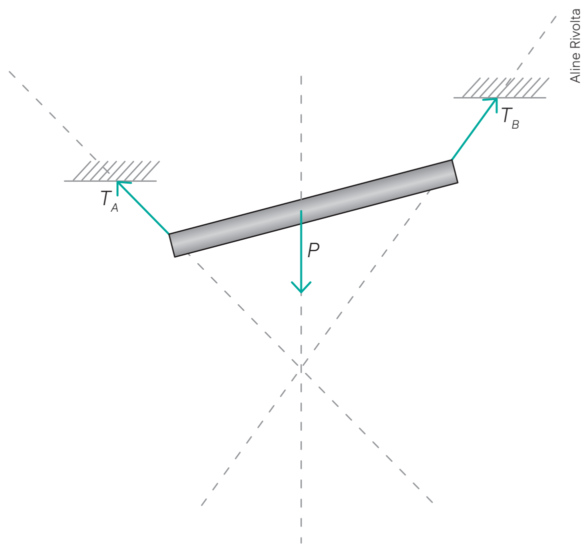
Portanto, a ponte AB terá comprimento de aproximadamente 118,538 metros.

18. A Lei de Lamy: Quando um corpo rígido em equilíbrio se encontra submetido à ação de três forças, os vetores delas são coplanares e suas linhas de ação são concorrentes a um mesmo ponto.
Justifique essa Lei de Lamy.

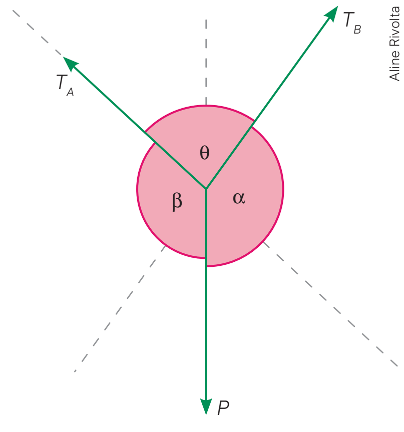
- Considere que determinada viga seja sustentada por dois cabos, como representado a seguir.



- Nessa situação, três forças são identificadas por meio de vetores na figura abaixo: força de tração T_A, força de tração T_B e força correspondente ao peso P da viga. Observe que, se prolongarmos as representações dos três vetores que representam essas forças, eles se encontrarão em determinado ponto.



- Representando esses três vetores nesse ponto de encontro e os ângulos formados entre eles, há uma proporção entre os módulos dessas forças e os senos desses ângulos, conforme figura a seguir.



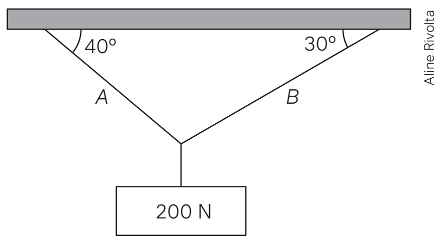
Relação:

$$\frac{T_A}{\text{sen } \alpha} = \frac{T_B}{\text{sen } \beta} = \frac{P}{\text{sen } \theta}$$

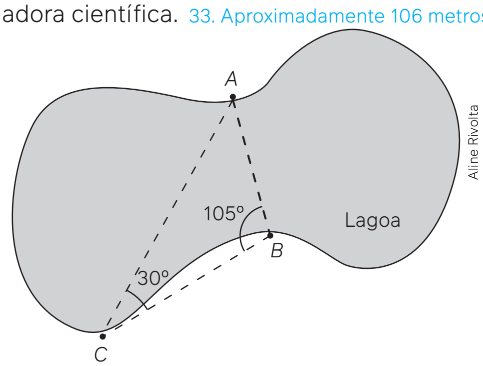
Não justificaremos a proporção entre os módulos dessas três forças e os senos dos ângulos mencionados. Caso queira ampliar esse conhecimento, sugerimos pesquisar um pouco mais a respeito da Lei de Lamy e a regra do triângulo de Simon Stevin.

Atividades

32. Utilize a Lei de Lamy para determinar, em Newtons, as trações T_A e T_B nos cabos A e B, respectivamente, conforme figura a seguir. 32. $T_A \cong 184$ N; $T_B \cong 163$ N



33. No desenho abaixo está representada uma ponte que será construída para atravessar uma lagoa, ligando os pontos *A* e *B*. Sabe-se que a distância entre os pontos *B* e *C* corresponde a 150 m. Determine a distância entre os pontos *A* e *B*. Utilize a calculadora científica. 33. Aproximadamente 106 metros.

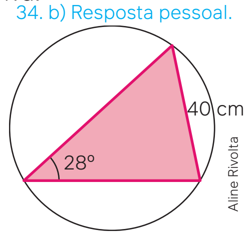


34. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.

a) Elaborem uma situação que envolva distância inacessível e possa ser resolvida com o auxílio de calculadora e com a lei dos senos (pode ser também com a lei dos cossenos). 34. a) Resposta pessoal.

b) Resolvam a situação e a apresentem a um colega para que ele também a resolva. 34. b) Resposta pessoal.

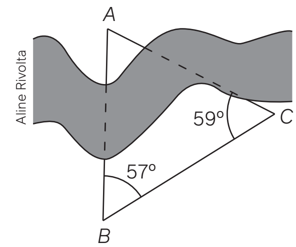
35. Vimos que qualquer triângulo é inscritível em uma circunferência, como o que está representado na figura.



a) Qual é a medida aproximada do raio dessa circunferência? Explique como você a calculou. 35. a) Aproximadamente 42,6 cm; resposta pessoal.

b) Mantendo-se a medida do ângulo e duplicando a medida do lado oposto a ele, o que acontece com a medida do raio da circunferência que circunscreve o triângulo correspondente? 35. b) Duplica.

36. No desenho a seguir, *ABC* representa um terreno doado para uma área de preservação em uma cidade. O lado *BC* do terreno mede 3 000 m, e os ângulos indicados foram medidos por um topógrafo. O rio está impedindo a determinação direta das medidas *AB* e *AC*. Utilize a calculadora científica.



a) Determine as medidas dos lados que faltam. 36. a) $AB \cong 2\,860$ m; $AC \cong 2\,796$ m.

b) Calcule a área limitada por esse terreno. 36. b) Aproximadamente 3 594 454 m^2.

37. (UFPA) Considere as seguintes informações:

De dois pontos *A* e *B*, localizados na mesma margem de um rio, avista-se um ponto *C*, de difícil acesso, localizado na margem oposta.

Sabe-se que *B* está distante 1 000 metros de *A*;

Com o auxílio de um teodolito (aparelho usado para medir ângulos) foram obtidas as seguintes medidas: $B\hat{A}C = 30°$ e $A\hat{B}C = 80°$.

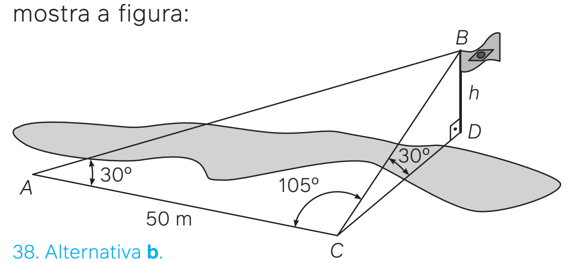
Deseja-se construir uma ponte sobre o rio, unindo o ponto *C* a um ponto *D* entre *A* e *B*, de modo que seu comprimento seja mínimo. Podemos afirmar que o comprimento da ponte será de aproximadamente:

Dado:

Considere sen 80° = 0,985, sen 70° = 0,940, cos 80° = 0,174 e cos 70° = 0,340. 37. Alternativa **a**.

a) 524 m.
b) 532 m.
c) 1 048 m.
d) 500 m.
e) 477 m.

38. (Unesp) Uma pessoa se encontra no ponto A de uma planície, às margens de um rio, e vê, do outro lado do rio, o topo do mastro de uma bandeira, no ponto *B*. Com o objetivo de determinar a altura *h* do mastro, ela anda, em linha reta, 50 m para a direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto *C*. Sendo *D* o pé do mastro, avalia que os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$ valem 30°, o ângulo $A\hat{C}B$ vale 105°, como mostra a figura:



38. Alternativa **b**.

A altura *h* do mastro da bandeira, em metros, é:

a) 12,5.
b) $12{,}5\sqrt{2}$.
c) 25,0.
d) $25{,}0\sqrt{2}$.
e) 35,0.

39. (Uece) Sejam *x*, *y* e *z* as medidas dos ângulos $X\hat{Y}Z$ e *R* a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Se o produto dos senos dos ângulos internos do triângulo é $\dfrac{k \cdot x \cdot y \cdot z}{R^3}$, então o valor de *k* é:

a) 0,500. **b)** 0,250. **c)** 0,125. **d)** 1,000.

39. Alternativa **c**.

Atividades finais

1. Em relação aos assuntos abordados nesta unidade, responda às questões abaixo.

a) Quais são as denominações das três transformações isométricas estudadas? 1. a) Rotação, translação e reflexão.

b) Quando se amplia ou se reduz uma figura geométrica, que transformação é realizada? 1. b) Homotetia.

c) Quais são os valores de seno, cosseno e tangente de 30°? 1. c) $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) Quais são os valores de seno, cosseno e tangente de 45°? 1. d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 1

e) Quais são os valores de seno, cosseno e tangente de 60°? 1. e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$ e 3

f) Como se calcula o seno de um ângulo agudo em um triângulo retângulo? 1. f) É o quociente entre as medidas do cateto oposto ao ângulo e da hipotenusa.

g) Como se calcula o cosseno de um ângulo agudo em um triângulo retângulo? 1. g) É o quociente entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo da hipotenusa.

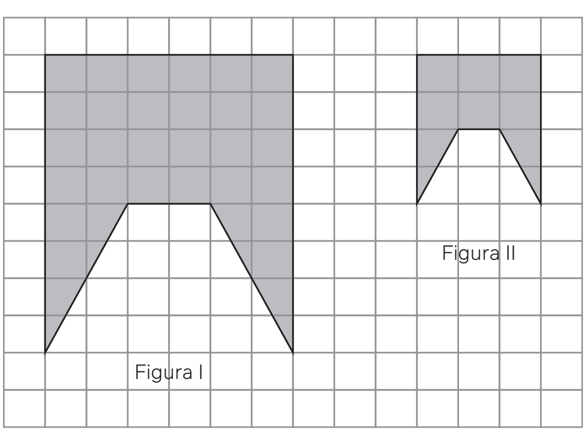
h) Como se calcula a tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo? 1. h) É o quociente entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo.

i) Qual é a lei dos senos para um triângulo qualquer?

j) Qual é a lei dos cossenos para um triângulo qualquer? 1. j) Resposta no Manual do Professor.

2. As figuras I e II são semelhantes e foram representadas na mesma malha quadriculada.

Aline Rivolta



a) Qual é a razão de semelhança das figuras I e II, nesta ordem? 2. a) 2

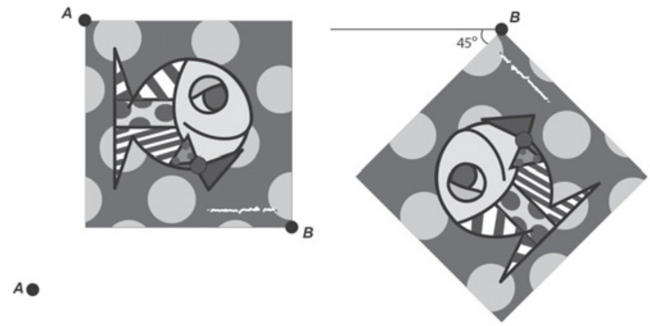
b) Qual é a razão entre as medidas dos perímetros das figuras I e II, nesta ordem? 2. b) 2

c) Qual é a razão entre as áreas das figuras I e II, nesta ordem? 2. c) 4

Questões de vestibulares e Enem

3. (Enem) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada *O peixe*, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos *A* e *B*.

1. i) $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2r$



Enem 2017

Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte. Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360°. A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de: 3. Alternativa **b**.

a) 90° no sentido horário

b) 135° no sentido horário

c) 180° no sentido anti-horário

d) 270° no sentido anti-horário

e) 315° no sentido horário

4. (Enem) Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto *O*.

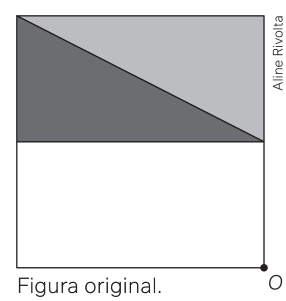
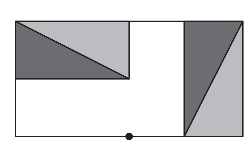


Figura original.

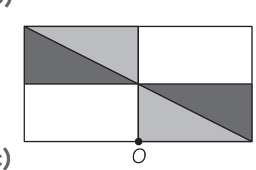
Aline Rivolta

A imagem que representa a nova figura é: 4. Alternativa **e**.

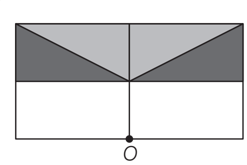
a)



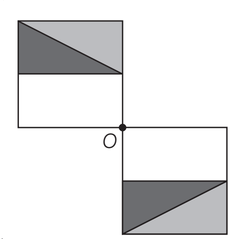
b)



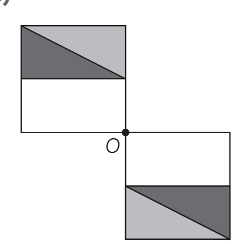
c)



d)



e)

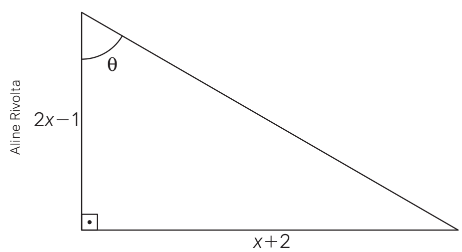


Ilustrações: Aline Rivolta

5. (Ifal) Um atleta de 1,70 metro de altura, percebe que, ao fazer flexões no momento em que estica os braços, seu corpo, em linha reta, forma um ângulo de 30° com o piso. Nessas condições, a que altura do piso se encontra a extremidade da sua cabeça? (Considere que os braços formam com o piso um ângulo reto). 5. Alternativa **a**.

a) 85 cm
b) $85\sqrt{3}$ cm
c) $\frac{170\sqrt{3}}{3}$ cm
d) $85\sqrt{2}$ cm
e) 340 cm

6. (UPE) A medida da área do triângulo retângulo, representado a seguir, é de 12,5 cm². Qual é o valor aproximado do seno do ângulo θ? Considere $\sqrt{2} \cong 1{,}4$.

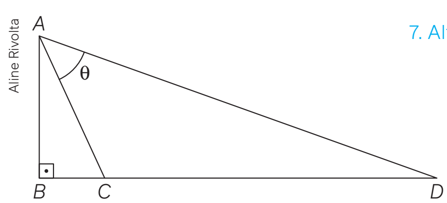


a) 0,45
b) 0,52
c) 0,61
d) 0,71
e) 0,85

6. Alternativa **d**.

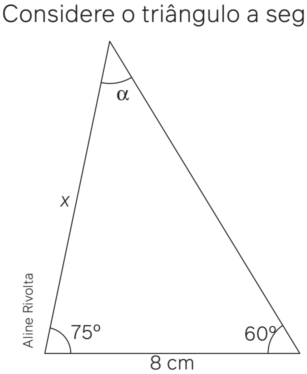
7. (Unicamp-SP) Considere o triângulo retângulo *ABD* exibido na figura abaixo, em que *AB* = 2 cm, *BC* = 1 cm e *CD* = 5 cm. Então, o ângulo θ é igual a:

7. Alternativa **c**.



a) 15°.
b) 30°.
c) 45°.
d) 60°.

8. (UFPR) Considere o triângulo a seguir.



a) Quanto mede o ângulo α? 8. a) 45°

b) Quanto mede *x*? 8. b) $4\sqrt{6}$ cm

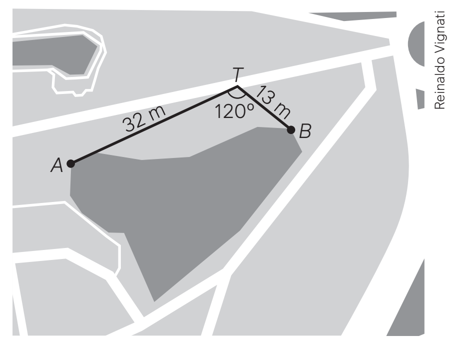
9. (Ifal) Um triângulo possui lados iguais a 6, 9 e 11. O cosseno do maior ângulo interno desse triângulo é: 9. Alternativa **b**.

a) $\frac{11}{15}$.
b) $-\frac{1}{27}$.
c) $\frac{26}{33}$.
d) $-\frac{2}{27}$.
e) -1.

10. (IFSP) A base de um triângulo isósceles mede $3\sqrt{3}$ cm e o ângulo oposto à base mede 120°. A medida dos lados congruentes desse triângulo, em centímetros, é: 10. Alternativa **a**.

a) 3
b) 2
c) $\sqrt{3}$
d) $1 + \sqrt{3}$
e) $2 - \sqrt{3}$

11. (Uerj) Ao coletar os dados para um estudo topográfico da margem de um lago a partir dos pontos *A*, *B* e *T*, um técnico determinou as medidas *AT* = 32 m; *BT* = 13 m e $A\hat{T}B$ = 120°, representadas no esquema abaixo.

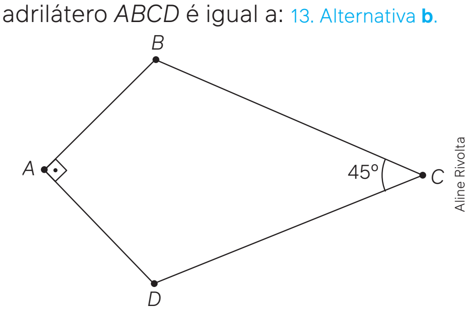


Calcule a distância, em metros, entre os pontos *A* e *B*, definidos pelo técnico nas margens desse lago.
11. Aproximadamente 40 m.

12. (Uece) A medida do cosseno do maior dos ângulos internos do triângulo cujas medidas dos lados são respectivamente 8 m, 10 m e 15 m é igual a: 12. Alternativa **a**.

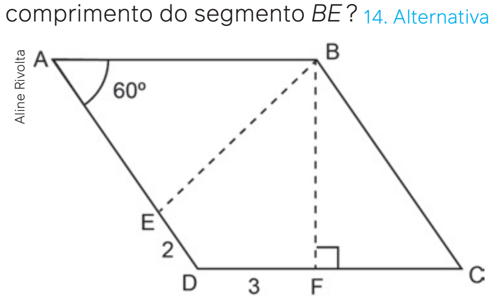
a) −0,38125
b) −0,42112
c) −0,43713
d) −0,46812

13. (Unicamp-SP) A figura abaixo exibe um quadrilátero *ABCD*, onde *AB* = *AD* e *BC* = *CD* = 2 cm. A área do quadrilátero *ABCD* é igual a: 13. Alternativa **b**.



a) $\sqrt{2}$ cm²
b) 2 cm²
c) $2\sqrt{2}$ cm²
d) 3 cm²

14. (Unicamp-SP) No losango abaixo, qual é a medida do comprimento do segmento *BE*? 14. Alternativa **c**.



a) $\sqrt{26}$
b) $\sqrt{27}$
c) $\sqrt{28}$
d) $\sqrt{29}$

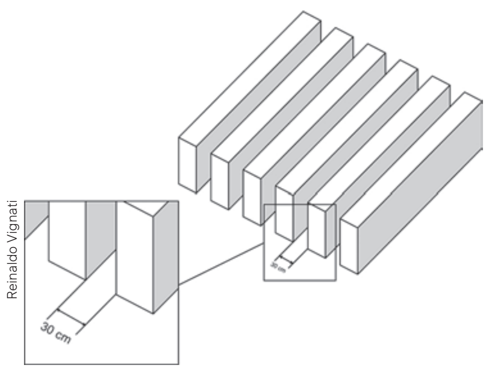
15. (Uece) José caminhou na praia em linha reta deslocando-se do ponto X ao ponto Y, perfazendo o total de 1 200 m. Quando estava no ponto X, vislumbrou um navio ancorado no ponto Z de tal modo que o ângulo YXZ era de aproximadamente 60 graus. Ao chegar ao ponto Y verificou que o ângulo XYZ era de 45 graus. Nessas condições, a distância do navio à praia, em metros, é aproximadamente igual a

$\left(\text{Considere tg } 60° \text{ aproximadamente igual a } \frac{19}{11}\right)$

15. Alternativa **b**.

a) 720
b) 760
c) 780
d) 740

16. (Enem) Pergolado é o nome que se dá a um tipo de cobertura projetada por arquitetos, comumente em praças e jardins, para criar um ambiente para pessoas ou plantas, no qual há uma quebra da quantidade de luz, dependendo da posição do sol. É feito como um estrado de vigas iguais, postas paralelas e perfeitamente em fila, como ilustra a figura.

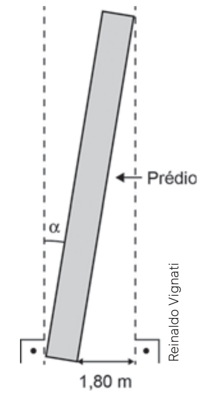


Um arquiteto projeta um pergolado com vãos de 30 cm de distância entre suas vigas, de modo que, no solstício de verão, a trajetória do sol durante o dia seja realizada num plano perpendicular à direção das vigas, e que o sol da tarde, no momento em que seus raios fizeram 30° com a posição a pino, gere a metade da luz que passa no pergolado ao meio-dia.

Para atender à proposta do projeto elaborado pelo arquiteto, as vigas do pergolado devem ser construídas de maneira que a altura, em centímetro, seja a mais próxima possível de 16. Alternativa **c**.

a) 9 **b)** 15 **c)** 26 **d)** 52 **e)** 60

17. (Enem) A famosa Torre de Pisa, localizada na Itália, assim como muitos outros prédios, por motivos adversos, sofrem inclinações durante ou após suas construções. Um prédio, quando construído, dispunha-se verticalmente e tinha 60 metros de altura. Ele sofreu uma inclinação de um ângulo α, e a projeção ortogonal de sua fachada lateral sobre o solo tem largura medindo 1,80 metro, conforme mostra a figura.



O valor do ângulo de inclinação pode ser determinado fazendo-se o uso de uma tabela como a apresentada.

Ângulo α (Grau)	Seno
0,0	0,0
1,0	0,017
1,5	0,026
1,8	0,031
2,0	0,034
3,0	0,052

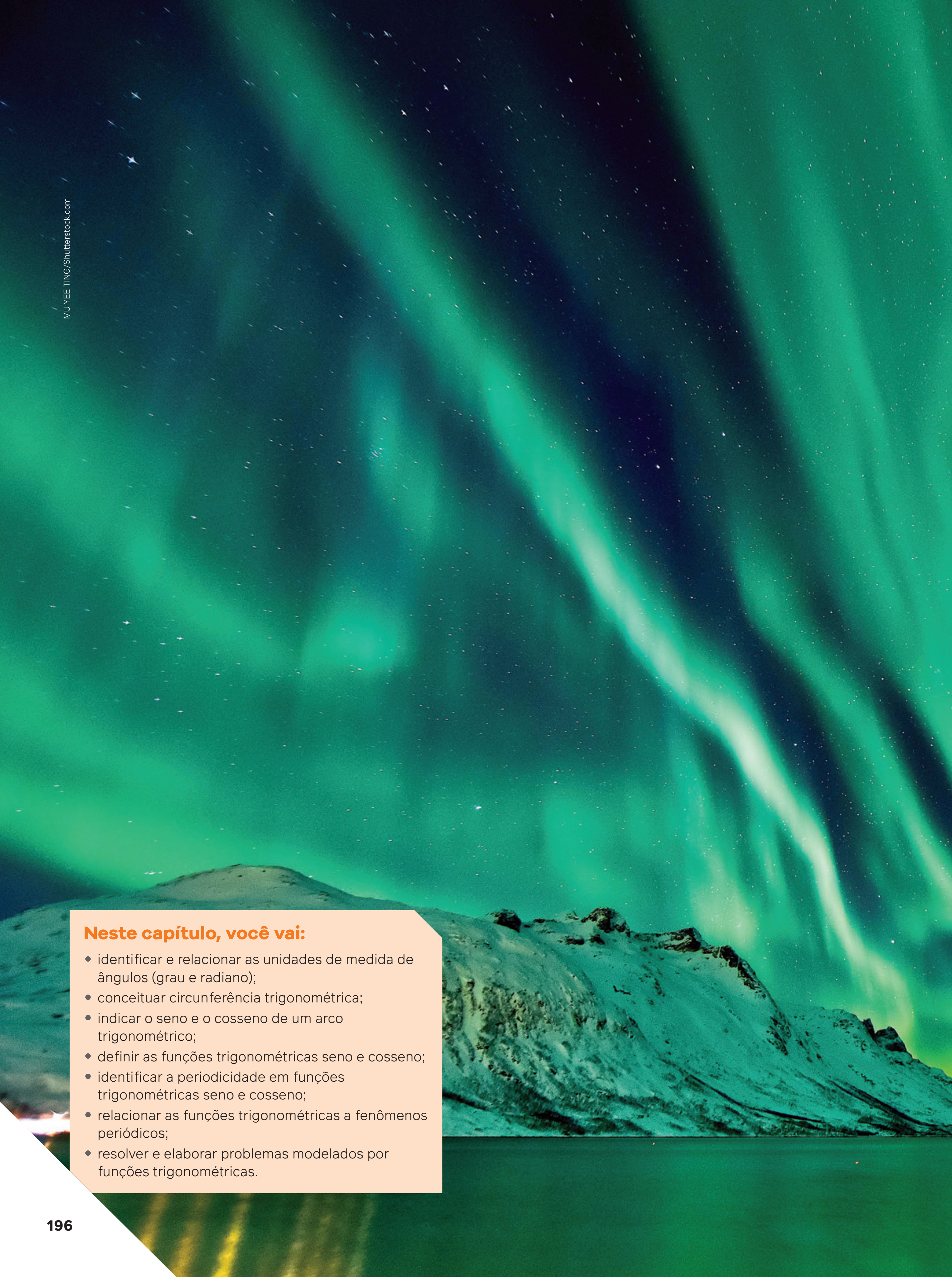
Uma estimativa para o ângulo de inclinação α, quando dado em grau, é tal que 17. Alternativa **c**.

a) $0 \leq \alpha < 1,0$
b) $1,0 \leq \alpha < 1,5$
c) $1,5 \leq \alpha < 1,8$
d) $1,8 \leq \alpha < 2,0$
e) $2,0 \leq \alpha < 3,0$

Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão em relação aos assuntos e objetivos trabalhados ao longo do presente capítulo.

Objetivos de aprendizagem	Sim	É necessário retomar
Identifico e compreendo diferentes transformações isométricas.		
Resolvo e elaboro problemas relacionados às transformações isométricas.		
Identifico e compreendo diferentes transformações homotéticas.		
Obtenho as relações métricas em triângulos retângulos por meio da semelhança de triângulos.		
Resolvo e elaboro problemas com o uso de relações trigonométricas em triângulos quaisquer.		



MU YEE TING/Shutterstock.com

Neste capítulo, você vai:

- identificar e relacionar as unidades de medida de ângulos (grau e radiano);
- conceituar circunferência trigonométrica;
- indicar o seno e o cosseno de um arco trigonométrico;
- definir as funções trigonométricas seno e cosseno;
- identificar a periodicidade em funções trigonométricas seno e cosseno;
- relacionar as funções trigonométricas a fenômenos periódicos;
- resolver e elaborar problemas modelados por funções trigonométricas.

CAPÍTULO

5

Funções trigonométricas

Aurora boreal em Tromso, Noruega, 2016.

Há muito tempo a humanidade observa os fenômenos da natureza e busca descrevê-los matematicamente. Certos fenômenos recorrentes podem ser descritos e modelados de forma aproximada por meio de algum tipo de função. Outros, entretanto, como a aurora boreal, não se comportam de forma previsível. Neste capítulo, vamos estudar funções trigonométricas que descrevem fenômenos cíclicos.

1. **Pense em alguns fenômenos da natureza que você percebe que se repetem de forma cíclica e descreva qual é o período de tempo, aproximado, que esses ciclos acontecem.** 1. Resposta pessoal.
2. **Você percebe alterações nos ciclos que você citou? A que se devem essas alterações?** 2. Resposta pessoal.

1 Circunferência trigonométrica

A trigonometria, que já teve alguns conceitos estudados anteriormente, é uma parte da Matemática que aborda situações que envolvem relações entre triângulos, principalmente quanto ao cálculo de distâncias inacessíveis. Existem fenômenos que se repetem de tempos em tempos e podem ser modelados pelo estudo de funções que são **periódicas**.

Talvez o exemplo mais simples seja o dia: em determinado local da Terra e em determinado dia do ano, o Sol aparece pela manhã em um determinado horário e se põe, no fim da tarde, também em um horário determinado.

Kiyoshi Takahase Segundo/Alamy/Fotoarena

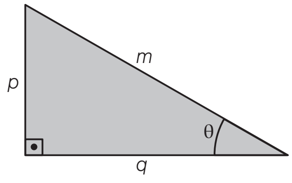
Pôr do Sol em Campo Magro (PR), agosto de 2019.

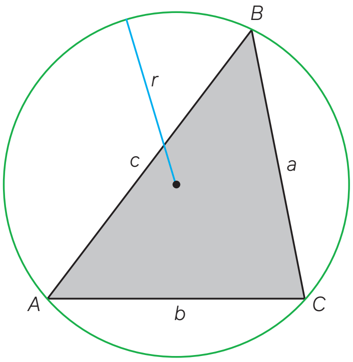
Com aplicativos de *smartphone* é possível saber o horário do nascer e do pôr do Sol em uma localidade. Daqui a um ano, aproximadamente, esses horários se repetirão no mesmo local. Temos aí um exemplo de fenômeno periódico, isto é, um fenômeno que se repete após um intervalo de tempo.

Neste capítulo um dos objetivos é examinar alguns fenômenos periódicos. Nesse estudo, a ideia é utilizar funções trigonométricas para estabelecer modelos que possam, de forma aproximada, descrever tais fenômenos.

Algumas ideias importantes de trigonometria já foram estudadas no capítulo anterior quando fizemos o estudo de triângulos retângulos e de triângulos quaisquer. No triângulo retângulo foram definidos o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo. Já no triângulo qualquer, foram estabelecidos dois resultados importantes: lei dos senos e lei dos cossenos.

Reinaldo Vignati





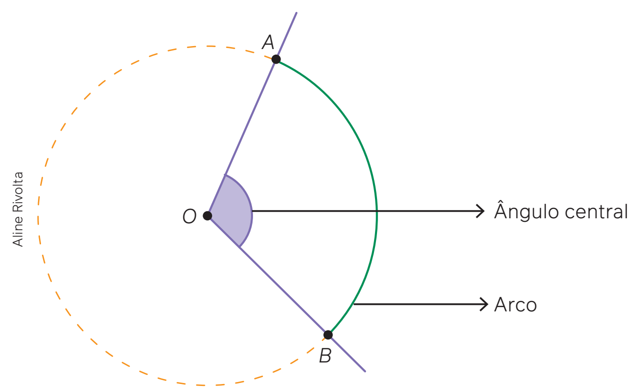
Reinaldo Vignati

Para pensar e discutir

1. Conforme medidas m, p, q e θ indicadas no triângulo retângulo anterior, como você interpreta $\cos \theta$ e $\text{tg } \theta$? 1. Resposta pessoal.
2. No triângulo de vértices A, B e C, considere que os ângulos internos também sejam representados por A, B e C. Como você enuncia a lei dos senos? E a lei dos cossenos? 2. Resposta pessoal.
3. A lei dos senos e a lei dos cossenos valem também para o triângulo retângulo? 3. Sim.

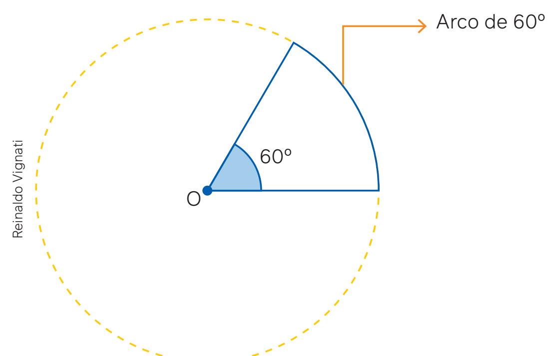
Arcos e ângulos

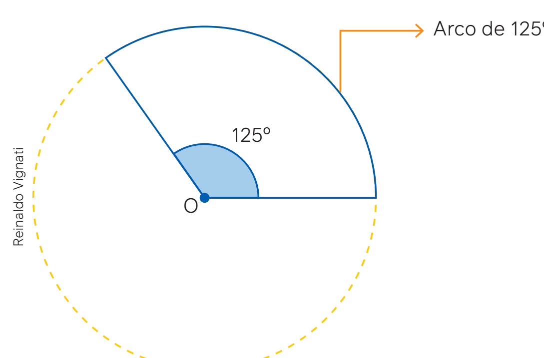
Quando marcamos em uma circunferência dois pontos distintos, a dividimos em duas partes denominadas **arcos**. A todo arco associamos um ângulo com vértice no centro da circunferência. Na figura a seguir, vamos considerar apenas o arco AB com a linha contínua:



Grau é a unidade de medida de ângulo. Outra unidade de medida de ângulo que nos auxiliará a ampliar o estudo de trigonometria é o **radiano**. Como mencionamos anteriormente, observe que, no sentido de abertura, a todo arco que marcamos em uma circunferência podemos associar um ângulo central.

Assim, apenas para exemplificar, quando falamos em arco de 60°, significa que o ângulo central é de 60°. Se mencionarmos em uma circunferência um ângulo central de 125°, a ele estará associado um arco de 125°. Mas cuidado: não confunda arco com comprimento do arco.



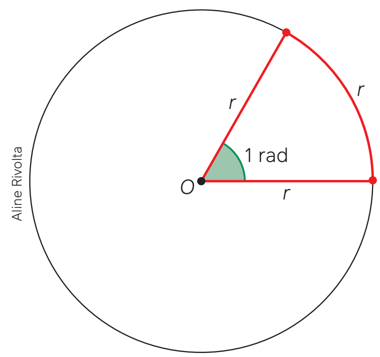


Para pensar e discutir

1. Qual é a medida do ângulo central correspondente a um arco que representa um quarto da circunferência? E um terço da circunferência? 1. 90° e 120°
2. Qual é a medida do ângulo central correspondente ao arco da circunferência completa? 2. 360°
3. Qual é o comprimento de um arco cujo ângulo central é de 360° em uma circunferência de raio r? 3. $2\pi r$
4. Que relação permite calcular o comprimento ℓ de um arco em uma circunferência de raio r correspondente ao ângulo central θ, em graus? 4. $\ell = \frac{\pi r \theta}{180°}$

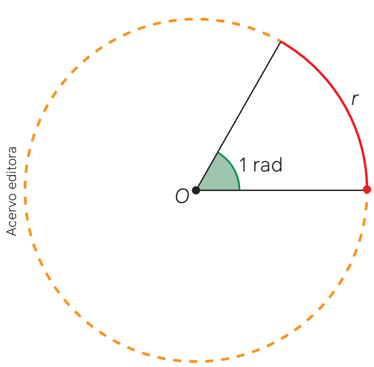
Unidade radiano

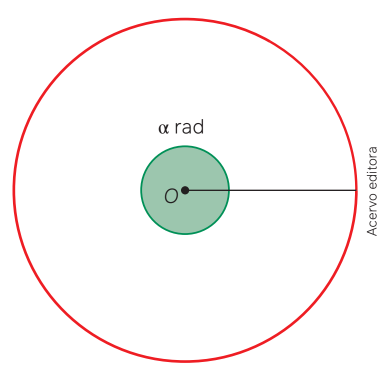
O radiano, assim como o grau, é uma unidade de medida de ângulo. Entretanto, ele está relacionado diretamente ao comprimento do arco. Talvez esteja aí exatamente sua simplicidade. Observe na figura a seguir o que representa a medida de um ângulo central de 1 radiano em uma circunferência.



Um radiano é a medida do ângulo central de uma circunferência correspondente a um arco cujo comprimento é igual à medida do raio dessa circunferência.

Por meio de proporção, podemos determinar uma relação entre as unidades grau e radiano. Vamos começar com um arco que corresponde a uma volta completa, como evidenciado nas figuras a seguir.





De acordo com a definição de radiano, podemos determinar a medida do ângulo central correspondente a uma volta completa em radianos, como mostrado a seguir.

Ângulo central	Comprimento do arco
1 rad	r
α	$2\pi r$

$$\frac{1 \text{ rad}}{\alpha} = \frac{r}{2\pi r}$$

$$\frac{1 \text{ rad}}{\alpha} = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow \alpha = 2\pi \text{ rad}$$

Para pensar e discutir

1. Se 360° correspondem a uma volta, 360° correspondem a quantos radianos? 1. $360° = 2\pi$ rad
2. A quantos radianos corresponde um arco de medida 180°? 2. $180° = \pi$ rad
3. Quanto é aproximadamente o ângulo em graus correspondente a 1 rad? Explique como calculou. 3. Aproximadamente 57°; resposta pessoal.

Observações:

1. Convenciona-se omitir o símbolo radiano. Assim, quando falamos que um ângulo mede 3, significa que ele mede 3 radianos.
2. Para transformar a medida de um ângulo em graus para radianos e em radianos para graus podemos utilizar a relação:

$$180° = \pi \text{ rad}$$

Atividades resolvidas

1. Determine a medida em radianos do ângulo central correspondente a $\frac{1}{6}$ de uma volta na circunferência.

- Considerando que o ângulo central correspondente a uma volta completa tem 2π rad, então sendo x a medida procurada, temos:

$$x = \frac{1}{6} \text{ de } 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6} \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

- Outra maneira seria observar essa medida em graus. Assim, $\frac{1}{6}$ de 360° corresponde a 60°. Para transformar graus em radianos utilizamos a proporção:

Ângulo (graus)	Ângulo (radianos)
360	2π
60	x

$$\frac{360}{60} = \frac{2\pi}{x}$$

$$6x = 2\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

2. Um arco α é tal que $\alpha = \frac{7\pi}{4}$ rad. Qual é essa medida em graus?

- Um procedimento é observar que π rad = 180°. Assim, podemos substituir esse valor na expressão dada, ou seja:

$$\alpha = \frac{7\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{7}{4} \cdot (\pi \text{ rad})$$

$$\alpha = \frac{7}{4} \cdot (180°)$$

$$\alpha = 315°$$

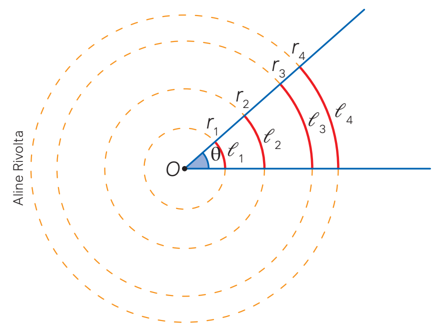
Para pensar e discutir

1. Pense em outro procedimento para transformar $\alpha = \frac{7\pi}{4}$ rad em graus. 1. Resposta pessoal.

Comprimento de um arco

Em Geometria Plana o estudo do comprimento de arco e da área de setor circular é feito utilizando proporção. Uma forma interessante de compreender o radiano está relacionada ao conceito de semelhança de setores circulares, que utiliza razão e proporção.

Considere, por exemplo, quatro circunferências concêntricas de raios r_1, r_2, r_3 e r_4, e quatro setores circulares marcados nessas circunferências, todos com a mesma medida do ângulo central.



Como esses quatro setores são semelhantes, temos a seguinte proporção, considerando que ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 e ℓ_4 são os comprimentos dos arcos indicados obtidos nas circunferências de raios r_1, r_2, r_3 e r_4, respectivamente:

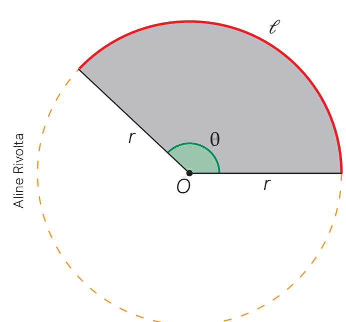
$$\frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\ell_2}{r_2} = \frac{\ell_3}{r_3} = \frac{\ell_4}{r_4} = k$$

$k \rightarrow$ constante de proporcionalidade

Essa constante de proporcionalidade nada mais é do que a medida do ângulo θ em radianos. Daí a facilidade de usarmos, como apresentado no tópico anterior, o radiano como unidade de medida de ângulo. A proporção acima mostra uma relação matemática para o cálculo da medida do comprimento de um arco, conhecendo-se a medida do ângulo central correspondente ao arco e à medida do raio da circunferência.

O comprimento de um arco é igual ao produto da medida do raio da circunferência pela medida, em radianos, do ângulo central correspondente ao arco.

Observe a seguir como podemos chegar a essa relação, sendo ℓ o comprimento do arco correspondente a um ângulo central de medida θ, em radianos, representado na circunferência de raio r:



Utilizando proporção entre as medidas dos ângulos em radianos e os comprimentos dos arcos (em unidade de comprimento):

Ângulo central	Comprimento do arco
2π rad	$2\pi r$
θ rad	ℓ

$$\frac{2\pi}{\theta} = \frac{2\pi r}{\ell}$$

$$\frac{1}{\theta} = \frac{r}{\ell} \Rightarrow \ell = \theta \cdot r$$

Atividades resolvidas

3. Considere que a roda de uma moto possui raio medindo 25 centímetros. Qual é a distância percorrida por essa moto considerando um trajeto em que a roda deu 500 voltas completas?

- Cálculo do comprimento da circunferência correspondente à roda da moto:

$$C = 2\pi r$$

- Considerando $\pi \cong 3{,}14$, temos:

$$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 25$$
$$C \cong 157$$

- A distância *d* percorrida corresponde a 500 dessas circunferências, isto é:

$$d = 500 \cdot C$$
$$d \cong 500 \cdot 157$$
$$d \cong 78\,500 \rightarrow 78\,500 \text{ cm} = 785 \text{ m}$$

Portanto, a distância percorrida foi de aproximadamente 785 m.

4. (Ufes) Uma curva numa linha férrea deve ser traçada em circunferência. O raio que deve ser dado à circunferência para que os trilhos mudem 25° de direção numa distância de 40π metros é:

a) 308 m
b) 268 m
c) 258 m
d) 278 m
e) 288 m

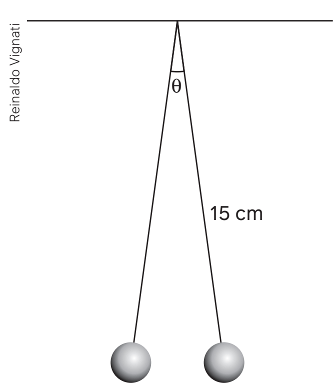
- Podemos utilizar a seguinte proporção entre as medidas dos ângulos em graus e os comprimentos correspondentes dos arcos:

Ângulo central	Comprimento do arco
360°	$2\pi r$
25°	40π

$$\frac{360}{25} = \frac{2\pi r}{40\pi}$$
$$\frac{360}{25} = \frac{r}{20}$$
$$r = \frac{20 \cdot 360}{25}$$
$$r = 288$$

Portanto, o raio da circunferência deve ter 288 m. Alternativa **e**.

5. A figura a seguir representa um pêndulo de 15 cm de comprimento que oscila de *A* até *B* descrevendo um ângulo $\theta = \frac{\pi}{12}$ rad. Qual o comprimento da trajetória descrita pelo pêndulo de *A* até *B*?



- Como o ângulo central foi dado em radianos, temos que o comprimento correspondente ao arco é o produto da medida do ângulo pelo raio, isto é:

$$\ell = \theta \cdot r$$
$$\ell = \frac{\pi}{12} \cdot 15$$
$$\ell \cong \frac{3{,}14}{12} \cdot 15 \Rightarrow \ell \cong 3{,}925$$

Portanto, o comprimento do arco é de aproximadamente 3,925 cm.

Para pensar e discutir

1. Sem a fórmula, como você calcularia o comprimento do arco correspondente à trajetória do pêndulo? 1. Resposta pessoal.

Atividades

1. Utilizando uma calculadora, transforme as medidas dos arcos de radianos para graus.

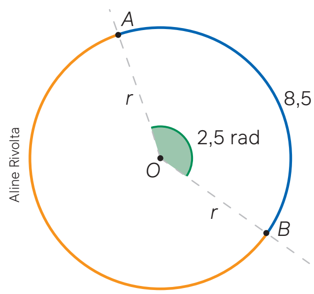
a) 2 rad 1. a) 2 rad ≅ 114°

b) 3 rad 1. b) 3 rad ≅ 171°

c) 4 rad 1. c) 4 rad ≅ 228°

d) 5 rad 1. d) 5 rad ≅ 285°

2. Na circunferência representada na figura abaixo, o comprimento do arco *AB* é de 8,5 cm e o ângulo central correspondente é de 2,5 rad.



Usando a divisão, é possível obter a medida em centímetros do raio da circunferência.

a) Qual é essa medida? 2. a) 3,4 cm

b) Qual é a medida do ângulo central em graus? 2. b) Aproximadamente 143,3°.

3. Elabore e resolva uma situação envolvendo o comprimento de um arco, o raio da circunferência e o ângulo central em radianos. Depois, entregue-o a um colega para que ele também resolva. 3. Resposta pessoal.

4. Transforme em graus as medidas dadas em radianos:

a) $\frac{2\pi}{3}$ rad 4. a) 120°

b) $\frac{3\pi}{4}$ rad 4. b) 135°

c) $\frac{5\pi}{6}$ rad 4. c) 150°

d) $\frac{3\pi}{2}$ rad 4. d) 270°

e) $\frac{5\pi}{3}$ rad 4. e) 300°

f) $\frac{11\pi}{6}$ rad 4. f) 330°

5. Transforme em radianos as medidas dadas em graus:

a) 90° 5. a) $\frac{\pi}{2}$ rad

b) 240° 5. b) $\frac{4\pi}{3}$ rad

c) 225° 5. c) $\frac{5\pi}{4}$ rad

d) 75° 5. d) $\frac{5\pi}{12}$ rad

e) 315° 5. e) $\frac{7\pi}{4}$ rad

f) 1° 5. f) $\frac{\pi}{180}$ rad

6. (Unesp-SP) Os pontos *P* e *Q* sobre a superfície da Terra possuem as seguintes coordenadas geográficas:

	Latitude	Longitude
P	30° N	45° L
Q	30° N	15° O

Considerando a Terra uma esfera de raio 6 300 km, a medida do menor arco *PQ* sobre a linha do paralelo 30° N é igual a: 6. Alternativa **c**.

a) $1\,150\pi\sqrt{3}$ km

b) $1\,250\pi\sqrt{3}$ km

c) $1\,050\pi\sqrt{3}$ km

d) $1\,320\pi\sqrt{3}$ km

e) $1\,350\pi\sqrt{3}$ km

7. Elabore duas situações similares à anterior para o cálculo de distâncias ao longo de paralelo ou ao longo de meridiano, como descrito a seguir.

a) Situação 1: dois pontos que têm a mesma latitude, porém longitudes diferentes;

b) Situação 2: dois pontos que têm a mesma longitude, porém latitudes diferentes.

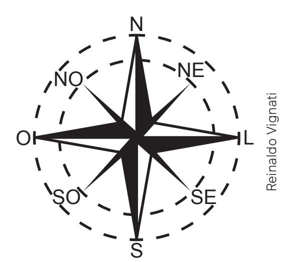
Resolva essas situações e depois entregue-as a um colega para que ele também as resolva. 7. Respostas pessoais.

8. (Enem) A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos que dividem o círculo em partes iguais. Uma câmera de vigilância está fixada no teto de um *shopping* e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmera está apontada inicialmente no sentido Oeste e o seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

1ª mudança: 135° sentido anti-horário;

2ª mudança: 60° no sentido horário;

3ª mudança: 45° no sentido anti-horário.



Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmera, com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (NO) devido a um movimento suspeito de um cliente.

Que mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmera? 8. Alternativa **e**.

a) 75° no sentido horário

b) 105° no sentido anti-horário

c) 120° no sentido anti-horário

d) 135° no sentido anti-horário

e) 165° no sentido horário

9. (Espcex-SP) Para fabricar uma mesa redonda que comporte 8 pessoas em sua volta, um projetista concluiu que essa mesa, para ser confortável, deverá considerar, para cada um dos ocupantes, um arco de circunferência com 62,8 cm de comprimento. O tampo redondo da mesa será obtido a partir de uma placa quadrada de madeira compensada. Adotando $\pi = 3{,}14$, a menor medida do lado dessa placa quadrada que permite obter esse tampo de mesa é 9. Alternativa **d**.

a) 72 cm

b) 80 cm

c) 144 cm

d) 160 cm

e) 180 cm

10. (FGV-SP) Suponha que fosse possível dar uma volta completa em torno da linha do Equador caminhando e que essa linha fosse uma circunferência perfeita na esfera terrestre. Nesse caso, se uma pessoa de 2 m de altura desse uma volta completa na Terra pela linha do Equador, o topo de sua cabeça, ao completar a viagem, teria percorrido uma distância maior que a sola dos seus pés em, aproximadamente, 10. Alternativa **b**.

a) 63 cm

b) 12,6 m

c) 6,3 km

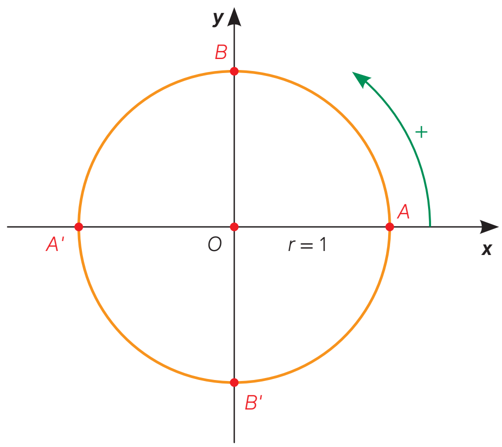
d) 12,6 km

e) 63 km

O plano cartesiano e a circunferência trigonométrica

Agora que você já conhece radiano como unidade de medida de ângulos, vamos considerar uma circunferência situada no plano cartesiano para estudarmos a trigonometria de uma maneira completamente diferente do que você já viu com triângulos. Daqui em diante, trabalharemos com a circunferência denominada trigonométrica.

Na imagem a seguir, temos uma circunferência de raio igual a 1 com o centro no ponto de encontro dos eixos coordenados, isto é, o ponto O:



Aline Rivolta

Se nessa circunferência convencionarmos que o ponto A é a origem dos arcos e o sentido anti-horário como sentido positivo de percurso dos arcos, temos representada a **circunferência trigonométrica**.

Para pensar e discutir

1. Quais são as coordenadas dos pontos A, A', B, B' e O representados na figura acima? 1. Respostas no Manual do Professor.

2. Para qualquer ponto pertencente à circunferência trigonométrica, qual é o maior valor possível da abscissa? E o menor? 2. 1; –1

3. Para qualquer ponto pertencente à circunferência trigonométrica, qual é o maior valor possível para a ordenada? E o menor? 3. 1; –1

4. Se você fosse marcar um arco nessa circunferência trigonométrica começando no ponto A, em qual ponto estaria a outra extremidade do arco correspondente a π radianos? E do arco correspondente a $-\frac{\pi}{2}$ radianos? 4. A'; B'.

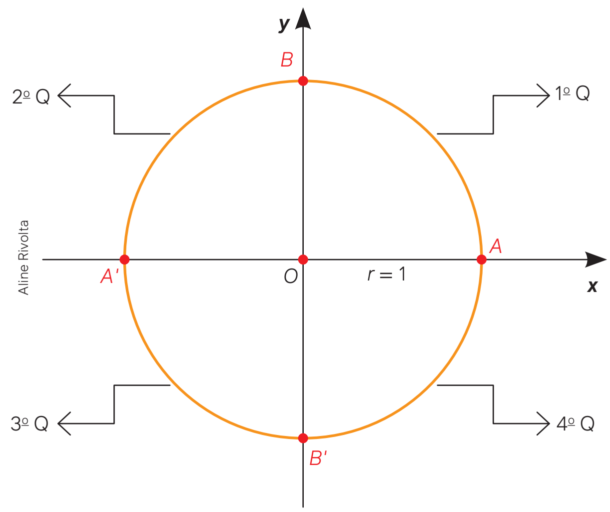
Circunferência trigonométrica é a circunferência orientada, de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, cujo raio tem medida de comprimento 1 e na qual o sentido positivo é o anti-horário.

Observações:

1. Como o raio da circunferência trigonométrica é unitário, o comprimento da circunferência correspondente é igual a 2π unidades de comprimento.

2. Se o sentido anti-horário é convencionado como sentido positivo, o sentido horário será o sentido negativo dos arcos.

Veja que os eixos coordenados dividem a circunferência em quatro partes, denominadas quadrantes, conforme a figura a seguir.



1º quadrante: arcos cuja extremidade final está entre os pontos *A* e *B*.

2º quadrante: arcos cuja extremidade final está entre os pontos *B* e *A*'.

3º quadrante: arcos cuja extremidade final está entre os pontos *A*' e *B*'.

4º quadrante: arcos cuja extremidade final está entre os pontos *B*' e *A*.

Por convenção, os arcos que têm extremidades finais exatamente nos pontos *A*, *B*, *A*' e *B*' não pertencem a quaisquer quadrantes, pois esses pontos dividem a circunferência em quadrantes. Note que não falamos em medidas dos arcos para situá-los nos quadrantes, pois podemos ter arcos cujas medidas são maiores que 2π rad (mais de uma volta no sentido positivo) ou menores que -2π rad (mais de uma volta no sentido negativo). Como localizá-los na circunferência?

Para responder a essa pergunta observe e analise cada uma das atividades resolvidas a seguir.

Atividades resolvidas

6. Em qual quadrante está situada a extremidade final do arco de medida 4 550°?

- Como sua medida é maior que 360°, dividimos essa medida por 360°

$$\begin{array}{r|l} 4\,550 & 360 \\ \cline{2-2} -4\,320 & 12 \\ \hline 230 & \end{array}$$

230 → resto

12 → quociente

- O quociente indica o número de voltas completas na circunferência trigonométrica. Assim, a extremidade do arco 4 550° deve ser pensada como um arco que dá 12 voltas completas no sentido positivo e percorre ainda um arco de 230°, ou seja:

Arco de medida 4 550°

↓ Tem a mesma extremidade na circunferência do arco de medida 230°

3º Quadrante

Para pensar e discutir

1. E se o arco fosse negativo, isto é, –4 550°, qual seria sua interpretação? 1. Resposta pessoal.

7. Em que quadrante está situada a extremidade final do arco de medida $\frac{77\pi}{5}$ rad?

- Como a medida do arco supera 2π rad, analogamente ao exemplo anterior, fazemos a divisão por 2π rad. O quociente representará o número de voltas completas na circunferência e o resto indicará a medida do arco correspondente à primeira volta positiva:

$$\begin{array}{c|l} \frac{77\pi}{5} & 2\pi \text{ rad} \\ \cline{2-2} \end{array}$$

- Para facilitar essa divisão, substituímos 2π por $\frac{10\pi}{5}$, isto é:

$$\begin{array}{c|c} \frac{77\pi}{5} & \frac{10\pi}{5} \\ \cline{2-2} -\frac{70\pi}{5} & 7 \\ \hline \frac{7\pi}{5} & \end{array}$$

quociente: 7

resto: $\frac{7\pi}{5}$

Agora, basta você interpretar os valores obtidos. Responda às questões a seguir.

Para pensar e discutir

1. Qual é sua interpretação dessa divisão? Em que quadrante está situada a extremidade final do arco de medida $\frac{77\pi}{5}$ rad? 1. 3º quadrante

2. E se esse arco fosse de medida $-\frac{77\pi}{5}$ rad, em que quadrante estaria situada a extremidade final? 2. 2º quadrante

Um arco na circunferência trigonométrica tem a extremidade inicial sempre na origem dos arcos. Assim, para facilitar, quando falamos em extremidade do arco, ela é necessariamente sua extremidade final. É o que faremos a partir daqui.

Nas duas situações resolvidas anteriormente, vimos que pode haver arcos com medidas diferentes, porém as mesmas extremidades na circunferência trigonométrica. Tais arcos são ditos côngruos.

Quando a diferença entre as medidas de dois arcos é um **múltiplo** de 2π rad (ou de 360°) esses arcos são ditos **côngruos**. Se representarmos a medida de dois arcos côngruos por *x* e *y*, em símbolos temos:

$\boldsymbol{x - y = k \cdot 2\pi}$, sendo *k* um número inteiro.

Observações:

1. A expressão $k \cdot 2\pi$, para *k* inteiro, pode ser interpretada como múltiplo de 2π.

2. Em graus, essa expressão fica $k \cdot 360°$, que pode ser interpretada como múltiplo de 360°.

Exemplos:

Conforme arcos das atividades anteriores:

- $\underbrace{4\,550° \text{ e } 230°}_{\text{Arcos côngruos}} \rightarrow 4\,550° - 230° = 4\,320° = 12 \cdot 360°$
- $\underbrace{\frac{77\pi}{5} \text{ rad e } \frac{7\pi}{5} \text{ rad}}_{\text{Arcos côngruos}} \rightarrow \frac{77\pi}{5} - \frac{7\pi}{5} = 14\pi = 7 \cdot 2\pi$

Como existem infinitos arcos que são côngruos a um arco qualquer, podemos usar essa ideia para representar genericamente a infinidade de arcos. Assim, retornando aos exemplos, utilizamos a medida do arco na 1ª volta positiva e acrescentamos um número genérico de voltas (representado pela letra *k*). Temos aí **a expressão geral de todos os arcos que são côngruos** a determinado arco.

Exemplos:

- Sendo *x* a medida em graus dos arcos côngruos a 230°, temos, para $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = 230° + k \cdot 360° \rightarrow \text{expressão geral dos arcos côngruos ao arco 230°;}$$

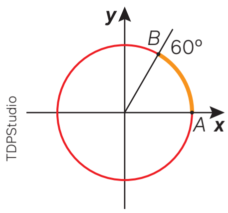
- Sendo *x* a medida em radianos dos arcos côngruos a $\frac{7\pi}{5}$, temos, para $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = \frac{7\pi}{5} + k \cdot 2\pi \rightarrow \text{expressão geral dos arcos côngruos ao arco } \frac{7\pi}{5} \text{ rad.}$$

Nessas expressões gerais, se forem atribuídos valores inteiros a *k*, os arcos obtidos são côngruos.

Atividades resolvidas

8. Na circunferência trigonométrica a seguir está representada a extremidade do arco de medida 60°. Determine a expressão geral de todos os arcos que têm as mesmas extremidades A e B do arco indicado.



- Sendo x um arco qualquer côngruo ao arco de medida 60°, então a diferença entre suas medidas será um múltiplo de 360°. Assim, temos:

$$x - 60° = k \cdot 360°$$
$$x = 60° + k \cdot 360° \ (k \in \mathbb{Z})$$

A expressão obtida representa todos os arcos que são côngruos ao arco de medida 60°.

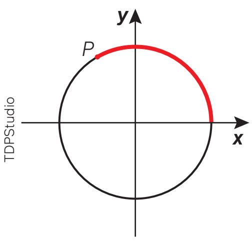
9. Sendo k um número inteiro qualquer, represente na circunferência trigonométrica todos os arcos x tais que $x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$.

- Atribuindo valores inteiros para k, temos os seguintes arcos:

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 0 \cdot 2\pi \rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$
$$k = 1 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 1 \cdot 2\pi \rightarrow x = \frac{8\pi}{3}$$
$$k = 2 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi \rightarrow x = \frac{14\pi}{3}$$
$$k = 3 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 3 \cdot 2\pi \rightarrow x = \frac{20\pi}{3}$$

(...)

Representando aproximadamente na circunferência trigonométrica o ponto correspondente às extremidades desses arcos, temos o ponto P abaixo:



Como são todos arcos côngruos, eles têm em comum o ponto que representa as extremidades na circunferência trigonométrica.

Para pensar e discutir

1. Para k sendo um número inteiro qualquer, qual é o significado de todos os números da forma $k \cdot 5$? 1. Múltiplos de 5.
2. Para k sendo um número inteiro qualquer, qual é o significado de todos os arcos com medidas em radianos representados por $k \cdot 2\pi$? 2. Arcos com medidas múltiplas de 2π radianos.
3. Qual é a diferença entre as medidas de dois arcos x quaisquer da forma $x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$? 3. Um múltiplo de 2π radianos.

Para explorar

Junte-se a um colega para esta atividade de exploração.

1. Indiquem quatro arcos em que suas medidas em graus sejam superiores a 720°, mas que não sejam múltiplos do arco de medida 360°. Para cada um desses arcos, vocês devem determinar: 1. Resposta pessoal.
   - a menor determinação positiva do arco;
   - a expressão geral de todos os arcos que são côngruos;
   - o quadrante a que pertence a extremidade do arco.

   Organizem essas informações em uma tabela.
2. Indiquem quatro arcos em que suas medidas em graus sejam superiores a 2π rad, mas que não sejam múltiplos do arco de medida 2π rad. Para cada um desses arcos, vocês devem determinar: 2. Resposta pessoal.
   - a menor determinação positiva do arco;
   - a expressão geral de todos os arcos que são côngruos;
   - o quadrante a que pertence a extremidade do arco.

   Organizem essas informações em uma tabela.
3. Apresentem as duas tabelas para os demais colegas. 3. Resposta pessoal.

Atividades

11. Indique o quadrante a que pertence a extremidade de cada um dos arcos, na circunferência trigonométrica, conforme as suas medidas a seguir:

a) 8 000° 11. a) 1º quadrante

b) 3 600° 11. b) Não pertence a nenhum quadrante.

c) $\frac{15\pi}{4}$ rad 11. c) 4º quadrante

d) $\frac{77\pi}{3}$ rad 11. d) 4º quadrante

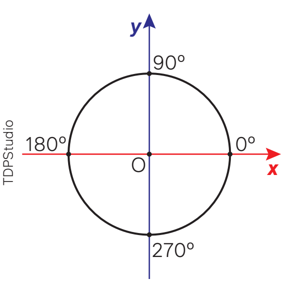
12. Na circunferência trigonométrica, considere todos os arcos representados pela expressão geral $x = k \cdot 360° + 220°$, sendo k um número inteiro, e faça o que se pede:

a) Indique a medida do arco para $k = 10$; 12. a) 3 820°

b) Indique o quadrante a que pertence a extremidade de todos os arcos x; 12. b) 3º quadrante

c) Qual é a medida em graus da menor determinação positiva de todos os arcos representados? 12. c) 220°

13. Na circunferência trigonométrica, a seguir estão indicados os pontos correspondentes aos arcos, no sentido anti-horário, que interceptam os eixos coordenados. 13. Respostas no Manual do Professor.



a) Para cada um deles escreva a expressão de todos os arcos que são côngruos.

b) Sendo k um número inteiro, explique o que representa, em relação aos arcos indicados na circunferência, a expressão $x = k \cdot 90°$.

14. Em trigonometria, utilizamos expressões gerais para representar arcos diversos na circunferência trigonométrica. Considerando que k representa um número inteiro qualquer, represente na circunferência trigonométrica os arcos na 1ª volta positiva dados por: 14. Resposta no Manual do Professor.

a) $x = \frac{k \cdot \pi}{3}$ **b)** $x = \frac{k \cdot \pi}{6}$ **c)** $x = \frac{k \cdot \pi}{4}$

15. Considere os infinitos arcos x da forma $x = k \cdot \pi + \frac{\pi}{4}$ na circunferência trigonométrica, em que k representa um número inteiro qualquer.

a) Para $k = -1$, o arco x terá extremidade em que quadrante? Qual é esse arco? 15. a) 3º quadrante; $-\frac{3\pi}{4}$

b) Para $k = 1$, o arco x terá extremidade em que quadrante? Qual é esse arco? 15. b) 3º quadrante; $\frac{5\pi}{4}$

c) Se $k = 2$, o arco x terá extremidade em que quadrante? Qual é esse arco? 15. c) 1º quadrante; $\frac{9\pi}{4}$

d) E se $k = -2$, o arco x terá extremidade em que quadrante? Qual é esse arco? 15. d) 1º quadrante; $-\frac{7\pi}{4}$

16. Junte-se a um colega para esta atividade. 16. Respostas no Manual do Professor.

a) Elaborem o desenho de uma circunferência trigonométrica e indiquem nela os pontos correspondentes às extremidades dos arcos x representados pela expressão:

$x = k \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}$, sendo k um número inteiro qualquer.

b) Façam o mesmo para os arcos x correspondentes à expressão:

$x = k \cdot 180° + (-1)k \cdot 30°$, sendo k um número inteiro qualquer.

17. Na disciplina de Física estuda-se também o Movimento Circular Uniforme (MCU). A velocidade angular de um objeto em MCU, que representamos por W, é definida como a razão entre a variação do ângulo (deslocamento angular: $\Delta\theta$) e a variação do tempo Δt. A variação do ângulo é dada em radianos, e o tempo, em segundos. Assim, a velocidade angular é dada em rad/s (radianos por segundo).


VectorVicePhoto/Shutterstock.com

$$W = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

As pás de um ventilador descrevem um MCU. Considere que cada pá de um ventilador (como o da imagem) faz 5 voltas completas em 1 segundo. Determine:

a) O deslocamento angular de cada pá. 17. a) 10π rad

b) A velocidade angular de cada pá. 17. b) $W = 10\pi$ rad/s

18. Junte-se a um colega para esta atividade. 18. Respostas no Manual do Professor.

a) Elaborem e resolvam uma situação envolvendo velocidade angular.

b) Apresentem a situação a outra dupla para que a resolvam.

19. O ponteiro das horas de um relógio analógico dá uma volta completa em 12 horas, o dos minutos em 1 hora e o dos segundos em 1 minuto.

monticello/Shutterstock.com

Determine a velocidade angular em rad/s:

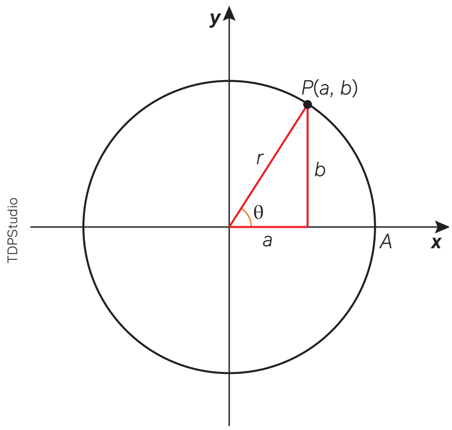
a) do ponteiro das horas; 19. a) $\frac{\pi}{21\,600}$ rad/s

b) do ponteiro dos minutos; 19. b) $\frac{\pi}{1\,800}$ rad/s

c) do ponteiro dos segundos. 19. c) $\frac{\pi}{30}$ rad/s

Seno e cosseno na circunferência trigonométrica

Para entender melhor o motivo de utilizarmos uma circunferência trigonométrica, vamos considerar uma circunferência com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas, porém o raio não é unitário. Representando por r a medida do raio, considere um ângulo central θ, conforme indicado na figura a seguir. Vamos determinar as coordenadas (a, b) do ponto P em função de r e de θ:



No triângulo retângulo destacado, utilizando seno e cosseno do ângulo agudo θ, temos:

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r \cdot \cos\theta$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \cdot \text{sen}\,\theta$$

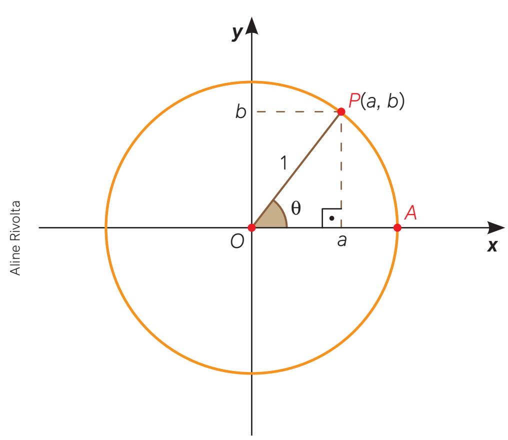
Assim, temos que o ponto P tem as seguintes coordenadas:

$$P(r \cdot \cos\theta, r \cdot \text{sen}\,\theta)$$

E se a circunferência for a trigonométrica, isto é, raio igual a 1, ou seja, raio unitário?

Observe na circunferência trigonométrica a seguir a representação de um arco AP correspondente a um ângulo central θ. A extremidade do arco é o ponto P de coordenadas cartesianas (a, b).

Observe a seguir o triângulo retângulo de hipotenusa 1 e catetos a e b (coordenadas do ponto).



Calculando as razões cosseno e seno do ângulo θ nesse triângulo retângulo, temos:

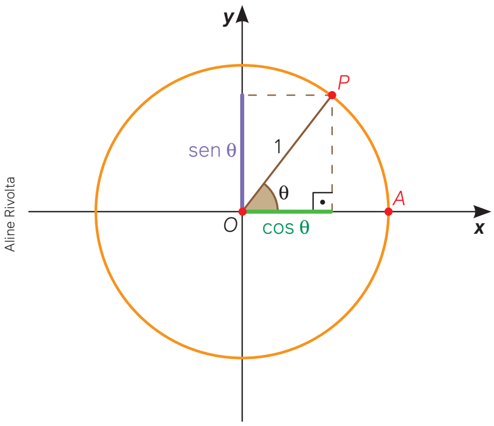
$$\cos\theta = \frac{a}{1} \Rightarrow a = \cos\theta$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{1} \Rightarrow b = \text{sen}\,\theta$$

Dessa forma, as coordenadas do ponto P são:

$$\boldsymbol{P(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)}$$

Retornando à circunferência, podemos interpretar cos θ e sen θ como coordenadas do ponto *P* na circunferência trigonométrica, tal que o arco *AP* meça θ. Observe a figura abaixo.



Interpretando dessa forma, podemos considerar que, para qualquer ponto da circunferência trigonométrica correspondente à extremidade de um arco, o cosseno e o seno são obtidos projetando-se ortogonalmente a extremidade desse arco no eixo *x* (**o cosseno será uma abscissa**) e no eixo *y* (**o seno será uma ordenada**), respectivamente.

Para pensar e discutir

1. Observe o triângulo retângulo, conforme figura anterior, em que a hipotenusa é 1 e os catetos são seno e cosseno do ângulo θ. Utilizando o teorema de Pitágoras, que relação matemática é possível obter relacionando seno e cosseno do mesmo arco? 1. $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$
2. Qual é o maior valor possível para cos θ? Para qual ângulo θ na primeira volta positiva? 2. 1; 0 rad = 0°
3. Qual é o menor valor possível para cos θ? Para qual ângulo θ a primeira volta positiva? 3. –1; π rad = 180°
4. Qual é o maior valor possível para sen θ? Para qual ângulo θ na primeira volta positiva? 4. 1; $\frac{\pi}{2}$ rad = 90°
5. Qual é o menor valor possível para sen θ? Para qual ângulo θ a primeira volta positiva? 5. –1; $\frac{3\pi}{2}$ rad = 270°

A relação que você obteve na **atividade 1** do boxe **Para pensar e discutir** é a **relação fundamental da trigonometria**, que é válida para qualquer arco θ, isto é:

$$\textbf{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$$

Essa relação possibilita obter o seno de um arco conhecendo-se o cosseno desse arco e o quadrante desse arco, ou, de forma equivalente, obter o cosseno de um arco conhecendo-se o seno desse arco e o quadrante correspondente a esse arco.

Atividades resolvidas

10. Se o arco *x* pertence ao 2º quadrante e o cos *x* = –0,2, determine o valor aproximado para o seno desse arco.

- Utilizando a relação fundamental da trigonometria, temos:

$$\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1$$
$$\text{sen}^2\,x + (-0{,}2)^2 = 1$$
$$\text{sen}^2\,x + 0{,}04 = 1$$
$$\text{sen}^2\,x = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$$
$$\text{sen}\,x = \pm\sqrt{0{,}96} \Rightarrow \text{sen}\,x \cong \pm 0{,}98$$

Como o arco *x* pertence ao 2º quadrante, temos que o seno será positivo, isto é, sen *x* ≅ 0,98.

11. Considere que para um arco θ tem-se que sen $\theta = 0$. Determine os possíveis valores para a razão trigonométrica cos θ.

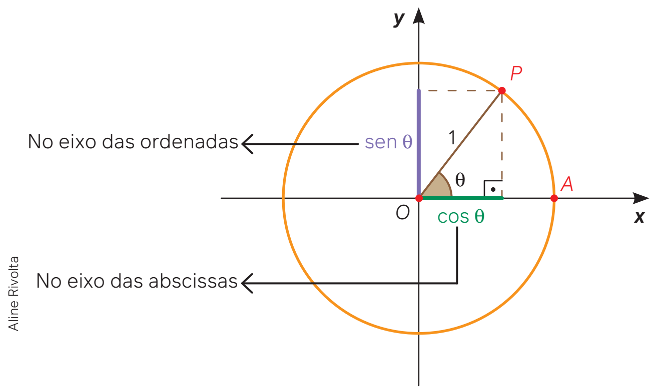
- Utilizando a relação fundamental da trigonometria, temos:

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$0 + \cos^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \pm 1$$

Assim, os possíveis valores para cos θ são +1 ou –1.

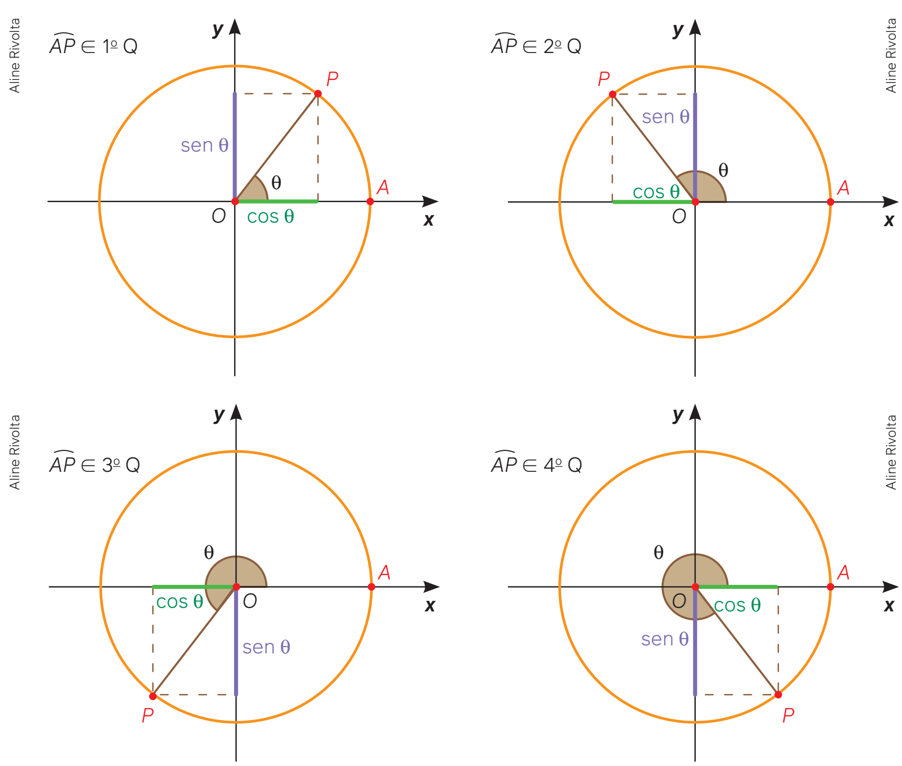
Os sinais de seno e cosseno

A seguir temos a representação do seno e cosseno de um arco na circunferência trigonométrica como as coordenadas da extremidade desse arco.



Veja que esse tipo de representação permite a determinação do seno e do cosseno de um ângulo a partir do ponto correspondente à extremidade do arco da seguinte maneira: projetamos ortogonalmente esse ponto no eixo das abscissas (x) e no eixo das ordenadas (y) para determinar, respectivamente, o cosseno (abscissa do ponto) e o seno (ordenada do ponto) do ângulo correspondente ao ponto.

Observe as representações das extremidades de quatro arcos, um em cada quadrante, e suas projeções nos eixos coordenados.



Para pensar e discutir

1. Em quais quadrantes o seno é positivo? E em quais ele é negativo? 1. 1º e 2º; 3º e 4º

2. Em quais quadrantes o cosseno é positivo? E em quais ele é negativo? 2. 1º e 4º; 2º e 3º

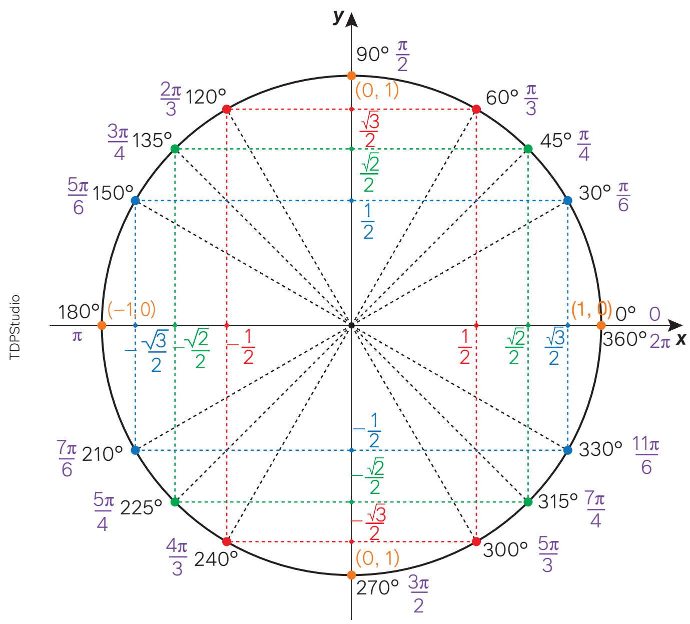
3. Sabe-se que para um determinado arco x tem-se que $(\text{sen } x) \cdot (\cos x) < 0$. A qual quadrante pertence esse arco? 3. 2º ou 4º

Os valores de seno e cosseno dos arcos de medidas 30°, 45° e 60° já foram trabalhados no capítulo anterior. No quadro, resumimos os resultados já conhecidos.

Agora vamos observar esses valores e também as extremidades desses arcos na circunferência trigonométrica.

Fazendo prolongamentos, conforme linhas tracejadas, podemos obter outros arcos nos demais quadrantes. As medidas em preto são dadas em graus e as em roxo são dadas em radianos.

	30°	**45°**	**60°**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$



Utilizando essa figura sugerimos a seguir uma atividade de exploração para que você tire algumas conclusões.

Para explorar

Junte-se a mais dois colegas para esta atividade, utilizando a figura anterior.

1. Considerando o retângulo tracejado com vértices nas extremidades dos arcos de medidas 30°, 150°, 210° e 330°, respondam:

a) Quais são os valores do seno de cada um desses arcos?

b) Quais são os valores do cosseno de cada um desses arcos?

1. a) $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$, $\text{sen } 150° = \frac{1}{2}$, $\text{sen } 210° = -\frac{1}{2}$, $\text{sen } 330° = -\frac{1}{2}$

1. b) $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Considerando o retângulo tracejado com vértices nas extremidades dos arcos de medidas 45°, 135°, 225° e 315°, respondam:

a) Quais são os valores do seno de cada um desses arcos?

b) Quais são os valores do cosseno de cada um desses arcos?

2. a) $\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{sen } 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{sen } 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{sen } 315° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. b) $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 315° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Considerando o retângulo tracejado com vértices nas extremidades dos arcos de medidas 60°, 120°, 240° e 300°, respondam:

a) Quais são os valores do seno de cada um desses arcos?

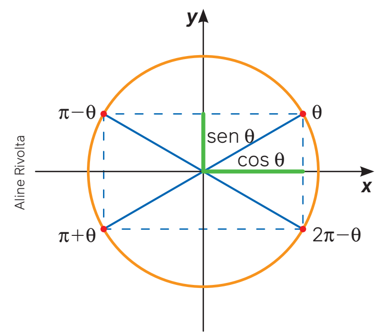
b) Quais são os valores do cosseno de cada um desses arcos?

3. a) $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen } 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen } 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. b) $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, $\cos 240° = -\frac{1}{2}$, $\cos 300° = \frac{1}{2}$

Atividades resolvidas

12. Na circunferência trigonométrica abaixo, representamos genericamente a medida de um arco do 1º quadrante e indicamos os valores do seno e do cosseno desse arco. Note que, em função dessa medida, localizamos, nos demais quadrantes, outros três arcos.



- Queremos determinar o seno e o cosseno dos arcos indicados por $\pi - \theta$, $\pi + \theta$ e por $2\pi - \theta$, porém em função do seno e do cosseno de θ indicado no 1º quadrante. Observando que as extremidades desses arcos são vértices de um retângulo com centro na circunferência, temos, conforme algumas simetrias:

Arco: $\pi - \theta \rightarrow$ simétrico ao arco θ em relação ao eixo das ordenadas.

$$\text{sen}\ (\pi - \theta) = +\text{sen}\ \theta = \text{sen}\ \theta$$

$$\cos\ (\pi - \theta) = -\cos\ \theta$$

Arco: $\pi + \theta \rightarrow$ simétrico ao arco θ em relação ao centro da circunferência.

$$\text{sen}\ (\pi + \theta) = -\ \text{sen}\ \theta$$

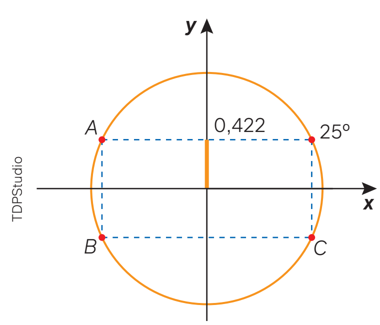
$$\cos\ (\pi + \theta) = -\ \cos\ \theta$$

Arco: $2\pi - \theta \rightarrow$ simétrico ao arco θ em relação ao eixo das abscissas.

$$\text{sen}\ (2\pi - \theta) = -\ \text{sen}\ \theta$$

$$\cos\ (2\pi - \theta) = +\cos\ \theta = \cos\ \theta$$

13. Na circunferência trigonométrica abaixo está representado, de forma aproximada, o arco de extremidade 25° e o valor do seno. Determine quais são, em graus, os arcos da primeira volta positiva com extremidades nos pontos *A*, *B* e *C*, considerando que são vértices de um retângulo com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas. Após, determine os senos desses arcos.



- A determinação das medidas dos arcos é a partir do arco correspondente ao 1º quadrante, isto é:

Arco no ponto *A*: $180° - 25° = 155°$

Arco no ponto *B*: $180° + 25° = 205°$

Arco no ponto *C*: $360° - 25° = 335°$

- Pelas simetrias desses arcos em relação ao arco do 1º quadrante, temos:

$$\text{sen}\ 155° = \text{sen}\ 25° \cong 0{,}422$$

$$\text{sen}\ 205° = -\text{sen}\ 25° \cong -0{,}422$$

$$\text{sen}\ 335° = -\text{sen}\ 25° \cong -0{,}422$$

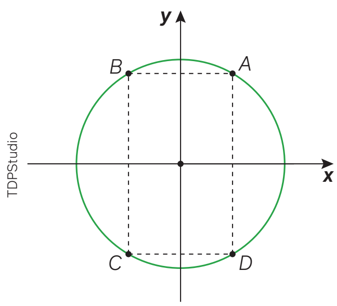
1. 0,42; 0,42; –0,42

Para pensar e discutir

1. Utilize uma calculadora para verificar os valores aproximados de sen 155°, sen 205° e sen 335°.

Atividades

20. Na circunferência trigonométrica a seguir foram marcadas as extremidades de quatro arcos A, B, C e D, a partir da origem dos arcos e no sentido anti-horário, de tal maneira que elas representam vértices de um retângulo, conforme a linha tracejada, com centro na origem do plano cartesiano. Considere que o arco A tem medida 60°.



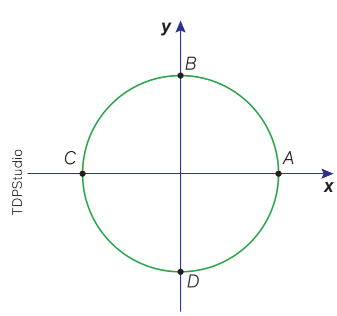
a) Em graus, na 1ª volta positiva, indique as medidas dos arcos B, C e D. 20. a) 120°, 240° e 300°.

b) Calcule o valor de $\text{sen } A + \text{sen } B + \text{sen } C + \text{sen } D$. 20. b) Zero.

c) Calcule o valor de $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D$. 20. c) Zero.

21. Considere um arco x pertencente ao 2º quadrante tal que $\cos x = -0{,}6$. Determine o valor de $\text{sen } x$. 21. $\text{sen } x = 0{,}8$

22. Na circunferência trigonométrica abaixo estão representadas as extremidades de quatro arcos A, B, C e D pertencentes ao intervalo $[0°, 360°[$.



Indique se as afirmações a seguir são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**).

I. Para os arcos A e C tem-se o valor do seno igual a zero. 22. I. V

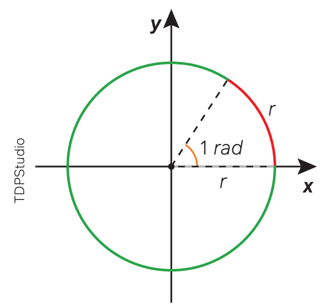
II. Para os arcos B e D tem-se o valor do cosseno igual a zero. 22. II. V

III. Quando o seno de um arco é igual a zero, o cosseno dele será um. 22. III. F

IV. Quando o cosseno de um arco é igual a um, o seno desse arco é igual a zero. 22. IV. V

23. Ao resolver uma situação envolvendo valores de seno e cosseno de um arco, chegou-se à expressão $\dfrac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} > 0$, em que $\cos \theta \neq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.
Em qual quadrante se encontra na circunferência trigonométrica a extremidade do arco θ? 23. 1º ou 3º

24. A medida do arco de 1 radiano corresponde aproximadamente à medida 57°. Na circunferência trigonométrica a seguir está representado o arco de 1 radiano.



Comparando os valores de sen 1 e cos 1, qual é o maior? Justifique. 24. sen 1; resposta pessoal.

25. Utilize uma calculadora para esta atividade.

Parte 1 25. Respostas pessoais.

a) Escreva dois arcos A e B que sejam complementares, isto é, $A + B = 90°$.

b) Calcule os valores de $\text{sen } A$ e $\cos B$.

c) O que você constatou comparando os valores?

Parte 2

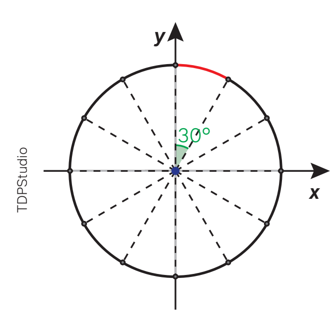
a) Escreva dois arcos A e B que sejam suplementares, isto é, $A + B = 180°$.

b) Calcule os valores de $\text{sen } A$ e $\cos B$.

c) Calcule os valores de $\cos A$ e $\cos B$.

d) O que você constatou comparando os valores dos senos dos arcos e depois comparando os valores dos cossenos desses arcos?

26. A circunferência trigonométrica abaixo representada foi dividida em 12 arcos iguais a partir da origem dos arcos, considerando a 1ª volta positiva.

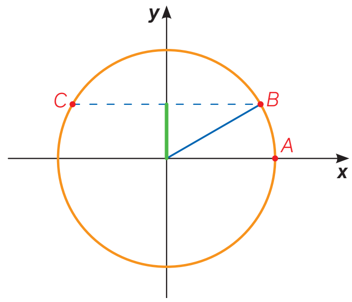


a) Escreva em ordem crescente as medidas em graus desses arcos. 26. a) 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330°.

b) Considerando a definição de seno de um arco, em quais quadrantes aumentando o arco o seno aumenta também? 26. b) 1º e 4º

c) Considerando a definição de cosseno de um arco, em quais quadrantes aumentando o arco o cosseno aumenta também? 26. c) 3º e 4º

27. Na circunferência trigonométrica abaixo estão indicados três pontos: A, que é a origem dos arcos; B, a extremidade do arco AB, e C, a extremidade do arco AC. Em verde está indicado no eixo y o valor do seno desses dois arcos.



Aline Rivolta

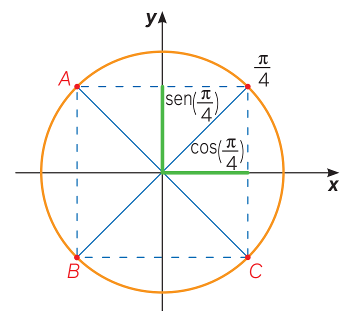
a) Se o arco AC tiver medida 121°, qual será a medida do arco AB? 27. a) 59°

b) Se o arco AB tiver medida 28°, qual será a medida do arco AC? 27. b) 152°

c) Qual é a relação entre as medidas dos arcos AB e AC, de acordo com a situação apresentada? 27. c) São suplementares.

d) Qual é o arco com extremidade no 2º quadrante cujo seno é o mesmo valor do sen 60°? 27. d) 120°

28. Observe que na circunferência trigonométrica a seguir estão indicados a extremidade do arco $\frac{\pi}{4}$ rad no 1º quadrante, o seno e o cosseno desse arco e os pontos A, B e C. Esses quatro pontos são os vértices de um quadrado. Faça o que se pede.



Aline Rivolta

a) Escreva em radianos as medidas dos arcos com extremidades nos pontos A, B e C. 28. a) $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$

b) Determine os valores de sen A, sen B e sen C. 28. b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Determine os valores de cos A, cos B e cos C. 28. c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

29. Utilizando como referência a atividade anterior, elabore uma situação envolvendo a obtenção de quatro arcos em uma circunferência trigonométrica que tenham senos iguais ou opostos e cossenos iguais ou opostos. Represente esses arcos na circunferência, seus senos e cossenos. Depois, apresente aos demais colegas. 29. Resposta pessoal.

30. Junte-se a um colega para esta atividade. Resolver uma equação trigonométrica é determinar todos os valores da incógnita que a verificam. Utilizando os senos e cossenos de arcos notáveis, resolvam cada equação a seguir.

a) $\text{sen}\,(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ para $x \in [0, 2\pi]$ 30. a) $\frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$

b) $\text{sen}\,(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$ 30. b) $2\pi k + \frac{7\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos\,(x) = -\frac{1}{2}$ para $x \in [0, 2\pi]$ 30. c) $\frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$

d) $\cos\,(x) = -\frac{1}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$ 30. d) $2\pi k \pm \frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

31. Junte-se a um colega para esta atividade.

Parte 1: Determinem as soluções das equações.

a) $\text{sen}\,x = 0$ para $x \in [0, 2\pi]$ 31. a) 0, π ou 2π

b) $\text{sen}\,x = 0$ para $x \in \mathbb{R}$ 31. b) $k\pi$

c) $\cos x = 0$ para $x \in [0, 2\pi]$ 31. c) $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$

d) $\cos x = 0$ para $x \in \mathbb{R}$ 31. d) $2k + \frac{\pi}{2}$

e) $\text{sen}\,x = \pm 1$ para $x \in [0, 2\pi]$ 31. e) $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$

f) $\text{sen}\,x = \pm 1$ para $x \in \mathbb{R}$ 31. f) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

g) $\cos x = \pm 1$ para $x \in [0, 2\pi]$ 31. g) 0, π ou 2π

h) $\cos x = \pm 1$ para $x \in \mathbb{R}$ 31. h) $k\pi$

Parte 2: Respondam:

i) Quando $\text{sen}\,x = 0$, o que se pode afirmar sobre o valor de $\cos x$? 31. i) 1 ou –1

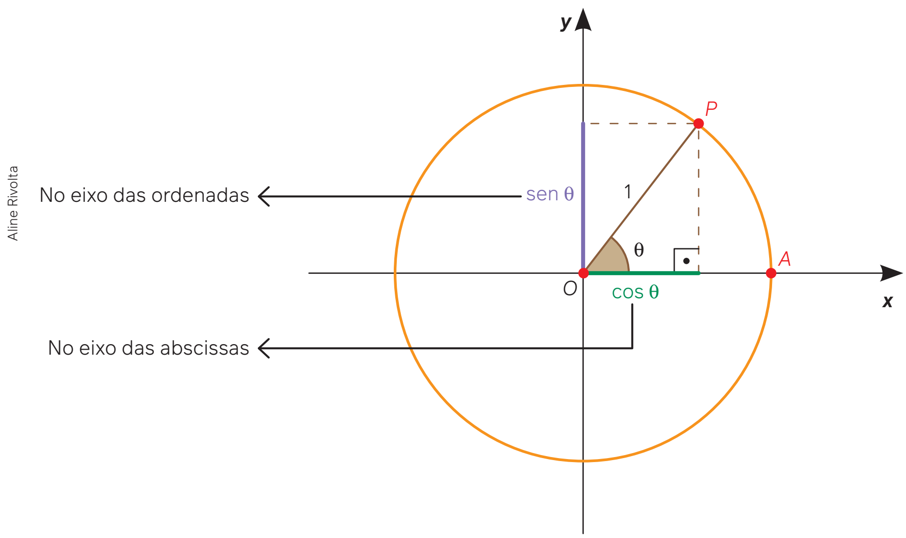
j) Quando $\cos x = 0$, o que se pode afirmar sobre o valor de $\text{sen}\,x$? 31. j) 1 ou –1

k) Quando $\text{sen}\,x = \pm 1$, o que se pode afirmar sobre o valor de $\cos x$? 31. k) 0

l) Quando $\cos x = \pm 1$, o que se pode afirmar sobre o valor de $\text{sen}\,x$? 31. l) 0

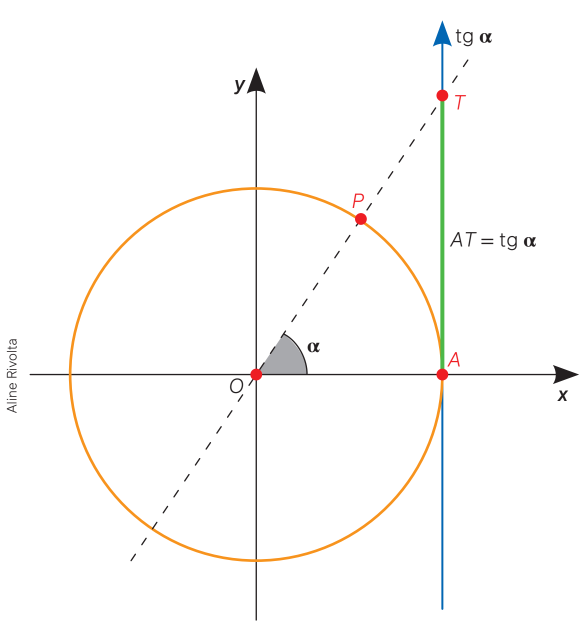
A tangente na circunferência trigonométrica

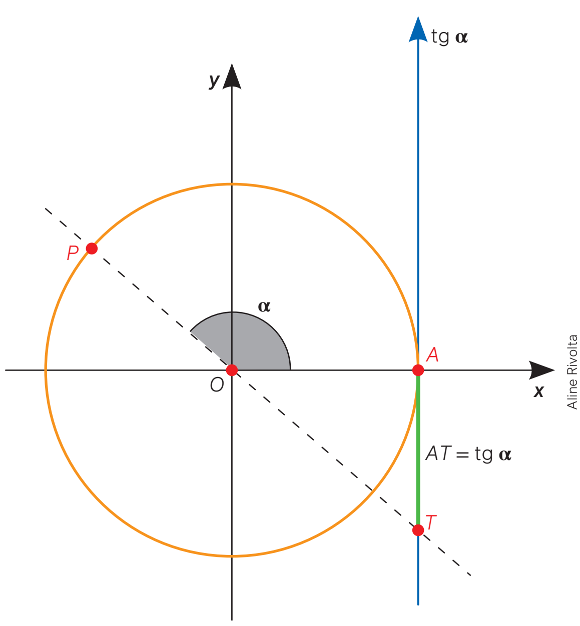
Vimos que na circunferência trigonométrica, ao marcarmos um ponto que corresponde à extremidade de um arco, sua projeção ortogonal no eixo das ordenadas indica uma ordenada que representa o valor do seno desse arco. Analogamente, a projeção ortogonal desse ponto no eixo das abscissas indica uma abscissa que corresponde ao valor do cosseno desse arco.



Na circunferência trigonométrica, o eixo perpendicular ao eixo horizontal (eixo dos cossenos) na origem dos arcos é o eixo em que representamos geometricamente a tangente de um arco. Esse eixo tem a mesma orientação que o eixo dos senos.

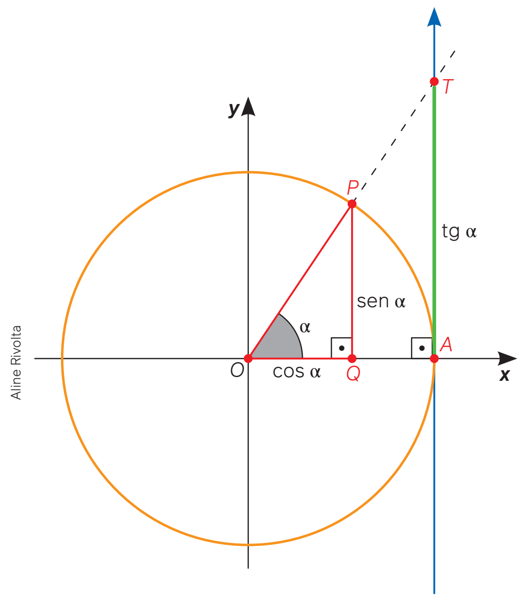
Na ilustração abaixo, traçamos a reta *OP* e determinamos o ponto *T* no qual ela intercepta o eixo das tangentes. O segmento *AT* é a representação geométrica da tangente de α, isto é, a medida algébrica do segmento *AT* é a tangente de arco *AP* igual a α.





O eixo das tangentes é perpendicular ao eixo das abscissas e, portanto, é paralelo ao eixo das ordenadas. Utilizando a orientação vertical para cima como positiva e para baixo como negativa, temos que a tangente de um arco com extremidade no primeiro quadrante é positiva, enquanto, em um arco com extremidade no segundo quadrante, a tangente é negativa.

Agora vamos retomar, na circunferência trigonométrica, os valores do seno e do cosseno do mesmo arco e a representação da tangente desse arco. Podemos obter a tangente de um arco em função do seno e do cosseno do mesmo arco.



Note que os triângulos retângulos *ATO* e *QPO* são semelhantes. Dessa forma, temos:

$$\frac{AT}{PQ} = \frac{OA}{OQ}$$

$$\frac{\text{tg } \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\mathbf{tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}}$$

A tangente em função do seno e do cosseno.

Nessa relação, o denominador não pode ser igual a zero, isto é, $\cos \alpha \neq 0$. Sabemos que o cosseno se anula para os arcos com extremidade em $\frac{\pi}{2}$ rad, $\frac{3\pi}{2}$ rad e todos os arcos côngruos a esses dois na circunferência trigonométrica. Dessa forma, para calcular a tangente de qualquer outro arco, basta obter o valor do quociente do seno pelo cosseno do referido arco na circunferência.

Atividades resolvidas

14. Responda:

a) Qual é o sinal da tangente em cada um dos quatro quadrantes?

b) Conforme a medida do arco se aproxima de 90° no 1º quadrante, o que acontece com o valor da tangente? E se o arco medir exatamente 90°?

- Item **a)** Observando as definições de seno e de cosseno na circunferência trigonométrica, sendo *x* um arco temos:

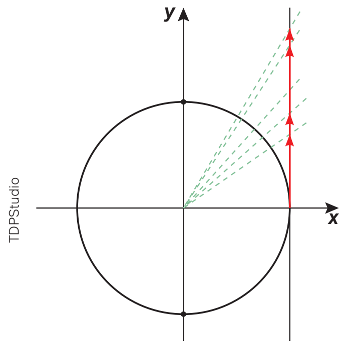
$$x \in 1^{\text{o}} \text{ quadrante: sen } x > 0 \text{ e } \cos x > 0 \Rightarrow \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} > 0$$

$$x \in 2^{\text{o}} \text{ quadrante: sen } x > 0 \text{ e } \cos x < 0 \Rightarrow \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} < 0$$

$$x \in 3^{\text{o}} \text{ quadrante: sen } x < 0 \text{ e } \cos x < 0 \Rightarrow \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} > 0$$

$$x \in 4^{\text{o}} \text{ quadrante: sen } x < 0 \text{ e } \cos x > 0 \Rightarrow \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} < 0$$

- Item **b)** À medida que o arco se aproxima de 90° no 1º quadrante podemos dizer que a tangente tende a assumir um valor muito grande (dizemos que "tende ao infinito"). Para o arco de 90° não é definida a tangente, pois não há interseção, uma vez que os dois segmentos serão paralelos.



15. Considere que um arco x é tal que sen $x = 0{,}6$. Se esse arco pertence ao 2º quadrante, qual é o valor da tangente desse arco?

- Utilizando a relação fundamental da trigonometria calculamos o valor do cosseno do arco:

$$\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$$
$$0{,}6^2 + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = 1 - 0{,}36$$
$$\cos^2 x = 0{,}64 \Rightarrow \cos x = \pm 0{,}8$$

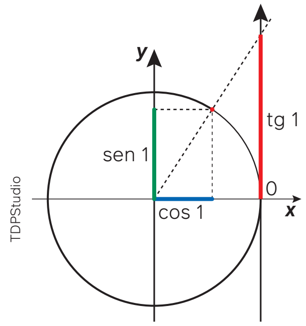
Como o arco pertence ao 2º quadrante, temos que cos x = –0,8.

- Cálculo do valor da tangente:

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$$
$$\text{tg}\, x = \frac{0{,}6}{-0{,}8}$$
$$\text{tg}\, x = -\frac{3}{4} \Rightarrow \text{tg}\, x = -0{,}75$$

16. Já foi proposta uma atividade para a comparação entre seno e cosseno do arco de medida 1 radiano. Coloque em ordem crescente os valores correspondentes a sen 1, cos 1 e tg 1.

- Como 1 radiano é aproximadamente 57°, representamos na circunferência trigonométrica os valores de seno, cosseno e tangente para comparar:



Assim, comparando, temos: cos 1 < sen 1 < tg 1.

Importante:

Apresentamos a tangente como quociente entre seno e cosseno de um mesmo arco. Além da tangente, existem outras razões trigonométricas que são também obtidas a partir do seno e do cosseno:

- Cotangente de x: **cotg** $\boldsymbol{x} = \dfrac{\mathbf{cos}\, \boldsymbol{x}}{\mathbf{sen}\, \boldsymbol{x}}$ $\left(\text{sen}\, x \neq 0\right)$
- Secante de x: **sec** $\boldsymbol{x} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}\, \boldsymbol{x}}$ $\left(\cos x \neq 0\right)$
- Cossecante de x: **cossec** $\boldsymbol{x} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen}\, \boldsymbol{x}}$ $\left(\text{sen}\, x \neq 0\right)$

Nosso interesse maior é o estudo das funções trigonométricas seno e cosseno, como faremos a seguir.

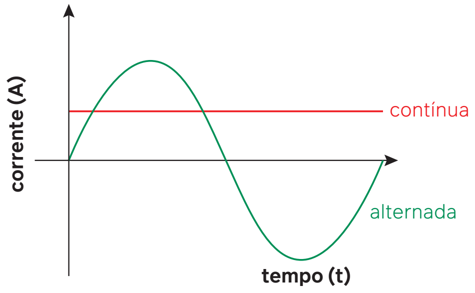
2 As funções seno e cosseno

Você já ouviu falar em corrente contínua? E em corrente alternada?

Luciana Whitaker/Pulsar Imagens

Torres de transmissão de energia próximo à Usina Termomacaé da Petrobrás, Macaé (RJ), novembro de 2021.

Se pesquisarmos o significado desses dois tipos de correntes, veremos que estão relacionados com a transmissão de energia e, de uma forma simplificada, podem ser até ilustradas em gráfico que relaciona a corrente em função do tempo, como esboçado a seguir.



TDPStudio

Para pensar e discutir

1. O que você entende por corrente contínua? 1. Resposta pessoal.
2. E por corrente alternada? 2. Resposta pessoal.

Análise e contexto

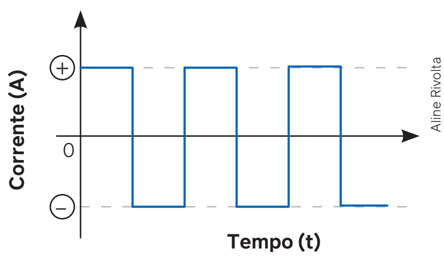
Corrente alternada e corrente contínua

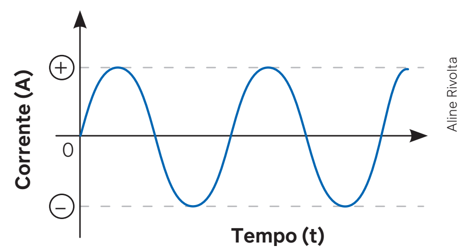
Elaboramos um texto que permite ter uma ideia um pouco melhor a respeito de corrente alternada e corrente contínua. Procure ler com atenção para, ao final, discutir com seus colegas algumas ideias a respeito.

Uma corrente elétrica é um "fluxo de elétrons", isto é, um fluxo de partículas que carregam energia ao longo de um fio. Quando os elétrons se movimentam em um único sentido, dizemos que a corrente é contínua, mas quando mudam de direção de forma constante, a corrente é alternada.

Quando falamos em transmissão de energia elétrica, por exemplo, de uma usina hidrelétrica até a sua casa, geralmente consideramos a corrente alternada. Essa escolha se dá quando a energia é transmitida na forma de corrente alternada, pois ela é submetida a altas voltagens e baixas intensidades de correntes. Esse processo acarreta uma menor perda de calor e de energia em relação à transmissão por corrente contínua. Antes de chegar às residências, essa tensão é rebaixada para 110 V ou 220 V por meio do uso de transformadores.

A nomenclatura corrente **alternada** se refere ao fato de que dentro do circuito o sentido dela é alterado periodicamente. Entre os tipos mais comuns de correntes alternadas, temos a quadrada e a senoidal. Como ilustrado nos gráficos a seguir, a intensidade varia de máximo positivo (+) a máximo negativo (–), dentro de um intervalo de tempo.

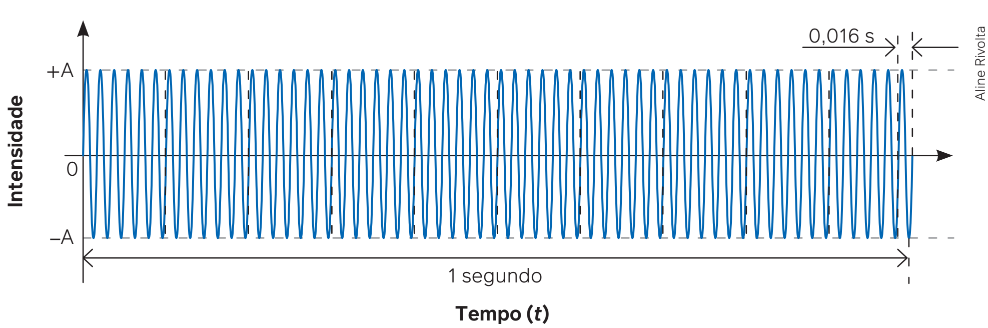




Observe que nos dois gráficos, em intervalos de tempo, as "curvas" se repetem.

Pensemos na representação de uma curva para corrente alternada. Aqui, a variável mais importante é a frequência, que fornece a quantidade de vezes que essa onda alternou de um valor $+A$ para um valor $-A$ dentro de um intervalo de tempo. Convencionamos que esse intervalo de tempo é de 1 segundo. Dessa forma, a frequência corresponde ao número de vezes que, em 1 segundo, a corrente alterna seu ciclo de "positivo para negativo".

No território brasileiro, a frequência adotada para circuitos de corrente alternada é de 60 Hz (hertz); isto é, em 1 segundo a onda completa 60 ciclos, com período (tempo que leva para completar um ciclo) de 16,67 milissegundos, conforme ilustrado no gráfico a seguir.



1. Utilizando como referência o exemplo da corrente alternada, qual é a diferença entre período e frequência? Como calcular o período a partir da frequência? 1. Respostas no Manual do Professor.

2. Quantas vezes por minuto bate o coração de uma pessoa considerado normal pela medicina?
2. De 60 a 100 batimentos por minuto.

Como sugestão, assistam ao filme *A batalha das correntes*, de Alfonso Gomez-Rejon (108 min), para compreender melhor a escolha entre corrente elétrica e corrente alternada.

Veremos a seguir o comportamento de duas funções especiais que modelam fenômenos periódicos: a função seno e a função cosseno. Conhecer o comportamento dessas funções o ajudará a compreender diversos fenômenos.

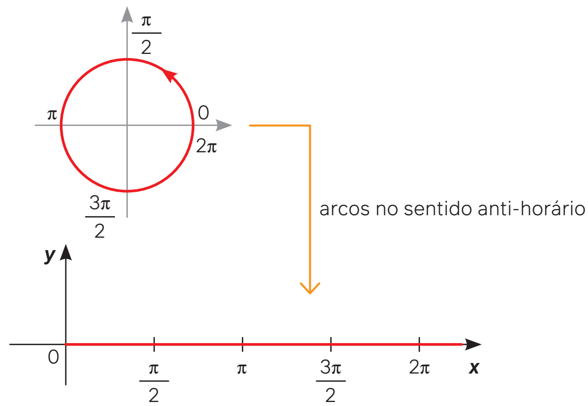
Função seno

Como o seno na circunferência trigonométrica representa a ordenada da extremidade de um arco, podemos dizer que o seno depende do arco, isto é, o seno é uma função do arco. Para entender melhor essa relação de dependência, vamos considerar a definição a seguir.

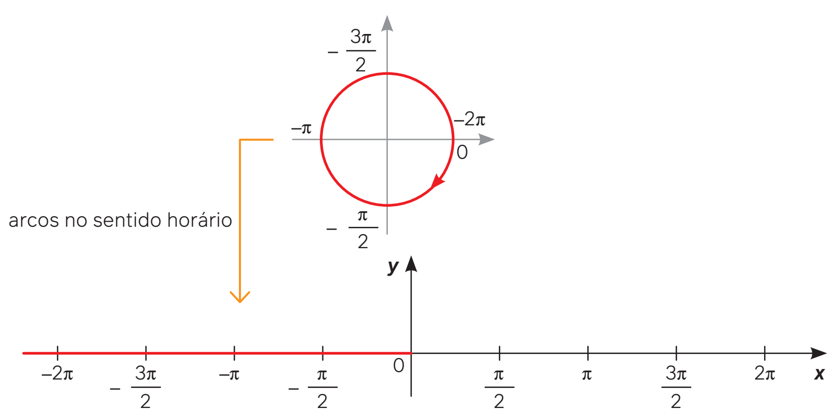
Dado um ângulo cuja medida em radianos é x, chamamos de **função seno** a função que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o número sen $x \in \mathbb{R}$. Indicamos por:

$$y = f(x) = \text{sen } x$$

O interesse maior no estudo de uma função trigonométrica está no comportamento do gráfico correspondente à função, ou seja, observar o que acontece com y quando atribuímos valores a x. Primeiro, é necessário compreender que a circunferência trigonométrica estará, tanto no sentido anti-horário como no sentido horário, retificada no eixo das abscissas.



Aline Rivolta



Aline Rivolta

Para pensar e discutir

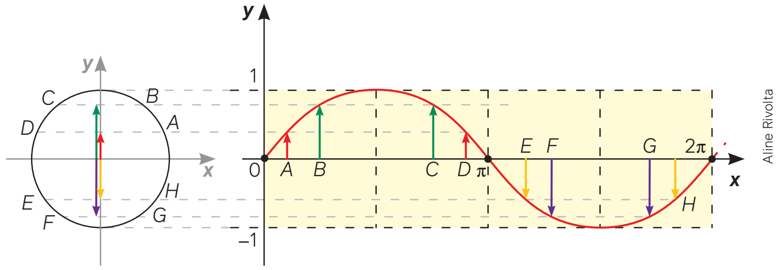
1. Os pontos consecutivos representados acima no eixo x estão igualmente espaçados. Qual é a distância aproximada entre eles (utilize 3,14 como aproximação para π)? 1. 1,57
2. Entre quais desses pontos consecutivos está o arco de medida 2 rad? E o arco de medida –2 rad?
3. Entre quais desses pontos consecutivos está o arco de medida $\frac{7\pi}{4}$ rad? E o arco de medida $-\frac{7\pi}{4}$ rad?

2. Entre $\frac{\pi}{2}$ e π e entre $-\frac{\pi}{2}$ e $-\pi$.

3. Entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π e entre $-\frac{3\pi}{2}$ e -2π

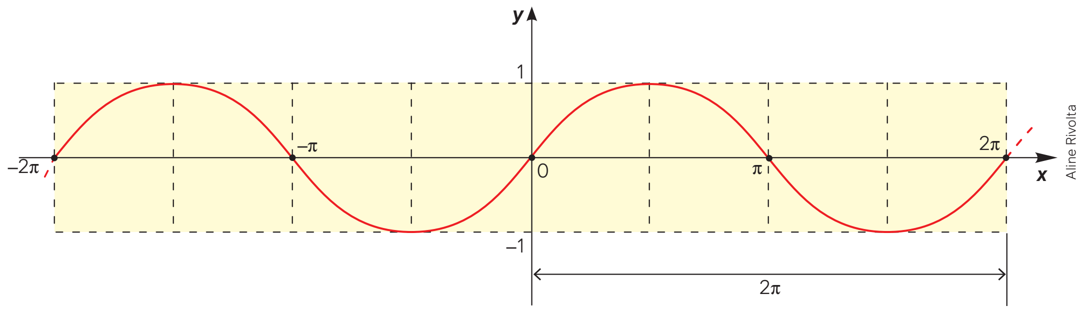
O gráfico da função seno pode ser construído utilizando um *software* de geometria dinâmica, como vamos reforçar um pouco mais à frente. Ele também pode ser feito em uma folha de papel quadriculada atribuindo valores à variável *x* e obtendo os valores correspondentes para a variável *y*. Entretanto, a própria definição de seno na circunferência trigonométrica ajuda a ter uma boa ideia de como será esse gráfico.

Na figura a seguir à esquerda, temos a circunferência trigonométrica e quatro valores de seno indicados pelas setas coloridas. Como o maior valor do seno é 1 e o menor valor é –1, temos que no plano cartesiano à direita o valor de $y = \text{sen } x$ irá variar de –1 a 1.



Note que, no gráfico acima à direita, estão indicados os oito pontos correspondentes às extremidades dos arcos, e os valores correspondentes aos senos estão indicados por setas coloridas. Procedendo dessa maneira e considerando mais pontos, podemos chegar ao gráfico esboçado. Porém, como temos arcos negativos, esse gráfico se estende à esquerda do eixo das ordenadas, como mostrado a seguir.

- Gráfico da função seno: $y = f(x) = \text{sen } x$

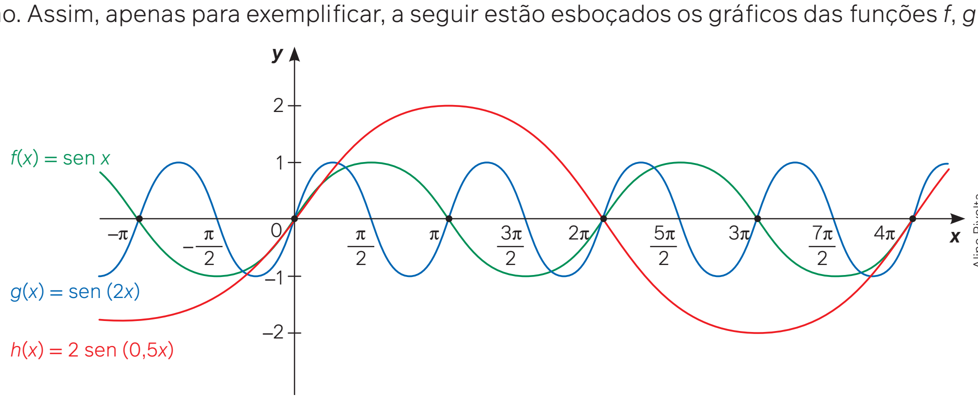


Embora esteja representado apenas o gráfico no intervalo de –2π a 2π, ele varia em toda a reta dos números reais.

Para pensar e discutir

1. O domínio de uma função $y = f(x)$ representa os valores assumidos por *x*. Qual é o domínio dessa função? 1. ℝ
2. A imagem de uma função $y = f(x)$ representa o conjunto formado por todos os valores de *y* na função. Qual é o conjunto imagem da função acima? 2. [–1; 1]
3. Essa função é periódica? Qual é seu período? 3. Sim; 2π radianos.
4. Para valores de *x* que são opostos, o que ocorre com os valores em correspondência dos senos? 4. Suas imagens serão opostas.

Agora que você já tem uma ideia a respeito do gráfico da função seno definida por $y = f(x) = \text{sen } x$, é preciso ampliar esse conhecimento utilizando tecnologia. A ideia é constatar que diferentes gráficos podem estar relacionados ao seno. Assim, apenas para exemplificar, a seguir estão esboçados os gráficos das funções *f*, *g* e *h*, tais que:



Note que essas funções não têm o mesmo conjunto imagem e também não têm o mesmo período. Como saber qual é o conjunto imagem e como determinar o período dessas funções? É hora de você investigar!

Para explorar

Junte-se a 3 colegas para esta atividade.

Vocês devem utilizar um *software* de geometria dinâmica. Observem que, assim como na calculadora, o seno é indicado por *sin*. A ideia central desta atividade é investigar os significados dos números reais A, B, C e D nos gráficos de funções na forma: $\boldsymbol{y = f(x) = A \cdot \text{sen}\,(Bx + C) + D}$.

Parte 1

Gráficos da forma $\boldsymbol{y = f(x) = A \cdot \text{sen}\, x}$. Isto é, atribuímos valores positivos para A e fixamos os valores de B, C e D em: $B = 1$, $C = 0$ e $D = 0$.

Instruções Parte 1: Resposta pessoal.

1. Inicialmente, construam o gráfico para $A = 1$, isto é: $y = f(x) = 1 \cdot \text{sen}\, x$. Esse gráfico deve permanecer fixo.
2. Atribuindo outros valores positivos a A, façam diversos gráficos no mesmo plano cartesiano.
3. Escrevam uma conclusão sobre o que os valores de A alteram nos gráficos.

Parte 2

Gráficos da forma $\boldsymbol{y = f(x) = \text{sen}\,(B \cdot x)}$. Isto é, atribuímos valores positivos para B e fixamos os valores de A, C e D em: $A = 1$, $C = 0$ e $D = 0$.

Instruções Parte 2: Resposta pessoal.

1. Inicialmente, construam o gráfico para $B = 1$, isto é: $y = f(x) = \text{sen}\,(1 \cdot x)$. Esse gráfico deve permanecer fixo.
2. Atribuindo outros valores positivos a B, façam diversos gráficos no mesmo plano cartesiano.
3. Escrevam uma conclusão sobre o que os valores de B alteram nos gráficos.

Parte 3

Gráficos da forma $\boldsymbol{y = f(x) = \text{sen}\,(x + C)}$. Isto é, atribuímos valores positivos para C e fixamos os valores de A, B e D em: $A = 1$, $B = 1$ e $D = 0$.

Instruções Parte 3: Resposta pessoal.

1. Inicialmente, construam o gráfico para $C = 1$, isto é: $y = f(x) = \text{sen}\,(x + 0)$. Esse gráfico deve permanecer fixo.
2. Atribuindo outros valores positivos para C $\left(\text{sugestão: valores positivos em radianos correspondentes a arcos múltiplos de } \frac{\pi}{6}\right)$, façam diversos gráficos no mesmo plano cartesiano.
3. Escrevam uma conclusão sobre o que os valores de C alteram nos gráficos.

Parte 4

Gráficos da forma $\boldsymbol{y = f(x) = \text{sen}\, x + D}$. Isto é, atribuímos valores positivos para D e fixamos os valores de A, B e C em: $A = 1$, $B = 1$ e $C = 0$.

Instruções Parte 4: Resposta pessoal.

1. Inicialmente, construam o gráfico para $D = 0$, isto é: $y = f(x) = \text{sen}\, x + 0$. Esse gráfico deve permanecer fixo.
2. Atribuindo outros valores positivos para D, façam diversos gráficos no mesmo plano cartesiano.
3. Escrevam uma conclusão sobre o que os valores de D alteram nos gráficos.

Parte 5

Nas quatro partes anteriores, sempre fixamos três valores e atribuímos ao quarto valor números reais positivos. E se no lugar de atribuir valores positivos atribuíssemos valores negativos, o que alteraria nos gráficos? Escrevam uma conclusão e apresentem-na aos demais colegas. Parte 5: Resposta pessoal.

Algumas das conclusões suas e dos colegas na atividade anterior serão resumidas a seguir para organizar as ideias principais referentes a funções relacionadas ao seno de um arco. Essas ideias auxiliam na identificação dos gráficos e de seus elementos principais, como variação de y (conjunto imagem) e período da função.

amplitude: altera a imagem da função

desloca a curva em relação ao eixo x

$$y = f(x) = A \cdot \text{sen}\,(Bx + C) + D$$

desloca a curva em relação ao eixo y

altera o período da função

Você verá como obter o conjunto imagem da função e calcular o período da função sem a necessidade de construir gráficos. Faremos isso com exemplos genéricos, conforme as atividades a seguir.

Atividades resolvidas

17. Obtenha o conjunto imagem da função trigonométrica definida por $y = f(x) = A \cdot \text{sen}\ (Bx + C) + D$, sendo A, B, C e D números reais.

- Como x é um número real qualquer, $Bx + C$ também pertente ao conjunto dos números reais. Assim, considerando a variação do seno de um arco, podemos escrever:

$$-1 \le \text{sen}\ (Bx + C) \le 1$$
$$\Big\downarrow \text{ multiplicando por } A$$
$$-A \le A\ \text{sen}\ (Bx + C) \le A$$
$$\Big\downarrow \text{ adicionando } D$$
$$-A + D \le A\ \text{sen}\ (Bx + C) + D \le A + D$$
$$\Big\downarrow\ y = A\ \text{sen}\ (Bx + C) + D$$
$$-A + D \le y \le A + D$$

Portanto, o conjunto imagem da função é o intervalo real $[-A + D, A + D]$, considerando $A > 0$.

Para pensar e discutir

1. Se na função do exemplo acima tivéssemos $A < 0$, como você representaria o conjunto imagem? 1. $[A + D; -A + D]$
2. Qual é o conjunto imagem da função real definida por $f(x) = 10 - 2 \cdot \text{sen}\ (4x - \pi)$? 2. $[8; 12]$

18. Obtenha o período da função trigonométrica definida por $y = f(x) = A \cdot \text{sen}\ (Bx + C) + D$ considerando $B > 0$.

- Para que a função f complete um período, é necessário que o arco $Bx + C$ varie de 0 a 2π (em radianos). Assim, temos:

$$Bx + C = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{B}$$
$$Bx + C = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{B} - \frac{C}{B}$$

- Considerando que P representa o período da função, temos:

$$P = \left(\frac{2\pi}{B} - \frac{C}{B}\right) - \left(-\frac{C}{B}\right)$$
$$P = \frac{2\pi}{B} - \frac{C}{B} + \frac{C}{B} \Rightarrow P = \frac{2\pi}{B}$$

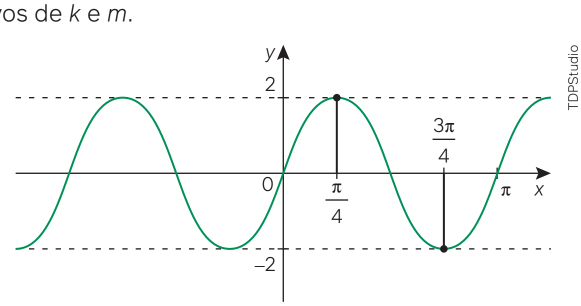
Portanto, o período da função é dado por $P = \frac{2\pi}{B}$.

O período P de uma função periódica é o menor valor positivo tal que $\mathbf{f(x + P) = f(x)}$, para todo x real. Assim, dada uma função $y = f(x) = A \cdot \text{sen}\ (Bx + C) + D$, o período P dessa função é calculado por $\mathbf{P = \frac{2\pi}{|B|}}$.

Para pensar e discutir

1. E se na resolução acima tivéssemos $B < 0$, qual seria o período P da função? 1. $P = \frac{2\pi}{|B|}$
2. Qual é o período da função trigonométrica $f(x) = 10 - 2 \cdot \text{sen}\ (4x - \pi)$? 2. $P = \frac{\pi}{2}$

19. No plano cartesiano abaixo está esboçado o gráfico de uma função trigonométrica da forma $f(x) = k \cdot \text{sen}\ (mx)$. Determine os valores positivos de k e m.



- Conforme o gráfico da função, temos que o período da função é P (menor intervalo após o qual a função se repete graficamente):

$$P = \pi - 0$$
$$P = \pi$$

- Cálculo de m:

$$P = \frac{2\pi}{|B|}$$
$$\pi = \frac{2\pi}{|m|}$$
$$|m| = 2$$
$$m = \pm 2 \Rightarrow m = 2 \ (m > 0)$$

- Observando que $-1 \leq \text{sen}\ (mx) \leq 1$, sendo $k > 0$, temos

$$k = 2$$

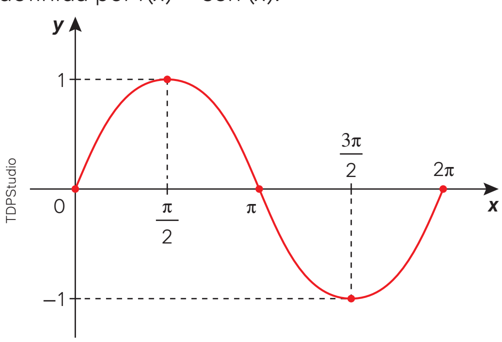
Portanto, $m = 2$ e $k = 2$, isto é, a função tem lei de formação dada por $f(x) = 2 \cdot \text{sen}\ (2x)$.

Observação:

Como $\text{sen}\ (-x) = -\text{sen}\ x$, para qualquer x real, no exemplo anterior, poderíamos ter $k = m = -2$, pois $f(x) = -2 \cdot \text{sen}\ (-2x) = -2 \cdot [-\text{sen}\ (2x)] = 2 \cdot \text{sen}\ (2x)$.

Atividades

32. No plano cartesiano a seguir, está representado o gráfico de uma função trigonométrica $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}\ (x)$.



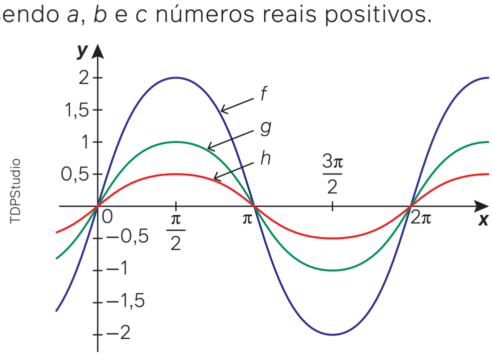
a) Determine o valor máximo assumido pela função. 32. a) 1

b) Determine o valor mínimo assumido pela função. 32. b) –1

c) Indique os intervalos em que a função é decrescente. 32. c) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

d) Indique, conforme o domínio, o conjunto formado pelos zeros da função. 32. d) $S = \{0, \pi, 2\pi\}$

33. A seguir estão representados os gráficos de três funções trigonométricas f, g e h definidas por $f(x) = a \cdot \text{sen}\ (x)$, $g(x) = b \cdot \text{sen}\ (x)$ e $h(x) = c \cdot \text{sen}\ (x)$, sendo a, b e c números reais positivos.

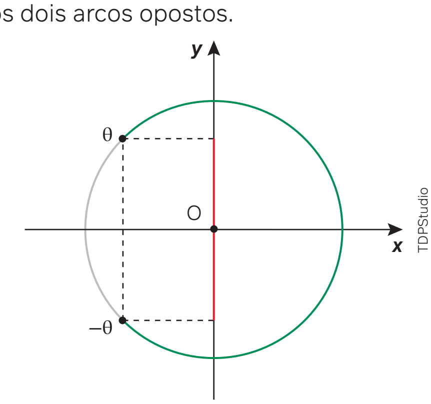


a) Quais são os valores de a, b e c? 33. a) $a = 2$, $b = 1$ e $c = 0{,}5$

b) Qual o conjunto imagem de cada uma dessas funções? 33. b) $\text{Im}(f) = [-2; 2]$, $\text{Im}(g) = [-1; 1]$ e $\text{Im}(h) = [-0{,}5; 0{,}5]$.

c) Qual o período de cada uma dessas funções? 33. c) As três funções têm o mesmo período: 2π rad.

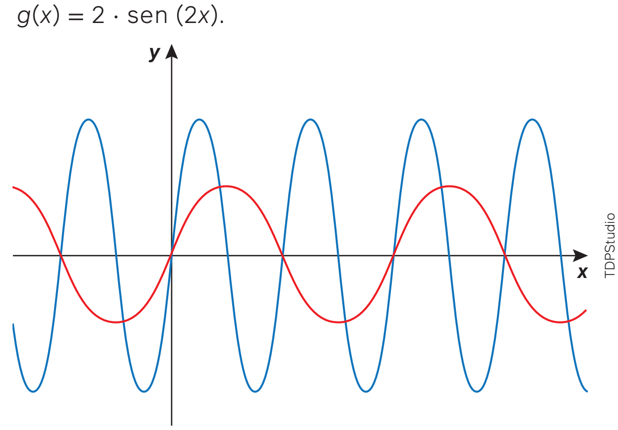
34. Na circunferência trigonométrica abaixo estão indicados dois arcos opostos.



a) O que indicam os dois segmentos coloridos no eixo y em relação aos arcos opostos? 34. a) sen θ e sen $(-\theta)$

b) Qual a relação entre os senos dos arcos opostos? 34. b) $\text{sen}\ (-\theta) = -\text{sen}\ \theta$

35. A seguir, estão representados os gráficos de duas funções trigonométricas: $f(x) = \text{sen}\ (x)$ e $g(x) = 2 \cdot \text{sen}\ (2x)$.



Sobre essas funções considere as seguintes afirmações verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**):

I. As duas funções trigonométricas apresentam o mesmo período. 35. I. F

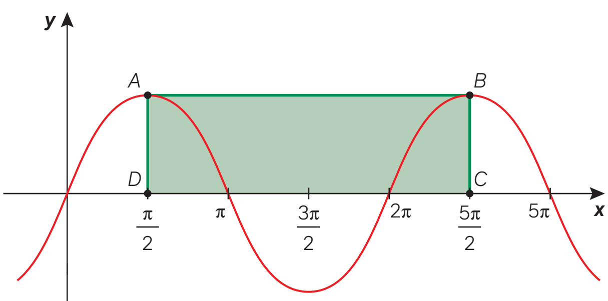
II. As duas funções trigonométricas apresentam o mesmo domínio. 35. II. V

III. As duas funções trigonométricas apresentam o mesmo conjunto imagem. 35. III. F

IV. Os zeros da função *f* são também os zeros da função *g*. 35. IV. V

V. O período da função *g* é o dobro do período da função *f*. 35. V. F

36. No plano cartesiano abaixo está representado parcialmente o gráfico da função trigonométrica definida nos números reais por $f(x) = 3 \cdot \text{sen}\,(x)$.



TDPStudio

36. a) 3; 3

a) Obtenha o valor de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e de $f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$.

b) Em unidades de área, obtenha a área do retângulo *ABCD* representado. 36. b) 6π u.a.

37. Copie e complete o quadro a seguir conforme cada função trigonométrica que está definida no conjunto dos números reais, isto é, para qualquer *x* real.

Função	Imagem mínima	Imagem máxima	Período
$y = 4\text{sen}\,x$			2π
$y = -4 + \text{sen}\,(0{,}1x)$			20π
$y = 5\text{sen}\,(0{,}2x)$			10π
$y = 7 - 7\text{sen}\,(2x)$			π
$y = -3\,\text{sen}\,(4x)$			$\frac{\pi}{2}$

37. Imagem mínima: –4, –5, –5, 0, –3; Imagem máxima: 4, –3, 5, 14, 3.

38. Utilize o *software* de geometria dinâmica para construir os gráficos das funções da atividade anterior.

a) $y = 4\text{sen}\,x$

b) $y = -4 + \text{sen}\,(0{,}1x)$

c) $y = 5\text{sen}\,(0{,}2x)$

d) $y = 7 - 7\text{sen}\,(2x)$

e) $y = -3\text{sen}\,(4x)$

38. a) Resposta no Manual do Professor.
38. b) Resposta no Manual do Professor.
38. c) Resposta no Manual do Professor.

Após essas construções, confronte os valores obtidos no quadro da atividade anterior, conforme cada gráfico.

39. Considere a função real de variável real $f(x) = 3 - 5\text{sen}\,(2x + 4)$. Sem construir o gráfico da função, faça o que se pede.

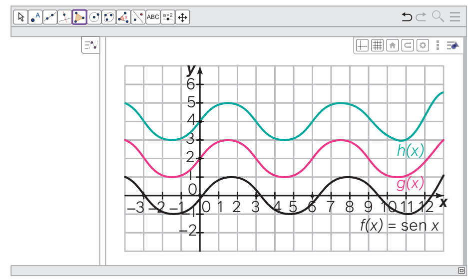
a) Determine o valor mínimo assumido por essa função. 39. a) –2

38. d) Resposta no Manual do Professor.
38. e) Resposta no Manual do Professor.

b) Determine o valor máximo assumido por essa função. 39. b) 8

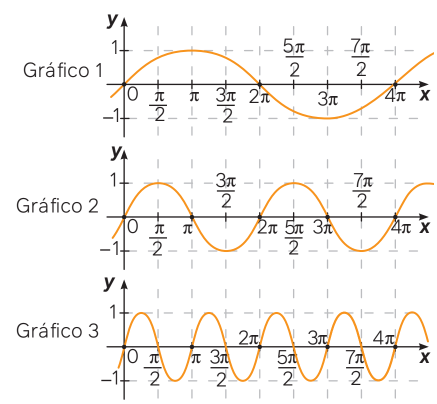
c) Obtenha o valor do período dessa função. 39. c) π rad

40. Os três gráficos a seguir foram gerados por *software* de geometria dinâmica. Porém, só sabemos a lei de formação do de cor preta. Escreva a lei de formação das funções *g* e *h* indicadas no gráfico e explique como as obteve. 40. $g(x) = \text{sen}\,x + 2$; $h(x) = \text{sen}\,x + 4$



Aline Rivolta

41. Abaixo estão representados os gráficos parciais de três funções trigonométricas da forma $f(x) = A + B \cdot \text{sen}\,(C \cdot x)$.



Aline Rivolta

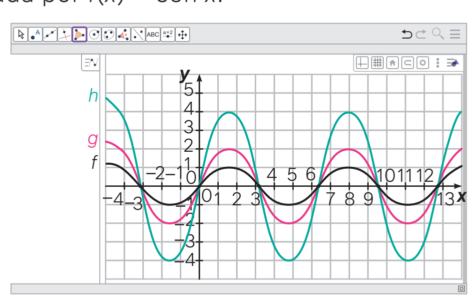
Analise os três gráficos observando:

a) as amplitudes; 41. a) As três funções têm a mesma amplitude: $B = 1$.

b) os conjuntos imagem; 41. b) As três funções têm o mesmo conjunto imagem: $[-1, 1]$.

c) os períodos. 41. c) Gráfico 1: 4π, Gráfico 2: 2π, Gráfico 3: π.

42. Também aqui os gráficos foram construídos com o auxílio de *software* de geometria dinâmica. Considere que a lei de formação da função *f* seja dada por $f(x) = \text{sen}\,x$.



Aline Rivolta

a) Obtenha a lei de formação das funções *g* e *h*. 42. a) $g(x) = 2\text{sen}\,x$; $h(x) = 4\text{sen}\,x$

b) Explique como obter a função *g* a partir da função *f* e a função *h* a partir da função *f*. 42. b) Resposta pessoal.

c) O que esses gráficos têm em comum? 42. c) O período.

d) No que eles diferem? 42. d) No conjunto imagem.

Função cosseno

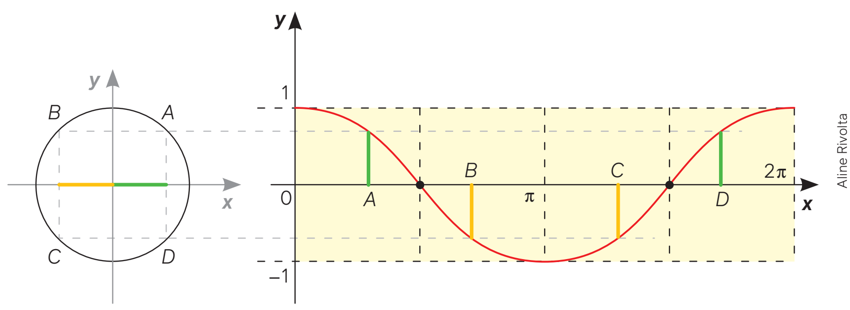
Como o cosseno na circunferência trigonométrica representa a abscissa da extremidade de um arco, podemos dizer que o cosseno depende do arco, isto é, o cosseno é uma **função** do arco. Para compreender melhor essa relação de dependência, considere a definição a seguir.

Dado um ângulo cuja medida em radianos é x, chamamos de função cosseno a função que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o número $\cos x \in \mathbb{R}$. Indicamos por:

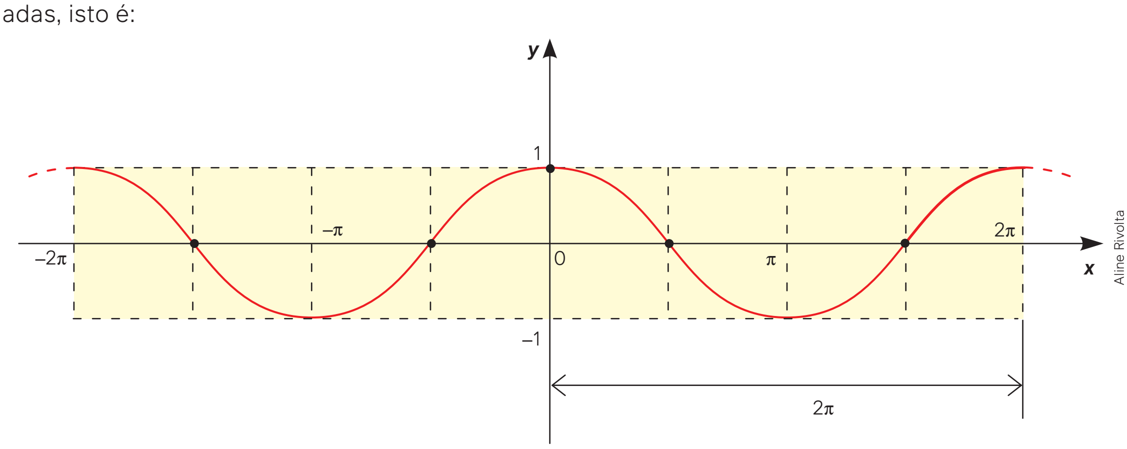
$$y = f(x) = \cos x$$

O gráfico da função cosseno pode ser construído utilizando *software* de geometria dinâmica, como vamos sugerir um pouco mais à frente, ou com folha quadriculada para facilitar a construção do plano cartesiano. Atribuindo-se valores para a variável x, assim como fizemos na função seno, obtemos os valores correspondentes para a variável y. Observe que, pela definição de cosseno na circunferência trigonométrica, você pode ter uma boa ideia de como será esse gráfico.

Veja na figura abaixo à esquerda a circunferência trigonométrica e quatro valores de cosseno indicados por meio de segmentos coloridos. Como o maior valor do cosseno é 1 e o menor valor é –1, temos que no plano cartesiano à direita o valor de $y = \cos x$ irá variar de –1 a 1.



Note que, no gráfico acima à direita, estão indicados os quatro pontos nas extremidades dos arcos e os correspondentes valores dos cossenos. Procedendo dessa maneira e considerando mais pontos, poderemos chegar ao gráfico esboçado. Porém, como temos arcos negativos, esse gráfico se estende para a esquerda do eixo das ordenadas, isto é:

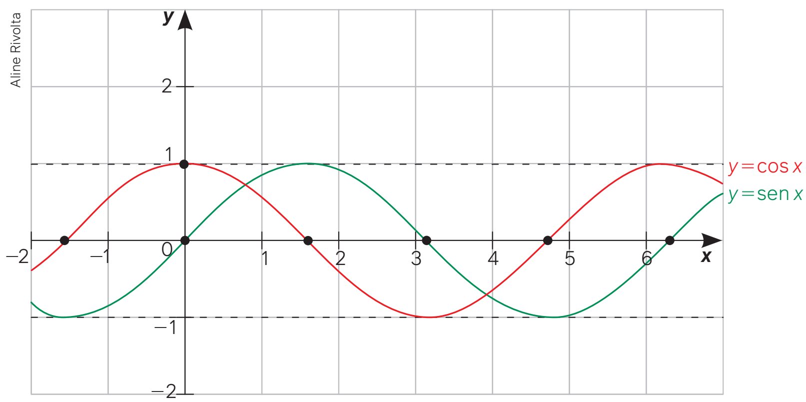


Para pensar e discutir

1. O domínio de uma função $y = f(x)$ representa os valores assumidos por x. Qual é o domínio dessa função? 1. $\mathbb{R}$
2. A imagem de uma função $y = f(x)$ representa o conjunto formado por todos os valores de y na função. Qual é o conjunto imagem da função acima? 2. $[-1, 1]$
3. Essa função é periódica? Qual é seu período? 3. Sim; 2π radianos.

Assim como sugerimos para a função seno, use um *software* de geometria dinâmica para explorar um pouco mais o comportamento do gráfico da função cosseno. Entretanto, como você já conhece a função seno, podemos agora misturar as duas. Apenas por curiosidade, observe abaixo como ficariam os gráficos das funções seno e cosseno no mesmo plano cartesiano.

Aline Rivolta



Com apenas esses gráficos, várias observações podem ser feitas relacionando essas duas funções. Na próxima atividade você investigará um pouco mais.

Para explorar

Novamente, junte-se a três colegas para esta atividade.

Parte 1

Analisem o gráfico anterior, que contém as funções seno e cosseno no mesmo plano cartesiano, e respondam ao que se pede.

1. Quais são as características comuns dessas duas funções graficamente?
Parte 1 - 1. Domínio e imagem são iguais e descrevem a mesma senoide, mas com deslocamento.
2. No eixo das abscissas estão representados pontos com abscissas inteiras de –2 até 6. O que elas indicam?
Parte 1 - 2. Arcos em radianos.
3. Como vocês podem obter o gráfico da função seno a partir do gráfico da função cosseno? Parte 1 - 3. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
4. Como vocês podem obter o gráfico da função cosseno a partir do gráfico da função seno? Parte 1 - 4. $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
5. Quantos pontos em comum têm esses dois gráficos no intervalo $[0; 2\pi]$? Quais são as coordenadas desses pontos? Parte 1 - 5. 2; $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Parte 2

Vocês devem usar um *software* de geometria dinâmica. A ideia central desta atividade é investigar os significados dos números reais *A*, *B*, *C* e *D* nos gráficos de funções na forma:

$$\boldsymbol{y = f(x) = A \cdot \cos(Bx + C) + D}$$

Assim como foi feito para o seno, atribuam valores a esses números e construam vários gráficos, utilizando sempre como referência o gráfico da função $y = f(x) = \cos x$. Sugerimos fixar três dos quatro valores de *A*, *B*, *C* e *D* e fazer apenas um deles variar de cada vez. Parte 2 Resposta pessoal.

Parte 3

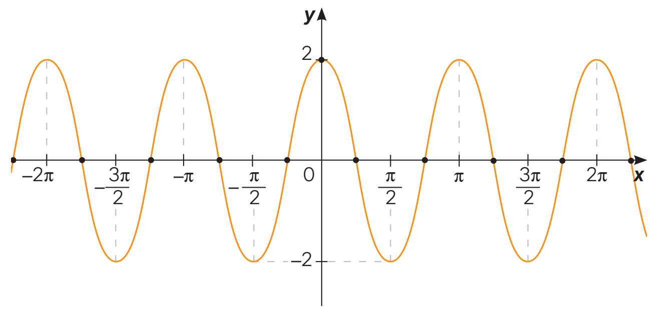
Escrevam uma conclusão a respeito do papel dos valores de *A*, *B*, *C* e *D* nos gráficos construídos comparando-a com as conclusões anteriores, quando da análise desses valores para a função seno. Parte 3 Resposta pessoal.

Conhecer o comportamento do gráfico de uma função da forma $f(x) = A \cdot \cos(Bx + C) + D$ faz com que você não necessite dos gráficos para saber qual é o conjunto imagem ou qual é o período de tais funções, por exemplo. Os comentários anteriores sobre a função seno em relação ao domínio, à imagem e ao procedimento para o cálculo do período servem para a função cosseno.

Analise alguns exemplos conforme as atividades resolvidas a seguir.

Atividades resolvidas

20. Veja a seguir, representado no plano cartesiano, o gráfico de uma função da forma $f(x) = k \cdot \cos(mx)$, sendo k e m números reais positivos. Determine os valores de k e de m.



Aline Rivolta

- Podemos observar no gráfico da função que o período é P radianos. Como fizemos para o seno, podemos dizer que uma função da forma $y = f(x) = A \cdot \cos(Bx + C) + D$ tem período P dado por: $P = \frac{2\pi}{B}$. Assim, no nosso exemplo, temos:

$$P = \frac{2\pi}{m}$$

$$\pi = \frac{2\pi}{m} \Rightarrow m = 2$$

- Também de acordo com o gráfico, temos que o conjunto imagem é o intervalo real $[-2; 2]$. Assim, podemos escrever:

$$-2 \leq k \cdot \cos(mx) \leq 2$$

$$\text{como } -1 \leq \cos(mx) \leq 1$$

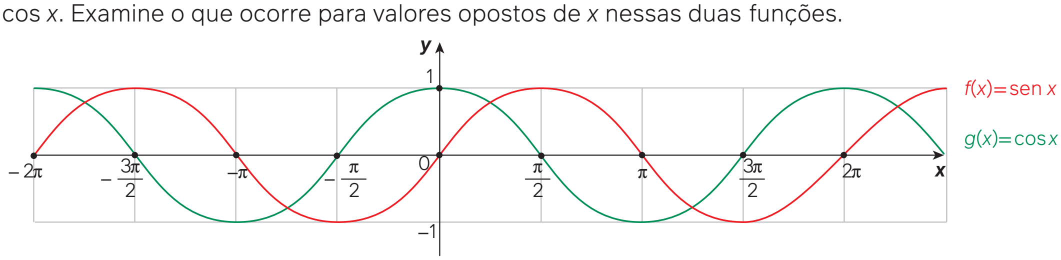
$$\text{Temos que: } k = 2$$

Portanto, a lei de formação da função dada é $f(x) = 2 \cdot \cos(2x)$.

Para pensar e discutir

1. Se no exemplo anterior a lei de formação fosse dada por $f(x) = -2\cos(2x)$, que alteração haveria em termos de gráfico? 1. O gráfico giraria 180° em torno do eixo das abscissas.
2. Na função da forma por $f(x) = \cos(mx)$, para m positivo, duplicando-se o valor de m, o que se altera em termos de gráfico? 2. O período é dividido por dois.

21. Veja a seguir representados os esboços gráficos das funções seno e cosseno definidas nos reais por $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$. Examine o que ocorre para valores opostos de x nessas duas funções.



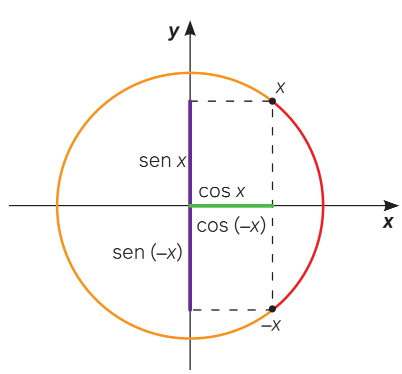
Reinaldo Vignati

- Se você considerar valores opostos de x, verificará, conforme os gráficos, que:

Função f: $f(-x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen } x = -f(x)$.

Função g: $g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x)$.

- Voltando à circunferência trigonométrica, de acordo com a definição de seno e de cosseno, podemos chegar à mesma conclusão.



Aline Rivolta

Para pensar e discutir

1. Para arcos que são de sinais opostos, qual é a conclusão quanto aos valores dos cossenos? 1. Possuem o mesmo valor.
2. Para arcos que são de sinais opostos, qual é a conclusão quanto aos valores dos senos? 2. Possuem valores opostos.
3. Observando o gráfico anterior, quais são as soluções da equação $f(x) = g(x)$ na 1ª volta positiva? 3. $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$

Atividades

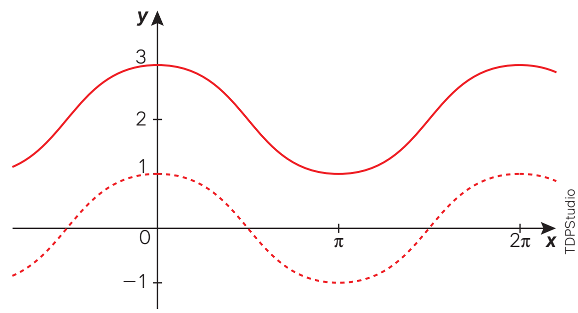
43. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(3x)$.

a) Calcule valor de $f(0) + f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. 43. a) Zero.

b) Determine o período da função *f*. 43. b) $\frac{2\pi}{3}$

c) Obtenha o conjunto imagem da função *f*. 43. c) $[-1, 1]$

44. O gráfico tracejado representa a função definida no conjunto dos números reais por $f(x) = \cos(x)$, e o gráfico de linha contínua representa a função *g* que pode ser obtida a partir da função *f*.



a) Determine a lei de formação da função *g*. 44. a) $g(x) = \cos(x) + 2$

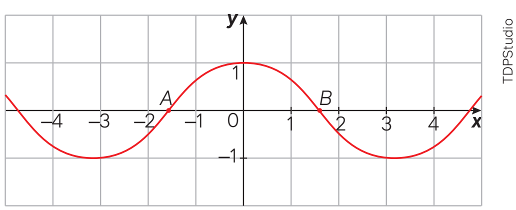
b) Qual o conjunto imagem da função *g*? 44. b) $[1, 3]$

c) As funções *f* e *g*, assim definidas, têm o mesmo período? 44. c) Sim.

45. No plano cartesiano, está representado parcialmente o gráfico da função real definida por $f(x) = \cos(x)$. Os valores de *x* estão em radianos, e os pontos *A* e *B* representam dois pontos para os quais tem-se $f(x) = 0$.

Determine as abscissas desses dois pontos.

45. $-\frac{\pi}{2}$ (abscissa de *A*); $\frac{\pi}{2}$ (abscissa de *B*)



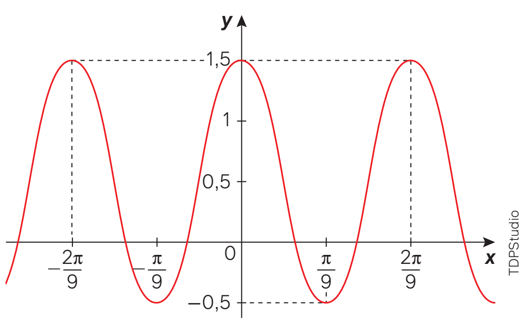
46. O gráfico de uma função trigonométrica periódica está representado no plano cartesiano. Sobre essa função, avalie cada uma das afirmações a seguir indicando **V** para verdadeira ou **F** para falsa.

I. A função tem período igual a $\frac{2\pi}{9}$ rad. 46. I. V

II. A amplitude dessa função é 1. 46. II. V

III. Não existe valor real de *x* para o qual a função se anula. 46. III. F

IV. O eixo *y* representa um eixo de simetria dessa função. 46. IV. V



47. Copie e complete o quadro a seguir conforme cada função trigonométrica definida no conjunto dos números reais, isto é, para qualquer *x* real. 47. Imagem mínima: −4, −5, −5, 0, −3; Imagem máxima: 4, −3, 5, 14, 3.

Função	Imagem mínima	Imagem máxima	Período
$y = 4\cos x$			2π
$y = -4 + \cos(0{,}1x)$			20π
$y = 5\cos(0{,}2x)$			10π
$y = 7 - 7\cos(2x)$			π
$y = -3\cos(4x)$			$\frac{\pi}{2}$

48. a) Resposta no Manual do Professor. 48. c) Resposta no Manual do Professor.

48. b) Resposta no Manual do Professor. 48. d) Resposta no Manual do Professor.

48. Utilize um *software* de geometria dinâmica para construir os gráficos das funções da atividade anterior.

a) $y = 4\cos x$

b) $y = -4 + \cos(0{,}1x)$

c) $y = 5\cos(0{,}2x)$

d) $y = 7 - 7\cos(2x)$

e) $y = -3\cos(4x)$ 48. e) Resposta no Manual do Professor.

Após essas construções, confronte os valores obtidos no quadro da atividade anterior de acordo com cada gráfico.

49. Utilize um *software* de geometria dinâmica e faça o que se pede a seguir.

a) Construa o gráfico da função definida por $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. 49. a) Resposta no Manual do Professor.

b) Em seguida, compare o gráfico obtido com o gráfico da função $g(x) = \cos x$. Qual é sua conclusão? 49. b) Resposta pessoal.

c) Construa o gráfico da função definida por $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. 49. c) Resposta no Manual do Professor.

d) Agora, compare o gráfico obtido no item **c** com o gráfico da função $g(x) = \text{sen}\, x$. Qual é sua conclusão? 49. d) Resposta pessoal.

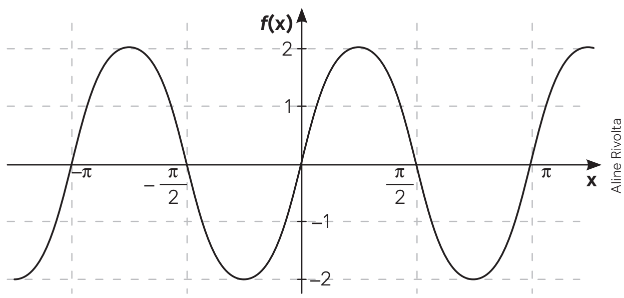
50. Considere a função real de variável real $f(x) = 6 - 3\cos(2x + 4)$. Sem construir o gráfico da função, faça o que se pede.

a) Determine o valor mínimo assumido por essa função. 50. a) 3

b) Determine o valor máximo assumido por essa função. 50. b) 9

c) Obtenha o valor do período dessa função. 50. c) π

51. (UCS-RS) O gráfico a seguir representa uma função real de variável real.



Infográfico clicável
Respiração, uma função trigonométrica

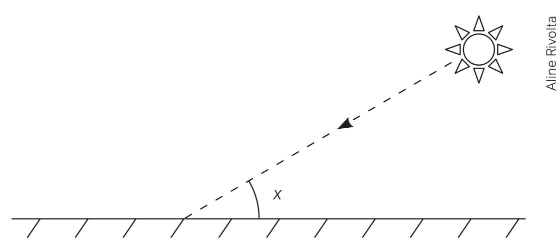
Assinale a alternativa em que consta a função representada pelo gráfico. 51. Alternativa **d**.

a) $f(x) = -2\cos x$ **b)** $f(x) = 2\cos x$ **c)** $f(x) = 2\text{sen}\, x$ **d)** $f(x) = 2\text{sen}\,(2x)$ **e)** $f(x) = \text{sen}\,\frac{x}{2}$

52. (Enem) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com sua superfície, conforme indica a figura.

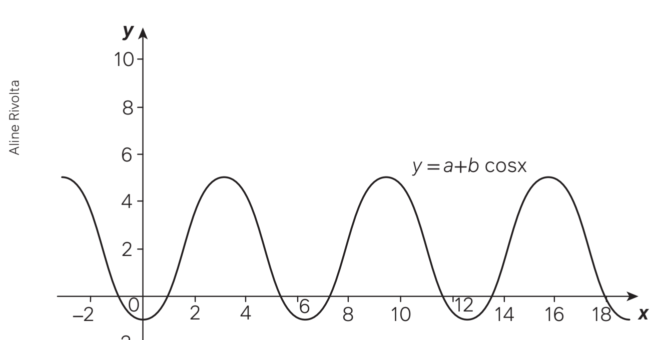
Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \text{sen}\, x$, sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre 0° e 90°.

Quando $x = 30°$, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo? 52. Alternativa **b**.



a) 33% **b)** 50% **c)** 57% **d)** 70% **e)** 86%

53. (UPE) A função $y = a + b\cos x$, com a e b reais, representada graficamente a seguir, intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, -1)$ e tem valor máximo $y = 5$. Qual é o valor da soma $5a + 2b$? 53. Alternativa **a**.

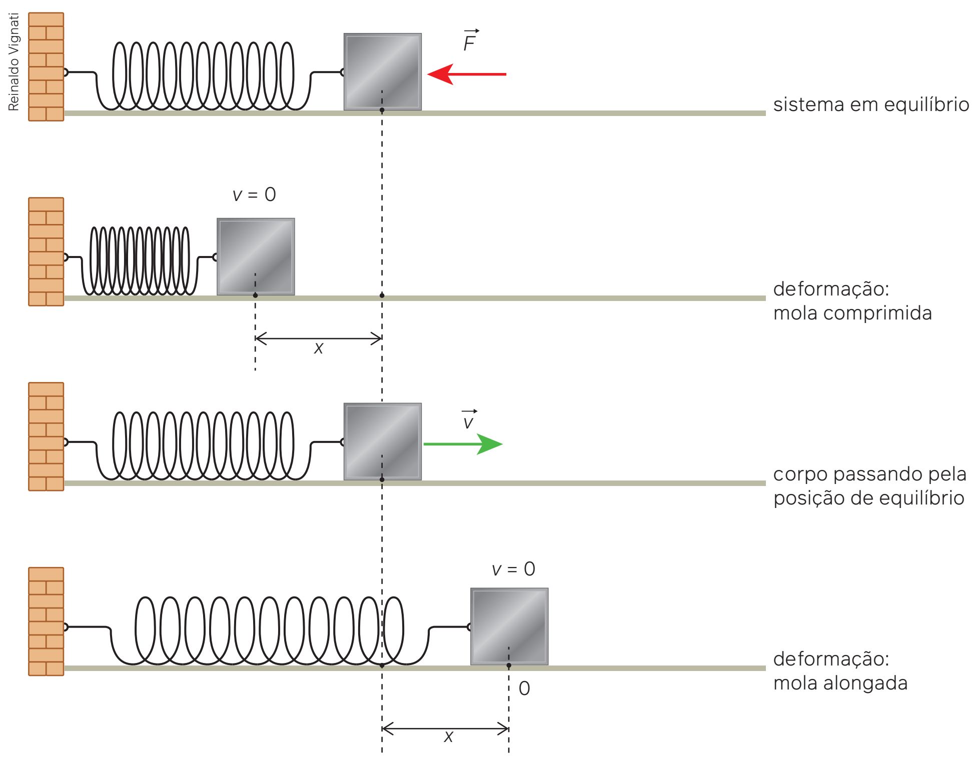


a) 4 **b)** –1 **c)** 3 **d)** –2 **e)** 6

O uso de funções trigonométricas na resolução de problemas

Na disciplina de Física, encontramos exemplos do uso de funções trigonométricas na modelagem de fenômenos periódicos, como os movimentos harmônicos simples (MHS), que se caracterizam pela existência de uma força que impele um corpo em movimento a voltar à posição de equilíbrio.

Um exemplo desse tipo de fenômeno é um corpo preso a uma mola e a outra extremidade da mola presa a um anteparo, como mostra o sistema da figura a seguir. Neste caso, despreze as forças de atrito e a resistência do ar.



O corpo é retirado de sua posição de equilíbrio devido à atuação de uma força $\vec{F}$ comprimindo a mola. A partir desse instante, ele é abandonado e começa a oscilar em torno de sua posição de equilíbrio em um MHS. A esse sistema damos o nome de oscilador harmônico.

Como esse movimento se repete, considerando o caso ideal, interessa saber três fatos importantes desse corpo que dependem do tempo: a posição, a velocidade e a aceleração. Prova-se matematicamente que essa situação pode ser modelada por meio das três funções a seguir.

1. **Posição** em função do tempo: $x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$
2. **Velocidade** em função do tempo: $v(t) = -\omega \cdot A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \phi)$
3. **Aceleração** em função do tempo: $a(t) = \omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$

Note que são três funções relacionadas a seno e a cosseno. Veja o que significa cada termo nessas relações:

A – amplitude (em metros);

t – tempo (em segundos);

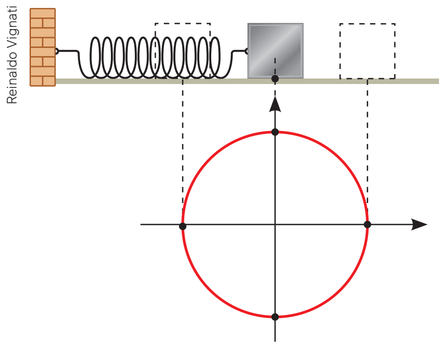
ω – velocidade angular (em radianos por segundo);

ϕ – fase inicial (em radianos).

Observação:

Na Física, a amplitude é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo de alguma medida (por exemplo, a temperatura).

Tanto a velocidade quanto a aceleração são obtidas em função da posição e usam o cálculo de derivadas (assunto de Matemática do Ensino Superior). Para compreendermos particularmente a posição em função do tempo, podemos considerar uma circunferência como a ilustrada na figura, observando o movimento circular do ponto destacado.



Pense na equação $x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$ e considere os pontos da circunferência projetados no eixo horizontal.

Para pensar e discutir

1. Para $t = 0$ temos a posição de equilíbrio. Qual é o valor de x? E qual é o valor de ϕ? 1. $x(0) = A \cdot \cos(\phi) = 0; \phi = \frac{\pi}{2}$
2. Qual é o raio dessa circunferência? 2. A
3. Quais são os valores de $\cos(\omega \cdot t + \phi)$ para que se tenha a maior elongação da mola? E para a mola totalmente comprimida? 3. 1 e –1

Vimos, anteriormente, um exemplo da Física. Entretanto, há diversos exemplos de modelagem em que são utilizadas as funções trigonométricas seno e cosseno. Exemplificaremos, aqui, algumas situações nas atividades resolvidas a seguir.

Atividades resolvidas

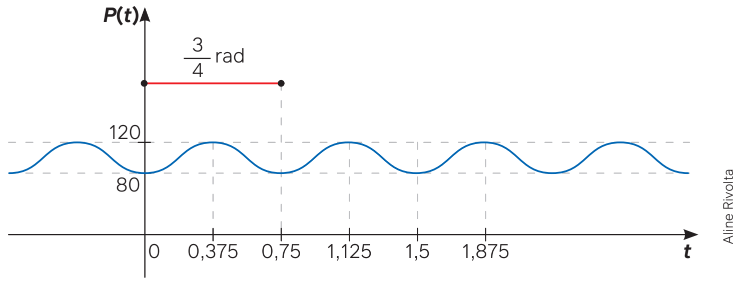
22. Aplicação na medicina

Por meio de monitoramento, é possível investigar a pressão sanguínea ou arterial de uma pessoa. Essa medida é dada por dois valores: a pressão sistólica (que é o valor máximo alcançado quando o coração se contrai e bombeia sangue) e a pressão diastólica (o valor mínimo alcançado quando o coração está em repouso). Essas duas pressões ocorrem no intervalo de tempo de um batimento cardíaco. Vamos considerar que a variação da pressão sanguínea (em mmHg) de uma pessoa, em função do tempo t (em s) seja modelada por meio da função trigonométrica a seguir.

$$P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right)$$

Vamos determinar a pressão sistólica, a pressão diastólica e a frequência cardíaca dessa pessoa.

- Uma maneira é usar um *software* de geometria dinâmica para obter o comportamento gráfico dessa função, isto é:



- Pelo gráfico, temos que: a **pressão sistólica** é: 120 mmHg (máximo da função); a **pressão diastólica** é: 80 mmHg (mínimo da função).

- **Período da função:** pelo gráfico, o período da função representa o intervalo de tempo de um batimento cardíaco, ou seja, 0,75 s.
- **Frequência cardíaca:** como temos 1 batimento em 0,75 s, vamos determinar a frequência *f*, isto é, o número de batimentos por minuto (60 s).

Batimentos (bpm)	Tempo (s)
1	0,75
f	60

Assim, temos a proporção:

$$\frac{1}{f} = \frac{0,75}{60}$$

$$0,75f = 60$$

$$f = \frac{60}{0,75} \Rightarrow f = 80$$

É possível obter esses mesmos valores sem fazer o gráfico por meio da análise da lei de formação da função, que é:

$$P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right)$$

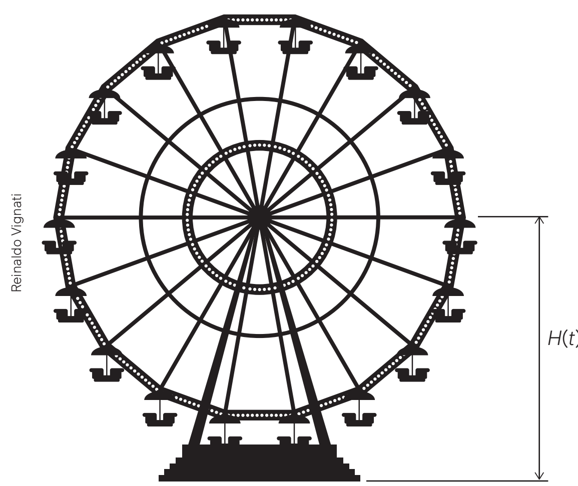
Para pensar e discutir

1. Explique como você pode obter o período da função dada no enunciado usando a lei de formação da função. 1. Resposta pessoal.
2. Qual é a pressão máxima e qual é a pressão mínima? Explique como obteve o resultado pela lei de formação da função.

2. $P_{máx} = 120$ mmHg; $P_{min} = 80$ mmHg; resposta pessoal.

23. A roda-gigante

A variação da altura *H* em função do tempo *t* de uma pessoa na roda-gigante em movimento pode ser modelada de forma aproximada por uma função do tempo *t*.



Vamos considerar que uma pessoa está sentada em um dos lugares da roda-gigante e que a altura dela, em metros, em relação ao solo seja representada pela função: $H(t) = 12,5 + 11 \cdot \text{sen}\left[\frac{\pi}{18}(t - 26)\right]$,sendo *t* em segundos. Quais são as alturas máxima e mínima a que essa pessoa se eleva? E qual é o tempo que a roda-gigante leva para dar uma volta completa?

- As alturas máxima e mínima podem ser determinadas observando que os valores máximo e mínimo do seno de um arco que varia no conjunto dos números reais são 1 e –1, respectivamente. Assim, temos:

$$H_{máx} = 12,5 + 11 \cdot 1 \Rightarrow H_{máx} = 23,5 \rightarrow 23,5 \text{ m}$$

$$H_{min} = 12,5 + 11 \cdot (-1) \Rightarrow H_{min} = 1,5 \rightarrow 1,5 \text{ m}$$

- O período representa o intervalo de tempo para se dar uma volta completa:

$$P = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{18}}$$

$$P = \frac{36\pi}{\pi}$$

$$P = 36 \rightarrow 36 \text{ s}$$

Para pensar e discutir

1. É possível determinar o diâmetro da roda-gigante? Explique. 1. Sim; resposta pessoal.
2. Qual é o valor de *t* após iniciar o movimento quando a pessoa ocupa a posição mais alta da roda-gigante? Explique como calculou.

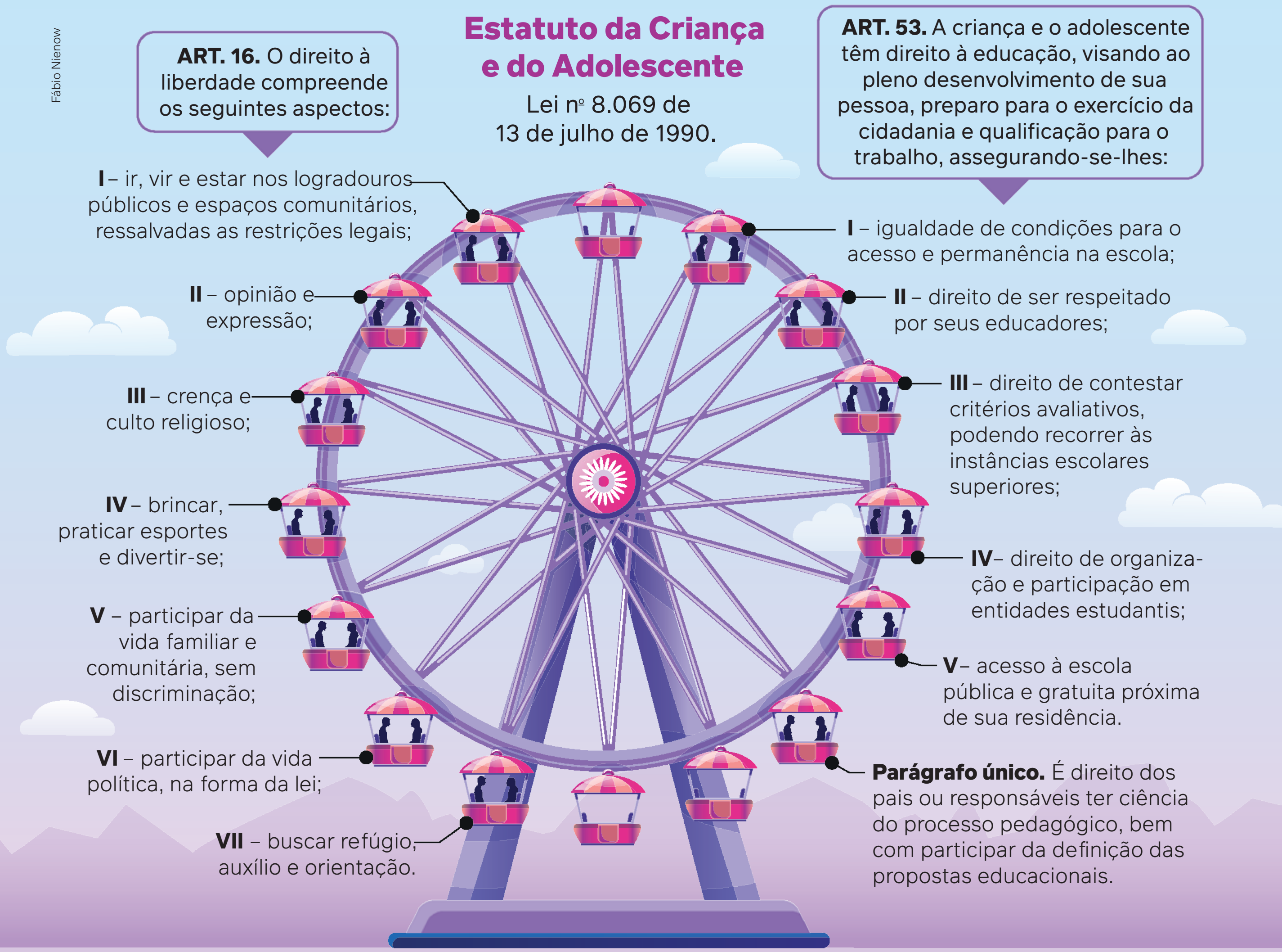
2. 35 segundos; resposta pessoal

Infográfico

Roda-gigante

A roda-gigante é um exemplo interessante do comportamento de um fenômeno periódico que estudamos ao longo desta unidade. Na vida, assim como em uma roda-gigante, temos ciclos que descrevem nosso movimento. Quanto mais os conhecermos, melhor será o enfrentamento das dificuldades e das etapas a ser superadas. Por exemplo, você conhece seus direitos como cidadão? Sabe o que é o Estatuto da Criança e do Adolescente?

- Leia alguns dos direitos da criança e do adolescente expressos no infográfico a seguir. Escolha um deles e escreva um pequeno texto defendendo sua importância e apresentando os devidos argumentos. Compartilhe com os colegas.



BRASIL. Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990. *Dispõe sobre Estatuto da Criança e do Adolescente e dá outras providências*. Brasília, DF: Presidência da República, 1990. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l8069.htm. Acesso em: 10 jul. 2024.

1. Considere que a altura em que uma pessoa está na roda-gigante seja representada por uma função definida por: $H(t) = A + B \cdot \text{sen}\,(Ct + D)$ em que H representa a altura em metros em função do tempo t em segundos, sendo A, B, C e D constantes reais positivas.

a) Quais constantes reais você precisa conhecer para determinar a altura máxima de uma pessoa na roda-gigante? Qual seria essa altura? Justifique. 1. a) A e B; $H = A + B$

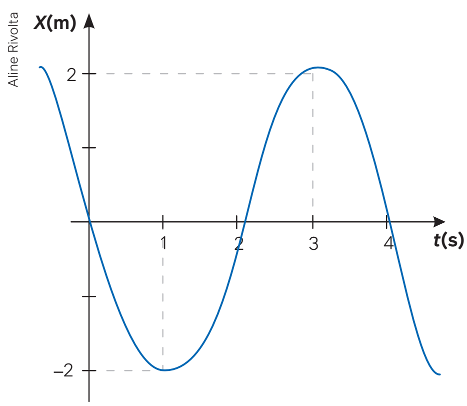
b) Qual constante real precisa ser conhecida a fim de determinar o tempo necessário para uma volta completa da roda-gigante? 1. b) C

54. Junte-se a um colega para realizar esta atividade.

a) Pesquisem em livros de Física uma situação relacionada a movimento harmônico simples. 54. a) Resposta pessoal.

b) Resolvam essa situação e troquem-na com outra dupla para que uma resolva a da outra. 54. b) Resposta pessoal.

55. O gráfico mostra a posição, em função do tempo, de uma partícula em movimento harmônico simples no intervalo de tempo entre 0 e 4 segundos. A equação da posição do tempo para esse movimento é dada por $x = a \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$.



a) Qual é o valor de a? 55. a) –2

b) Determine o valor de ω. 55. b) $\omega = \frac{\pi}{2}$

56. (IFPE) Na cidade de Recife, mesmo que muito discretamente, devido à pequena latitude em que nos encontramos, percebemos que, no verão, o dia se estende um pouco mais em relação à noite e, no inverno, esse fenômeno se inverte. Já em outros lugares do nosso planeta, devido a grandes latitudes, essa variação se dá de forma muito mais acentuada. É o caso de Ancara, na Turquia, onde a duração de luz solar L, em horas, no dia d do ano, após 21 de março, é dada pela função:

$$L(d) = 12 + 2{,}8 \cdot \left[\frac{2\pi}{365}(d - 80)\right]$$

Determine, em horas, respectivamente, a máxima e a mínima duração de luz solar durante um dia em Ancara. 56. Alternativa **b**.

a) 12,8 e 12
b) 14,8 e 9,2
c) 12,8 e 9,2
d) 12 e 12
e) 14,8 e 12

57. (FGV-SP) O número de quartos ocupados em um hotel varia de acordo com a época do ano. Estima-se que o número de quartos ocupados em cada mês de determinado ano seja dado por $Q(x) = 150 + 30 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right)$, em que x é estabelecido da seguinte forma: $x = 1$ representa o mês de janeiro, $x = 2$ represente o mês de fevereiro, $x = 3$ representa o mês de março, e assim por diante.

Em junho, em relação a março, há uma variação percentual dos quartos ocupados em 57. Alternativa **a**.

a) –20%
b) –15%
c) –30%
d) –25%
e) –50%

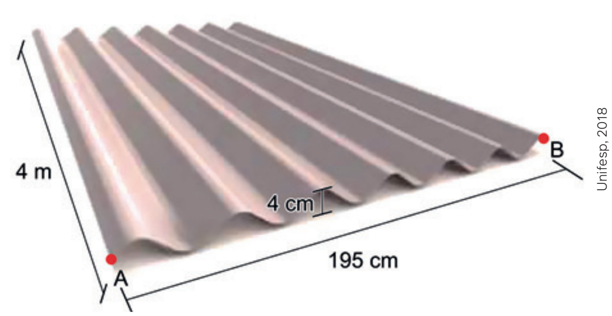
58. (IFSUL) A conta de luz de certa residência, ao longo do ano de 2014, variou segundo a função $V(t) = 180 + 65 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$, em que $V(t)$ é o valor pago na fatura e t é o mês do ano, com $t = 1$ correspondendo a janeiro, e assim sucessivamente. Com base nos dados, analise as seguintes proposições:

I. O valor mínimo registrado na fatura foi de R$ 65,00.
II. O valor máximo registrado na fatura foi de R$ 245,00.
III. No sétimo mês o valor pago foi de R$ 115,00.

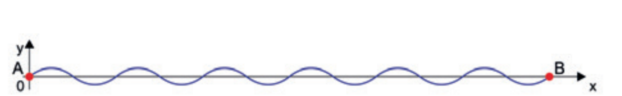
Estão corretas as afirmativas 58. Alternativa **c**.

a) I e III apenas.
b) I e II apenas.
c) II e III apenas.
d) I, II e III.

59. (Unifesp) Uma chapa retangular metálica, de área igual a 8,132 m², passa por uma máquina que a transforma, sem nenhuma perda de material, em uma telha ondulada. A figura mostra a telha em perspectiva.



A curva que liga os pontos A e B, na borda da telha, é uma senoide. Considerando um sistema de coordenadas ortogonais com origem em A, e de forma que as coordenadas de B, em centímetros, sejam (195, 0), a senoide apresentará a seguinte configuração.

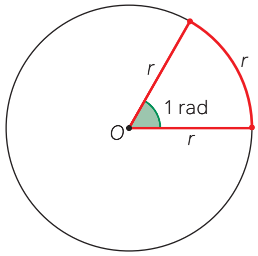


a) Calcule o comprimento da senoide indicada no gráfico, do ponto A até o ponto B. 59. a) 2,033 m

b) Determine a expressão da função cujo gráfico no sistema de coordenadas é a senoide de A até B. Determine o domínio, a imagem e o período dessa função.
59. b) $f(x) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{4\pi}{65} \cdot x\right)$; $D = \{0 \leq x \leq 195\}$; $Im = [-2, 2]$.

Atividades finais

1. Na figura a seguir está representado um arco de 1 radiano.



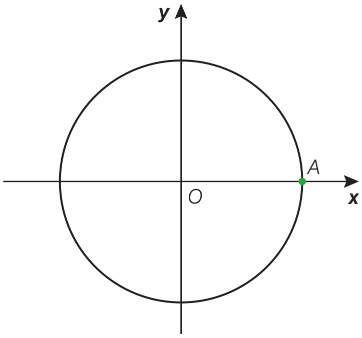
Aline Rivolta

a) Como você define um arco de 1 radiano? 1. a) Resposta pessoal.

b) Quantos graus, aproximadamente, tem um arco de 1 radiano? 1. b) Aproximadamente 57°.

2. Ao dividirmos o comprimento de um arco pela medida do raio da circunferência correspondente, ambos com a mesma unidade de comprimento, o que obtemos como quociente? 2. A medida do ângulo central em radianos.

3. Abaixo está representada uma circunferência trigonométrica.



TDPStudio

a) O que representa o ponto A na circunferência trigonométrica? 3. a) A origem dos arcos.

b) Quais são as coordenadas do ponto A? 3. b) $A(1, 0)$

c) Qual é o sentido que deve ser utilizado para marcar um arco positivo? 3. c) Anti-horário.

d) E um arco negativo? 3. d) Horário.

4. Em uma circunferência trigonométrica foi marcado um arco de medida 5 000°. Com base nessa informação, responda ao que se pede.

a) A qual quadrante pertence a extremidade desse arco? 4. a) 4º

b) Qual é a menor determinação positiva desse arco na circunferência trigonométrica? 4. b) 320°

5. Sobre os sinais das razões trigonométricas seno e cosseno na circunferência trigonométrica, responda às questões a seguir.

a) Em quais quadrantes as duas razões trigonométricas têm o mesmo sinal? 5. a) 1º e 3º quadrantes

b) Em quais quadrantes as duas razões trigonométricas têm sinais opostos? 5. b) 2º e 4º quadrantes

6. Considerando a função real definida por $f(x) = 15 - 2 \cdot \text{sen}\,(3x)$, faça o que se pede.

a) Determine o valor máximo assumido pela função. 6. a) 17.

b) Determine o valor mínimo assumido pela função. 6. b) 13.

c) Calcule $f(0)$. 6. c) $f(0) = 15$

d) Obtenha o período da função. 6. d) $\frac{2\pi}{3}$ *rad*

7. A função trigonométrica $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = 2 + 7 \cdot \cos\,(3x - \pi)$. Sobre essa função, considere as afirmações a seguir e indique **V** para verdadeira ou **F** para falsa.

I. O máximo valor assumido pela função é 7. 7. I. F

II. O mínimo valor assumido pela função é –5. 7. II. V

III. $f(0) = -5$ 7. III. V

IV. $f(3\pi) = 9$ 7. IV. V

Questões de vestibulares e Enem

8. (UFGO) Considerando 1° como a distância média entre dois meridianos, e que na Linha do Equador corresponde a uma distância média de 111,322 km, e tomando-se esses valores como referência, pode-se inferir que o comprimento do círculo da Terra, na Linha do Equador, é de, aproximadamente, 8. Alternativa **d**.

a) 52 035 km

b) 48 028 km

c) 44 195 km

d) 40 076 km

9. (UEL-PR) Uma empresa de produtos alimentícios recebeu de seu contador uma planilha com os lucros mensais referentes ao ano de 2017. Ao analisar a planilha, a empresa constatou que, no mês 4 (abril), teve R$ 50.000,00 de lucro e que, no mês 6 (junho), o lucro foi de R$ 30.000,00. Determine o lucro da empresa, em dezembro de 2017, sabendo que a função que descreve o lucro L do mês t daquele ano é definida por $L(t) = a \cdot \cos\left(\pi/3 + \frac{\pi}{2}t\right) + b$ em que $1 \leq t \leq 12$, $a > 0$ e $b > 0$.

Apresente os cálculos realizados na resolução da questão. 9. R$ 50.000,00; resposta pessoal.

10. (UEG) Os valores de x, sendo $0 \leq x \leq 2\pi$, para os quais as funções $f(x) = \text{sen}\,x$ e $g(x) = \cos x$ se interceptam, são 10. Alternativa **c**.

a) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$

b) $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$

d) $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$

e) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$

11. (Ifal) Em Física, a posição de uma partícula pontual em um oscilador harmônico é dada pela função trigonométrica abaixo:

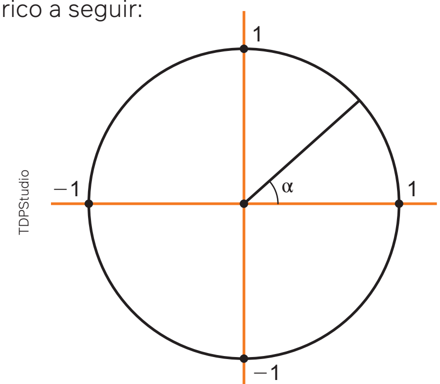
$$x = A \cdot \cos \varphi$$

onde: x é a posição da partícula, A é a amplitude de oscilação e φ é a fase.

Considerando que a amplitude de oscilação é de 4 cm, qual é a posição da partícula quando a fase é $\frac{2\pi}{3}$ radianos? 11. Alternativa **b**.

a) –4 cm
b) –2 cm
c) 0
d) 2 cm
e) 4 cm

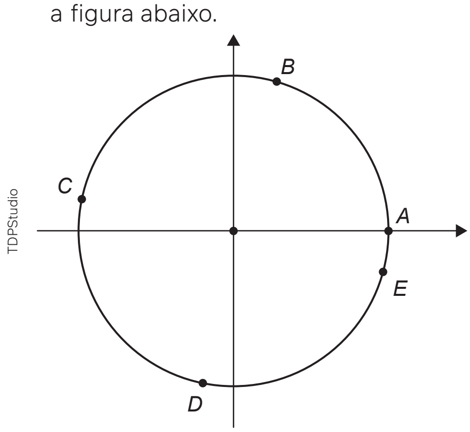
12. (UERJ) Observe o ângulo central α do círculo trigonométrico a seguir:



Admitindo que $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, o valor $\text{sen}\,(2\pi - \alpha)$ é igual a: 12. Alternativa **c**.

a) $\frac{3}{5}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $-\frac{3}{5}$
d) $-\frac{1}{2}$

13. (UFJF-MG) Considere o ciclo trigonométrico, os pontos A, B, C, D, E e os números b, c, d, e conforme a figura abaixo.



$b = \cos \widehat{AB}$
$c = \cos \widehat{AC}$
$d = \cos \widehat{AD}$
$e = \cos \widehat{AE}$

A relação correta entre b, c, d, e: 13. Alternativa **a**.

a) $c < d < b < e$
b) $c < b < e < d$
c) $b < e < c < a$
d) $d < b < c < e$
e) $d < e < b < c$

14. (Fuvest-SP) Suponha, para simplificar, que a Terra é perfeitamente esférica e que a linha do Equador mede 40 000 km. O trajeto que sai do Polo Norte, segue até a linha do Equador pelo meridiano de Greenwich, depois se desloca ao longo da linha do Equador até o meridiano 45°L e então retorna ao Polo Norte por esse meridiano tem comprimento total de 14. Alternativa **c**.

a) 15 000 km.
b) 20 000 km.
c) 25 000 km.
d) 30 000 km.
e) 35 000 km.

15. (UEG-GO) Na competição de *skate* a rampa em forma de U tem o nome de *vert,* onde os atletas fazem diversas manobras radicais. Cada uma dessas manobras recebe um nome distinto de acordo com o total de giros realizados pelo skatista e pelo skate, uma delas é a "180 *allie frontside*", que consiste num giro de meia volta. Sabendo-se que 540° e 900° são côngruos a 180°, um atleta que faz manobras 540 *Mc Tuist* e 900 realizou giros completos de 15. Alternativa **a**.

a) 1,5 e 2,5 voltas respectivamente.
b) 0,5 e 2,5 voltas respectivamente.
c) 1,5 e 3,0 voltas respectivamente.
d) 3,0 e 5,0 voltas respectivamente.
e) 1,5 e 4,0 voltas respectivamente.

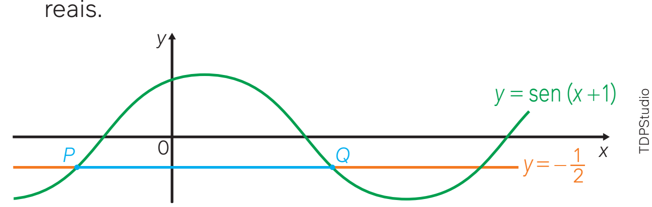
16. (Mack-SP) Se a temperatura T (em °C) em uma cidade, durante o dia, é dada aproximadamente pela função $T(t) = 5 + 16 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{28}\right)$, $0 \leq t \leq 18$, em que t é o tempo, em horas, então, a temperatura máxima ocorrerá às 16. Alternativa **b**.

a) 14 h 30 min
b) 14 h
c) 13 h 30 min
d) 13 h
e) 12 h

17. (UEA-AM) O ponto (0, 2) pertence à função trigonométrica $f(x) = a + \cos x$, em que a é um número real. O valor de $f(2\pi)$ é igual a 17. Alternativa **c**.

a) –2
b) –1
c) 2
d) 1
e) 0

18. (FGV-SP) Observe a figura com a representação gráfica de uma constante e de uma função trigonométrica, ambas definidas para todos os números reais.



Sendo P e Q os pontos de intersecção dos gráficos das funções indicadas na figura, a medida de PQ, em unidades de comprimento do plano cartesiano, é igual a 18. Alternativa **e**.

a) 2
b) $\frac{2\pi}{3}$
c) $2\sqrt{3}$
d) 4
e) $\frac{4\pi}{3}$

19. (Fuvest-SP) Uma quantidade fixa de um gás ideal é mantida a temperatura constante, e seu volume varia com o tempo de acordo com a seguinte fórmula: $V(t) = \log_2[5 + 2\text{sen}\,(\pi t)]$, $0 \leq t \leq 2$, em que t é medido em horas e $V(t)$ é medido em m^3. A pressão máxima do gás no intervalo de tempo [0, 2] ocorre no instante 19. Alternativa **d**.

a) $t = 0{,}4$ **c)** $t = 1$ **e)** $t = 2$

b) $t = 0{,}5$ **d)** $t = 1{,}5$

20. (Enem) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$ em que A, B e k são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi 20. Alternativa **a**.

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$

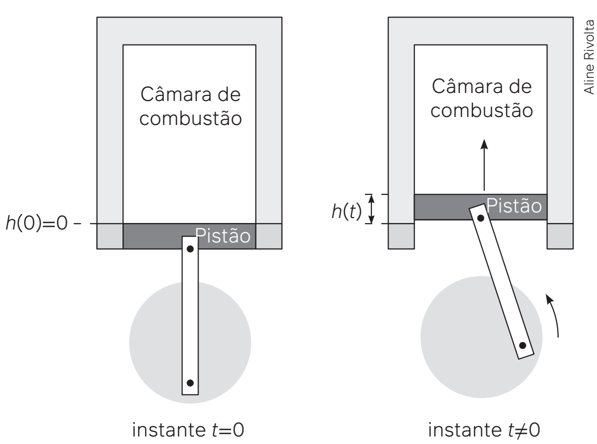
b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$

c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$

d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$

e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

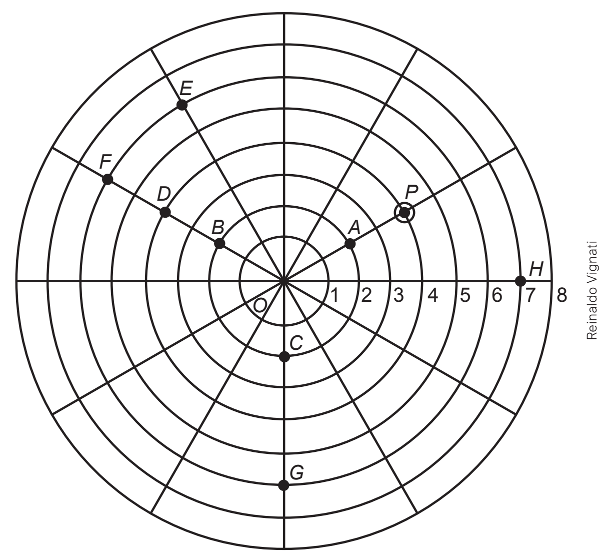
21. (Enem) Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.



A função $h(t) = 4 + 4\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para $t \geq 0$ descreve como varia a altura h, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos. O valor do parâmetro b, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro b, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é (para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π):
21. Alternativa **d**.

a) 1. **b)** 2. **c)** 4. **d)** 5. **e)** 8.

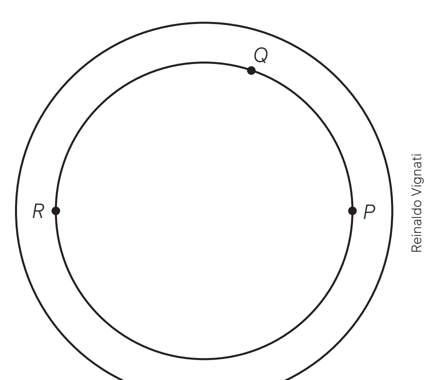
22. (Enem) No jogo mostrado na figura, uma bolinha desloca-se somente de duas formas: ao longo de linhas retas ou por arcos de circunferência centrados no ponto O e raios variando de 1 a 8. Durante o jogo, a bolinha que estiver no ponto P deverá realizar a seguinte sequência de movimentos: 2 unidades no mesmo sentido utilizado para ir do ponto O até o ponto A e, no sentido anti-horário, um arco de circunferência cujo ângulo central é 120°.



Após a sequência de movimentos descrita, a bolinha estará no ponto 22. Alternativa **d**.

a) B **b)** D **c)** E **d)** F **e)** G

23. (Enem) Uma pista circular delimitada por duas circunferências concêntricas foi construída. Na circunferência interna dessa pista, de raio 0,3 km, serão colocados aparelhos de ginástica localizados nos pontos P, Q e R, conforme a figura.



O segmento RP é um diâmetro dessa circunferência interna, e o ângulo $P\hat{R}Q$ tem medida igual a $\frac{\pi}{5}$ radianos. Para uma pessoa ir do ponto P ao ponto Q andando pela circunferência interna no sentido anti-horário, ela percorrerá uma distância, em quilômetro, igual a 23. Alternativa **d**.

a) $0{,}009\pi$ **b)** $0{,}03\pi$ **c)** $0{,}06\pi$ **d)** $0{,}12\pi$ **e)** $0{,}18\pi$

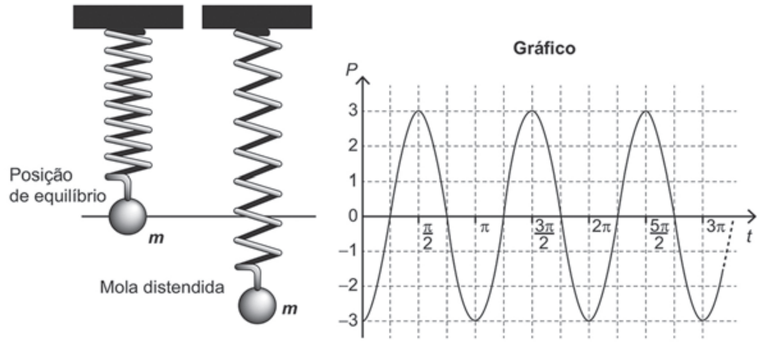
24. (Enem) Na modelagem e no estudo de fenômenos periódicos, em geral, os modelos associados fazem uso de funções trigonométricas. Nesse sentido, considere um experimento, realizado em laboratório, em que uma planta foi colocada em uma estufa, onde a temperatura é controlável. O experimento consiste em observar alterações nas características dessa planta ao ser submetida a variações de temperatura. Durante 24 horas, a temperatura $T(x)$ da estufa variou de acordo com a função $T(x) = 20 - 10\text{sen}\left(\pi \cdot \frac{x}{4}\right)$, em que x é medido em hora, variando no intervalo $0 \leq x \leq 24$.

Durante esse experimento, quantas vezes a temperatura na estufa atingiu o seu valor mínimo? 24. Alternativa **b**.

a) 1 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 7

25. (Enem) Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura à direita representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $P(t) = \pm A \cdot \cos(\omega t)$ *ou* $P(t) = \pm A \cdot \text{sen}(\omega t)$, em que $A > 0$ é amplitude de deslocamento máximo e ω é a frequência, que se relaciona com o período T pela fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas.



Enem, 2021

A expressão algébrica que representa as posições $P(t)$ da massa m, ao longo do tempo, no gráfico, é

25. Alternativa **a**.

a) $-3\cos(2t)$

b) $-3\text{sen}(2t)$

c) $3\cos(2t)$

d) $-6\cos(2t)$

e) $6\cos(2t)$

Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão em relação aos assuntos e objetivos trabalhados ao longo da presente unidade.

Objetivos de aprendizagem	Sim	É necessário retomar
Identifico e relaciono as unidades de medidas de ângulos (grau e radiano).		
Compreendo o conceito de circunferência trigonométrica.		
Identifico o seno e o cosseno de um arco trigonométrico.		
Compreendo as funções trigonométricas seno e cosseno.		
Identifico a periodicidade nas funções trigonométricas seno e cosseno.		
Relaciono as funções trigonométricas a fenômenos periódicos.		
Resolvo e elaboro problemas modelados por funções trigonométricas.		

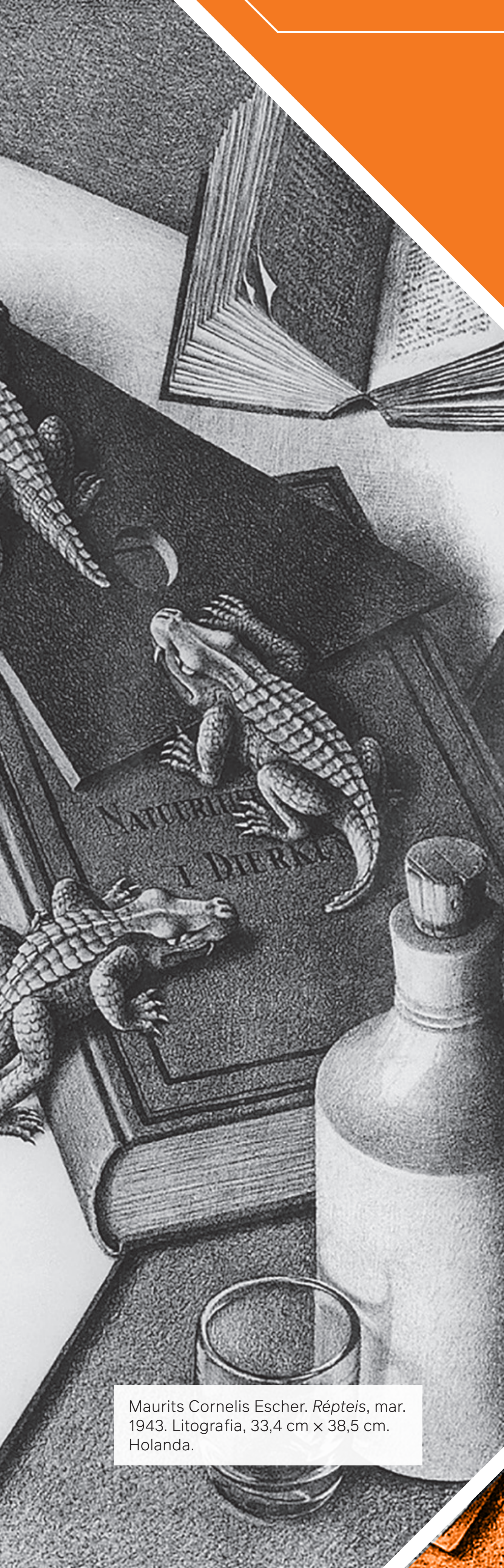
Neste capítulo, você vai:

- desenvolver noções sobre o método axiomático;
- ler e interpretar textos referentes ao conhecimento matemático e à história da Matemática;
- resolver e elaborar problemas relacionados aos cálculos de medidas de comprimento associados aos elementos de alguns sólidos geométricos;
- resolver problemas envolvendo planificações de sólidos geométricos;
- resolver e elaborar problemas que envolvam elementos de poliedros;
- diferenciar poliedros regulares de poliedros não regulares e poliedros convexos de poliedros não convexos;
- investigar e compreender diferentes projeções cartográficas.

CAPÍTULO

6

Os sólidos geométricos



Maurits Cornelis Escher. *Répteis*, mar. 1943. Litografia, 33,4 cm × 38,5 cm. Holanda.

A imagem apresenta uma obra do artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972). Suas obras são famosas por surpreender e por algumas vezes representar o impossível. O artista brincava com o fato de ter que representar o espaço, que é tridimensional, em um plano bidimensional, como a folha de papel. Neste capítulo, vamos explorar as formas tridimensionais e algumas de suas propriedades.

1. **Identifique nesta obra, *Répteis*, as figuras que são tridimensionais e as bidimensionais.** 1. Resposta pessoal.

2. **Como você diferenciaria, em uma folha de papel, o quadrado de um cubo em um desenho semelhante ao da obra?** 2. Resposta pessoal.

1 O método matemático

Você certamente já se deparou com termos como **demonstração**, **justificativa**, **prova**, entre outros, que, não só em Matemática mas também em outras áreas do conhecimento, estão relacionados à ideia de persuasão ou afirmação. Por isso, no cotidiano escutamos expressões como: "Vou provar por *A* mais *B* que...".

Não é nosso objetivo aqui desenvolver com profundidade o chamado método matemático, porém julgamos oportuno que você conheça um pouco melhor essa estrutura e forma de persuasão denominada **demonstração**.

O método matemático utilizado como um procedimento do estabelecimento das "verdades" consiste inicialmente de um sistema axiomático, isto é, um conjunto de axiomas que podem ser ligados de forma lógica derivando teoremas.

Para não sermos tão formais, vamos utilizar duas analogias feitas por Carlos Tomei em seu livro *Euclides: a conquista do espaço* para introduzir a ideia do método axiomático.

> Você deve imaginar qual seja um dos problemas básicos de escrever um dicionário. Uma palavra difícil tem de ser explicada com palavras mais fáceis, que por sua vez têm de ser explicadas com palavras ainda mais fáceis. Levado ao pé da letra, o processo não teria fim. Como o número de palavras de uma língua é finito, a conclusão é inevitável: algumas palavras não poderão ser definidas. Temos de escolher algumas palavras como ponto de partida e definir todas as outras a partir delas. Claro, não há nada de sagrado nessa escolha inicial de palavras; elas podem ser trocadas por outras. Mas o importante é começar a partir de um conjunto fixo de termos não definidos.
>
> Da mesma forma, quando uma criança começa a perguntar o porquê das coisas, não é possível regredir indefinidamente. A série de porquês termina logo, com um pouco de sorte, geralmente com uma situação em que a criança não sente necessidade de esclarecimentos (supondo, para fins de boa vizinhança, que o respondedor tenha paciência e sabedoria infinitas).

TOMEI, Carlos. *Euclides*: a conquista do espaço. São Paulo: Odysseus, 2003. p. 34.

Para pensar e discutir

1. Utilizando a primeira analogia acima, responda: Qual seria a definição para a palavra **esfera**? 1. Resposta pessoal.
2. Como você define ponto, reta e plano? 2. Resposta pessoal.
3. Quando criança, que pergunta você fez, como curiosidade, que gerou outra pergunta? 3. Resposta pessoal.

O **método axiomático** que é utilizado em Matemática, embora tenha sido originalmente elaborado para a Geometria, teve em Euclides da Alexandria, em 300 a.C., seu grande organizador. Ele apresentou palavras que foram utilizadas como ponto de partida – os denominados **entes primitivos** – para outras definições. Ele também elaborou uma lista de fatos que "eram considerados suficientemente óbvios" – que são os **axiomas** – com o objetivo de estruturar sua base para a construção de uma cadeia de argumentos válidos: eram permitidas as regras de combinação argumentativa (**lógica**). Um exemplo clássico de uma regra argumentativa é o silogismo.

- Todos os homens são mortais.
- Sócrates é um homem.
- Conclusão: Sócrates é mortal.

E os teoremas e as demonstrações?

Um teorema representa nessa estrutura (ver esquema a seguir) uma informação construída relacionando informações anteriores, como conceito primitivo, axioma e definição.

Conceito primitivo → Axioma → Definição → Teorema

Análise e contexto

Demonstrações matemáticas

A explicação utilizada como forma de afirmação da verdade que encerra um teorema constitui a demonstração matemática. É importante compreender a estrutura de um teorema, em que as demonstrações devem ser feitas. Um teorema, de uma forma simplificada e dentro da disciplina de Matemática, pode ser estruturado da seguinte maneira:

TEOREMA

- **Hipótese**: é o que conhecemos, são as condições iniciais com base nas quais queremos chegar a uma afirmação verdadeira em determinado contexto.
- **Demonstração**: é o conjunto de raciocínios lógicos utilizados para chegar à afirmação verdadeira, com o auxílio de conhecimentos já estabelecidos.
- **Tese**: é a afirmação verdadeira, resultante da demonstração e da condição inicial imposta.

A demonstração está ligada ao rigor da Matemática e, por assim dizer, à própria história da Matemática. Mesmo que você não necessite fazer demonstrações rigorosas, é interessante conhecer seu significado e observar sua estrutura. Por isso, recomendamos a leitura do texto a seguir.

> [...]
>
> Os teoremas matemáticos dependem deste processo lógico, e uma vez demonstrados eles serão considerados verdades até o final dos tempos. A prova matemática é absoluta. Para apreciar o valor de tais provas, devemos compará-las com sua prima pobre, a prova científica. Na ciência apresenta-se uma hipótese para explicar um fenômeno físico. Se as observações do fenômeno são favoráveis à hipótese, então elas se tornam evidências a favor dela. Além disso, a hipótese não deve meramente descrever um fenômeno conhecido, mas também prever os resultados de outros fenômenos. Experiências podem ser feitas para testar a capacidade da hipótese em prever os resultados, e se o resultado for bem-sucedido teremos mais evidências para apoiar a hipótese. Por fim, a soma das evidências pode ser tão grande que a hipótese passará a ser aceita como teoria científica.
>
> Contudo, uma teoria científica nunca pode ser provada do mesmo modo absoluto quanto um teorema matemático. Ela é meramente considerada como altamente provável, com base nas evidências disponíveis. A assim chamada prova científica depende da observação e da percepção, e ambas são falíveis, fornecendo somente aproximações em relação à verdade. Como disse certa vez Bertrand Russel: “Embora isto possa parecer um paradoxo, toda a ciência exata é denominada pela ideia da aproximação”.
>
> [...]
>
> A ciência funciona por um sistema semelhante ao da justiça. Uma teoria é considerada verdadeira se existem evidências suficientes para apoiá-la “além de toda dúvida razoável”. Por outro lado, a matemática não depende de evidências tiradas de experiências sujeitas a falhas e sim construídas sobre lógica infalível.
>
> [...]
>
> A prova, ou demonstração, de Pitágoras é irrefutável. Ela mostra que seu teorema é verdadeiro para cada triângulo retângulo do universo. A descoberta foi considerada tão fabulosa que cem bois foram sacrificados num ato de gratidão para com os deuses. A descoberta foi um marco na história da Matemática e um dos saltos mais importantes da história da civilização. Sua importância foi dupla. Primeiro, desenvolveu a ideia da prova. Uma solução matemática demonstrada era uma verdade mais profunda do que qualquer outra por ser o resultado de uma lógica encadeada, passo a passo. Embora o filósofo Tales já tivesse inventado algumas demonstrações geométricas primitivas, Pitágoras levou a ideia muito mais adiante e foi capaz de provar ideias matemáticas muito mais engenhosas. A segunda consequência do teorema de Pitágoras é que ele liga o método matemático abstrato a alguma coisa tangível. Pitágoras demonstrou que as verdades da matemática podem ser aplicadas ao mundo científico, dando-lhe um fundamento lógico. A matemática dá à ciência um princípio rigoroso, e sobre seus fundamentos infalíveis os cientistas acrescentam suas medições imprecisas e suas observações imperfeitas.

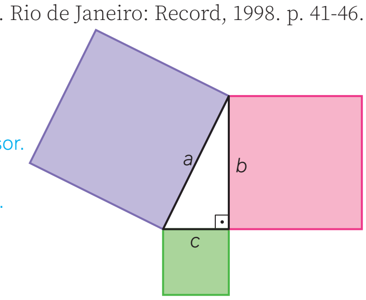
SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*. Rio de Janeiro: Record, 1998. p. 41-46.

1. Você conhece alguma “verdade” científica que depois de algum tempo foi refutada? Exemplifique. 1. Resposta pessoal.

2. Qual é o enunciado do último teorema de Fermat? 2. Resposta no Manual do Professor.

3. Todo humano é racional. Você é humano. Portanto... Qual é a conclusão? 3. Você é racional.

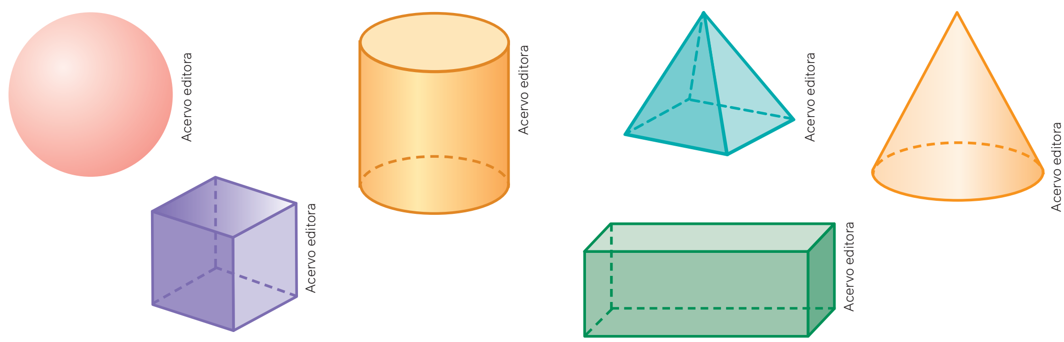
4. O teorema de Pitágoras certamente está entre os mais conhecidos teoremas e, provavelmente, é o que apresenta mais demonstrações até hoje. Enuncie o teorema de Pitágoras e pesquise uma demonstração dele. 4. Resposta pessoal.



Acervo editora

2 Figuras geométricas espaciais

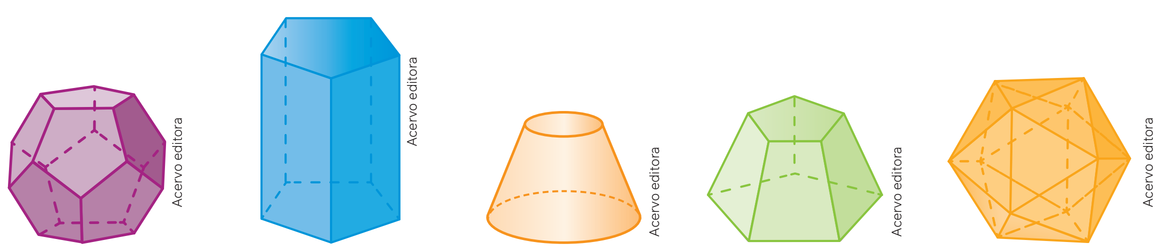
As figuras geométricas representadas a seguir já foram vistas em aulas de Matemática no Ensino Fundamental. É bem provável que você tenha utilizado modelos planificados para construir algumas delas.



Para pensar e discutir

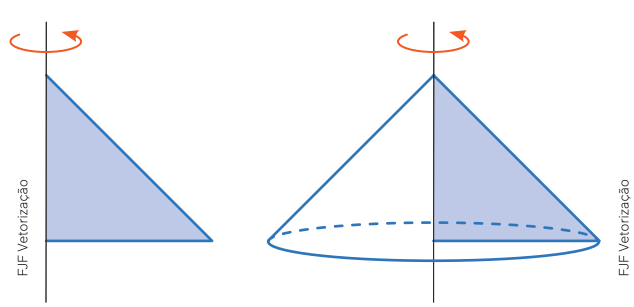
1. Quais são as denominações dessas figuras geométricas? 1. Resposta no Manual do Professor.
2. Como você conceituaria cada um desses sólidos? Explique oralmente. 2. Resposta pessoal.
3. Você indicaria algum objeto da sala de aula em que você estuda cuja forma lembra uma dessas figuras geométricas? Cite-o. 3. Resposta pessoal.

Além dessas figuras geométricas, outras irão aparecer em nosso estudo. Entre elas, por exemplo, temos:



dodecaedro | prisma pentagonal | tronco de cone | tronco de pirâmide | icosaedro

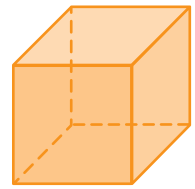
Você saberia explicar como obter um cilindro ou uma esfera por meio de “revolução” de uma figura plana? O cone, por exemplo, pode ser obtido como a revolução de um triângulo retângulo em torno de um dos catetos, conforme figura abaixo.



O cilindro, a esfera e o cone são exemplos de **sólidos de revolução**, pois podem ser obtidos pela “revolução” de figuras geométricas planas em torno de um eixo.

Não apresentaremos aqui uma definição formal de cada um desses sólidos, mas analisaremos suas estruturas, como são formados e seus elementos principais para que possamos tê-los como modelos na análise de objetos que nos cercam. Quando necessário, pesquise os conceitos desses sólidos.

Neste estudo há uma dificuldade a ser enfrentada: a representação no plano de uma figura não plana. Por exemplo, na figura a seguir temos um cubo. As linhas tracejadas são utilizadas para representar as arestas que não são visíveis no primeiro plano do desenho. Isso auxilia na representação em duas dimensões de um objeto que tem três dimensões.

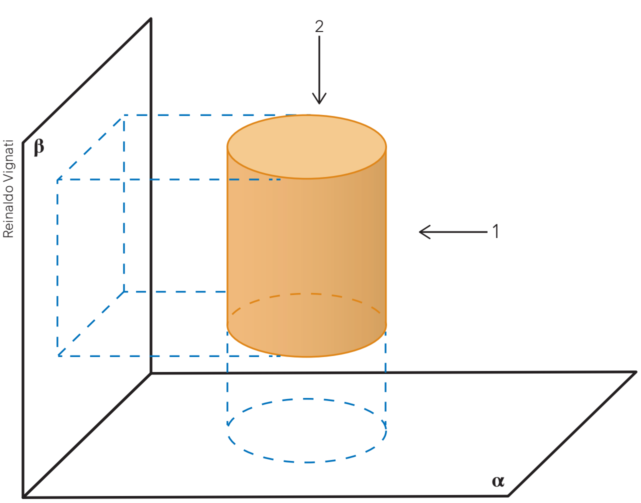


Acervo editora

Podemos também representar figuras tridimensionais utilizando as **projeções ortogonais** dos objetos (projeções do objeto feitas perpendicularmente a um plano). No Ensino Fundamental você já teve contato quando desenhou as vistas superior, lateral ou frontal de determinados objetos. Um mesmo carro, por exemplo, pode ser visto de diferentes ângulos.

FJF Vetorização

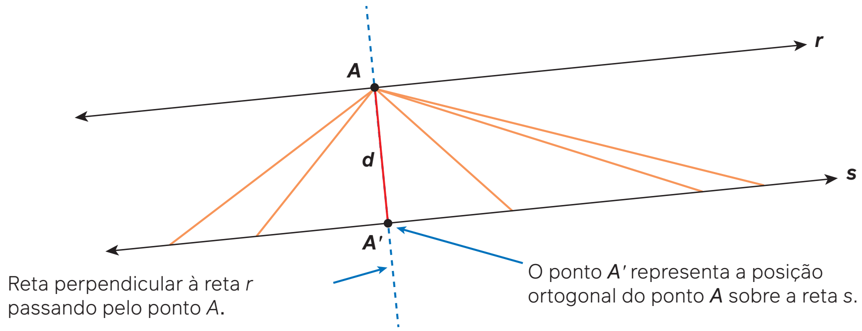
Uma ideia de **projeção ortogonal** pode ser visualizada na figura a seguir, em que um cilindro circular reto é posicionado em frente a dois planos perpendiculares entre si. Imagine que você é um observador e que ora está na posição 1 olhando para o cilindro, ora está na posição 2. O que você vê do cilindro nessas posições?



Reinaldo Vignati

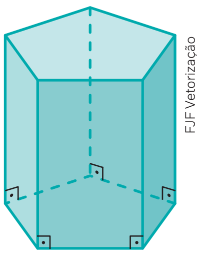
- Na posição 1, a projeção ortogonal do cilindro no plano β é um retângulo de medidas iguais ao diâmetro da base do cilindro e a altura do cilindro.
- Na posição 2, a projeção ortogonal do cilindro no plano α é um círculo de mesmas medidas que a base do cilindro.

A ideia de projeção ortogonal também está relacionada ao conceito de distância. Por exemplo, se considerarmos duas retas paralelas *r* e *s*, existem infinitas medidas que podemos tomar de um ponto *A* pertencente à reta *r* até outro ponto da reta *s*. A menor dessas medidas é considerada a distância *d* entre essas retas. A distância *d* pode ser determinada pela projeção ortogonal do ponto *A* na reta *s*.

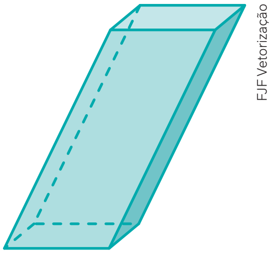


Essas ideias são importantes para o estudo dos sólidos geométricos, do cálculo das áreas e dos volumes desses sólidos.

Por exemplo, o prisma é um sólido geométrico cuja característica fundamental é possuir duas faces poligonais paralelas e congruentes, chamadas de bases, e, além disso, as arestas que unem pontos correspondentes desses polígonos são congruentes. Existem dois tipos de prismas, o reto e o oblíquo. Nos prismas retos, os planos das faces laterais são ortogonais aos planos das bases.



Prisma reto.



Prisma oblíquo.

Para explorar

A turma será organizada em três grupos e cada grupo ficará responsável por uma das partes desta atividade, o que pode ser determinado por sorteio.

Grupo 1 – Estudo dos prismas

1. Conceituem o sólido geométrico prisma, diferenciando prisma oblíquo de prisma reto.
2. Exemplifiquem, por meio de construção (pode ser em *software* de geometria dinâmica), os prismas retos que são regulares: triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal e octogonal. Descrevam como esses prismas são formados.
3. Respondam e expliquem: O cubo e o bloco retangular (paralelepípedo retangular) são exemplos de prismas?
4. Montem, por meio do modelo de planificação, um dos prismas.
5. Apresentem para a turma o estudo dos prismas dando um exemplo de um objeto ou uma construção com a forma de um prisma.

Grupo 2 – Estudo das pirâmides

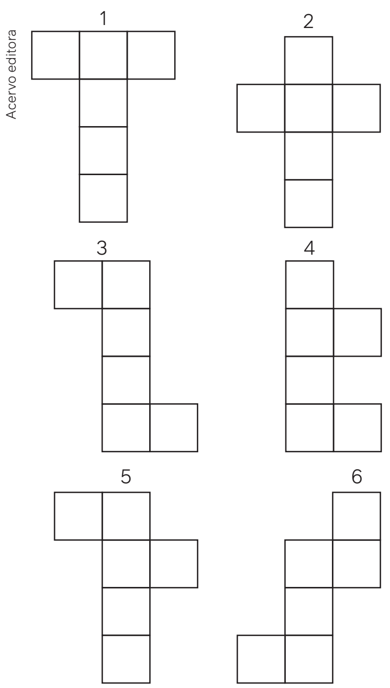
1. Conceituem o sólido geométrico pirâmide, diferenciando pirâmide oblíqua de pirâmide reta.
2. Exemplifiquem, por meio de construção (pode ser em *software* de geometria dinâmica), as pirâmides retas que são regulares: triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal e octogonal. Descrevam como essas pirâmides são formadas.
3. Respondam e expliquem: Uma pirâmide reta pode ter uma base em forma de retângulo?
4. Montem, por meio do modelo de planificação, uma das pirâmides.
5. Apresentem para a turma o estudo das pirâmides dando um exemplo de um objeto ou uma construção com a forma de pirâmide.

Grupo 3 – Estudo dos cilindros, dos cones e das esferas

1. Conceituem cada um dos sólidos: cilindro, cone e esfera. Diferencem cilindro e cone retos de cilindro e cone oblíquos.
2. Exemplifiquem, por meio de construção (pode ser em *software* de geometria dinâmica), o cilindro reto, o cone reto e a esfera. Descrevam como esses sólidos são formados.
3. Completem no caderno e expliquem: Esses sólidos podem ser obtidos como revolução de uma ______.
4. Montem, por meio do modelo de planificação, um cilindro ou um cone.
5. Apresentem para a turma o estudo dos cilindros, dos cones e das esferas.

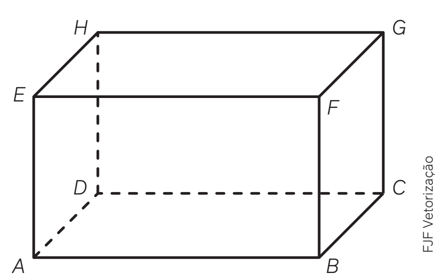
Atividades

1. Identifique, entre as planificações a seguir, qual delas não corresponde à de um cubo. 1. Apenas 4.



Podcast
Sólidos geométricos

2. Observe a seguir a representação de um bloco retangular (ou paralelepípedo reto). Indique uma aresta desse bloco que:



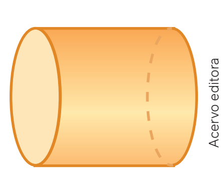
a) seja paralela à aresta *AB*; 2. a) *CD*, *EF* e *GH*.

b) seja perpendicular à aresta *AB*; 2. b) *AE*, *AD*, *BC* e *BF*.

c) seja ortogonal à aresta *AB*. 2. c) *AE*, *AD*, *BC*, *BF*, *DH*, *CG*, *EH* e *FG*.

d) Qual é a diferença entre retas perpendiculares e retas ortogonais? 2. d) Resposta pessoal.

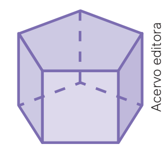
3. A figura a seguir representa um cilindro circular reto equilátero: a altura tem a mesma medida do diâmetro da base.



No caderno, faça um desenho que represente a planificação de um cilindro equilátero.
3. Resposta no Manual do Professor.

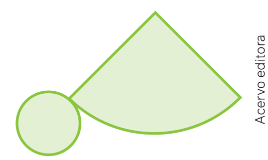
4. A planificação de um sólido geométrico é uma figura geométrica bidimensional correspondente à superfície externa desse sólido, que é tridimensional. Descreva a planificação de uma pirâmide regular de base pentagonal. 4. Resposta no Manual do Professor.

5. Abaixo está representado um prisma reto regular, cujas faces laterais são todas em forma de um quadrado.



Represente no caderno uma planificação desse prisma. 5. Resposta no Manual do Professor.

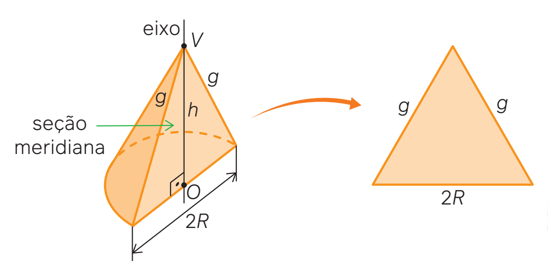
6. Abaixo está representada a planificação de um sólido geométrico.



a) Identifique as figuras planas que estão nessa planificação. 6. a) Círculo e setor circular.

b) Qual é o sólido geométrico correspondente? 6. b) Cone.

7. Você sabe o que é seção meridiana de um cone circular reto? Imagine um plano "cortando" o cone "ao meio" de tal forma que passe no eixo, como ilustrado a seguir. Assim, a seção meridiana de um cone circular reto é o triângulo cujos lados são o diâmetro da base e as duas geratrizes.



a) Um cone é denominado cone equilátero quando a seção meridiana tem a forma de um triângulo equilátero. Desenhe no caderno um cone equilátero e represente, nesse mesmo desenho, a seção meridiana. 7. a) Resposta no Manual do Professor.

b) Retorne à **atividade 3** e responda: Qual é a seção meridiana de um cilindro equilátero? 7. b) Quadrado.

8. Responda:

a) Qual é a forma da projeção ortogonal de uma esfera? 8. a) Círculo.

b) Se uma projeção ortogonal de um sólido geométrico sobre um plano é um círculo, qual é esse sólido geométrico?
8. b) Esfera, cone, tronco de cone ou cilindro.

Poliedros: relação de Euler

Hoje não precisamos viajar para conhecer formas arquitetônicas surpreendentes, como a apresentada na imagem, a construção feita no centro da cidade de Bilbao, na Espanha. Nesse prédio funciona a sede do Departamento de Saúde Basco. A estrutura é feita em vidro e aço e, de certa forma, lembra muito as "faces de um diamante".

Essa estruturação permite uma combinação de estabilidade e beleza, tornando-os uma escolha popular para arquitetos que buscam inovação e funcionalidade. No *design* arquitetônico, a utilização de sólidos geométricos não é apenas uma questão de estética mas também de eficiência estrutural e econômica.

Jim Monk/Alamy/Fotoarena

As imagens desta página não estão representadas na mesma proporção.

Sede do Departamento de Saúde Basco, construída em 2008 na cidade de Bilbao, Espanha, 2019.

Para pensar e discutir

1. Quais figuras planas você reconhece na estrutura indicada na foto? 1. Triângulos, quadriláteros e pentágonos.
2. Junte-se a um colega e pesquisem um exemplo de influência dos sólidos geométricos em construções arquitetônicas na sua cidade e compartilhem com os colegas. 2. Resposta pessoal.

Ao observar com um pouco mais de atenção determinados sólidos geométricos, talvez seja possível perceber a inspiração, por exemplo, para a construção apresentada acima ou mesmo a forma lapidada de um diamante.

Retouch man/Shutterstock.com

Diamante.

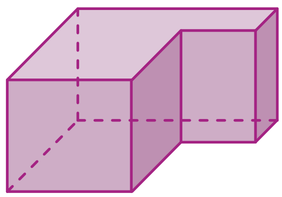
Pamela Toledo/Shutterstock.com

Poliedro de vidro.

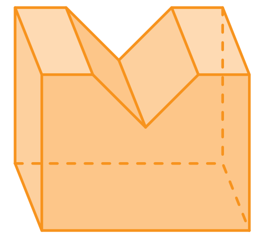
O diamante lapidado e a construção apresentada anteriormente são exemplos de formas poliédricas.

Poliedros são sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos.

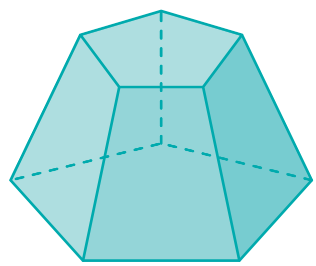
O cubo, o bloco retangular, uma pirâmide e um prisma são exemplos de poliedros. Observe alguns modelos não tão conhecidos.


FJF Vetorização

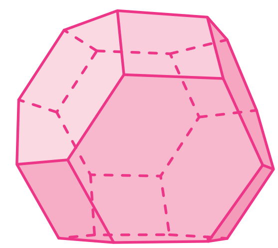
A


FJF Vetorização

C


FJF Vetorização

B


FJF Vetorização

D

Os polígonos que formam a superfície de um poliedro são conhecidos por **faces**. O termo **poliedro** significa "várias faces". Além disso, os lados dos polígonos que formam as faces são as **arestas**. Denominamos **vértice** o ponto de encontro de duas ou mais arestas.

Para pensar e discutir

Sobre os poliedros *A*, *B*, *C* e *D* exemplificados anteriormente, responda:

1. Em cada poliedro, as faces são polígonos com o mesmo número de lados? 1. Não.

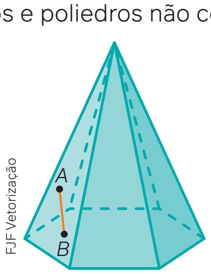
2. Qual dos poliedros tem o maior número de faces? 2. *D*.

3. Se no poliedro *A* você indicar dois pontos quaisquer pertencentes a faces diferentes e depois ligar esses dois pontos por um segmento, esse segmento estará totalmente contido no poliedro? Justifique indicando na figura. 3. Não. Resposta no Manual do Professor.

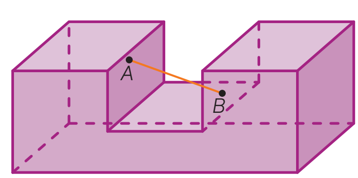
4. E nos demais poliedros? 4. Resposta no Manual do Professor.

Existem poliedros convexos e poliedros não convexos, observe os exemplos.

FJF Vetorização



Poliedro convexo.



Poliedro não convexo.

FJF Vetorização

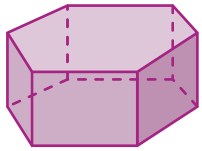
Uma maneira de reconhecer se um poliedro é convexo é ligar dois pontos quaisquer de duas faces diferentes por meio de um segmento. Caso esse segmento esteja totalmente contido no poliedro, ele é convexo. Já no poliedro não convexo, isso não ocorre.

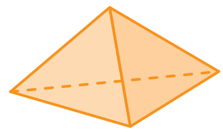
Nosso estudo está mais voltado aos chamados poliedros convexos, embora em alguns momentos ou mesmo por meio de alguns exemplos também possamos nos referir aos poliedros não convexos. Quando isso acontecer, a informação será destacada.

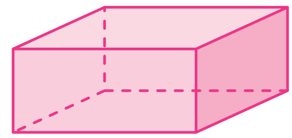
Há uma relação matemática que envolve o número de faces, o número de vértices e o número de arestas de um poliedro convexo. Você inicialmente irá investigar essa relação nos poliedros apresentados na seção **Para explorar** a seguir.

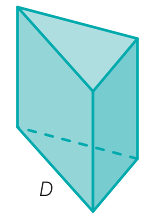
Para explorar

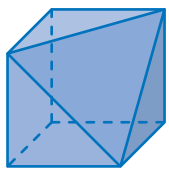
Junte-se a mais três colegas para esta atividade.

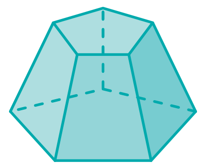

FJF Vetorização
A

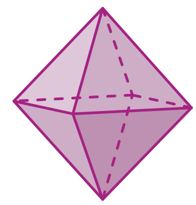

FJF Vetorização
B

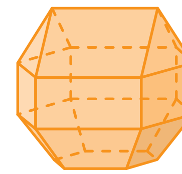

FJF Vetorização
C


FJF Vetorização
D


FJF Vetorização
E


FJF Vetorização
F


FJF Vetorização
G


FJF Vetorização
H

1. Considerem os poliedros *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* e *H* representados e respondam:

a) Todos são poliedros convexos? 1. a) Sim.

b) Em quais poliedros todas as faces têm o mesmo número de arestas? 1. b) *B*, *C* e *G*.

c) Em quais poliedros cada vértice é o ponto de encontro do mesmo número de arestas? 1. c) *A*, *B*, *C*, *D*, *F* e *G*.

2. Organizem uma tabela que contenha para cada poliedro da página anterior o número de vértices, o número de arestas e o número de faces. 2. Resposta no Manual do Professor.

3. Para cada poliedro calculem: $V + F - A$ e, então, escrevam uma conclusão. 3. Resposta no Manual do Professor; resposta pessoal.

4. Para cada poliedro, qual é a relação entre o número total de lados dos polígonos das faces e o número total de arestas? Justifiquem. 4. Resposta no Manual do Professor; resposta pessoal.

Apresentamos a seguir, sem demonstração, uma relação que envolve as quantidades de faces, de vértices e de arestas de um poliedro convexo.

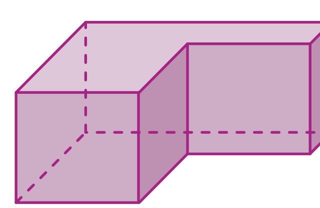
Relação de Euler

Para todo poliedro convexo, sendo *F* o número de faces, *V* o número de vértices e *A* o número de arestas, vale a relação:

$$V + F - A = 2$$

Note que essa relação é válida para todos os poliedros convexos. Entretanto, existem poliedros não convexos para os quais a relação é válida. A seguir, apresentamos exemplos por meio de atividades resolvidas.

Atividades resolvidas


FJF Vetorização

1. O poliedro roxo não é convexo. Verifique se ele satisfaz a relação de Euler.

- Contamos as quantidades de faces, de arestas e de vértices:

  Número de faces: 8

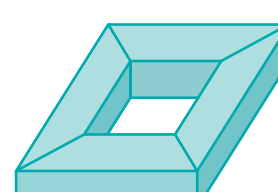
  Número de arestas: 18

  Número de vértices: 12

- Verificação da relação de Euler:

$$V + F - A = 12 + 8 - 18 = 2$$

Logo, apesar de o poliedro não ser convexo, é válida a relação de Euler.


FJF Vetorização

2. O poliedro azul também não é convexo. Ele lembra uma moldura com quatro faces superiores e quatro faces inferiores em forma de trapézio. Há uma parte "oca" em forma de um bloco retangular ao centro. Para simplificar o poliedro, omitimos as linhas tracejadas que representam algumas arestas do poliedro. Ele satisfaz a relação de Euler?

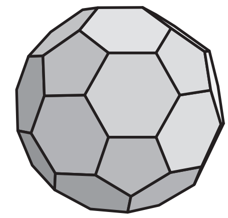
- Contamos as quantidades de faces, de arestas e de vértices:

  Número de faces: 16 Número de arestas: 32 Número de vértices: 16
- Verificação da relação de Euler:

$$V + F - A = 16 + 16 - 32 = 0$$

Não é válida a relação de Euler.

3. Vamos considerar agora um sólido geométrico formado por 12 faces pentagonais regulares e 20 faces hexagonais regulares. Quantas são as arestas e quantos são os vértices desse poliedro?



- Para calcular o número de faces vamos considerar que F_5 e F_6 representam o número de faces pentagonais e o número de faces hexagonais, respectivamente. Temos:

$$F = F_5 + F_6 = 12 + 20 \Rightarrow F = 32$$

- Como cada aresta é comum a duas faces, adicionamos o número de arestas nas faces pentagonais com o número de arestas nas faces hexagonais, obtendo assim o dobro do número de arestas:

$$5F_5 + 6F_6 = 2A$$
$$5 \cdot 12 + 6 \cdot 20 = 2A \Rightarrow 2A = 60 + 120$$
$$A = \frac{180}{2} \Rightarrow A = 90$$

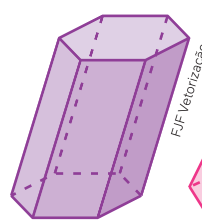
- O número de vértices é calculado utilizando a relação de Euler:

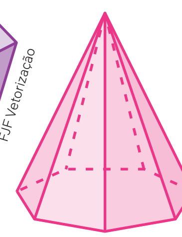
$$V + F - A = 2$$
$$V + 32 - 90 = 2 \Rightarrow V = 60$$

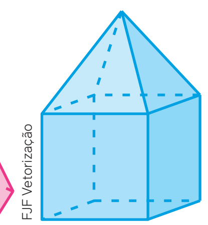
Portanto, o poliedro tem 32 faces, 90 arestas e 60 vértices.

Poliedro regular

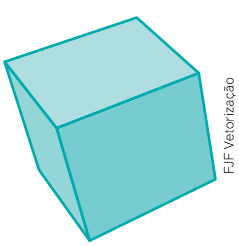
Considere as representações de três poliedros: um prisma, uma pirâmide e a sobreposição de um cubo com uma pirâmide quadrada. Embora possamos encontrar certas regularidades neles, não são exemplos de poliedros regulares.



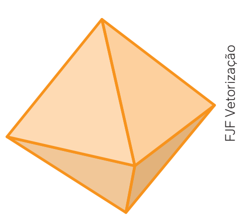




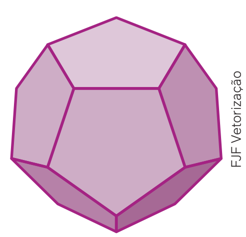
Agora, vamos considerar o seguinte grupo de poliedros representados, cujas faces não são todas visíveis. Observe atentamente as denominações desses poliedros e as faces visíveis.



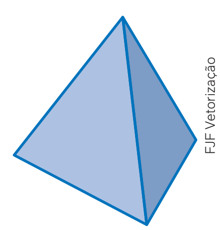
hexaedro



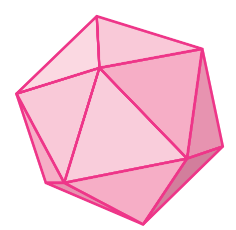
octaedro



dodecaedro



tetraedro



icosaedro

Para pensar e discutir

1. Encontre regularidades em cada um desses poliedros e as especifique. 1. Resposta no Manual do Professor.

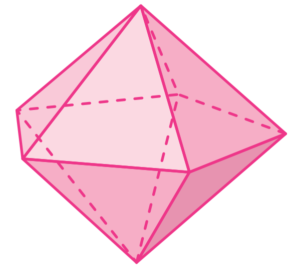
2. Verifique para quais desses poliedros é válida a relação de Euler. 2. Todos.

Prova-se que existem apenas cinco tipos de poliedros regulares: tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular.

Em um **poliedro regular**:

- todas as faces são polígonos regulares e congruentes, isto é, todas as faces têm o mesmo número de arestas;
- em cada vértice concorre o mesmo número de arestas.

Atividades


FJF Vetorização

9. No poliedro representado todas as faces são triângulos equiláteros. Em relação a esse poliedro indique:

a) o número de vértices; 9. a) 7

b) o número de arestas; 9. b) 15

c) o número de faces. 9. c) 10

10. Ainda em relação ao poliedro da atividade anterior, responda:

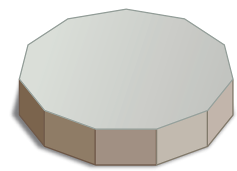
a) Ele verifica a relação de Euler? 10. a) Sim.

b) Todas as faces são congruentes? 10. b) Sim.

c) Em cada vértice concorre o mesmo número de arestas? 10. c) Não.

d) O poliedro é regular? Justifique. 10. d) Não; resposta pessoal.

11. Utilizando apenas cartolina, Márcia fez um modelo de um prisma reto para representar um poliedro, conforme ilustrado. A face apoiada sobre a superfície plana é igual e paralela à face superior que é visível na ilustração. Observe a imagem; em seguida, responda ao que se pede.


Reinaldo Vignati

a) Indique o número de vértices, de arestas e de faces desse poliedro. 11. a) 22 vértices, 33 arestas e 13 faces

b) Esse poliedro verifica a relação de Euler? 11. b) Sim.

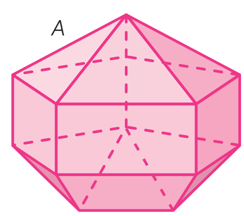
c) Quantas arestas convergem para cada vértice? 11. c) 3

d) Esse poliedro é regular? Justifique. 11. d) Não; resposta pessoal.

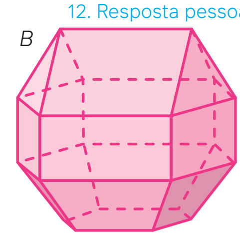
12. Pesquise o desenho ou uma ilustração de um poliedro (pode ser prisma, pirâmide ou outro) e, com base nele, elabore questões sobre seus elementos e responda a elas. Utilize como referência a atividade anterior. Depois, passe para um colega resolver. Resolva as questões que ele vai elaborar e depois discutam juntos os resultados. 12. Resposta pessoal.

13. Nos desenhos estão esboçados os poliedros *A* e *B*. Descreva, por meio de um pequeno texto argumentativo, os dois poliedros. Nessa descrição, fale sobre as quantidades de seus elementos (vértices, faces, arestas, número de arestas concorrendo por vértices), sobre a relação de Euler e, ainda, sobre o fato de não serem poliedros regulares. 13. Resposta pessoal.

A


FJF Vetorização

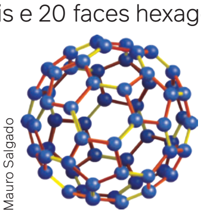
B


FJF Vetorização

14. Existe uma molécula denominada fulereno que é feita somente com átomos de carbono e sua representação tridimensional é apresentada na imagem. Nessa representação, temos os átomos posicionados nos vértices de um poliedro convexo. Esse poliedro tem 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais.

a) Obtenha o número de átomos de carbono e indique o que esses átomos representam nesse poliedro. 14. a) 60; os vértices do poliedro

b) Obtenha a quantidade total de ligações entre esses átomos e indique a relação dessas ligações com o poliedro. 14. b) 90; as arestas do poliedro


Mauro Salgado

Esquema com concepção artística dos elementos, sem reproduzir cores naturais ou seguir a proporção real entre as dimensões.

Representação tridimensional da molécula fulereno.

15. (Fuvest-SP) O número de faces triangulares de uma pirâmide é 11. Pode-se, então, afirmar que essa pirâmide possui: 15. Alternativa **e**.

a) 33 vértices e 22 arestas.

b) 12 vértices e 11 arestas.

c) 22 vértices e 11 arestas.

d) 11 vértices e 22 arestas.

e) 12 vértices e 22 arestas.

16. (Enem) Os sólidos de Platão são poliedros convexos cujas faces são todas congruentes a um único polígono regular, todos os vértices têm o mesmo número de arestas incidentes e cada aresta é compartilhada por apenas duas faces. Eles são importantes, por exemplo, na classificação das formas dos cristais minerais e no desenvolvimento de diversos objetos. Como todo poliedro convexo, os sólidos de Platão respeitam a relação de Euler $V - A + F = 2$, em que V, A e F são os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente.

Em um cristal, cuja forma é a de um poliedro de Platão de faces triangulares, qual é a relação entre o número de vértices e o número de faces? 16. Alternativa **c**.

a) $2V - 4F = 4$

b) $2V - 2F = 4$

c) $2V - F = 4$

d) $2V + F = 4$

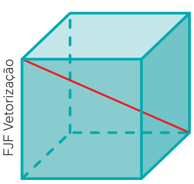
e) $2V + 5F = 4$

3

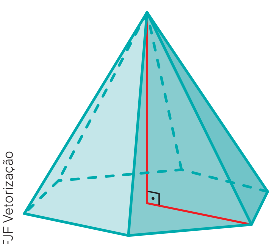
Relações métricas em sólidos geométricos

Os sólidos geométricos são utilizados como modelo para construções e para a elaboração de objetos diversos. Assim, para calcular suas áreas e volumes, é preciso conhecer as relações métricas relacionadas a essas figuras. Por isso, a partir de agora, abordaremos essas relações métricas, deixando para o próximo volume o trabalho com áreas e volumes de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.

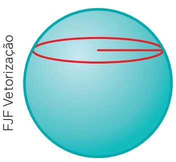
Para alguns prismas, tais como o cubo e o bloco retangular, existe, além do cálculo de áreas e volumes, a necessidade de determinar medidas de diagonais. Já para pirâmides e cones há relações métricas que envolvem elementos diversos, como altura e raio da base. No caso da esfera, também temos algumas relações referentes às circunferências que podem ser traçadas.



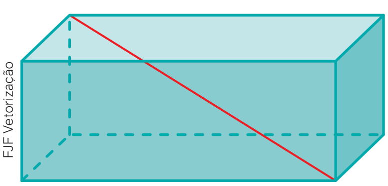
FJF Vetorização



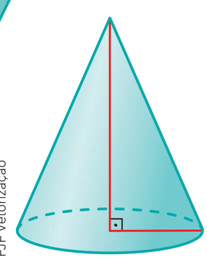
FJF Vetorização



FJF Vetorização



FJF Vetorização

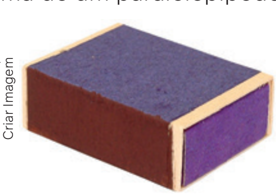


FJF Vetorização

Note que, nos sólidos representados, estão indicados alguns elementos cujas medidas precisaremos determinar em situações diversas. Para que fiquem mais evidentes nas ilustrações, também indicaremos tais elementos com traçado contínuo, utilizando cores para destacá-los.

Bloco retangular e cubo

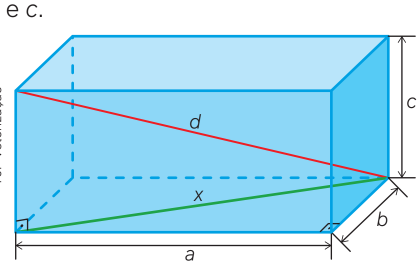
Uma simples caixa de fósforos tem a forma de um paralelepípedo reto. Observe:



Fernando Favoretto/Criar Imagem

Todas as faces são retangulares.

O modelo de uma caixa pode ser representado pelo poliedro chamado paralelepípedo reto (ou bloco retangular), cujas medidas das arestas são *a*, *b* e *c*.



FJF Vetorização

Como consideramos *a*, *b* e *c* as medidas das arestas do bloco retangular representado, uma medida a ser determinada é a da diagonal *d* (linha vermelha) desse sólido em função de *a*, *b* e *c*. Outra medida também a ser obtida é a medida *x* da diagonal (linha verde) da face retangular com lados medindo *a* e *b*.

O cálculo da medida da diagonal d de um paralelepípedo retangular é feito aplicando-se o teorema de Pitágoras em dois triângulos retângulos.

- No triângulo de lados x, a e b (x representa a medida da diagonal de uma face):

$$x^2 = a^2 + b^2 \text{ (I)}$$

- No triângulo de lados d, x e c (d representa a medida da diagonal do sólido):

$$d^2 = x^2 + c^2 \text{ (II)}$$

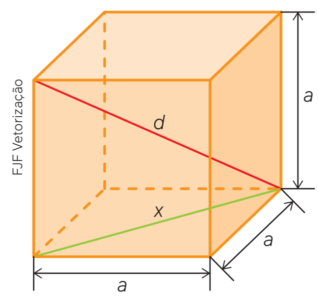
- Substituindo (I) em (II), temos:

$$d^2 = x^2 + c^2$$
$$d^2 = (a^2 + b^2) + c^2$$
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

A medida da diagonal d de um paralelepípedo reto de arestas de medidas a, b e c pode ser obtida pela relação:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Um cubo (que é um hexaedro, isto é, um poliedro que tem 6 faces) também é um bloco retangular que tem todas as faces quadradas. Considerando que a representa a medida de todas as arestas do cubo, podemos obter a diagonal desse sólido em função de a.



Para pensar e discutir

1. Se cada face de um cubo tem a forma de um quadrado, o que representa a medida x indicada? 1. A diagonal de um quadrado de lado a.

2. Determine x em função de a e explique como fez o cálculo. 2. $a\sqrt{2}$; resposta pessoal.

3. Determine d em função de a e explique como fez o cálculo. 3. $a\sqrt{3}$; resposta pessoal.

Atividades resolvidas

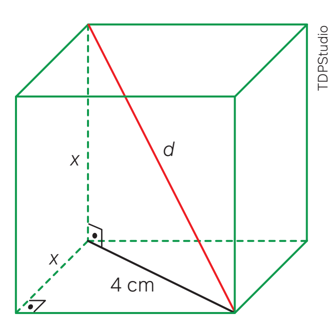
4. Qual é a medida da diagonal do bloco retangular cujas arestas medem 35 cm, 20 cm e 15 cm?

- Como conhecemos as medidas das arestas do bloco retangular, vamos substituí-las na relação matemática obtida anteriormente:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$d = \sqrt{35^2 + 20^2 + 15^2}$$
$$d = \sqrt{1\,225 + 400 + 225}$$
$$d = \sqrt{1\,850} \Rightarrow d \cong 43{,}01$$

Portanto, a diagonal mede aproximadamente 43,01 cm.

5. Considere o cubo em que foi indicada a medida da diagonal de uma de suas faces. Determine a medida da diagonal desse cubo.



- Inicialmente, calculamos a medida da aresta x do cubo, observando o triângulo retângulo formado pela diagonal da face e as arestas medindo x:

$$4^2 = x^2 + x^2$$
$$16 = 2x^2$$
$$8 = x^2$$
$$x = \sqrt{8}$$

- Considerando o triângulo retângulo de hipotenusa *d*, um dos catetos como a aresta *x* do cubo e a diagonal da face de 4 cm, temos:

$$d^2 = x^2 + 4^2$$
$$d^2 = 8 + 16$$
$$d^2 = 24$$
$$d = \sqrt{24} \Rightarrow d \cong 4{,}90$$

Portanto, a diagonal do cubo mede aproximadamente 4,90 cm.

6. Em um paralelepípedo reto, as arestas têm comprimentos proporcionais a 5, 8 e 10. Considerando que a diagonal mede 63 cm, determine as medidas das arestas desse sólido.

- Sendo *a*, *b* e *c* as medidas das arestas do paralelepípedo e *k* a constante de proporcionalidade, temos:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{8} = \frac{c}{10} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 5k \\ b = 8k \\ c = 10k \end{cases}$$

- Substituindo os dados na relação que fornece a diagonal do paralelepípedo, calculamos o valor de *k* e, então, as medidas das arestas:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$63 = \sqrt{(5k)^2 + (8k)^2 + (10k)^2}$$
$$63^2 = 25k^2 + 64k^2 + 100k^2$$
$$3\,969 = 189k^2$$
$$21 = k^2$$
$$k = \sqrt{21} \Rightarrow \begin{cases} a = 5\sqrt{21} \\ b = 8\sqrt{21} \\ c = 10\sqrt{21} \end{cases}$$

Portanto, as medidas das arestas desse paralelepípedo são $5\sqrt{21}$ cm, $8\sqrt{21}$ cm e $10\sqrt{21}$ cm.

7. Quadruplicando a medida da aresta de um cubo, o que ocorre com a medida de sua diagonal?

- Considerando que a aresta de um cubo é *x* unidades de comprimento, temos que a medida *d* de sua diagonal é:

$$d = x\sqrt{2}$$

- Considerando outro cubo em que a medida da aresta é 4*x*, sua diagonal *D* será:

$$D = (4x)\sqrt{2}$$
$$D = 4 \cdot \left(x\sqrt{2}\right)$$
$$D = 4 \cdot d$$

Portanto, a diagonal também quadruplica.

> Em um cubo de aresta de medida *a*, a diagonal da face mede $\boldsymbol{a\sqrt{2}}$, e a diagonal do sólido mede $\boldsymbol{a\sqrt{3}}$.

Para explorar

Junte-se a mais três ou quatro colegas para fazer esta atividade.

1. O grupo deve obter as medidas do comprimento, da largura e da altura de um ambiente fechado (sala de aula, por exemplo) com o auxílio de uma trena. 1. Resposta pessoal.

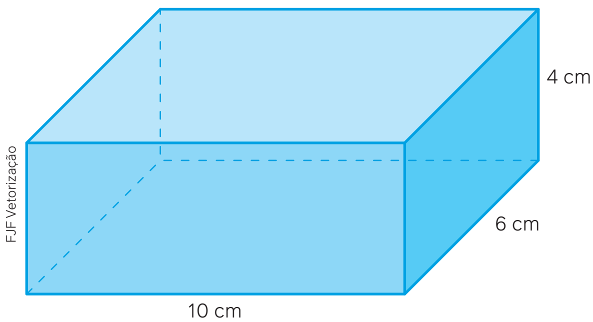
2. Em seguida, deve fazer um desenho representativo desse ambiente indicando as medidas obtidas. 2. Resposta pessoal.

3. Com o auxílio de calculadora, o grupo determinará a distância do canto superior do ambiente ao canto inferior oposto (diagonal). 3. Resposta pessoal.

4. Os resultados devem ser confrontados e discutidos com a apresentação de cada grupo. 4. Resposta pessoal.

Atividades

17. Considere o bloco retangular representado a seguir.



a) Calcule as medidas das diagonais das faces desse sólido geométrico. 17. a) $\sqrt{52}$ cm, $\sqrt{116}$ cm e $\sqrt{136}$ cm

b) Determine a medida da diagonal do sólido. 17. b) $\sqrt{152}$ cm

18. Escolha uma embalagem (caixa) que tenha a forma de um bloco retangular e faça o que se pede a seguir.

a) Obtenha as medidas de suas dimensões (comprimento, largura e altura). 18. a) Resposta pessoal.

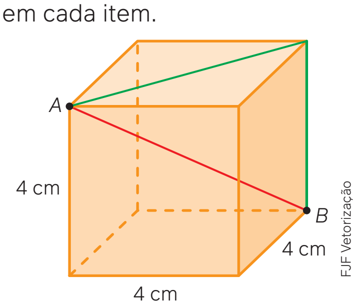
b) Utilizando uma régua, represente as diagonais das faces dessa caixa. 18. b) Resposta pessoal.

c) Calcule as medidas dessas diagonais. 18. c) Resposta pessoal.

d) Determine a medida da diagonal da caixa com base nas medidas das arestas. 18. d) Resposta pessoal.

e) Utilizando um barbante e uma régua, obtenha a medida correspondente à diagonal da caixa. Compare esse resultado com o obtido no item anterior. 18. e) Resposta pessoal.

19. A aresta do cubo representado a seguir mede 4 cm. Com o auxílio de uma calculadora, determine o que se pede em cada item.



a) A distância de *A* até *B* (em vermelho) com aproximação de duas casas decimais. 19. a) 6,93 cm

b) A soma das distâncias em verde para ir do ponto *A* até o ponto *B*; utilize duas casas decimais como aproximação. 19. b) 9,66 cm

c) A razão, nessa ordem, da distância em verde para a distância em vermelho. 19. c) Aproximadamente 1,39.

20. Responda ao que se pede.

a) Se todas as medidas das arestas de um bloco retangular forem duplicadas, o que acontece com a medida da diagonal desse sólido? Justifique algebricamente. 20. a) Duplica. Resposta no Manual do Professor.

b) Se todas as medidas das arestas de um cubo forem triplicadas, o que acontece com a medida da diagonal desse sólido? Justifique algebricamente. 20. b) Triplica. Resposta no Manual do Professor.

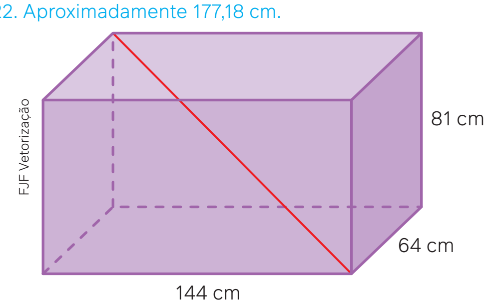
21. As arestas de três cubos medem 1 cm, 2 cm e 3 cm.

a) Obtenha as medidas das diagonais das faces desses cubos. 21. a) $1\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{2}$ cm e $3\sqrt{2}$ cm

b) Obtenha as medidas das diagonais desses cubos. 21. b) $1\sqrt{3}$ cm, $2\sqrt{3}$ cm e $3\sqrt{3}$ cm

22. Utilize uma calculadora para determinar a medida da diagonal de um paralelepípedo reto em que as arestas medem 81 cm, 64 cm e 144 cm.

22. Aproximadamente 177,18 cm.

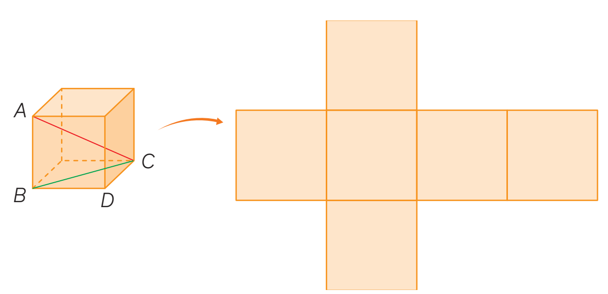


23. Junte-se a um colega para fazer esta atividade. As medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo são proporcionais aos números 2, 3 e 4. Sendo *k* a constante de proporcionalidade e considerando que a medida da diagonal desse sólido é $2\sqrt{29}$ cm, determinem:

a) a constante de proporcionalidade; 23. a) 2

b) as medidas das arestas do paralelepípedo. 23. b) 8 cm, 4 cm e 6 cm

24. Uma diagonal do cubo está representada na figura a seguir pela linha em vermelho de *A* até *C*, e a diagonal de uma das faces é a linha em verde de *B* até *C*. Na sequência está uma planificação desse cubo.



No caderno, faça a representação da planificação do cubo e depois indique:

a) os pontos *A*, *B*, *C* e *D*; 24. a) Resposta no Manual do Professor.

b) a diagonal da face (segmento *BC*). 24. b) Resposta no Manual do Professor.

25. Elabore uma atividade similar à anterior; porém, substituindo o cubo por um bloco retangular de arestas com medidas diferentes. Em seguida, apresente para a turma a planificação resultante e as indicações das arestas e diagonais nessa planificação.

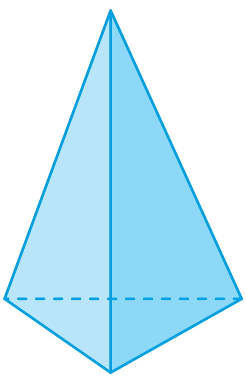
25. Resposta pessoal.

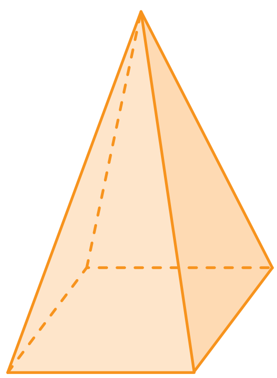
Pirâmides regulares e cones

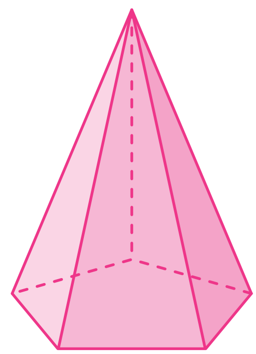
No estudo de pirâmides e cones, um dos aspectos fundamentais é o cálculo envolvendo áreas e volumes desses sólidos, o que será abordado no próximo volume desta coleção. Nosso maior interesse, agora, é obter as relações métricas entre elementos desses sólidos. Faremos isso para as pirâmides regulares.

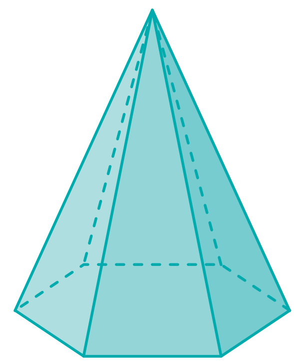
Pirâmide regular

Em uma pirâmide regular, o polígono da base é regular e todas as arestas laterais são congruentes, isto é, têm a mesma medida. Assim, as faces laterais da pirâmide são triângulos isósceles congruentes.

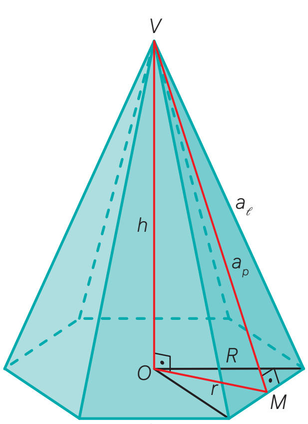

FJF Vetorização


FJF Vetorização


FJF Vetorização


FJF Vetorização

Em uma pirâmide, existem elementos importantes e relações métricas entre eles. Na pirâmide regular a seguir, indicamos esses elementos.



FJF Vetorização

- h → altura da pirâmide: é o segmento que liga o vértice V da pirâmide ao centro O do polígono da base.
- a_p → apótema da pirâmide: é o segmento que liga o vértice V da pirâmide ao ponto médio M da aresta da base.
- a_ℓ → aresta lateral da pirâmide: é o segmento que liga o vértice V da pirâmide a um vértice do polígono da base.
- R → raio da circunferência circunscrita: é o segmento que liga o centro O do polígono da base a um vértice da base da pirâmide.
- r → raio da circunferência inscrita: é o segmento que liga o centro O do polígono da base ao ponto médio M de um lado do polígono da base.
- a → aresta da base da pirâmide: é o segmento que liga dois vértices consecutivos do polígono da base da pirâmide.

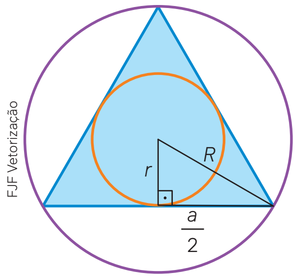
Esses elementos fazem parte de qualquer pirâmide regular, e existem relações que podemos estabelecer entre eles com base nos triângulos retângulos.

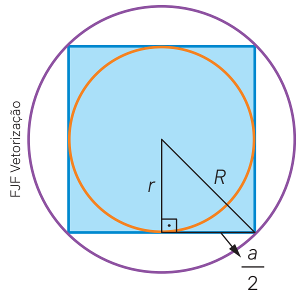
Para pensar e discutir

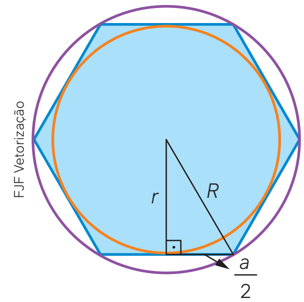
Represente as respostas em símbolos.

1. Qual é a relação métrica entre a altura de uma pirâmide regular, o apótema dela e o raio da circunferência inscrita na base da pirâmide? 1. $a_p^2 = h^2 + r^2$
2. Qual é a relação métrica entre a altura de uma pirâmide regular, o raio da circunferência circunscrita ao polígono da base e a aresta lateral da pirâmide? 2. $a_\ell^2 = h^2 + R^2$
3. Qual é a relação métrica entre a aresta lateral, a aresta da base e o apótema da pirâmide? 3. $a_\ell^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a_p^2$
4. Qual é a relação métrica entre o raio da circunferência circunscrita à base, o raio da circunferência inscrita à base e a aresta da base? 4. $R^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Nas relações entre os elementos de uma pirâmide regular, mencionamos dois raios: um (r) da circunferência inscrita no polígono da base e outro (R) da circunferência circunscrita a esse polígono. Qualquer polígono regular pode ser base de uma pirâmide, como podemos observar nas pirâmides de base triangular, quadrada e hexagonal:



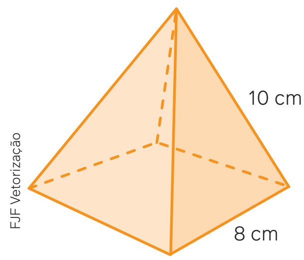




Se o polígono da base é regular, podemos aplicar o teorema de Pitágoras e relacionar o raio R da circunferência circunscrita com o raio r da circunferência inscrita e com a metade da medida da aresta da base, isto é $\frac{a}{2}$, conforme os triângulos retângulos acima indicados.

Atividades resolvidas

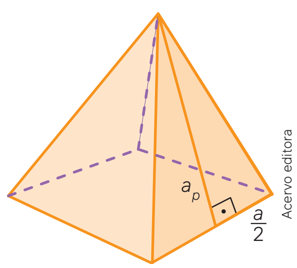
8. Conhecendo as medidas da aresta lateral e da aresta da base, calcule o apótema da pirâmide quadrangular regular representada a seguir.



- Cálculo da medida do apótema: o apótema da pirâmide, a aresta lateral e a metade da aresta da base formam um triângulo retângulo.

$$(a_\ell)^2 = (a_p)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$10^2 = (a_p)^2 + 4^2 \Rightarrow a_p = \sqrt{84} \text{ (em cm)}$$

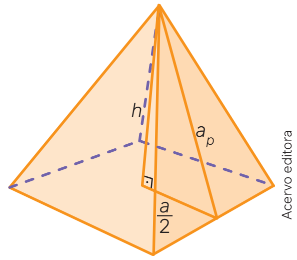


9. Em relação à mesma pirâmide, obtenha a medida da altura.

- Cálculo da medida da altura: nesse caso, a altura da pirâmide forma um triângulo retângulo com a metade da aresta da base e com o apótema da pirâmide.

$$(a_p)^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{84}\right)^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{68} \text{ (em cm)}$$



Para pensar e discutir

As relações métricas em uma pirâmide envolvem os seguintes elementos: apótema, altura, aresta lateral, aresta da base, raio da circunferência inscrita e raio da circunferência circunscrita.

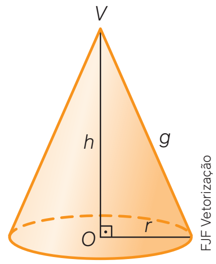
1. Conhecendo-se as medidas da aresta da base e do raio da circunferência inscrita, é possível obter qual outra medida da pirâmide? 1. O raio da circunferência circunscrita à base da pirâmide.

2. Conhecendo-se as medidas da altura e do apótema da pirâmide, o que é possível determinar na pirâmide? 2. O raio da circunferência inscrita na base da pirâmide.

3. Conhecendo-se as medidas da altura, do apótema e da aresta da base da pirâmide, quais outras medidas dos elementos acima podem ser obtidas? 3. A aresta lateral, o raio da circunferência inscrita e o raio da circunferência circunscrita.

Cone circular reto

Veja na figura uma representação de um cone circular reto e seus elementos. Quando o segmento que liga o vértice do cone ao centro do círculo correspondente à base for perpendicular à base, o cone é dito **circular reto** (ou simplesmente cone reto). Nele, temos os elementos descritos a seguir.

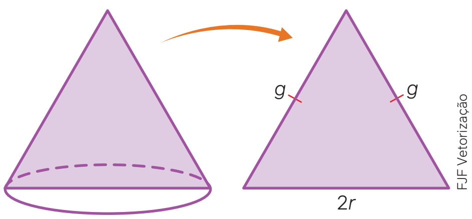


- $h \rightarrow$ altura do cone: é a distância entre o vértice e o plano da base do cone.
- $r \rightarrow$ raio do círculo correspondente à base do cone.
- $g \rightarrow$ geratriz: qualquer segmento com uma extremidade no vértice V do cone e outra extremidade em um ponto da circunferência da base.

Em um cone circular reto, vale a relação matemática decorrente do teorema de Pitágoras:

$\boldsymbol{g^2 = r^2 + h^2}$, em que g é a geratriz, r é o raio da base do cone e h é a altura do cone.

No cone circular reto, a secção meridiana, obtida por um plano ortogonal à base contendo um diâmetro, é um triângulo isósceles no qual dois lados são geratrizes do cone e o terceiro lado é um diâmetro da circunferência da base.



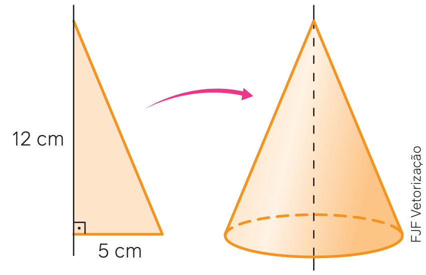
Para pensar e discutir

1. Quando a secção meridiana de um cone circular reto é um triângulo equilátero, o cone é dito cone equilátero. Qual é a relação entre as medidas da geratriz e do diâmetro da base do cone? 1. Têm a mesma medida.

2. E no caso do cone equilátero, qual é a relação entre as medidas da altura e do raio da base do cone?
2. $h = r\sqrt{3}$

Atividades resolvidas

10. Um cone circular reto pode ser obtido pela rotação de um triângulo retângulo em relação a um de seus catetos, como representado nas figuras. Por isso, ele também é chamado de cone de revolução. Determine a medida de sua geratriz.



- Nesse caso, o triângulo girou em torno do cateto de medida 12 cm, que representa também a altura do cone. Sendo o raio da base 5 cm, vamos determinar a medida da geratriz:

$$g^2 = r^2 + h^2$$
$$g^2 = 5^2 + 12^2$$
$$g^2 = 169 \Rightarrow g = 13$$

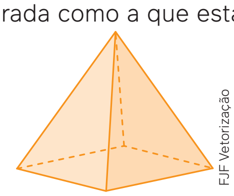
Portanto, a geratriz mede 13 cm.

Agora, pense e responda: se rotacionarmos o triângulo em torno do cateto menor, como será a figura formada? A medida da geratriz do cone se altera?

- A figura também será um cone de revolução. Nesse caso a geratriz do cone terá a mesma medida, mas o cone passará a ter 5 cm de altura e 12 cm de raio da base.

Atividades

26. Utilizando uma régua, faça no caderno (ou em uma folha à parte) quatro desenhos de uma pirâmide de base quadrada como a que está representada a seguir.



Depois, em cada desenho, represente um dos seguintes triângulos retângulos.

Triângulo retângulo A – lados do triângulo: a altura da pirâmide, a aresta lateral e o raio da circunferência circunscrita à base.

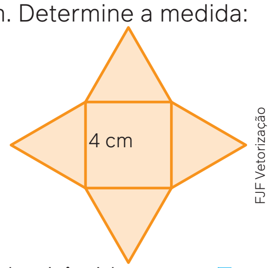
Triângulo retângulo B – lados do triângulo: o apótema da pirâmide, a metade da aresta da base e a aresta lateral da pirâmide.

Triângulo retângulo C – lados do triângulo: o apótema da pirâmide, o raio da circunferência inscrita na base e a altura da pirâmide.

Triângulo retângulo D – lados do triângulo: o raio da circunferência inscrita na base, o raio da circunferência circunscrita à base e a metade do lado da base.

26. Respostas no Manual do Professor.

27. A seguir está representada a planificação de uma pirâmide de base quadrada em que todas as arestas medem 4 cm. Determine a medida:



a) da altura da pirâmide; 27. a) $2\sqrt{2}$ cm

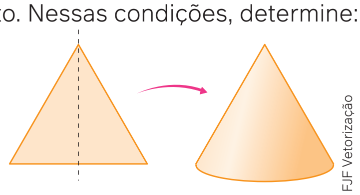
b) da aresta lateral da pirâmide; 27. b) 4 cm

c) do apótema da pirâmide; 27. c) $2\sqrt{3}$ cm

d) do raio da circunferência inscrita à base da pirâmide; 27. d) 2 cm

e) do raio da circunferência circunscrita à base da pirâmide. 27. e) $2\sqrt{2}$ cm

28. Um cone de revolução é obtido por meio de um triângulo equilátero cujo lado mede 5 cm em torno do segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto. Nessas condições, determine:

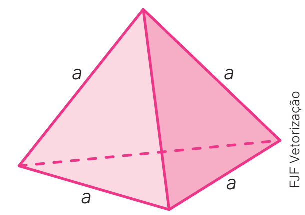


a) a medida do raio da base do cone; 28. a) $\frac{5}{2}$ cm

b) a medida da altura do cone; 28. b) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

c) a medida da geratriz do cone. 28. c) 5 cm

29. Junte-se a um colega para fazer esta atividade. Um tetraedro regular é uma pirâmide de base triangular. No tetraedro regular, todas as arestas têm a mesma medida, como indicado na figura a seguir.



Em função da medida da aresta *a*, obtenham as medidas solicitadas em cada item.

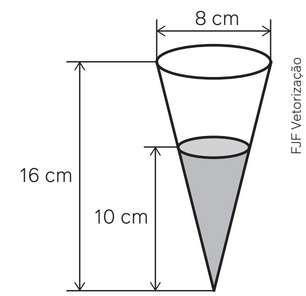
a) Raio da circunferência inscrita na base. 29. a) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

b) Raio da circunferência circunscrita à base. 29. b) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

c) Apótema da pirâmide. 29. c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

d) Altura da pirâmide. 29. d) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

30. Na ilustração a seguir, está representada uma taça em forma de cone circular reto. Dentro dessa taça, foi colocada água até a altura de 10 cm.

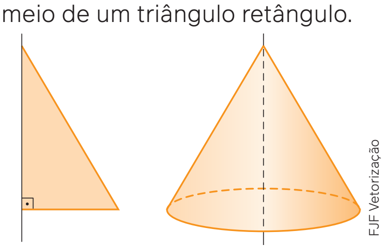


a) Determine a medida da geratriz do cone correspondente à taça. 30. a) Aproximadamente 16,5 cm.

b) Utilizando semelhança de triângulos, obtenha a medida do raio do círculo correspondente à superfície da água. 30. b) 2,5 cm

c) Considerando que a parte com água também tem a forma de um cone, determine a geratriz correspondente desse cone. 30. c) Aproximadamente 10,31 cm.

31. A figura sugere a obtenção de um cone de revolução por meio de um triângulo retângulo.

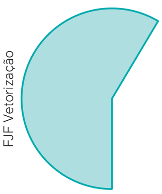


a) Se a medida do cateto menor for 3 cm e a medida do cateto maior for 4 cm, qual será a medida da geratriz desse cone? 31. a) 5 cm

b) Se a medida da geratriz for 10 cm e a medida do cateto menor for 5 cm, qual será a altura do cone? 31. b) Aproximadamente 8,66 cm.

32. Calcule a medida da aresta da base de uma pirâmide regular de base quadrada sabendo que o apótema dessa pirâmide mede 6 cm e que a aresta lateral dessa pirâmide mede 10 cm. Como sugestão, desenhe a pirâmide para, então, calcular o que se pede. 32. 16 cm

33. Junte-se a um colega para realizar esta atividade.
Considerem a figura de um setor circular de ângulo 216° e raio 10 cm. Ele representa a planificação "da lateral" de um cone circular reto.


FJF Vetorização

a) Investiguem como determinar o comprimento da medida do raio da base do cone circular reto correspondente.
33. a) Resposta pessoal.

b) Determinem as medidas do raio da base do cone, da altura do cone e da geratriz do cone.
33. b) 6 cm, 8 cm e 10 cm

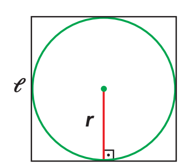
Para explorar

Junte-se a um colega para realizar esta atividade de obtenção de relações métricas.

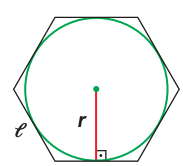
Parte 1

Considerem a representação de três polígonos regulares circunscritos a uma circunferência de raio de medida r.

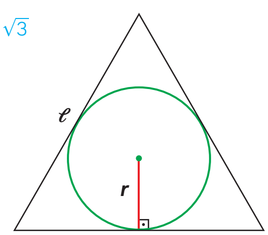
Parte 1 Quadrado: $\ell = 2r$; hexágono: $\ell = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$; triângulo equilátero: $\ell = 2r\sqrt{3}$



TDP Studio



TDP Studio

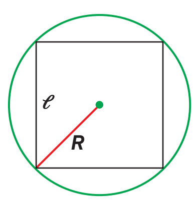


TDP Studio

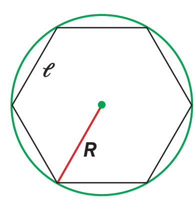
Obtenham a medida do lado ℓ de cada polígono regular em função da medida r do raio da circunferência inscrita.

Parte 2 Parte 2 Quadrado: $\ell = R\sqrt{2}$; hexágono: $\ell = R$; triângulo equilátero: $\ell = R\sqrt{3}$

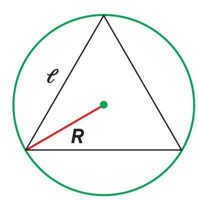
Considerem, agora, os três polígonos regulares inscritos em circunferências de raio de medida R. Obtenham a medida do lado ℓ de cada polígono em função de R.



TDP Studio



TDP Studio



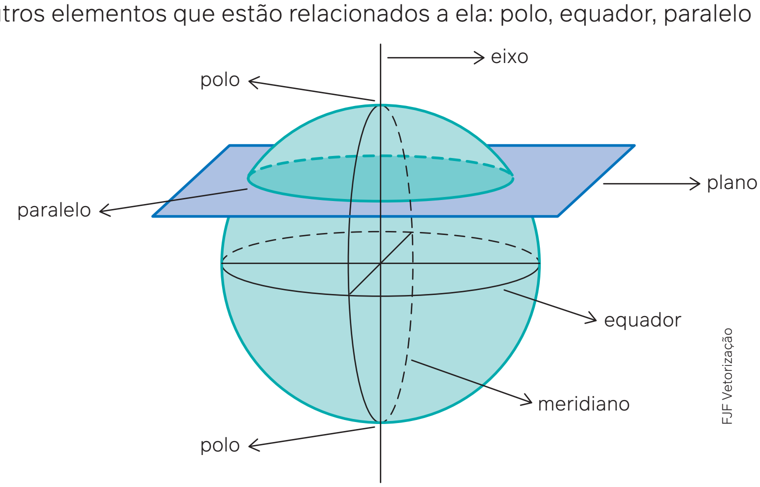
TDP Studio

Esferas

Ao pensarmos no sólido geométrico chamado esfera, um elemento que geralmente nos vem à mente é o raio da esfera ou seu diâmetro. Entretanto, existem outros elementos que estão relacionados a ela: polo, equador, paralelo e meridiano.

Considerando a representação do eixo e da superfície de uma esfera, temos:

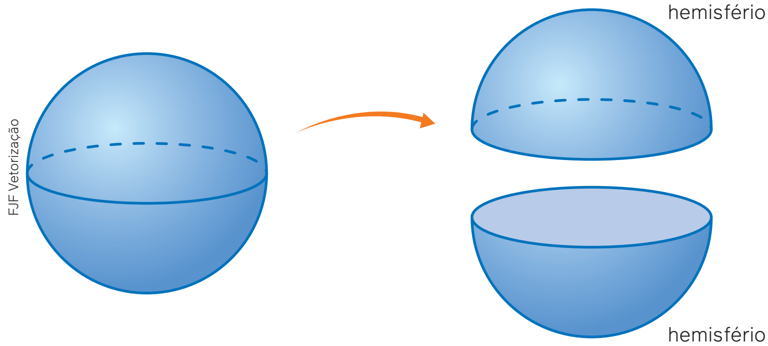
- **polos** → são os pontos de interseção da superfície da esfera com o eixo;
- **equador** → é a circunferência perpendicular ao eixo cujo raio é o raio da esfera;
- **paralelo** → é qualquer circunferência perpendicular ao eixo e paralela ao equador;
- **meridiano** → é qualquer circunferência que intersecta o eixo nos polos e cujo raio é o raio da esfera.



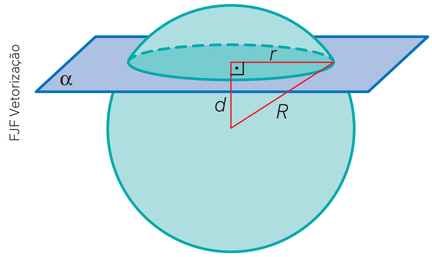
FJF Vetorização

As denominações apresentadas para os elementos do sólido geométrico esfera estão relacionadas com denominações correspondentes ao planeta Terra, que tem a forma aproximada de uma esfera.

O **círculo máximo** associado a uma esfera é qualquer secção da esfera com diâmetro igual ao diâmetro da esfera. Assim, por exemplo, a secção da esfera determinada por um plano que contém o equador é um círculo máximo. Esse plano divide a esfera em duas partes iguais chamadas de **hemisférios**.

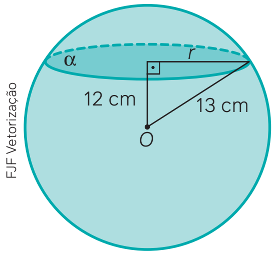


Quando um plano intercepta uma esfera, determina, nessa esfera, uma secção em forma de círculo. Conforme a secção se distancia do centro da esfera, a medida do raio do círculo correspondente diminui. Conhecendo a distância d do centro da esfera ao plano, e a medida R do raio da esfera, podemos determinar a medida do raio r da secção utilizando o teorema de Pitágoras. Observe essa relação na figura a seguir.



Atividades resolvidas

11. Um plano intercepta uma esfera de raio 13 cm a uma distância de 12 cm de seu centro. Determine a medida do raio do círculo r correspondente à secção definida por esse plano.



- Na representação, pode-se observar as medidas dadas e a indicação do raio (r) a ser determinado:

$$R^2 = r^2 + d^2$$
$$13^2 = r^2 + 12^2$$
$$169 - 144 = r^2$$
$$r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$$

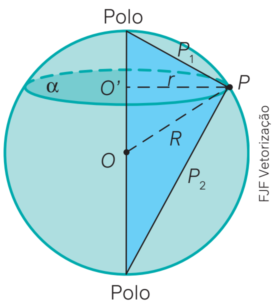
Assim, a medida do raio do círculo obtido é 5 cm.

Para pensar e discutir

1. Na relação $R^2 = d^2 + r^2$ observada anteriormente, por que a medida r diminui quando aumentamos a distância d do plano que secciona uma esfera de raio R? 1. Resposta no Manual do Professor.

2. Qual será a relação entre r e R quando o plano estiver a uma distância correspondente à metade da medida do raio da esfera? 2. $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

12. Um plano a 5 cm do centro de uma esfera de raio 10 cm determina uma secção circular de raio *r*. Calcule a distância até os polos de qualquer ponto da circunferência correspondente à secção, ou seja, determine as distâncias polares.



- Na figura, o ponto *P* representa qualquer ponto da circunferência determinada, e p_1 e p_2 são as duas distâncias desse ponto *P* aos polos.

$$R^2 = d^2 + r^2$$
$$10^2 = 5^2 + r^2$$
$$r^2 = 75$$
$$r = \sqrt{75}$$

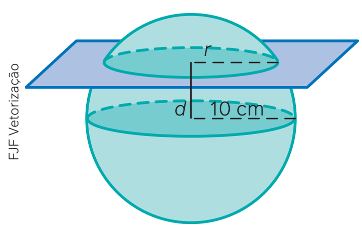
- O triângulo que liga os pontos *P*, *O*' e um polo é retângulo. Assim, pelo teorema de Pitágoras:

$$p_1^2 = r^2 + (R - d)^2 \Rightarrow p_1^2 = 75 + 5^2 \Rightarrow p_1 = 10 \text{ e}$$
$$p_2^2 = r^2 + (R + d)^2 \Rightarrow p_2^2 = 75 + 15^2 \Rightarrow p_2 = 10\sqrt{3}$$

Logo, as distâncias polares são 10 cm e $10\sqrt{3}$ cm.

Atividades

34. A ilustração a seguir representa uma esfera de raio 10 cm seccionada por um plano paralelo ao plano que contém a circunferência equivalente ao equador dessa esfera. A distância do plano ao centro da esfera é representada por *d*, e o raio da circunferência determinada na secção é *r*.



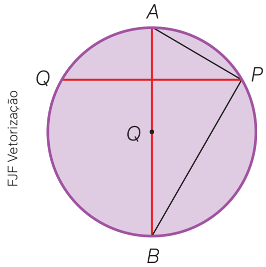
a) Qual é a relação entre *d* e *r*? 34. a) $r^2 + d^2 = 100$

b) Se $d = 5$ cm, qual é a medida *r*? 34. b) $\sqrt{75}$ cm

c) Se $d = 8$ cm, qual é a medida *r*? 34. c) 6 cm

d) Se $r = 6$ cm, qual é a medida *d*? 34. d) 8 cm

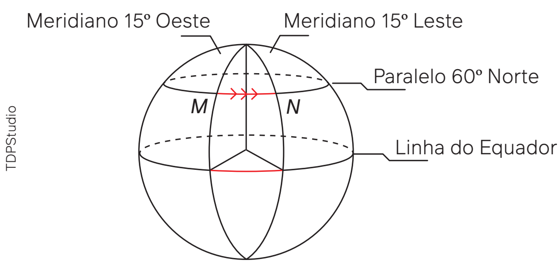
35. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.
Na ilustração a seguir, temos uma circunferência que representa, no plano, uma esfera de raio *R* e centro em *O*. Os pontos *A* e *B* representam os polos, e os pontos *P* e *Q* são os extremos de uma circunferência determinada por um plano que seccionou a esfera perpendicularmente à direção dos polos.



Os comprimentos dos segmentos *AP* e *PB* representam as distâncias polares. Mostrem que o triângulo *ABP* é retângulo em *P*. 35. Resposta pessoal.

36. (UFRJ) Um grupo de cientistas parte em expedição do Polo Norte e percorre 200 km em direção ao sul, onde estabelece um primeiro acampamento para realizar experiências. Após algum tempo, o grupo percorre 200 km em direção ao leste, onde instala o segundo acampamento para experimentos. Após três dias, o grupo parte em viagem e percorre 200 km em direção ao norte, onde estabelece o terceiro acampamento. Supondo que a superfície da Terra seja perfeitamente esférica, determine a distância entre o terceiro acampamento e o Polo Norte. Justifique sua resposta (faça um desenho, se preferir). 36. Zero; resposta pessoal.

37. (Unesp) Observe a figura da representação dos pontos *M* e *N* sobre a superfície da Terra.



Considerando a Terra uma esfera de raio 6 400 km e adotando $\pi = 3$, para ir do ponto *M* ao ponto *N*, pela superfície da Terra no sentido indicado pelas setas vermelhas, a distância percorrida sobre o paralelo 60º Norte será igual a 37. Alternativa **b**.

a) 2 100 km

b) 1 600 km

c) 2 700 km

d) 1 800 km

e) 1 200 km

38. (UFJF-MG) Considere uma esfera de centro *O* e raio *r*. Sabe-se que um plano π distando 3 cm do centro *O* secciona a esfera segundo uma circunferência de raio 4 cm. Determine o valor, em cm, do raio *r* da esfera.
38. 5 cm

Análise e contexto

Euclides e a Geometria

O sábio grego Euclides de Alexandria foi o responsável por organizar os conhecimentos de Geometria na época e apresentá-los na forma axiomática (não como a que hoje temos). Leia o texto a seguir.

Euclides de Alexandria

Por volta de 300 a.C., no litoral sul do mar Mediterrâneo, um pouco a oeste do rio Nilo, na Alexandria, viveu um homem cuja obra teve a influência que rivalizou com a Bíblia. Sua abordagem deu nova forma à filosofia e definiu a natureza da matemática até o século 19. Sua obra integrou a educação superior durante a maior parte desse tempo, e continua sendo assim até hoje. A redescoberta de sua obra foi uma chave para a renovação da civilização europeia na Idade Média. Spinoza tentou imitá-lo. Abraham Lincoln o estudou. Kant o defendeu.

O nome deste homem era Euclides. Virtualmente, nada de sua vida é conhecido. Ele comia azeitonas? Assistia a peças teatrais? Era alto ou baixo? A história não responde a nenhuma dessas perguntas. Tudo o que sabemos é que ele abriu uma escola em Alexandria, teve alunos brilhantes, desprezou o materialismo, parecia ser uma pessoa agradável e escreveu pelo menos dois livros. Um deles, um livro perdido sobre cônicas – o estudo de curvas geradas pela interseção de um plano e um cone –, formou, mais tarde, a base da importante obra de Apolônio, que fez progredirem substancialmente as ciências da navegação e a astronomia.

A sua outra obra famosa, *Os elementos*, é um dos "livros" mais amplamente lidos de todos os tempos. Ele tem uma história digna de enredo de *O falcão maltês*. Em primeiro lugar, não é um livro, mas uma série de 13 rolos de pergaminhos. Nenhum dos originais sobreviveu, mas foram transmitidos mais tarde através de uma série de cópias posteriores, e desapareceram quase que completamente na Idade das Trevas. Os primeiros quatro rolos da obra de Euclides não são de modo algum o original de *Os elementos*: um erudito chamado Hipócrates (não o pai da medicina com o mesmo nome) escreveu um trabalho intitulado *Os elementos* aproximadamente em 400 a.C., que se acredita ter sido a fonte da maior parte do que aparece naqueles. Não há créditos de nenhuma parte de *Os elementos*. Euclides não reivindicou ter sido original em relação a qualquer dos teoremas. Ele viu o seu papel como o de organizador e sistematizador da geometria conforme compreendida pelos gregos. Ele foi o arquiteto do primeiro relato abrangente sobre a natureza do espaço bidimensional através do raciocínio puro, sem nenhuma referência ao mundo físico.

A mais importante contribuição de *Os elementos* de Euclides foi o seu método lógico inovador: primeiro, tornar explícitos os termos, formulando definições precisas e garantindo assim a compreensão mútua de todas as palavras e símbolos. Em seguida, tornar explícitos os conceitos apresentando de forma clara os axiomas ou postulados (estes termos são intercambiáveis) de modo que não possam ser usados entendimentos ou pressuposições não declarados. Finalmente, deduzir as consequências lógicas do sistema empregando somente regras de lógica aceitas, aplicadas aos axiomas e aos teoremas previamente demonstrados.

[...]

Demonstrar cada afirmação significa, em particular, que a intuição, embora seja um guia valioso, deve ser conferida por um teste de demonstração. A frase "é intuitivamente óbvio" não é uma justificativa adequada para um passo em uma demonstração. Somos falíveis demais para isso. Imagine desenrolar um novelo de lã ao longo da linha do Equador nos seus 40 mil quilômetros. Imagine agora fazer o mesmo, 30 centímetros acima da linha do Equador. Quanto de lã a mais você precisa – uns cem mil metros? Vamos simplificar. Imagine desenrolar dois ou mais novelos, desta vez na superfície do Sol, a outra 30 centímetros acima. A qual bola você adiciona mais lã quando aumenta 30 centímetros, à da Terra ou à do Sol? A intuição informa a maioria de nós que é a do Sol, mas a resposta é que você adicionou exatamente a mesma quantidade de lã a cada uma delas $2\pi 30$ centímetros, ou cerca de 1,8 metro.

MLODINOW, L. *A janela de Euclides*. São Paulo: Geração Editorial, 2004. p. 39-41.

1. Escreva uma pequena síntese sobre a importância de Euclides para a Geometria. 1. Resposta pessoal.

2. Compare o texto acima com o texto apresentado no começo da unidade destacando o que há em comum entre os dois. 2. Resposta pessoal.

Geometria dos mapas: projeções cartográficas

4

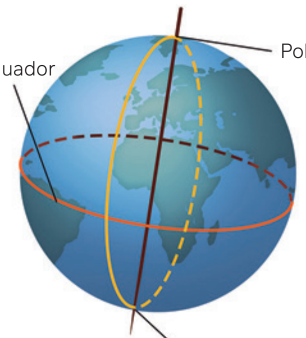
No item anterior, estudamos o sólido geométrico esfera. O planeta Terra tem a forma aproximada de uma esfera.

NASA/NOAA/GOES Project

Foto do planeta Terra tirada pelo satélite GOES-Leste da NOAA, 2014.

Dizemos “forma aproximada” porque ela é achatada nos polos. Apenas para que você tenha ideia desse achatamento, a circunferência imaginária na Linha do Equador tem aproximadamente 21 km a mais do que a circunferência correspondente que passa pelos polos Norte e Sul.

Mas qual é o motivo de a Terra ser achatada nos polos? Isaac Newton teria sido o primeiro a prever esse fato teoricamente. Esse achatamento se deve a vários fatores, entre eles, ao movimento de rotação do planeta, graças ao qual a região equatorial sofre mais a ação da força centrífuga em relação à região polar, onde essa força não existe mais. Investigue um pouco mais esse assunto e troque ideias com o professor de Física ou de Geografia.



Mauro Salgado

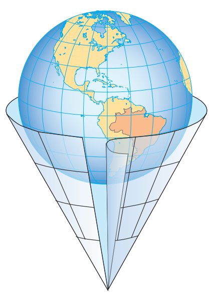
A seguir, vamos relacionar a esfera, o cilindro e o cone com as chamadas projeções cartográficas.

As projeções cartográficas são sistemas de coordenadas geográficas. Essas coordenadas são obtidas com base em linhas imaginárias: meridianos e paralelos. Para compreender como isso é feito, você deve imaginar que a superfície do planeta é “planificada” por meio de uma representação (desenho). É aí que entram as relações geométricas para a construção de um sistema de coordenadas.

Projeção cônica

Você já deve ter feito a planificação da superfície lateral de um cone circular reto e constatado que a superfície dessa planificação resulta em um setor circular. Com base nessa ideia, podemos compreender como são feitas as projeções cônicas:

Sonia Vaz



Projeção cônica
O plano da projeção é um cone envolvendo a esfera terrestre.

Sonia Vaz

Cone desenvolvido
Os paralelos são círculos concêntricos e os meridianos retos convergem para o polo.

Fonte: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. p. 26.

Pense em um cone envolvendo a Terra, como ilustrado na página anterior. O mapa é elaborado considerando os pontos da superfície da Terra, sempre correspondentes a paralelos, que são tangenciados pelo cone. Depois, esse cone é "desenrolado", obtendo-se a representação, isto é, o mapa. Observe que os meridianos são representados por linhas retas que convergem todas para um ponto. Já os paralelos são circunferências concêntricas.

Para pensar e discutir

1. As linhas imaginárias denominadas meridianos convergem para um ponto. O que esse ponto representa no cone? 1. O vértice do cone.
2. Se os paralelos são considerados circunferências concêntricas, onde se localiza o centro dessas circunferências em relação ao cone? 2. No segmento que representa a altura do cone.
3. Quais superfícies da Terra sofrem mais deformação nas projeções cônicas? 3. Resposta no Manual do Professor.

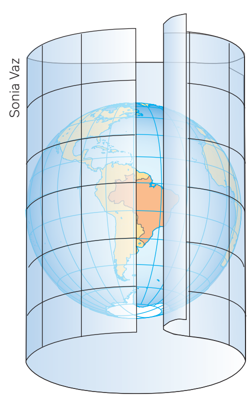
Observação:

As projeções cônicas (existe mais de um modelo) são apropriadas para a representação das superfícies situadas em latitudes baixas, ou seja, latitudes próximas à Linha do Equador.

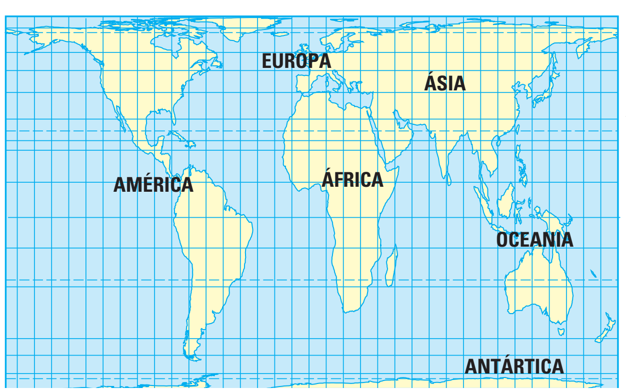
Projeção cilíndrica

Com uma folha de papel retangular, é possível, ligando duas bordas paralelas, fazer um tubo em forma de cilindro. Se você nunca fez isso com uma folha de papel, faça. Aliás, faça isso imaginando que esse tubo de papel envolverá uma bola.

É essa ideia que nos remete à compreensão das chamadas projeções cilíndricas, conforme a ilustração a seguir.



Projeção cilíndrica
O plano da projeção é um cilindro envolvendo a esfera terrestre.



Cilindro desenvolvido
Os paralelos são retos e paralelos entre si. Os meridianos são retos e paralelos entre si. Os paralelos são perpendiculares aos meridianos.

Fonte: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. p. 26.

Use um pouco de imaginação com base na representação acima.

Considere que a Terra seja envolvida por um cilindro. Com base nessa ideia, projetamos cada coordenada da superfície do planeta no cilindro. Se então "desenrolarmos" esse cilindro, teremos o mapa terrestre em forma de retângulo. Tanto os meridianos quanto os paralelos serão projetados de dentro para fora da Terra. Essas linhas serão retas paralelas entre si (meridianos ou paralelos) e perpendiculares entre si (meridianos e paralelos).

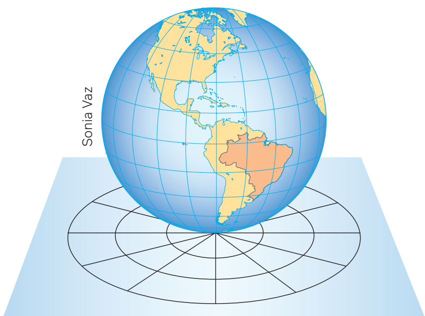
Para pensar e discutir

1. Os meridianos, nesse tipo de projeção, irão se encontrar nos polos? Justifique. 1. Não; resposta pessoal.
2. Quais superfícies aparecem mais deformadas nesse tipo de mapa? Justifique. 2. Resposta no Manual do Professor.

Observação: Há uma grande dificuldade de representar algo esférico em uma superfície plana. Assim, as projeções cartográficas apresentam distorções, cada qual com a particularidade do que está sendo representado. Nas diversas projeções que existem, cada uma, pelo seu plano de projeção e propriedades, prioriza algum aspecto na representação e, por causa disso, acaba ocasionando distorções em outros aspectos, não representando de forma fiel a superfície terrestre. Não existe uma projeção cartográfica ideal, já que cada uma está diretamente relacionada ao objetivo do que pretende representar. A forma de esfera, no entanto, é a mais próxima da realidade: o famoso globo terrestre.

Projeção azimutal

Na ilustração a seguir, temos uma boa ideia do que vem a ser projeção azimutal ou plana.



Projeção plana ou azimutal
O plano da projeção é um plano tangente à esfera terrestre.

Plano tangente ao polo
Os paralelos são círculos concêntricos e os meridianos retos irradiam-se do polo.

Fonte: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. p. 26.

Para pensar e discutir

1. Como são representados os meridianos nesse tipo de projeção? 1. Linhas retas.
2. E os paralelos? 2. Circunferências concêntricas.

A "esfera" da Terra é apoiada em cima de uma superfície plana (tangente a ela). Cada círculo máximo que passa pelo centro de projeção é representado no plano por meio de uma linha reta. Dessa forma, observe, no desenho à direita, que o caminho mais curto do centro de projeção (geralmente um polo) a qualquer ponto será uma linha reta.

Observação: Sobre esse tipo de projeção, é importante destacar que, como a "esfera da Terra" tem um único ponto de contato com o "plano de projeção", as distorções aumentam à medida que se afastam desse ponto. Esse tipo de projeção é mais empregado para mapear as regiões polares.

Para explorar

Junte-se a mais três colegas para fazer esta atividade.

Leiam o texto "Todos os mapas-múndi estão (mais ou menos) errados" publicado pela revista *Superinteressante*.

Observem que, nas partes apresentadas a seguir, a denominação Mercator é dada para um tipo de projeção cilíndrica, e a estereográfica, para um tipo de projeção azimutal.

[Sobre a projeção cilíndrica]
Positivo: a projeção do belga Mercator foi essencial para as Grandes Navegações: nela, se você traçar uma linha reta no mapa em um determinado ângulo, você pode seguir exatamente o mesmo ângulo na bússola quando estiver em alto-mar – um truque útil quando não havia GPS.
Negativo: preservar os ângulos gera um problema: conforme o mapa se aproxima dos polos, você precisa inflar o tamanho dos continentes para compensar a curvatura da Terra. Isso deixa a Groenlândia 14 vezes maior do que é, quase do tamanho da África – o que não afeta a vida de um capitão de navio, mas tem consequências bizarras na maneira como um estudante de 10 anos vê o mundo.
[Sobre a projeção azimutal]
Positivo: a estereográfica é ideal para representar os polos – em que todos os meridianos convergem no centro do mapa. As distâncias entre o centro e qualquer ponto da projeção correspondem à realidade.
Negativo: Países distantes do centro se tornam progressivamente maiores e mais distorcidos – por isso, essa projeção raramente é usada para mostrar o hemisfério oposto ao polo que está no centro (no caso, o Polo Norte).
[Sobre a projeção cônica]
Positivo: uma linha reta desenhada na superfície do mapa corresponde ao caminho mais curto entre os dois pontos de uma esfera – no caso, nosso planeta. Isso a torna ideal para calcular a trajetória de um avião.
Negativo: como na estereográfica, áreas muito distantes do centro da projeção sofrem distorções que inutilizam o mapa. Do ponto de vista matemático, a Antártida é projetada ao infinito.

VAIANO, B. Todos os mapas-múndi estão (mais ou menos) errados. *Superinteressante,* São Paulo, 19 fev. 2021. Disponível em: https://super.abril.com.br/historia/todos-os-mapas-mundi-estao-errados/. Acesso em: 28 mar. 2024.

Com o auxílio e a orientação do professor ou da professora de Geografia, elaborem um texto que compare os três tipos de projeção mencionados. Utilizem, como referência, não apenas o que foi apresentado neste livro, mas também o que é observado pelo artigo indicado acima. Apresentem esse texto para os demais colegas.

Para explorar – Resposta pessoal.

Análise e contexto

A história dos mapas

Para que você tenha uma pequena ideia do que pode encontrar em uma ampliação desse estudo, apresentamos a seguir um texto que envolve o conhecimento sobre a história dos mapas, a forma da Terra e o procedimento que Eratóstenes usou para medir a circunferência do planeta no século III a.C.

A história dos mapas confunde-se com a própria história da humanidade, tornando-se, por essa razão, um tema inesgotável, bastante amplo e complexo, mas, sobretudo, apaixonante pelas surpresas que nos são reveladas a cada documento analisado.

Desde épocas bastante remotas, o homem vem se utilizando da confecção de mapas como meio de armazenamento de conhecimentos sobre a superfície terrestre, tendo como finalidade principal não só conhecer, mas, muito principalmente, administrar e racionalizar o uso do espaço geográfico envolvente. Tais documentos eram, no passado, muito rudimentares, confeccionados de acordo com as técnicas então disponíveis. Mas eram o começo de uma caminhada em direção ao que hoje conhecemos por Cartografia.

[...]

Um dos mapas mais antigos foi confeccionado pelos babilônicos há alguns milhares de anos, talvez entre 2500 a 4500 a.C. Trata-se de uma pequena placa de barro cozido encontrada na Mesopotâmia, provavelmente representando esta região, mostrando o rio Eufrates e a área circunvizinha, com montanhas e, inclusive, os pontos cardeais. Sabendo-se que os babilônios se caracterizaram por muitos estudos desenvolvidos em várias áreas e que [se preocuparam] em registrar seus conhecimentos através de uma escrita cuneiforme em placas de barro, não é de admirar que tenham também confeccionado mapas com os meios e [as] técnicas que dispunham naquela época anterior a Cristo.

[...]

Importância significativa tiveram os gregos no desenvolvimento da Cartografia ocidental, atribuindo-se a eles o estabelecimento das bases científicas da moderna Cartografia. Muitos estudiosos gregos desenvolveram trabalhos que marcaram o processo evolutivo das técnicas cartográficas. É o caso de Anaximandro de Mileto (611 a 547 a.C.), autor do famoso mapa que representava o mundo então conhecido – regiões da Europa e Mar Mediterrâneo, e de Hecateu, seu contemporâneo, que aperfeiçoou este mapa.

Nesta época, mais ou menos no século IV a.C., [havia] diversas especulações sobre a forma da Terra. Uma delas dizia que nosso planeta, como criação divina, deveria ser esférico, pois a esfera era a [figura] geométrica mais perfeita. Isto, obviamente, iria influenciar a confecção dos mapas. Foram firmadas também as definições das linhas da rede geográfica: equador, trópicos, círculos polares, meridianos.

Outro nome importante é o de Eratóstenes de Cirene (276 a 196 a.C.), que chegou a dirigir a biblioteca do museu de Alexandria. Através de seus conhecimentos de geometria, mediu a circunferência da Terra, obtendo um resultado próximo de 46 mil quilômetros. Diversos outros estudiosos daquela época também fizeram seus cálculos, mas foi Eratóstenes quem mais se aproximou das atuais medidas, que dão aproximadamente 40 mil quilômetros. Tendo a circunferência, fácil seria deduzir o raio da Terra: 7 mil e 300 quilômetros, aproximadamente (valor atual: 6 370 km). O processo por ele utilizado foi baseado num princípio geométrico, considerando que os raios solares chegam à Terra paralelos entre si, que a cidade de Siena (atual Assuan) estaria no Trópico de Câncer, que a cidade de Alexandria estaria à distância de 5 mil estádios (1 estádio = 185 m) de Siena e no mesmo meridiano desta. Colocou uma pequena estaca em Siena e outra em Alexandria, ambas exatamente na vertical, no dia 21 de junho (início do verão para o hemisfério norte), quando o Sol deveria estar sobre o Trópico de Câncer. Por um princípio de geometria, deduziu que o ângulo formado na estaca em Alexandria deveria ser o mesmo formado no centro do planeta pelo prolongamento de ambas as estacas, chegando ao resultado de 7 graus e 12 minutos, ou seja, $\frac{1}{50}$ da circunferência.

DUARTE, P. A. *Fundamentos da Cartografia*. Florianópolis: Editora da UFSC, 1994. p. 16, 18 e 26.

Faça o que se pede a seguir.

1. No texto, comenta-se que, por "um princípio de geometria", Eratóstenes teria deduzido que a medida do ângulo obtido em Alexandria seria a mesma do ângulo obtido em Siena. Qual é esse princípio? 1. Semelhança de triângulos.

2. Com base no ângulo de 7 graus e 12 minutos, como podemos concluir que o comprimento do arco é $\frac{1}{50}$ do arco de circunferência? Explique. 2. Sim; resposta pessoal.

Atividades finais

1. Indique V para as afirmações verdadeiras e F para as falsas.

I. Todo cubo é um paralelepípedo reto. 1. I. V

II. Todo paralelepípedo reto é um cubo. 1. II. F

III. Um cubo é também um poliedro. 1. III. V

IV. Um bloco retangular é um poliedro. 1. IV. V

2. Responda ao que se pede.

a) Rotacionando um retângulo em torno de um de seus lados, qual sólido geométrico se obtém? 2. a) Cilindro.

b) Rotacionando um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos, qual sólido geométrico se obtém? 2. b) Cone.

3. Em relação ao cubo, informe qual é o total de:

a) faces; 3. a) 6

b) vértices; 3. b) 8

c) arestas. 3. c) 12

4. Escreva a relação matemática correspondente à:

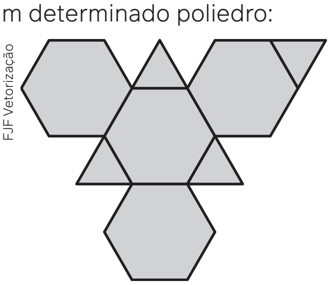
a) relação de Euler para os elementos de um poliedro convexo; 4. a) $V + F - A = 2$

b) medida da diagonal de um paralelepípedo em função das medidas de suas arestas; 4. b) $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

c) medida da diagonal de um cubo em função da medida de sua aresta. 4. c) $d = a\sqrt{3}$

Questões de vestibulares e Enem

5. (UFJF-MG) A figura abaixo corresponde à planificação de um determinado poliedro:



FJF Vetorização

O número de vértices desse poliedro é:

a) 12. 5. Alternativa **a**.

b) 18.

c) 21.

d) 30.

e) 36.

6. (UECE) Um poliedro convexo com 32 vértices possui apenas faces triangulares. O número de arestas deste poliedro é: 6. Alternativa **c**.

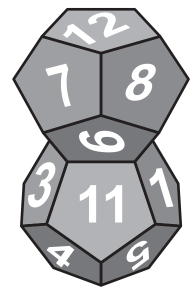
a) 100.

b) 120.

c) 90.

d) 80.

7. (UERJ) Dois dados, com doze faces pentagonais cada um, têm a forma de dodecaedros regulares. Se os dodecaedros estão justapostos por uma de suas faces, que coincidem perfeitamente, formam um poliedro côncavo, conforme ilustra a figura.



FJF Vetorização

Considere o número de vértices V, de faces F e de arestas A desse poliedro côncavo. A soma $V + F + A$ é igual a: 7. Alternativa **d**.

a) 102.

b) 106.

c) 110.

d) 112.

8. (IFSP) A figura mostra uma peça feita em 1587 por Stefano Buonsignori, e está exposta no Museu Galileo, em Florença, na Itália. Esse instrumento tem a forma de um dodecaedro regular e, em cada uma de suas faces pentagonais, há a gravação de um tipo diferente de relógio.

IFSP, 2013

Em 1758, o matemático Leonard Euler (1707-1783) descobriu o teorema conhecido por relação de Euler: em todo poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces vale a relação $V - A + F = 2$. Ao se aplicar a relação de Euler no poliedro da figura, o número de arestas não visíveis é:

a) 10. 8. Alternativa **a**.

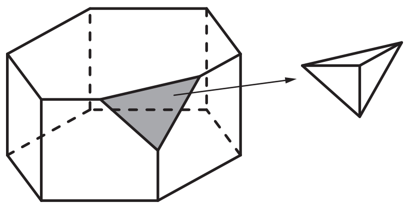
b) 12.

c) 15.

d) 16.

e) 18.

9. (Insper-SP) De cada vértice de um prisma hexagonal regular foi retirado um tetraedro, como exemplificado para um dos vértices do prisma desenhado a seguir.



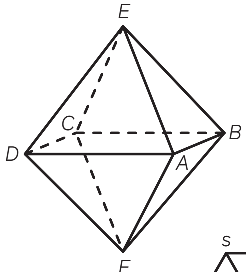
FJF Vetorização

O plano que definiu cada corte feito para retirar os tetraedros passa pelos pontos médios das três arestas que concorrem num mesmo vértice do prisma. O número de faces do poliedro obtido depois de terem sido retirados todos os tetraedros é:

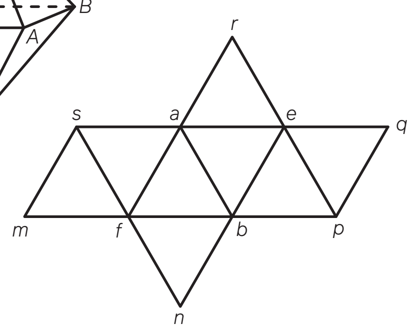
9. Alternativa **b**.

a) 24. **b)** 20. **c)** 18. **d)** 16. **e)** 12.

10. (UFRGS-RS) As figuras a seguir representam um octaedro regular e uma de suas planificações.



FJF Vetorização



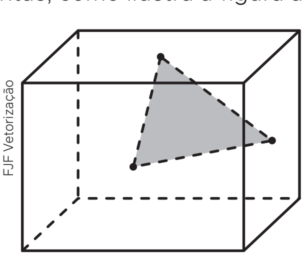
FJF Vetorização

Aos vértices *A*, *B*, *E*, *F* do octaedro correspondem, respectivamente, os pontos *a*, *b*, *e*, *f* da planificação. Ao vértice *D* do octaedro correspondem, na planificação, os pontos: 10. Alternativa **d**.

a) *m*, *n*, *p*. **c)** *p*, *q*, *r*. **e)** *r*, *s*, *m*.

b) *n*, *p*, *q*. **d)** *q*, *r*, *s*.

11. (Unicamp-SP) Considere um paralelepípedo retângulo, cujas arestas têm comprimento 6 cm, 8 cm e 10 cm, e um triângulo cujos vértices são os centros (intersecção das diagonais) de três faces de dimensões distintas, como ilustra a figura a seguir.



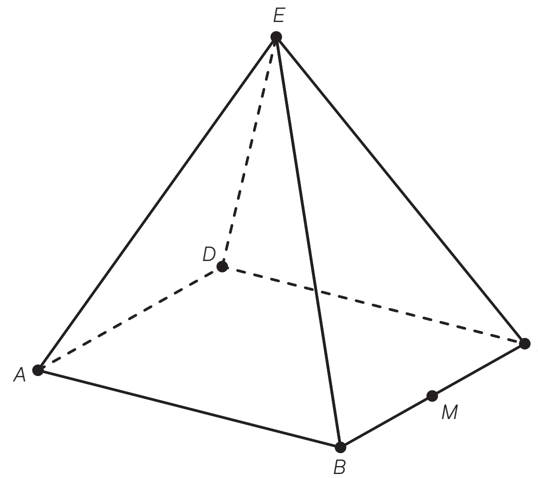
FJF Vetorização

O perímetro *P* desse triângulo é tal que: 11. Alternativa **c**.

a) $P < 14$ cm. **c)** $16 \text{ cm} < P < 18$ cm.

b) $14 \text{ cm} < P < 16$ cm. **d)** $P > 18$ cm.

12. (Enem) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

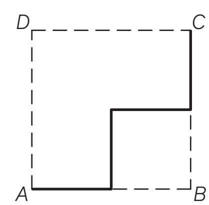


FJF Vetorização

O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto *A* ao ponto *E*, a seguir do ponto *E* ao ponto *M*, e depois de *M* a *C*. O desenho que Bruno dever fazer é:

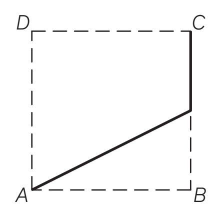
12. Alternativa **c**.

a)



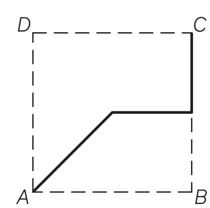
FJF Vetorização

b)



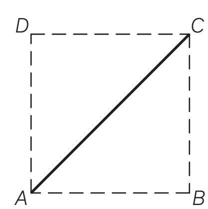
FJF Vetorização

c)



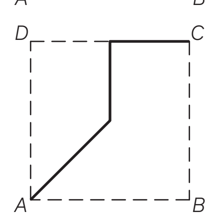
FJF Vetorização

d)



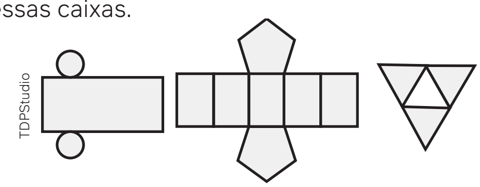
FJF Vetorização

e)



FJF Vetorização

13. (Enem) Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações? 13. Alternativa **a**.

a) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.

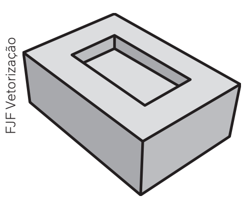
b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.

c) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.

d) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.

e) Cilindro, prisma e tronco de cone.

14. (Enem) No ano de 1751, o matemático Euler conseguiu demonstrar a famosa relação para poliedros convexos que relaciona o número de suas faces (F), arestas (A) e vértices (V): $V + F = A + 2$. No entanto, na busca dessa demonstração, essa relação foi sendo testada em poliedros convexos e não convexos. Observou-se que alguns poliedros não convexos satisfaziam a relação e outros não. Um exemplo de poliedro não convexo é dado na figura. Todas as faces que não podem ser vistas diretamente são retangulares.



Qual a relação entre os vértices, as faces e as arestas do poliedro apresentado na figura?

a) $V + F = A$

b) $V + F = A - 1$

c) $V + F = A + 1$

d) $V + F = A + 2$

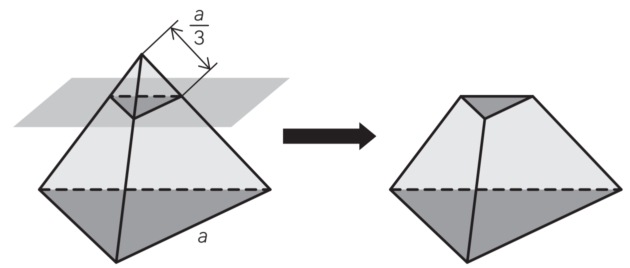
e) $V + F = A + 3$

14. Alternativa **e**.

15. (Enem) O hábito cristalino é um termo utilizado por mineralogistas para descrever a aparência típica de um cristal em termos de tamanho e forma. A granada é um mineral cujo hábito cristalino é um poliedro com 30 arestas e 20 vértices. Um mineralogista construiu um modelo ilustrativo de um cristal de granada pela junção dos polígonos correspondentes às faces. Supondo que o poliedro ilustrativo de um cristal de granada é convexo, então a quantidade de faces utilizadas na montagem do modelo ilustrativo desse cristal é igual a: 15. Alternativa **b**.

a) 10. **b)** 12. **c)** 25. **d)** 42. **e)** 50.

16. (Enem) As luminárias para um laboratório de matemática serão fabricadas em forma de sólidos geométricos. Uma delas terá a forma de um tetraedro truncado. Esse sólido é gerado a partir de secções paralelas a cada uma das faces de um tetraedro regular. Para essa luminária, as secções serão feitas de maneira que, em cada corte, um terço das arestas seccionadas serão removidas. Uma dessas secções está indicada na figura.



Essa luminária terá por faces: 16. Alternativa **a**.

a) 4 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

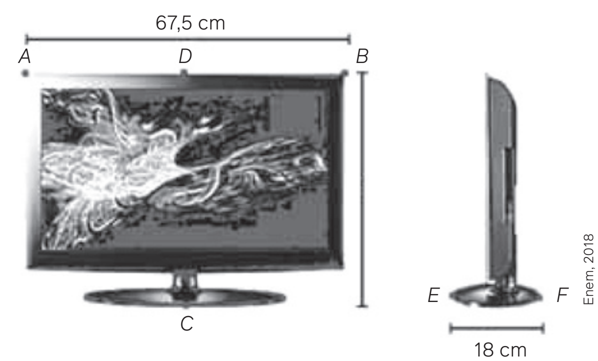
b) 2 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

c) 4 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.

d) 3 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.

e) 3 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

17. (Enem) Uma empresa especializada em embalagem de papelão recebeu uma encomenda para fabricar caixas para um determinado modelo de televisor, como o da figura.



A embalagem deve deixar uma folga de 5 cm em cada uma das dimensões. Essa folga será utilizada para proteger a televisão com isopor. O papelão utilizado na confecção das caixas possui uma espessura de 0,5 cm. A empresa possui 5 protótipos de caixa de papelão, na forma de um paralelepípedo reto-retângulo, cujas medidas externas: comprimento, altura e largura, em centímetro, são respectivamente iguais a:

Caixa 1: $68{,}0 \times 50{,}0 \times 18{,}5$

Caixa 2: $68{,}5 \times 50{,}5 \times 19{,}0$

Caixa 3: $72{,}5 \times 54{,}5 \times 23{,}0$

Caixa 4: $73{,}0 \times 55{,}0 \times 23{,}5$

Caixa 5: $73{,}5 \times 55{,}5 \times 24{,}0$

O modelo de caixa de papelão que atende exatamente as medidas das dimensões especificadas é a:

a) caixa 1.

b) caixa 2.

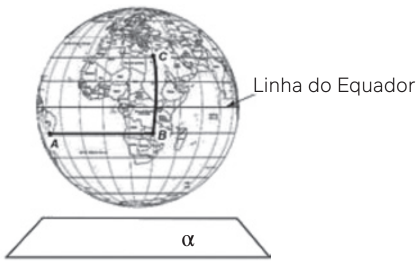
c) caixa 3.

d) caixa 4.

e) caixa 5.

17. Alternativa **e**.

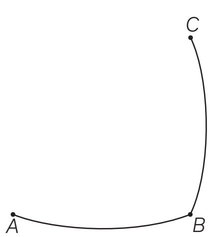
18. (Enem) A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos *A*, *B* e *C*. Os pontos *A* e *B* estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos *B* e *C*, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto *A* até *C*, pela superfície do globo, passando por *B*, de forma que o trecho de *A* até *B* se dê sobre o paralelo que passa por *A* e *B*, e o trecho de *B* até *C* se dê sobre o meridiano que passa por *B* e *C*. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.



Enem, 2016

A projeção ortogonal, no plano α, do caminho traçado no globo pode ser representada por:

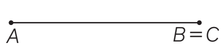
18. Alternativa **e**.

a)


Acervo editora

b)


Acervo editora

c)


Acervo editora

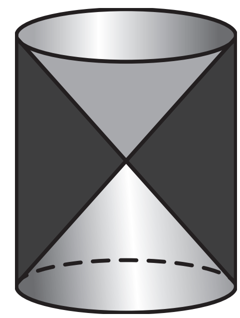
d)


Acervo editora

e)


Acervo editora

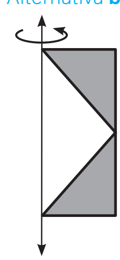
19. (Enem) A figura mostra uma anticlepsidra, que é um sólido geométrico obtido ao se retirar dois cones opostos pelos vértices de um cilindro equilátero, cujas bases coincidam com as bases desse cilindro. A anticlepsidra pode ser considerada, também, como o sólido resultante da rotação de uma figura plana em torno de um eixo.



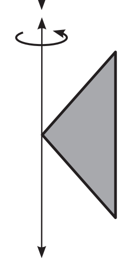
FJF Vetorização

A figura plana cuja rotação em torno do eixo indicado gera uma anticlepsidra como a da figura acima é:

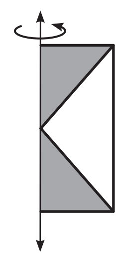
19. Alternativa **b**.

a)


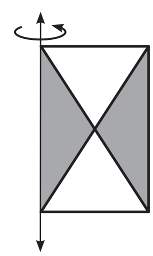
FJF Vetorização

b)


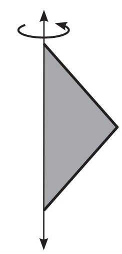
FJF Vetorização

c)


FJF Vetorização

d)


FJF Vetorização

e)


FJF Vetorização

Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão dos assuntos e objetivos trabalhados ao longo do presente capítulo.

Objetivos de aprendizagem	Sim	É necessário retomar
Compreendo noções sobre o método axiomático utilizado em Matemática.		
Interpreto textos referentes à história da Matemática.		
Elaboro e resolvo problemas que envolvam relações de medidas de comprimento entre elementos de alguns sólidos geométricos.		
Resolvo problemas envolvendo planificações de sólidos geométricos.		
Resolvo problemas que relacionam elementos de poliedros convexos.		
Diferencio poliedros regulares de poliedros não regulares, poliedros convexos de poliedros não convexos.		
Compreendo diferentes projeções cartográficas.		

Projeto 1

Relatórios estatísticos

Para que serve este projeto?

O estudo da Estatística Descritiva consiste em obter, organizar, analisar e representar dados de uma população inteira ou de uma amostra. Entretanto, conhecendo a Estatística, é possível fazer o caminho inverso: ler e interpretar a representação de resultados estatísticos para obter informações e dados sobre uma população ou uma amostra.

Este projeto propõe uma análise dos resultados de algumas pesquisas visando comparar dados e tirar conclusões com base nas medidas estatísticas de uma população ou amostra.

Natee Meepian/Shutterstock.com

A análise gráfica e de tabelas é essencial para a Estatística.

Questão disparadora

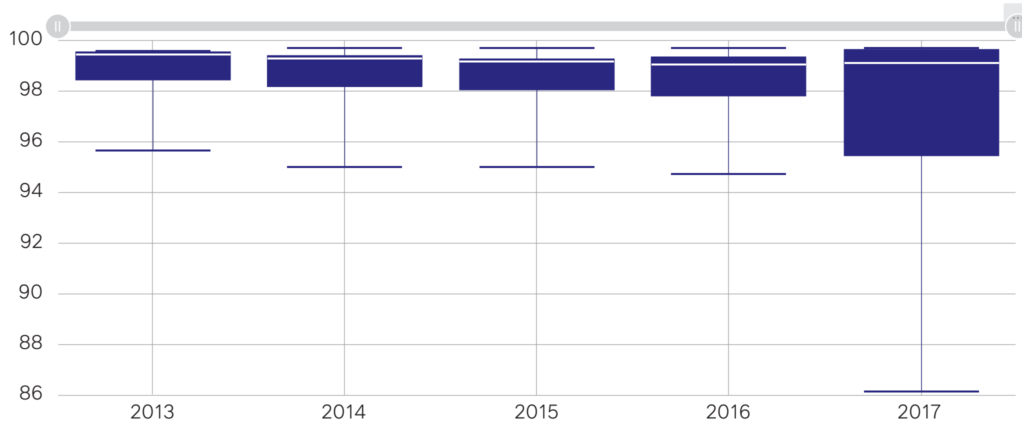
- O que podemos afirmar e o que podemos inferir com base na análise das medidas estatísticas de uma população ou de uma amostra?

Contexto

As medidas estatísticas têm a função de oferecer valores sobre uma amostra que sejam válidos para a população inteira. Assim, é possível fazer inferências sobre o comportamento da população em relação à variável analisada. Entretanto, ao analisar medidas estatísticas de um conjunto de dados, é comum atribuir significados a essas medidas que vão além daquilo que elas realmente representam.

Para exemplificar essa situação, utilizamos alguns dados e gráficos obtidos no *Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil*.

- *BOXPLOT*: Proporção de alunos do Ensino Médio estudando em escolas com internet nos estados da Região Sudeste do Brasil, entre 2013 e 2017.



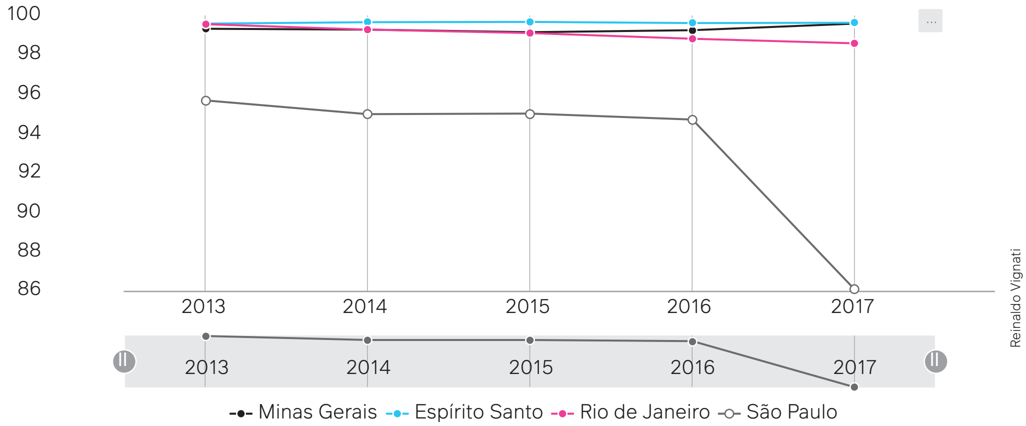
Reinaldo Vignati

MEDIANAS das proporções de alunos do Ensino Médio estudando em escolas com internet nos estados da Região Sudeste do Brasil					
	2013	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**
Medianas	99,495%	99,495%	99,495%	99,495%	99,495%

Fonte: CONSULTA em gráficos. *Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil*, Brasília, DF: Pnud Brasil: Ipea, [2022]. Disponível em: http://www.atlasbrasil.org.br/consulta/grafico. Acesso em: 17 jun. 2024.

Observando o *boxplot*, é possível concluir que em 2017 houve uma discrepância maior entre os estados do Sudeste no que diz respeito à variável estudada. Ainda assim, a mediana se manteve com pouca variação. Isso indica que os estados dos extremos inferior e superior podem ter variado, mas os do centro se mantiveram próximos. Se quisermos saber qual foi a variação de cada estado da Região Sudeste, precisamos observar outros dados, como os disponíveis a seguir.

- SÉRIE HISTÓRICA: Proporção de alunos do Ensino Médio estudando em escolas com internet nos estados da Região Sudeste do Brasil, entre 2013 e 2017.



MÉDIAS das proporções de alunos do Ensino Médio estudando em escolas com internet nos estados da Região Sudeste do Brasil (cuja variação está indicada no gráfico pela linha inferior)					
	2013	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**
Médias	98,57%	98,345%	98,2825%	98,1475%	96,0225%

Fonte: CONSULTA em gráficos. *Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil*, Brasília, DF: Pnud Brasil: Ipea, [2022]. Disponível em: http://www.atlasbrasil.org.br/consulta/grafico. Acesso em: 17 jun. 2024.

Note que, se olharmos apenas a média, podemos inferir que houve uma queda na porcentagem de estudantes em escolas com internet em toda a Região Sudeste. Entretanto, se a compararmos com a mediana (ou com o *boxplot*), é possível perceber que a redução não aconteceu em todos os estados. Para saber quais estados foram responsáveis por essa redução, é preciso olhar os dados desagregados por estado, como apresentados na série histórica.

Desenvolvimento

A base do projeto do grupo será a análise de afirmações provenientes de um conjunto de gráficos obtidos no *Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil*, de onde foram retirados os dados citados anteriormente. Esse atlas possibilita uma série de análises estatísticas, já que apresenta dados de variáveis de todos os municípios brasileiros. Para realizar o projeto, executem o procedimento a seguir.

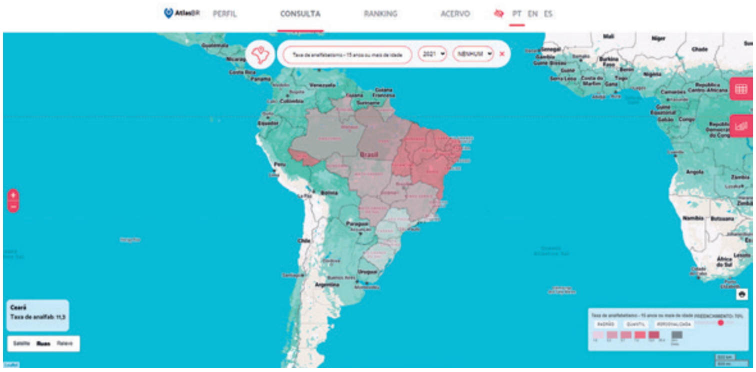
Procedimento

1. Acessem o atlas em http://www.atlasbrasil.org.br/.
2. Selecionem "Consulta" e, em seguida, "Mapa".
3. Selecionem um indicador, um ano e uma desagregação (gênero, raça, idade etc.).
4. Observem o mapa, alterando a desagregação, e discutam os dados fazendo inferências. Vejam na imagem a seguir como isso pode ser feito.
5. Respondam à pergunta: na opinião de vocês, o que esses dados significam? Escrevam ao menos 5 afirmações distintas.
6. Registrem as afirmações do grupo e elaborem uma forma de verificar, observando outros gráficos, se essas afirmações são verdadeiras.
7. Selecionem de novo "Consulta" e, em seguida, "Gráficos".
8. Sigam o procedimento indicado na página para gerar ao menos 3 gráficos, sendo um deles um *boxplot*.
9. Utilizem os gráficos para avaliar se as afirmações feitas anteriormente estavam ou não corretas.

Produto final

Com base nas pesquisas, seu grupo deve criar um documento que contenha:

- cinco afirmações sobre algum indicador presente no *Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil*, apontando qual desagregador foi utilizado para fazer a análise;
- uma explicação sobre os dados utilizados para fazer as afirmações (se necessário, inclua no relatório a imagem do mapa que gerou os dados);
- três ou mais gráficos distintos, incluindo um *boxplot*, que possibilitem uma análise mais profunda dos dados apresentados anteriormente;


Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil

Exemplo de pesquisa de indicadores no *Atlas do Desenvolvimento Humano do Brasil*.

- um texto classificando as afirmações feitas anteriormente como corretas, incorretas ou infundadas.

O texto deve relacionar os gráficos e explicar quais informações foram utilizadas para classificar as afirmações. No caso das afirmações corretas ou incorretas, é preciso explicitar quais dados confirmam ou negam as afirmações; no caso de alguma ser classificada como infundada, é preciso explicar por que os dados são insuficientes para validar ou invalidar a afirmação.

Apresentação

O relatório pode ser apresentado na forma de documento, vídeo, áudio, cartaz ou qualquer mídia que o grupo julgue ser importante para organizar todas as explicações necessárias. O relatório deve destacar:

- o indicador e o desagregador escolhidos;
- as afirmações feitas pelo grupo;
- a classificação das afirmações;
- os gráficos e dados estatísticos que embasam a classificação das afirmações.

Relatório conclusivo

O relatório deve conter, além do documento apresentado, uma reflexão individual a respeito do processo de decisão do grupo sobre o indicador, sobre as afirmações escolhidas, sobre os gráficos selecionados para analisar as afirmações e sobre a avaliação das afirmações como corretas, incorretas ou infundadas. A reflexão deve incluir uma resposta à questão disparadora: "**O que podemos afirmar e o que podemos inferir com base na análise das medidas estatísticas de uma população ou de uma amostra?**".

Para ilustrar as conclusões, apresentem, no relatório, um exemplo do seu contexto pessoal sobre como uma afirmação incorreta ou infundada pode levar a decisões equivocadas. Para isso, imaginem que receberam uma informação errada sobre alguma variável presente em sua vida, como média de notas da turma em Matemática ou no valor médio de seu gasto com lanche na escola, por exemplo.

Sugestões de fontes

Sites

- **Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil: o IDHM.** Disponível em: http://www.atlasbrasil.org.br. Acesso em: 10 maio 2024.

Artigos em PDF

- ***Scientific Electronic Library Online*: Importância do uso adequado da estatística básica nas pesquisas clínicas**, de Célio Fernando de Sousa Rodrigues, Fabiano Timbó Barbosa e Fabiano Timbó Barbosa, 17 de jan 2017. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rba/a/N5PgBCrzhDkfRbX8QXsctHx/?lang=pt. Acesso em: 10 maio 2024.

Vídeos

- **O que é inferência estatística?** (2021, 15 min). Disponível em: https://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=35109. Acesso em: 10 maio 2024.
- ***Boxplot*: como interpretar?** (2022, 6min) Disponível em: https://youtu.be/qU2IANG4hYQ?si=OjbV3PE9ghwhjxFs. Acesso em: 6 jun. 2024.

Projeto 2

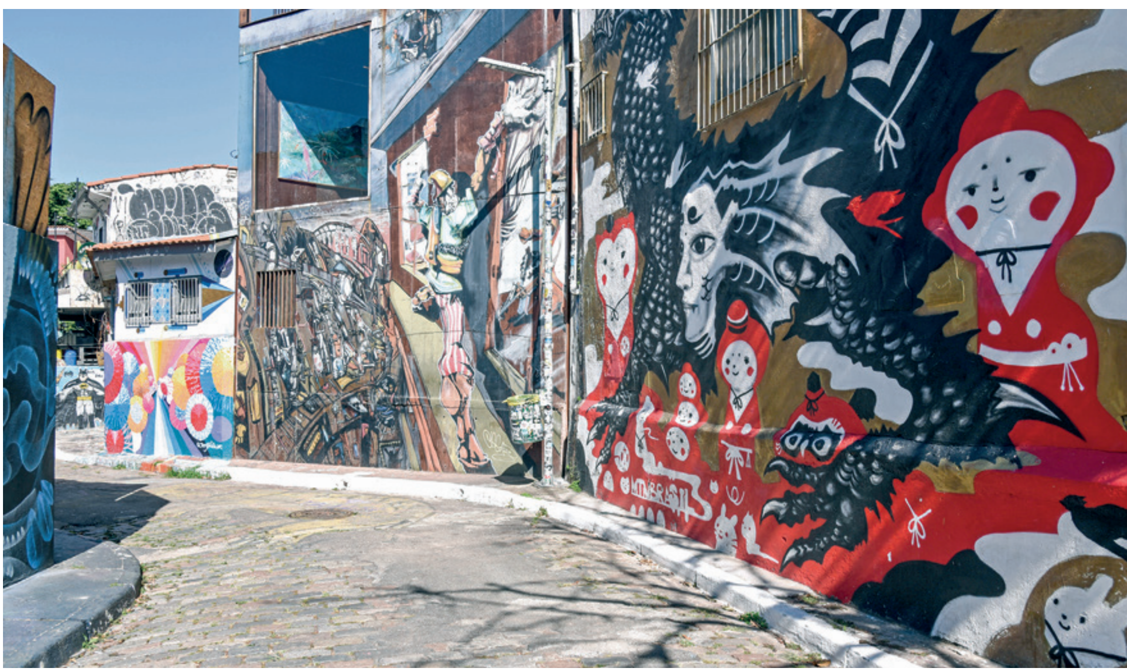
Do muralismo à *street art*

Para que serve este projeto?

A Matemática e a Arte relacionam-se desde suas origens. Existem padrões matemáticos nos primeiros objetos de barro, nos primeiros instrumentos musicais e certamente em toda a evolução dos desenhos, das pinturas, das gravuras, dos quadros e dos murais. Este projeto utiliza os conceitos de Geometria Plana relacionados às transformações homotéticas para produzir murais, aliando conhecimentos matemáticos e expressões artísticas para desenvolver o senso estético e geométrico.

Na imagem a seguir, você pode ver murais de grafite presentes no Beco do Batman, localizado no bairro de Vila Madalena, em São Paulo, um dos principais redutos da arte urbana no Brasil. Conhecido por suas paredes repletas de grafites vibrantes e criativos, o local é considerado um museu a céu aberto que atrai turistas e artistas, como Fabio Ribeiro, Speto, Mariana Pavanelli, Eduardo Kobra, entre outros. O grafite, enquanto manifestação cultural, desempenha um papel crucial na expressão artística e social, oferecendo uma plataforma para a comunicação visual de ideias, protestos e reflexões sobre a sociedade, promovendo a inclusão cultural e a democratização da arte.

Cesar Diniz/Pulsar Imagens



Grafites de diversos artistas no Beco do Batman no bairro da Vila Madalena. São Paulo (SP), 2020.

Questão disparadora

- Como é possível usar a Geometria para produzir arte?

Contexto

A arte mural data de épocas remotas, mas o muralismo como movimento artístico é comumente associado ao México da primeira metade do século XX, contando com grandes nomes como Diego Rivera. Com fortes raízes políticas, esse tipo de arte transfere as técnicas de pintura dos quadros e cavaletes para muros e painéis em espaços públicos.

O muralismo contemporâneo surge da expressão de jovens acostumados a criar arte em espaços públicos, ocupando cada vez mais, com enormes pinturas, grandes muros urbanos e laterais de prédios. Essas pinturas reúnem a linguagem jovem e rebelde do grafite à força política do muralismo para criar uma nova *street art*, que tem ganhado cada vez mais relevância.

O desafio desse tipo de arte é seu tamanho: como produzir um quadro coerente e proporcional em dimensões que muitas vezes ultrapassam o campo de visão do próprio artista? É essa pergunta que investigaremos neste projeto, utilizando a Geometria para respondê-la.

Desenvolvimento

Neste projeto, utilizaremos a homotetia para transferir desenhos, feitos em tamanho A4, para murais de grandes dimensões. Com esse objetivo, você e seu grupo devem seguir o procedimento a seguir.

1. Pesquisem artistas e movimentos contemporâneos de muralismo. Vocês podem encontrar muitos exemplos neste *link*: https://streetart.withgoogle.com/pt/ (acesso em: 13 maio 2024). Com base nessa pesquisa, selecionem alguns murais (ao menos cinco) e identifiquem quais aspectos sociais e políticos são abordados neles.
2. Façam uma pesquisa sobre o Estatuto da Criança e do Adolescente: o que é, para que serve, quando foi criado. Procurem também informações sobre a Conferência de Jomtien, ocorrida em 1990.
3. Escolham um tema relacionado a essa conferência para inspirar o mural que produzirão. Uma vez determinado o tema, escolham a imagem a ser usada no mural para representá-lo. Vocês podem buscar inspiração em diversos artistas que utilizam, por exemplo, as redes sociais para divulgar seus murais.
4. Desenhem ou imprimam a imagem em tamanho A4. Feito isso, terá início o processo de ampliação da imagem, que deve estar em uma malha quadriculada. Vocês podem escolher uma das opções: produzir a imagem diretamente na malha; quadricular a folha com a imagem pronta, utilizando régua e lápis; ou usar algum programa de edição de imagem.
5. O passo seguinte é escolher onde o painel será feito. Com auxílio dos professores e da gestão da escola, verifiquem se há algum muro público que pode ser usado para o muralismo. Caso não seja possível, vocês podem criar painéis móveis usando grandes placas de madeira. Para transferir a pintura da folha para o painel, será preciso determinar uma área retangular, no painel, proporcional ao tamanho da folha A4. Em seguida, será preciso quadricular essa área com a mesma quantidade de linhas e colunas usadas em sua folha. Para saber mais sobre essa técnica, pesquisem em algum *site* de busca a expressão "ampliação de figuras utilizando malhas quadriculadas". Ao final do processo, vocês terão uma obra própria do muralismo: uma peça artística de grandes dimensões, com possibilidade de causar impacto social, motivada por mensagens politizadas e que interfere na paisagem urbana.

Produto final

O produto deve conter, além do mural, registros do processo de elaboração, incluindo as diversas etapas: processo de decisão do tema, processo de escolha da imagem, imagem em tamanho A4, fotos do mural sendo produzido e dele finalizado.

Apresentação

A apresentação deve conter todos os elementos do produto, seja um documento impresso, seja um virtual, além do próprio mural.

Relatório conclusivo

O relatório de conclusão deve estar organizado em duas partes:

- informações sobre os resultados das pesquisas realizadas, incluindo uma explicação do grupo sobre a relação entre a imagem escolhida e o tema selecionado para ser representado por ela;
- reflexão final do grupo destacando os temas do livro que serviram de base para o projeto, além da resposta para a questão disparadora: "**Como é possível usar a Geometria para produzir arte?**".

Sugestões de fontes

Sites

- **Circuito urbano de arte.** Disponível em: https://cura.art/. Acesso em: 10 maio 2024.
- **Enciclopédia Itaú Cultural: Muralismo**, 26 dez. 2016. Disponível em: http://enciclopedia.itaucultural.org.br/termo3190/muralismo. Acesso em: 10 maio 2024.
- ***Google Arts & Culture*: Arte de Rua – Conheça as histórias por detrás da arte – *Google Arts & Culture*.** Disponível em: https://streetart.withgoogle.com/pt/. Acesso em: 10 maio 2024.
- ***South Africa*: Cultura vibrante – cidade de São Paulo ganha mural em homenagem a Nelson Mandela**, por Departamento de Turismo da África do Sul, 15 de jan. 2019. Disponível em: https://www.southafrica.net/br/pt/travel/article/cidade-de-s%C3%A3o-paulo-ganha-mural-em-homenagem-a-nelson-mandela. Acesso em: 17 jun. 2024.

Artigos em PDF

- **DAPesquisa: Arte muralista: um breve *tour***, de Cristiane Rubbi e Sandra Makoweicky, 28 maio 2020. Disponível em: http://www.revistas.udesc.br/index.php/dapesquisa/article/view/18083129152020e0002. Acesso em: 10 maio 2024.
- **Dia a Dia Educação: Grafite: da marginalidade às galerias de arte**, de Geraldo Honorato, 2009. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1390-8.pdf. Acesso em: 10 maio 2024.

Projeto 3

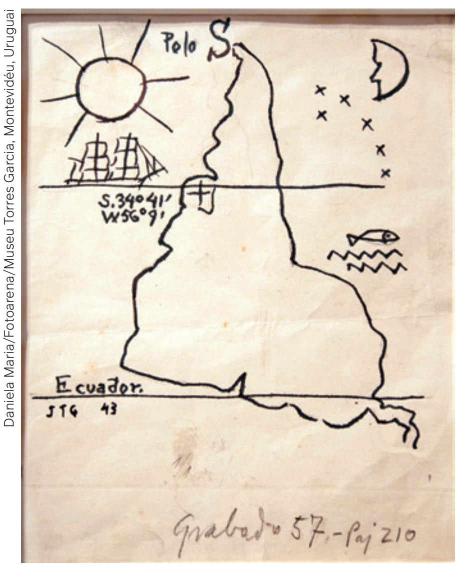
Mapas que fazem a diferença

Para que serve este projeto?

O mapa-múndi é uma projeção cartográfica bem difundida, quase sempre com o mesmo formato. Entretanto, há diversos métodos para se projetar no plano uma superfície tridimensional que se aproxima de uma esfera, como nosso planeta. A escolha da projeção cartográfica pela qual representar um mapa inclui diversas áreas do conhecimento e impacta toda a sociedade.

A cartografia é uma intersecção entre a área de Matemática e a área de Ciências Humanas; por isso, este projeto está fundamentado em conhecimentos cartográficos. A proposta é utilizar conhecimentos geométricos para sustentar argumentações em uma reflexão sobre direitos humanos e representatividade.

Daniela Maria/Fotoarena/Museu Torres García, Montevidéu, Uruguai



América invertida, desenho do artista hispano-uruguaio Joaquín Torres García feito com caneta e tinta em 1943.

Questão disparadora

- Como a projeção cartográfica pode ser utilizada para comunicar uma ideia?

Contexto

Quando olhamos o símbolo da ONU, vemos claramente que há um mapa-múndi no centro; entretanto, se observarmos com cuidado, perceberemos que a disposição dos países e continentes não se apresenta da forma que esse mapa é comumente disposto nos atlas mundiais. Veja a seguir um pouco da história desse símbolo.

Qual é a história do emblema da ONU?

O emblema das Nações Unidas foi aprovado pela resolução nº 92 da Assembleia Geral a 7 de dezembro de 1946.

Descrição: O emblema consiste numa “projeção azimutal equidistante do mapa mundo, centrada no Polo Norte, inscrita numa coroa consistindo de ramos cruzados de oliveira, em dourado, com a água representada em branco. O mapa estende-se a 60 graus de latitude sul e inclui cinco círculos concêntricos”.

Simbolismo: os ramos de oliveira simbolizam a paz. O mapa do mundo retrata a área em que a ONU procura alcançar o seu objetivo principal: paz e segurança.

ONU

Emblema das Nações Unidas.

QUAL é a história do emblema da ONU? *Centro Regional de Informação para a Europa Ocidental (Nações Unidas),* Nova York, [201-?]. Disponível em: https://unric.org/pt/qual-e-a-historia-do-emblema-da-onu/. Acesso em: 6 ago. 2024.

Comparando a projeção do mapa no símbolo da ONU com o mapa-múndi ao qual estamos acostumados (cuja formação se chama projeção de Mercator), podemos até pensar que um deles está “mais certo” que o outro. Entretanto, todas as formas de representar esferas e geoides (que é a forma de nosso planeta) no plano implicam alguma deformação. A projeção azimutal, por exemplo, mantém a forma da região mais próxima do centro escolhido como referência (no caso do emblema da ONU, o Polo Norte), distorcendo gradativamente as formas que se afastam dele.

Por outro lado, essa projeção mantém corretas as distâncias e relações direcionais que partem do centro.

Ao escolher uma ou outra forma de representar o mapa, estamos necessariamente escolhendo um **ponto de vista** e, como não poderia deixar de ser, essa escolha comunica as ideias que queremos transmitir, exatamente como no caso do emblema da ONU.

Desenvolvimento

Observem o emblema da ONU e a ilustração da América invertida que aparecem na página anterior. Cada uma delas apresenta uma versão diferente de mapas. O projeto consistirá na construção de um mapa que, como esses, tenha a função de comunicar uma ideia. Sigam os procedimentos a seguir.

1. Pesquisem a projeção de Mercator e o emblema da ONU. Descubram a história por trás dessas projeções e as críticas feitas sobre elas.
2. Leiam a Declaração Universal dos Direitos Humanos (vejam a seção **Sugestões de fontes**, mais adiante) e relacionem seus itens com o que vocês leram na pesquisa feita no item **1**. Verifiquem se há direitos que podem ser defendidos pelas ideias propostas nos dois mapas estudados.
3. Escolham um ou mais direitos da Declaração e encontrem países onde eles não são garantidos.

De posse desses dados, o trabalho do grupo será elaborar um emblema para uma organização fictícia que tenha como objetivo defender os direitos humanos que vocês escolheram, em um país onde eles não estejam garantidos.

Produto final

O emblema criado neste projeto deve ser uma representação cartográfica que destaque, de alguma forma, tanto o lugar onde a organização criada por vocês atua como os direitos humanos que ela defende. A imagem será acompanhada de um texto que explique as escolhas do grupo, além da relação entre as escolhas e a atuação da organização que o emblema representa.

Para embasar o produto, descrevam as diretrizes dessa organização: onde ela atua, quais direitos visa garantir e qual visão de sucesso defende.

Apresentação

A apresentação deve conter o emblema criado e um texto explicando o papel da organização e sua relação com esse emblema. Vocês podem apresentar o emblema e o texto em meio físico ou digital, elaborar um cartaz (impresso ou desenhado) apresentando o emblema e a descrição da organização ou criar uma página virtual.

Relatório conclusivo

O relatório de conclusão deve conter toda a pesquisa feita pelo grupo: a história dos mapas estudados, a explicação de por que foram criados daquela maneira, as críticas que receberam e, se for o caso, os direitos humanos que simbolizam. O relatório deve também responder à questão disparadora: “Como a projeção cartográfica pode ser utilizada para comunicar uma ideia?”.

Sugestões de fontes

Sites

- **Declaração Universal dos Direitos Humanos: Preâmbulo.** Disponível em: https://declaracao1948.com.br/declaracao-universal/declaracao-direitos-humanos/?gclid=Cj0KCQjwpZT5BRCdARIsAGEX0znhS_rb2ulKvxpEvquzFK_7fnC6rk1QN02GHVkvixqpiokjY5pu8ncaAmNjEALw_wcB. Acesso em: 10 maio 2024.
- **Nações Unidas: Qual é a história do emblema da ONU?**. Disponível em: https://unric.org/pt/qual-e-a-historia-do-emblema-da-onu/. Acesso em: 10 maio 2024.
- **BBC *News* Brasil: O criativo mapa que mostra o mundo como realmente é**, 4 de nov 2016. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/curiosidades-37864328. Acesso em: 10 maio 2024.

Artigos em PDF

- **Unesp: Projeções cartográficas**, de Teresa Cristina Tarlé Pissarra. Disponível em: https://www.fcav.unesp.br/Home/departamentos/engenhariarural/TERESACRISTINATARLEPISSARRA/edital.pdf. Acesso em: 10 maio 2024.
- **Unesp: O mapa de ponta-cabeça**, de Maria Luiza Calim de Carvalho Costa, abr 2011. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/134669/ISSN2317-1707-2011-01-01-193-197.pdf?sequence=1. Acesso em: 10 maio 2024.
- **Mercator: Mercator e os geógrafos: em busca de uma “projeção” do mundo**, de Jörn Seemann, 3 de nov 2008 Disponível em: http://www.mercator.ufc.br/mercator/article/view/159. Acesso em: 10 maio 2024.

Gabarito

Capítulo 1

Página 10

Para pensar e discutir

1. $3{,}84 \cdot 10^5$ km

2. $3{,}84 \cdot 10^8$ m

3. $\alpha \in [1, 10[$ e $k \in \mathbb{Z}$

Página 12

Para explorar

2. 1

3.
- a) Ficam divididos por 3, da esquerda para a direita.
- b) $x = 3^0$; $y = 1$

Página 13

Para pensar e discutir

1. Um número inteiro negativo.

2. Um número inteiro positivo.

3. 1; inverso do número a; 1

4. $-\frac{1}{64}$; 1

Páginas 14-15

Para pensar e discutir

1. Sim.

2. A 2ª propriedade.

Atividades

1.
- a) 81
- b) -81
- c) 32
- d) 0
- e) $-\frac{125}{8}$
- f) 9

2.
- a) Positivo.
- b) Negativo.

3.
- a) $3 \cdot 10^{-6}$
- b) $1{,}2 \cdot 10^{10}$
- c) $1{,}0425 \cdot 10^7$
- d) $3{,}42 \cdot 10^{-4}$

4. $3{,}30 \cdot 10^{23}$; $6{,}42 \cdot 10^{23}$; $5{,}97 \cdot 10^{24}$; $5{,}68 \cdot 10^{26}$; $1{,}90 \cdot 10^{27}$

5. 23

6. *D*

7. 125

8. 26

9. a

10. b

11. d

Página 18

Para explorar

1. π^3

2. 0,16

3. 0,4

4.
- a) π^2
- b) π
- c) π
- d) π^2

5. 11

6. 2

Página 19

Atividades

12.
- a) $\sqrt[5]{10^2}$; 2,5119
- b) $\sqrt[3]{128^2}$; 25,3984
- c) $\sqrt[5]{\pi}$; 1,2573
- d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 0,4472

13. 1

14. 3

15. y

16. Verdadeira.

17. c

18. e

19. c

20. b

21. e

22. a

23. e

Página 20

Para pensar e discutir

2. Aumenta de 5 em 5.

Página 21

Para pensar e discutir

2. Sim.

3. Aumentam: $f(x) = 2^x$ e $f(x) = \pi^x$;
Diminuem: $f(x) = (0{,}2)^x$ e $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Páginas 22-23

Para pensar e discutir

1. Não.

2. 0,512

Atividades

24.
- a) 1
- b) 64
- c) 256

25. 1

27.
- a) 2
- b) 1 111,111

28. 6,75

29.
- a) 16
- b) 448

30. c

31. e

32. c

33. d

Página 24

Para pensar e discutir

2. Não.

Página 25

Para pensar e discutir

1. $f(x) = 2^x$

2. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3. Sim; sim; sim.

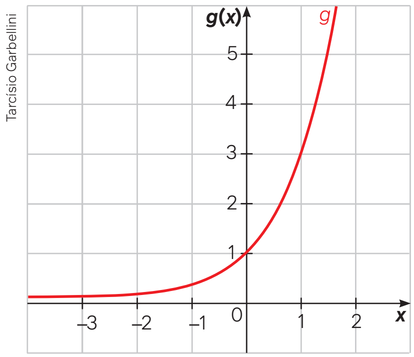
4. Não; sim.

Página 26

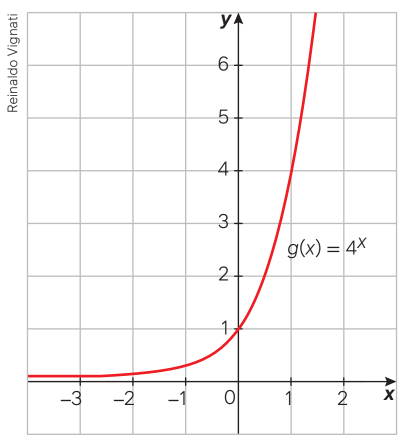
Para explorar

1.

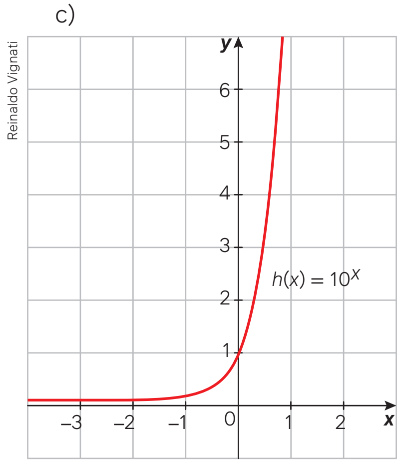
a)



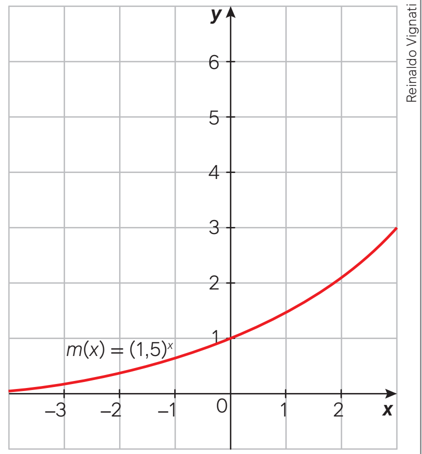
b)



c)



d)



2.

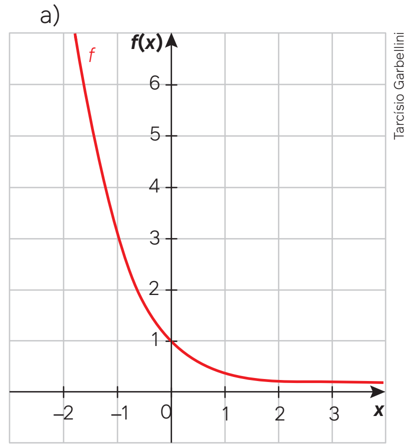
a) y aumenta; as funções são crescentes.

b) Sim.

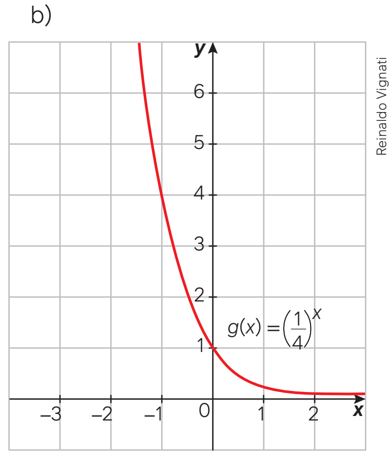
c) $\mathbb{R}_+^*$.

3.

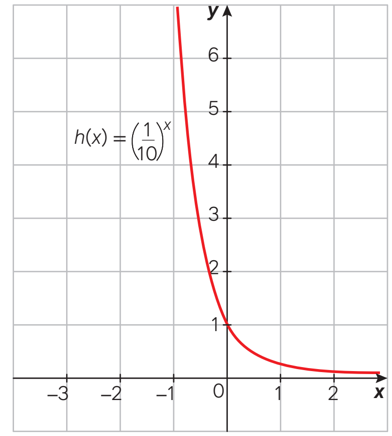
a)



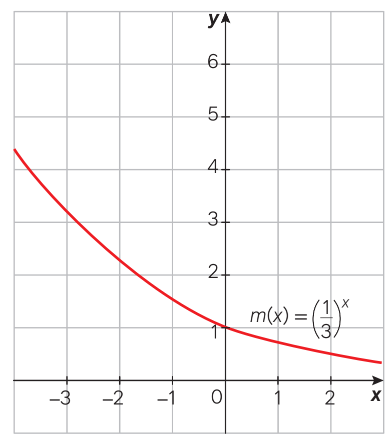
b)



c)



d)



4.

a) y diminui; as funções são decrescentes.

b) Sim.

c) $\mathbb{R}_+^*$.

5. Para $a > 1$ a função é crescente, e para $0 < a < 1$, é decrescente.

Página 27

Para pensar e discutir

1. Crescente.

2. 2; sim

3. Decrescente.

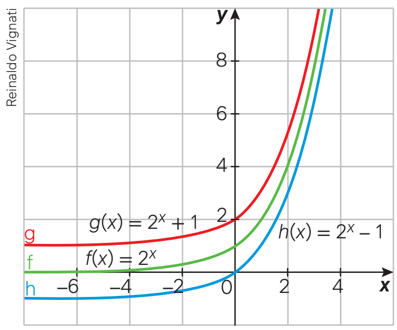
4. Não existe.

Página 28

Para explorar

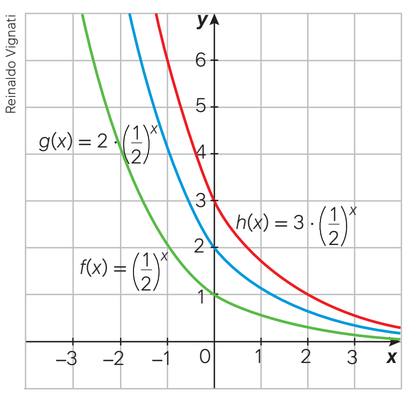
1.

a)



2.

a)



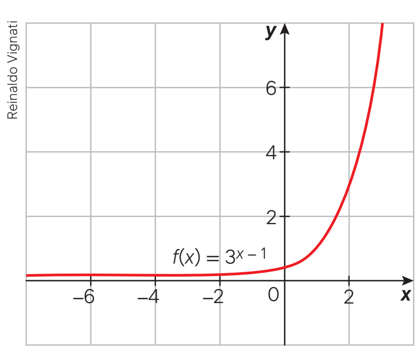
Página 29

Atividades

34.

a) Crescente.
b) Crescente.
c) Decrescente.
d) Decrescente.

35.



a) $\mathbb{R}_+^*$.
b) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

c) 1
d) Não existe x real.

36.

a) 200
b) 27 horas

37. d

38.

a) R$ 75.000,00
b) 7,5 anos

39.

a) 256
b) 4 h

40. e

41. d

Página 30

Para pensar e discutir

1. $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$

Página 31

Para pensar e discutir

1. Valor inicial da moto.
2. Reduzir esse valor em 10%.

Página 32

Atividades

42.

a) $\frac{7}{2}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{3}{4}$
d) -3
e) $\frac{2}{3}$
f) $\frac{1}{4}$

43. A equação não apresenta solução real.

44.

a) 2
b) 1

45.

a) Não.
c) Entre 3 e 4.

46.

a) {0, 2}
b) {1, 3}
c) {2}

47. c

48. $k = 45$; 10h

49. e

50. c

Página 33

Para pensar e discutir

1. Sim.
2. Sim.
3. Situação 1.
4. Situação 2.

Páginas 34-35

Atividades

51.

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{6}{5}\right\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$

52. 28

53.

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$
b) 6

54. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

55. a

56. b

57. b

58. a

59. d

Para explorar

1. Multiplica-se o antecedente por 10.
2.
   a) 2; 2,593742; 2,704814; 2,716924; 2,718146; 2,718268; 2,718280 e 2,718282
   b) Não.
   c) Até a 4ª casa decimal.
3. 2,71828182845904...
4. Os valores vão se aproximando de e.

Página 36

Para pensar e discutir

1. $x = 3$

2. $x = 2$

3. Resposta pessoal; sim.

Página 37

Para pensar e discutir

1. 5

Páginas 38-39

Atividades

60.

a) 3
b) 7
c) 0
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{5}{2}$
f) $-\frac{6}{5}$
g) -4
h) -2

61.

a) $x = \log_3 7$
b) $x = \log_\pi 9$
c) $x = \log_{10} 2 = \log 2$
d) $x = \log_4 10$

62.

a) 0,301
b) 0,477
c) 3,699
d) 3,846

63.

a) 22
b) 201
c) 0
d) 1

64.

a) $\frac{3}{2}$; $m = 64$
b) $m = 64$

65.

a) 10
b) 20
c) $\frac{1}{4}$
d) 4
e) Qualquer $a > 0$ e $a \neq 1$.
f) $\sqrt{10}$

66. a

67. b

68. b

69. b

Para pensar e discutir

1. Adição dos expoentes.

2. O logaritmo de 6 561 é a soma dos outros dois.

Página 41

Para pensar e discutir

1. 1,77815125038 e 0,39794000867

Para pensar e discutir

2. $2^{2,322} \cong 5$

Página 42

Atividades

70.

a) 0,9
b) 1,08
c) 0,5
d) 2,7
e) 0,39
f) $-1{,}7$

71. $A = \log_{11} 5 + 7 \cdot \log_{11} 3 - 4 \cdot \log_{11} 2$

72.

a) 19
b) 33

73.

a) $10^{0,845}$
b) $10^{1,255}$
c) $10^{2,410}$
d) $10^{3,952}$

74. 1,301; 2,301; 3,301; 4,301 e 5,301

a) A parte decimal dos logaritmos.
b) A parte inteira dos logaritmos.

75.

a) 45
b) 250
c) 5 625

76. b

77. b

Página 44

Análise e contexto

1. "Para multiplicar dois números, basta somar seus logaritmos; o resultado é o logaritmo do produto. [...]. Semelhantemente, para dividir dois números, basta subtrair os logaritmos. Para elevar um número a uma potência, basta multiplicar o logaritmo do número pelo expoente. Finalmente, para extrair a raiz n-ésima de um número, basta dividir o logaritmo do número pelo índice da raiz."

2. Ciência, tecnologia e Astronomia.

3. Elaboração da tábua de logaritmos decimais.

Página 45

Para pensar e discutir

1. Aproximadamente 2,2266.

2. $\log_5 36 = \dfrac{\log_{10} 36}{\log_{10} 5}$

3. $\log_5 36 = \dfrac{\log_e 36}{\log_e 5}$

Página 47

Para pensar e discutir

1. Eles têm valores inversos.

2. Eles são iguais.

Atividades

78.

a) 1,183
b) 0,648
c) 1,537
d) 0,683

79.

a) Aproximadamente 0,625.
b) Aproximadamente 3,33.
c) Aproximadamente 0,13.
d) Aproximadamente 0,9375.

80. 1

81. b

82. e

83. a

Para explorar

2. O valor inicial de x.

3. O valor inicial de x. Aproximadamente 3,33.

Página 48

Para pensar e discutir

1. Obtém-se o mesmo número real.

2. Obtém-se o mesmo número real.

Página 50

Para pensar e discutir

1. $\mathbb{R}$ em ambas.

2. Na primeira, y aumenta, e, na segunda, y diminui.

3. $x = 2^y$

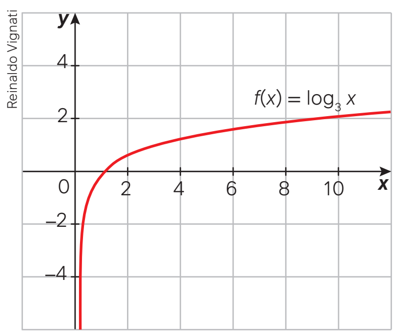
4. $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$

Página 51

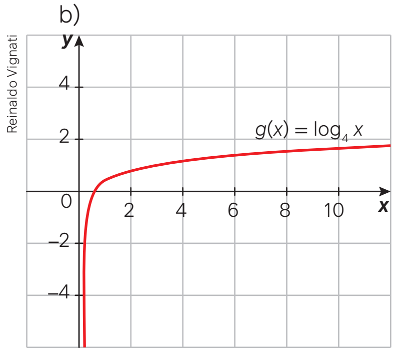
Para explorar

1.

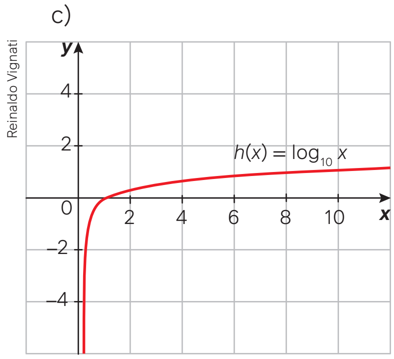
a)



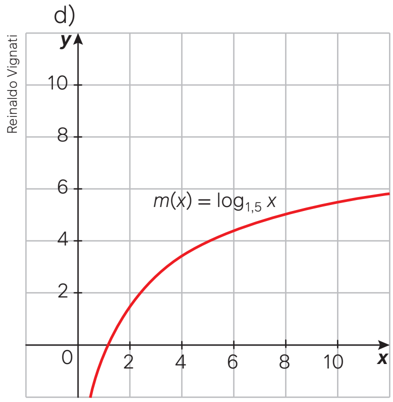
b)



c)



d)



2.

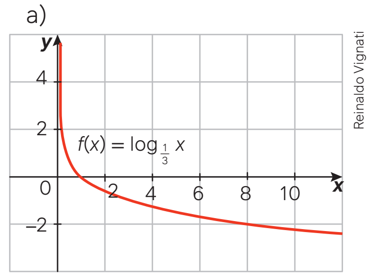
a) y aumenta. São funções crescentes.

b) Sim.

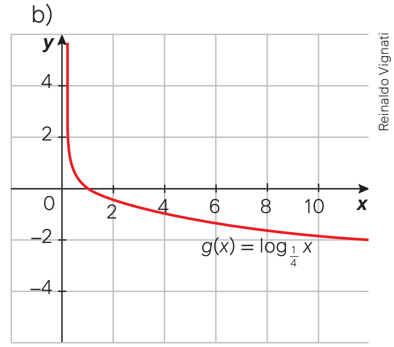
c) $\mathbb{R}$

3.

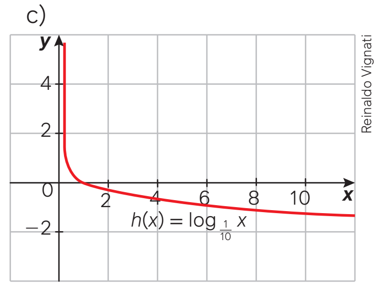
a)



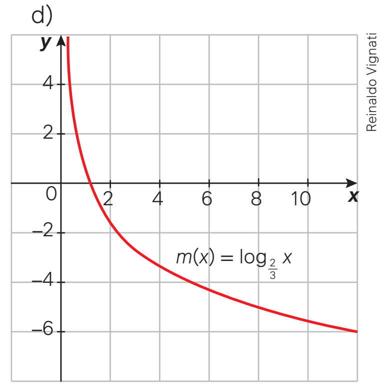
b)



c)



d)



4.

a) O y diminui. São funções decrescentes.

b) Sim.

c) $\mathbb{R}$

Página 52

Para pensar e discutir

1. Crescente.

2. 49; sim

3. Decrescente.

4. $\frac{1}{100}$

Páginas 55-57

Para pensar e discutir

1. $x > 5$

2. $0 < x \leq 5$

Atividades

84.

a) Crescente.

b) Crescente.

c) Decrescente.

d) Decrescente.

86.

a) 6

b) 81

c) Sim.

d) Sim.

87.

a) 4

b) $\frac{7}{2}$

88.

a) 100

b) 8 ou $\frac{1}{16}$

c) 6

89.

a) $A(1, 2)$, $B(9, 2)$, $C(9, 6)$, $D(1, 6)$

b) 24 u.c.; 32 u.a.

90. b

91. b

92. a

93. d

94. b

95. c

Página 59

Para pensar e discutir

1. (0, 12)

2. (0; 1,079)

Para pensar e discutir

1. $\sqrt{1\,000} \cong 31,6$

Páginas 62-65

Atividades

96.

a) 27 000 habitantes

b) Aproximadamente 6,6 anos.

97.

a) 250 000 reais

b) Em aproximadamente 3 anos.

98.

a) $\frac{1}{29}$

b) $t \cong 67,28$ anos

99.
a) 36% b) 1,5 hora

100. b

101.
a) $a = 120$; $b = \ln 2$.
b) 3 m

102.
a) $n = 2$; $k = 200$.
b) 900

103.
a) 1
b) 9 horas

Atividades finais

1.
a) $m^2 \cdot n^2$ c) n^4
b) m^3 d) m^6

2. 16

3. d

4.
a) V b) F c) F d) F

5.
a) $S = \{3\}$ c) $S = \{1, 2\}$
b) $S = \{2\}$ d) $S = \{\ \}$

6.
a) $x \geq 1$ b) $x > 2$

7. 6,5

8.
a) 1,857 c) 0,380
b) 1,176 d) 2,107

9.
a) $\frac{1}{a}$ b) $\frac{2}{a + b}$

10. 3

11.
a) $\frac{3}{2}$ b) 256

12.
I. F **III.** F
II. V **IV.** V

13.
a) {4 096}
b) $\{10^6; 10^{-1}\}$

Questões de vestibulares e Enem

14. e **18.** d **22.** b **26.** e
15. d **19.** c **23.** d **27.** b
16. e **20.** a **24.** d **28.** d
17. b **21.** b **25.** d **29.** d

Capítulo 2

Página 67

Abertura de capítulo

1. Na PG: $a_n = a_{n-1} \cdot 2$ e na PA: $a_n = a_{n-1} + 2$.

2. PG: (02, 04, 08, 16, 32, 64, 128, 256, ...); PA: (02, 04, 06, 08, 10, 12, 14, 16, ...).

Página 70

Para pensar e discutir

1. $T_6 = 21$

2. $Q_{10} = 100$

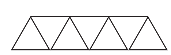
3. $P_5 = 35$

Páginas 71-73

Atividades

1.
a) 8 b) 20 c) $2n$

2.
a)



Acervo editora

b)

Figura	Números de palitos	Números de triângulos
1	3	1
2	7	3
3	11	5
4	15	7
5	19	9
6	23	11
7	27	13
8	31	15
9	35	17
10	39	19
11	43	21
12	47	23
13	51	25
14	55	27
15	59	29
16	63	31
17	67	33
18	71	35
19	75	37
20	79	39

3. 200

6.
b) 30

7.
b) $X = 13$ e $Y = 40$

8.
b) $A = 10$; $B = 20$; $C = 21$; $D = 34$; $E = 41$; $F = 75$

Página 74

Para pensar e discutir

1. 36 e 76, respectivamente.

2. $4(n - 1)$

3. O 22º termo da sequência.

Páginas 76-77

Atividades

9.
a) 5, 9, 13, 17, 21 e 25
b) 41
c) Sim.

10.
a) $(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6})$
b) 1, 2, 3, 4 e 5

11.
a) (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29)
b) 729

12.
a) (3, 6, 10, 15, 21)
b) (1, 4, 9, 16, 25)

13.
a) 46

14.
a) (1, 6, 15, 20, 15, 6, 1)
b) (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...)
c) 1 024

16.
a) (1, 6, 15, 28, 45, 66, 91)
b) Sim; 20º.

17. 27; aumentam de 4 em 4.

18. Os termos serão outros, porém continuarão aumentando de 4 em 4.

20.
a) 55 cubos

Página 79

Para pensar e discutir

1. Perdem-se 2 lugares e 4 lugares, respectivamente.

2. 10

3. 14
4. (4, 6, 8, 10, 12, ...).

Página 80

Para pensar e discutir

1. $r > 0$
2. PA constante.
3. A PA é decrescente.

Página 81

Para pensar e discutir

1. $a_{10} = a_1 + 9r$
2. $a_{100} = a_1 + 99r$
3. 503º termo
4. $a_n = a_1 + (n - 1)r$

Páginas 83-84

Atividades

21.
a) $a_n = -5n + 25$
b) –50

22.
a) (3, 7, 11, 15)
b) 99

23.
a) –36,8
b) $a_n = -7{,}2n + 107{,}2$

24.
a) Sim.
b) $-16 - 20\sqrt{2}$

25.
a) $a_n = 3n + 99$
b) $a_n = 2n$
c) $a_n = 4n + 48$

26.
a) –14
b) 11
c) 3
d) 31

27.
a) $(x - r, x, x + r)$
b) $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$
c) Sim.
d) Sim.

28. c
29. c
30. b
31. c

Página 85

Para pensar e discutir

1. $x - r, x, x + r$

Página 88

Para pensar e discutir

1. Não.
2. Sim.
3. R$ 20.000,00.

Para explorar

Parte 1

Número de meses	Valor inicial da dívida	Taxa	Montante
1	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.090,00
2	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.180,00
3	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.270,00
4	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.360,00
5	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.450,00
6	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.540,00
7	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.630,00
8	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.720,00
9	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.810,00
10	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.900,00

Página 89

Para pensar e discutir

1. Taxa de crescimento; o valor da razão; o 10º termo.
2. –5

Páginas 90-91

Para pensar e discutir

1. 11º

Atividades

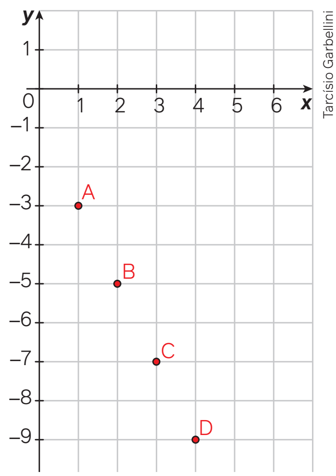
32.
a) Sim.
b) 2; à razão.

33.
a) $a_n = -2n + 12$
b) –228

34.
a) $x = 10$
b) $x = 1$ ou $x = 6$

35.
a) $S = \{-3, -5, -7, -9, ...\}$

b)



36.

a)

Mês	Juros	Montantes
1	R$ 30,00	R$ 1.530,00
2	R$ 30,00	R$ 1.560,00
3	R$ 30,00	R$ 1.590,00
4	R$ 30,00	R$ 1.620,00
5	R$ 30,00	R$ 1.650,00
6	R$ 30,00	R$ 1.680,00
7	R$ 30,00	R$ 1.710,00
8	R$ 30,00	R$ 1.740,00

b) R$ 240,00

c) R$ 1.740,00

38.

a) R$ 12.000,00

b) 12%

c) $M = 12\,000 + 1\,440t$

d) R$ 16.320,00

39.

a) 7,2

b) PA de razão 7,2 coincidindo esse valor com a taxa de crescimento da função.

40. Fevereiro de 2026.

41. c

Página 92

Para pensar e discutir

1. 1 296

Página 93

Para pensar e discutir

2. $a_{30} = (2 \cdot 30^2 - 30) - (2 \cdot 29^2 - 29) = 117$

Página 94

Atividades

42.

a) 10 000

b) n^2

43.

a) 2

b) 6

c) 4

d) 78

44.

a) $a_n = 4n - 14$

b) $S_n = 2n^2 - 12n$

46.

a) 38

b) 5 000

c) 8 termos

47. 59 km

48. A meta não deverá ser atingida.

49. R$ 18.480,00

50. c

51. d

52. c

Página 96

Para pensar e discutir

2. Menor.

3. $\frac{256}{81}$ u.c.

Página 97

Para pensar e discutir

1. Sim.

3. Sim.

4. $\frac{4}{3}$

Página 98

Para explorar

2. (3, 12, 48, 192, ...)

3. $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

4. $\left(3, 4, \frac{16}{3}, \frac{64}{9}, \dots\right)$

Página 99

Atividades

53.

a) $q = 10^{-1}$

b) $a_n = 10^{-n}$

54. 8

55. 10 ou –10

56.

a) 1 024

b) 0,015625

c) 128

57. (1, 3, 9, 27, 81, 243, 729) ou (1, –3, 9, –27, 81, –243, 729).

58.

a) 6 561

b) $a_n = (-3)^n$

59.

a) 2

b) 3

c) 1 458

60. 1 600 000

61.

a) $\frac{10}{4}$ cm²

b) $\frac{10}{16}$ cm²

c) $10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

62. c

63. e

64. b

65. a

Página 102

Para pensar e discutir

1. PG de razão $1 + i$.

Páginas 104-105

Atividades

66.

a) $\frac{4}{5}, \frac{4}{25}, \frac{4}{125}, \frac{4}{625}, \frac{4}{3\,125}$

b) PG decrescente de razão igual a $\frac{1}{5}$.

67. (0, 1, 2, 3, ...) PA crescente de razão igual a 1.

68.

a)

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
R$ 5.125,00	R$ 5.253,13	R$ 5.384,45	R$ 5.519,06	R$ 5.657,04	R$ 5.798,47

b) PG de razão 1,025.

69. 29

70. d

72. c

73. c

74.

a) $V = V_0 \cdot 0{,}90^t$

b) R$ 17.000,00

75.

a) $4, 2, 1, \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

76.

a) 6%

b) Sim; 1,06.

c) $M(t) = 1\,000 \cdot (1{,}06)^t$

Página 106

Para pensar e discutir

2. O denominador da fórmula obtida não pode ser igual a zero.

3. Multiplicando o primeiro termo pela quantidade de termos.

4. $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1$

Página 108

Para pensar e discutir

1. O 2º quadrado tem a metade da área do 1º quadrado.

2. $\frac{1}{2}$

Páginas 109-113

Para explorar

1.

a) $S = 2 + \sqrt{2}$

b) $S = 8 + 4\sqrt{2}$

2. $S = 2$; $S = 6$

Atividades

77.

a) $\frac{5}{9}$

b) $\frac{21}{99}$

78. 10 230

79.

a) 48

b) $\frac{1}{999}$

80.

a) 512

b) 10

81.

a) x^2

b) x^{48}

c) $S = \left\{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\right\}$

82.

a) 39 366

b) 59 048

83. a

85. 1

86. 4 092

87. R$ 148.832,00

88. $S = 2 - 2^{-100}$

Atividades finais

1.

a) $r = 5$

b) $S_n = \frac{5}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$

2. Razão igual a zero.

3. 99 termos

4. $a_n = 4n - 1$

5. Razão.

6. PA de razão 4.

7. $\frac{32}{99}$

8. Progressão geométrica.

9. Razão igual a 1 ou o primeiro termo nulo.

10.

a) $a_n = 3^n$

b) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

11. A razão negativa e o primeiro termo não nulo.

Questões de vestibulares e Enem

12. b

13. c

14. c

15. a

16. b

17. c

18. d

19. d

20. c

21. d

22. a

23. e

24. c

25. e

26. c

27. e

28. c

29. b

30. c

31. d

32. c

33. d

34. c

Capítulo 3

Página 116

Para pensar e discutir

1. Os dois têm a mesma média de pontos por jogo.

Página 119

Para pensar e discutir

1. Não.

2. O total de consumo.

3. Diminuiria 5 m³.

Página 120

Para pensar e discutir

2. Sim.

3. Sim.

Páginas 121-122

Para explorar

1.

Altura	Frequência absoluta	Média da classe
[1,39; 1,48[	4	1,435
[1,48; 1,57[	9	1,525
[1,57; 1,66[	11	1,615
[1,66; 1,75[	8	1,705
[1,75; 1,84[	5	1,792
[1,84; 1,93[	3	1,885
Total	**40**	

Atividades

1.
a) 7,0
b) 7,125

2. 35,85 °C

3. 24

4.
a) 14,5 anos
b) 12

5.
a) Sim; 34 °C.
b) Sim; 23 °C.
c) 34,1 °C
d) 21,4 °C

7. d

8. a

9. a

Página 123

Para pensar e discutir

1. Dois.

Página 125

Para pensar e discutir

1. 24

2. Os dois valores são iguais a 23; média: 23.

3. 21,29; não

4. Não.

Páginas 128-129

Atividades

10.
a) 29,4 °C
b) 28 °C
c) 29 °C

11.
a) Aproximadamente 37,3 m³.
b) 35 m³.
c) 35 m³.

12. 11 mm; 5,5 mm; 2 mm, respectivamente

13. d

14.
a) 85

15. c

16. a

17. c

18. b

19. d

20. 19 (01 + 02 + 16)

Página 136

Para pensar e discutir

2. A, C e D.

Página 138

Para pensar e discutir

1. Em alguns casos, é possível.

Página 139

Para pensar e discutir

1. Os extremos de cada classe.

Páginas 140-148

Atividades

21.
a) Carlos e Antônio.
b) Ambos têm mesma amplitude.
c) $M_{a\ \text{Adriana}} = 11$; $M_{a\ \text{Carlos}} = 10{,}4$; $M_{a\ \text{Joana}} = 12{,}8$; $M_{a\ \text{Antônio}} = 10$
d) $D_{p\ \text{Adriana}} \cong 2{,}45$; $D_{p\ \text{Carlos}} \cong 1{,}36$; $D_{p\ \text{Joana}} \cong 2{,}32$; $D_{p\ \text{Antônio}} \cong 1{,}41$

23.
a) 7
b) Zero.
c) Zero.
d) Zero.

24.
I. F
II. V
III. F
IV. V

25.
a) 71 kg
b) 72,5 kg
c) 88 kg
d) 11,75 kg
e) 181,75 kg
f) Aproximadamente 13,48 kg.

26. Aproximadamente 14.

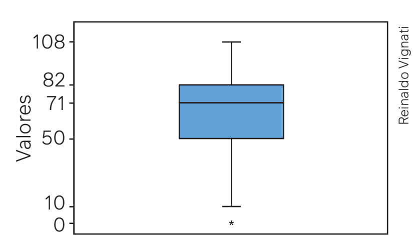
27.
a) A: 79,5; B: 86,5.
b) O candidato B.

28. e

29. a

30. b

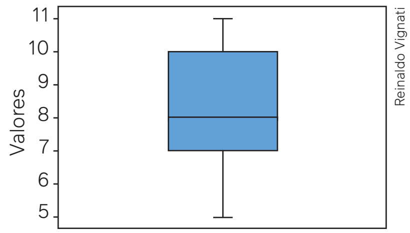
31.
a)



32. a

33.
a) $Q_1 = 7$; $Q_2 = 8$; $Q_3 = 10$; limite superior = 11; limite inferior = 5.

b)



34.

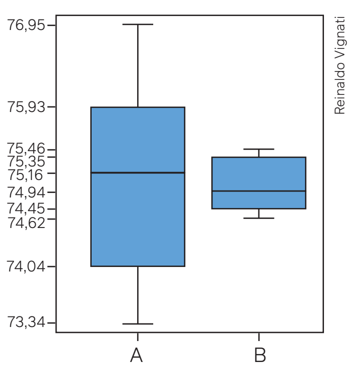
Etapa 1

$Q_1 = 74{,}04$; $Q_2 = 75{,}16$;
$Q_3 = 75{,}93$;
limite superior = 76,95;
limite inferior = 73,34.

Etapa 2

$Q_1 = 74{,}45$; $Q_2 = 74{,}94$;
$Q_3 = 75{,}35$;
limite superior = 75,46;
limite inferior = 74,62.

Etapa 3



35. a	**38.** e
36. b	**39.** c
37. d	**40.** c

Páginas 150-155

Atividades finais

1.

a) Média, moda e mediana.
b) Dividindo por 5 a soma dos 5 valores.
c) Os 5 valores são colocados em ordem crescente e identifica-se aquele que ocupa a posição média (3ª posição).
d) Os 6 valores são colocados em ordem crescente e identificam-se os dois valores que ocupam as posições médias (3ª e 4ª posições). A seguir, calcula-se a média aritmética desses dois valores.
e) O elemento mais frequente.
f) Nem sempre.

2.

a) Amplitude, variância, desvio médio e desvio-padrão.
b) Calcula-se a média aritmética desses valores; calcula-se o quadrado da diferença entre cada valor e a média; calcula-se a média aritmética dos quadrados dessas diferenças obtidas; extrai-se a raiz quadrada desse resultado.
c) Não.

3.

a) Mínimo, máximo, mediana, 1º quartil, 3º quartil.
b) A mediana.

Questões de vestibulares e Enem

4. c	**12.** b	**20.** c
5. b	**13.** a	**21.** b
6. b	**14.** d	**22.** b
7. b	**15.** e	**23.** d
8. b	**16.** c	**24.** a
9. e	**17.** c	**25.** e
10. a	**18.** c	**26.** e
11. b	**19.** c	

Capítulo 4

Página 158

Para pensar e discutir

1. Deslocar uma figura por certa distância e em certa direção.

2. Girar uma figura em torno de seu centro de rotação.

Página 162

Para pensar e discutir

1. Reflexão em torno do eixo das abscissas e reflexão em torno do eixo das ordenadas.

Página 164

Atividades

1.

a) Com translações para a direita de 6 em 6 quadradinhos.
b) Translação.

3. Translação de 1 unidade (um lado do quadrado da malha) para baixo seguida de 8 unidades para a direita e rotação de 90° no centro da figura; não.

5.

c) Não.

Página 165

Para pensar e discutir

2. Foi reproduzido em malha quadriculada.

3. Aumentando e diminuindo o tamanho dos quadradinhos, respectivamente.

Página 166

Para pensar e discutir

1. Os lados do triângulo *ABC* têm o dobro das medidas dos lados do triângulo *A'B'C'*.

Página 167

Para pensar e discutir

1. Sim.

2. Uma redução.

3. $k = 1{,}5$.

4. Sim.

Página 168

Atividades

8.

a) 2
b) $A(3, 1)$, $B(3, 5)$, $C(7, 1)$,
$A'(6, 4)$, $B'(6, 12)$ e $C'(14, 4)$.
c) $(0, -2)$.

Página 169

Para pensar e discutir

1. O raio da Terra.

2. A soma das medidas do raio da Terra e da altura *h*.

3. 90°

Página 170

Para pensar e discutir

1. A forma.

2. As medidas dos lados, proporcionalmente.

3. Menor: 3 u.c., 4 u.c. e 5 u.c.;

médio: 6 u.c., 8 u.c. e 10 u.c.;
maior: 12 u.c., 16 u.c. e 20 u.c.

Página 173

Para pensar e discutir

1. $d = \ell\sqrt{2}$

2. $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$

3.

Razões trigonométricas			
Razões	**30°**	**45°**	**60°**
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Páginas 174-175

Atividades

11.

a) $\text{sen}\,\beta = \frac{b}{a}$; $\cos\beta = \frac{c}{a}$; $\text{tg}\,\beta = \frac{b}{c}$

b) O seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

c) Nos ângulos complementares, as tangentes são inversas uma da outra.

d) 1

12.

a) 0,6 ou 0,8

b) 0,6 ou 0,8

c) 0,75 ou aproximadamente 1,33

13. Aproximadamente 37° e 57°.

15. Aproximadamente 3 215 m.

16.

a) Aumentam.

b) Diminuem.

c) Aumentam.

17. c

18.

a) $AB = 120$ cm

b) $10\sqrt{401}$ cm

Página 177

Análise e contexto

1. Sim.

2. Não.

3. Valores aproximados para sen 40° (ou cos 50°); cos 40° (ou sen 50°) e tg 40°.

Página 178

Para pensar e discutir

1. Aproximadamente 20,5 cm².

2. Não.

Página 180

Para pensar e discutir

1. Altura do teodolito em relação ao solo.

2. Basta fazer $h = 0$.

Páginas 181-182

Atividades

19.

a) Aproximadamente 72°.

b) Aproximadamente 22,7 m.

c) $AB = \dfrac{h}{\text{sen}\,\alpha}$

d) $AB = \dfrac{d}{\cos\alpha}$

20.

b) Um telhado com inclinação 45°.

21.

a) $F \cdot d \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}71 \cdot F \cdot d$

b) $F \cdot d \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5 \cdot F \cdot d$

c) $\theta = 0°$

22. 14°

24. c

Página 185

Para pensar e discutir

1. 50°, 130° e 130°

2. Aproximadamente 18,206 cm.

Página 186

Para pensar e discutir

1. $\theta \cong 62{,}53°$

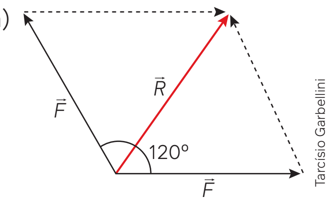
Páginas 187-188

Atividades

25. Aproximadamente 17,4 cm.

26.

a)



b) $R = F\sqrt{3}$

28.

a) $x \cong 2{,}57$ cm, $y \cong 4{,}10$ cm, $z \cong 5{,}40$ cm

b) Não.

29. Aproximadamente 33°, 55° e 92°.

30.

a) Aproximadamente 288,68 m.

31. b

Página 192

Atividades

32. $T_A \cong 184$ N; $T_B \cong 163$ N

33. Aproximadamente 106 metros.

35.

a) Aproximadamente 42,6 cm.

b) Duplica.

36.

a) $AB \cong 2\,860$ m; $AC \cong 2\,796$ m.

b) Aproximadamente 3 599 310 m².

37. a **38.** b **39.** c

Páginas 193-195

Atividades finais

1.

a) Rotação, translação e reflexão.

b) Homotetia.

c) $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 1

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$ e 3

f) É o quociente entre as medidas do cateto oposto ao ângulo e da hipotenusa.

g) É o quociente entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo e da hipotenusa.

h) É o quociente entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo.

i) $\dfrac{a}{\text{sen}\,A} = \dfrac{b}{\text{sen}\,B} = \dfrac{c}{\text{sen}\,C} = 2r$

j) $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \widehat{A}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \widehat{B}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \widehat{C}$

2.
a) 2
b) 2
c) 4

Questões de vestibulares e Enem

3. b
4. e
5. a
6. d
7. c
8.
a) 45°
b) $4\sqrt{6}$ cm
9. b
10. a
11. Aproximadamente 40 m.
12. a
13. b
14. c
15. b
16. c
17. c

Capítulo 5

Página 199

Para pensar e discutir

3. Sim.

Página 200

Para pensar e discutir

1. 90° e 120°
2. 360°
3. $2\pi r$
4. $\ell = \frac{\pi r \theta}{180°}$

Página 201

Para pensar e discutir

1. $360° = 2\pi$ rad
2. $180° = \pi$ rad
3. Aproximadamente 57°.

Páginas 204-205

Atividades

1.
a) 2 rad $\cong$ 114°
b) 3 rad $\cong$ 171°
c) 4 rad $\cong$ 228°
d) 5 rad $\cong$ 285°

2.
a) 3,4 cm
b) Aproximadamente 143,3°.

4.
a) 120°
b) 135°
c) 150°
d) 270°
e) 300°
f) 330°

5.
a) $\frac{\pi}{2}$ rad
b) $\frac{4\pi}{3}$ rad
c) $\frac{5\pi}{4}$ rad
d) $\frac{5\pi}{12}$ rad
e) $\frac{7\pi}{4}$ rad
f) $\frac{\pi}{180}$ rad

6. c
8. e
9. d
10. b

Para pensar e discutir

1. A (1; 0), A'(–1; 0), B (0; 1); B'(0; – 1) e O (0; 0).
2. 1; –1
3. 1; –1
4. A'; B'

Página 207

Para pensar e discutir

1. 3º quadrante
2. 2º quadrante

Página 208

Para pensar e discutir

1. Múltiplos de 5.
2. Arcos com medidas múltiplas de 2π radianos.
3. Um múltiplo de 2π radianos.

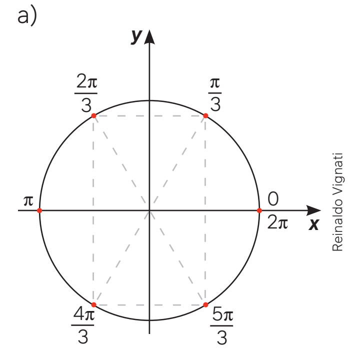
Página 209

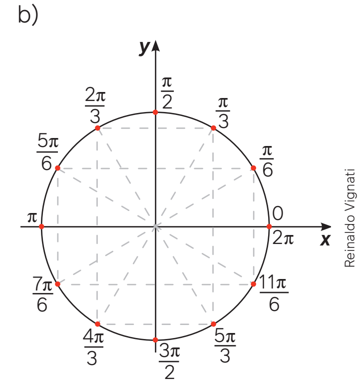
Atividades

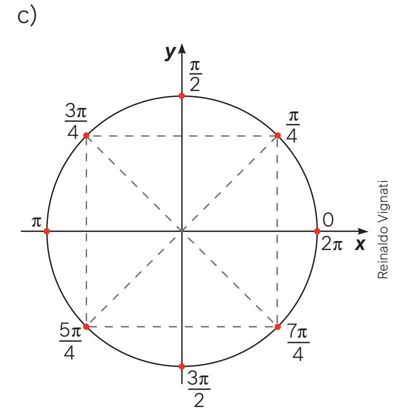
11.
a) 1º quadrante
b) Não pertence a nenhum quadrante.
c) 4º quadrante
d) 4º quadrante

12.
a) 3 820°
b) 3º quadrante
c) 220°

13.
a)
$x = 2\pi + k \cdot 360°$
$x = 2\pi + k \cdot 90°$
$x = 2\pi + k \cdot 180°$
$x = 2\pi + k \cdot 270°$

14.
a)


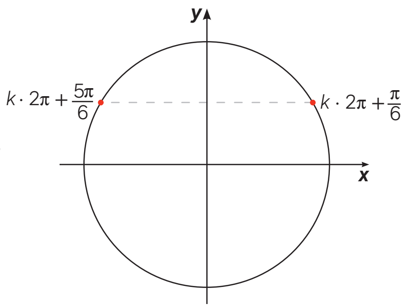
b)


c)


15.
a) 3º quadrante; $-\frac{3\pi}{4}$
b) 3º quadrante; $\frac{5\pi}{4}$
c) 1º quadrante; $\frac{9\pi}{4}$
d) 1º quadrante; $-\frac{7\pi}{4}$

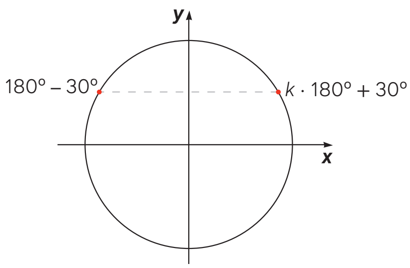
16.

a)



Reinaldo Vignati

b)



Reinaldo Vignati

17.

a) 10π rad

b) $W = 10\pi$ rad/s

19.

a) $\frac{\pi}{21\,600}$ rad/s

b) $\frac{\pi}{1\,800}$ rad/s

c) $\frac{\pi}{30}$ rad/s

Página 211

Para pensar e discutir

1. $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$

2. 1; 0°

3. –1; 180°

4. 1; 90°

5. –1

Página 213

Para pensar e discutir

1. 1º e 2º; 3º e 4º

2. 1º e 4º; 2º e 3º

3. 2º ou 4º

Para explorar

1.

a) $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$, $\text{sen } 150° = \frac{1}{2}$,

$\text{sen } 210° = -\frac{1}{2}$,

$\text{sen } 330° = -\frac{1}{2}$

b) $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2.

a) $\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\text{sen } 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\text{sen } 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\text{sen } 315° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 315° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3.

a) $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\text{sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\text{sen } 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\text{sen } 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 60° = \frac{1}{2}$,

$\cos 120° = -\frac{1}{2}$,

$\cos 240° = -\frac{1}{2}$,

$\cos 300° = \frac{1}{2}$

Página 214

Para pensar e discutir

1. 0,42; 0,42; –0,42

Páginas 215-216

Atividades

20.

a) 120°, 240° e 300°

b) Zero.

c) Zero.

21. $\text{sen } x = 0{,}8$

22.

I. V

II. V

III. F

VI. V

23. 1º ou 3º

24. sen 1

26.

a) 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330°

b) 1º e 4º

c) 3º e 4º

27.

a) 59°

b) 152°

c) São suplementares.

d) 120°

28.

a) $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

30.

a) $\frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$

b) $2\pi k + \frac{7\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$

d) $2\pi k \pm \frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

31.

Parte 1

a) 0, π ou 2π

b) $k\pi$

c) $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$

d) $2k + \frac{\pi}{2}$

e) $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$

f) $2k \pm \frac{\pi}{2}$

g) 0, π ou 2π

h) $k\pi$

Parte 2

i) 1 ou –1

j) 1 ou –1

k) 0

l) 0

Página 221

Análise e contexto

1. Enquanto o período pode ser definido como o tempo que uma onda leva para finalizar um ciclo completo, a frequência é o número de ciclos completos que uma onda realiza em um segundo. Portanto, a frequência 60 Hz significa que a onda faz 60 ciclos completos por segundo. O período é calculado como o inverso da frequência.

   Assim, $\frac{1}{60} \cong 0{,}0167$.
2. De 60 a 100 batimentos por minuto.

Página 222

Para pensar e discutir

1. 1,57
2. Entre $\frac{\pi}{2}$ e π e entre $-\frac{\pi}{2}$ e $-\pi$.
3. Entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π e entre $-\frac{3\pi}{2}$ e -2π.

Página 223

Para pensar e discutir

1. $\mathbb{R}$
2. $[-1; 1]$
3. Sim; 2π radianos.
4. Suas imagens serão opostas.

Página 225

Para pensar e discutir

1. $[A + D, -A + D]$
2. $[8, 12]$

Para pensar e discutir

1. $P = \frac{2\pi}{|B|}$
2. $P = \frac{\pi}{2}$

Páginas 226-227

Atividades

32.

a) 1

b) -1

c) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

d) $S = \{0, \pi, 2\pi\}$

33.

a) $a = 2$, $b = 1$ e $c = 0{,}5$

b) $Im(f) = [-2; 2]$, $Im(g) = [-1; 1]$ e $Im(h) = [-0{,}5; 0{,}5]$.

c) As três funções têm o mesmo período: 2π rad.

34.

a) sen θ e sen $(-\theta)$

b) sen $(-\theta) = -$sen θ

35.

I. F
II. V
III. F
IV. V
V. F

36.

a) 3, 3

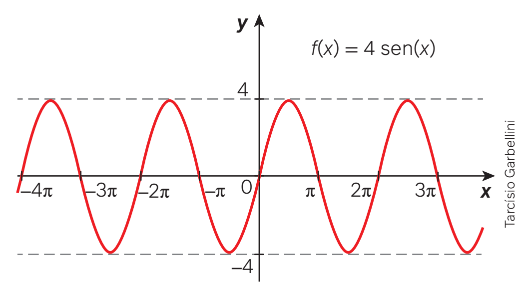
b) 6π u.a.

37.

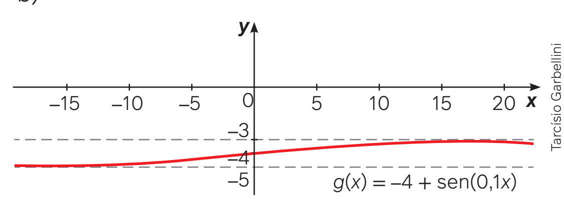
Função	Imagem mínima	Imagem máxima	Período
$y = 4\text{sen } x$	-4	4	2π
$y = -4 + \text{sen }(0{,}1x)$	-5	-3	20π
$y = 5\text{sen }(0{,}2x)$	-5	5	10π
$y = 7 - 7\text{sen }(2x)$	0	14	π
$y = -3\text{ sen }(4x)$	-3	3	$\frac{\pi}{2}$

38.

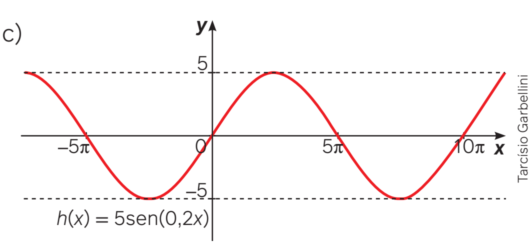
a)



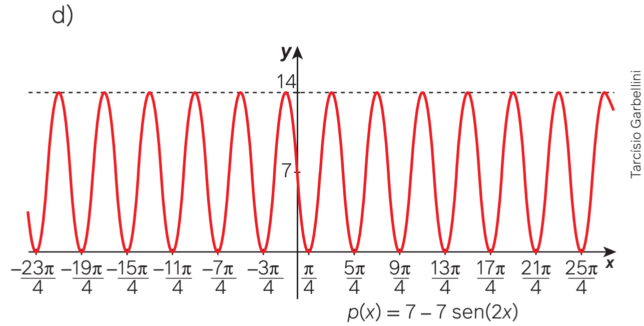
b)



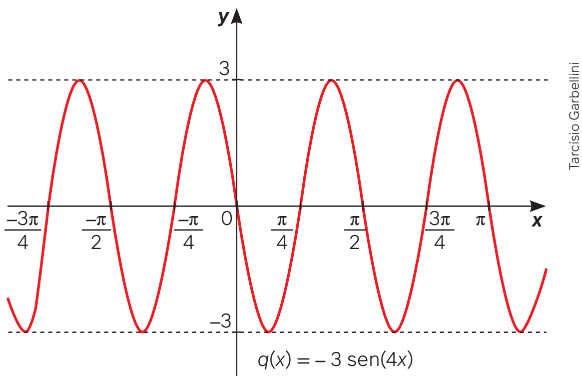
c)



d)



e)



39.

a) –2

b) 8

c) π rad

40. $g(x) = \text{sen } x + 2$ e $h(x) = \text{sen } x + 4$

41.

a) As três funções têm a mesma amplitude: $B = 1$.

b) As três funções têm o mesmo conjunto imagem: $[-1, 1]$.

c) Gráfico 1: 4π, Gráfico 2: 2π, Gráfico 3: π.

42.

a) $g(x) = 2\text{sen } x$; $h(x) = 4\text{sen } x$.

c) O período.

d) No conjunto imagem.

Página 228

Para pensar e discutir

1. $\mathbb{R}$
2. $[-1, 1]$
3. Sim; 2π radianos.

Página 229

Para explorar

Parte 1

1. Domínio e imagem são iguais e descrevem a mesma senoide, mas com deslocamento.
2. Arcos em radianos.
3. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
4. $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
5. 2; $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Página 230

Para pensar e discutir

1. O gráfico giraria 180° em torno do eixo das abscissas.
2. O período é dividido por dois.

Para pensar e discutir

1. Possuem o mesmo valor.
2. Possuem valores opostos.
3. $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$

Páginas 231-232

Atividades

43.

a) Zero.
b) $\frac{2\pi}{3}$
c) $[-1, 1]$

44.

a) $g(x) = \cos(x) + 2$

b) $[1, 3]$

c) Sim.

45. $-\frac{\pi}{2}$ (abscissa de A); $\frac{\pi}{2}$ (abscissa de B)

46.

I. V

II. V

III. F

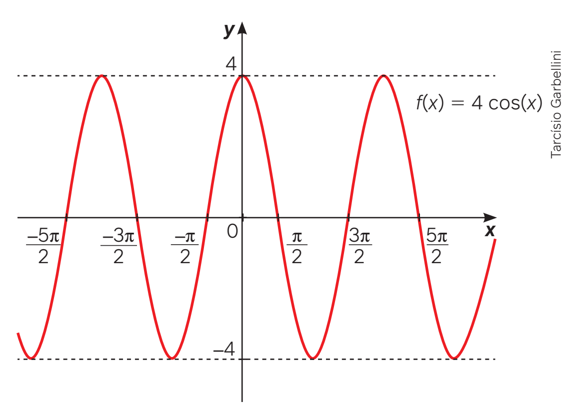
IV. V

47.

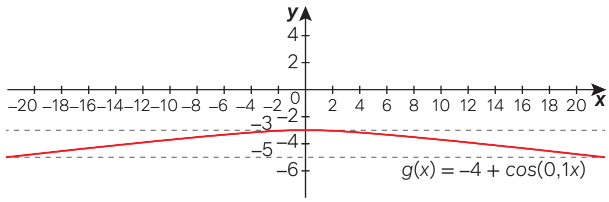
Função	Imagem mínima	Imagem máxima	Período
$y = 4\cos x$	–4	4	2π
$y = -4 + \cos(0{,}1x)$	–5	–3	20π
$y = 5\cos(0{,}2x)$	–5	5	10π
$y = 7 - 7\cos(2x)$	0	14	π
$y = -3\cos(4x)$	–3	3	$\frac{\pi}{2}$

48.

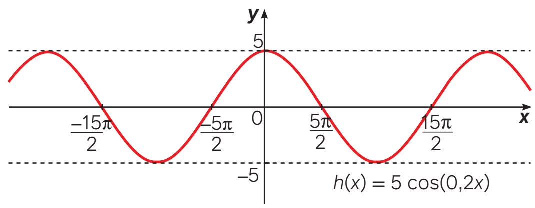
a)



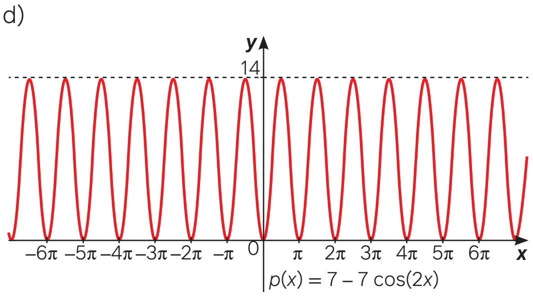
b)



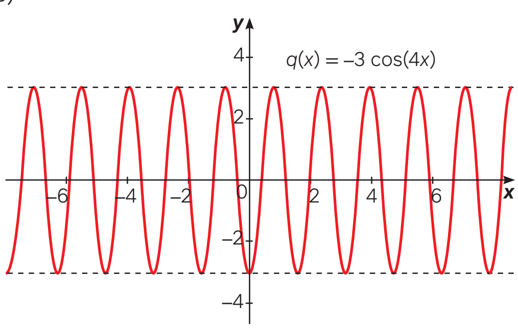
c)



d)

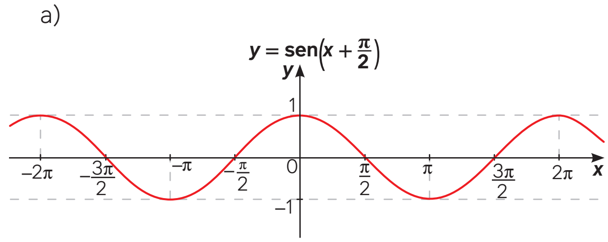


e)

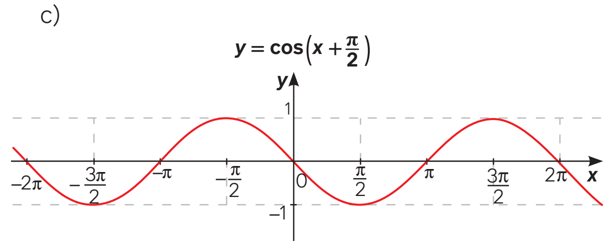


49.

a)



c)



50.

a) 3

b) 9

c) π

51. d

52. b

53. a

Página 234

Para pensar e discutir

1. $x(0) = A \cdot \cos(\phi) = 0;\ \phi = \frac{\pi}{2}$

2. A

3. 1 e –1

Página 235

Para pensar e discutir

1. $T = 0{,}75$ s

2. $P_{máx} = 120$ mmHg; $P_{min} = 80$ mmHg.

Para pensar e discutir

1. Sim.

2. 35 segundos.

Página 236

Infográfico

1.

a) A e B; $H = A + B$

b) C

Página 237

Atividades

55.

a) –2

b) $\omega = \frac{\pi}{2}$

56. b

57. a

58. c

59.

a) 2,033 m

b) $f(x) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{4\pi}{65} \cdot x\right)$;

$D(f) = \{0 \leq x \leq 195\}$;

$Im(f) = [-2, 2]$.

Páginas 238-241

Atividades finais

1.

b) Aproximadamente 57°.

2. A medida do ângulo central em radianos.

3.
a) A origem dos arcos.
b) $A(1, 0)$.
c) Anti-horário.
d) Horário.

4.
a) 4º
b) 320°

5.
a) 1º e 3º
b) 2º e 4º

6.
a) 17
b) 13
c) $f(0) = 15$
d) $\frac{2\pi}{3}$ rad

7.
I. F
II. V
III. V
IV. V

Questões de vestibulares e Enem

8. d
9. R$ 50.000,00
10. c
11. b
12. c
13. a
14. c
15. a
16. b
17. c
18. e
19. d
20. a
21. d
22. d
23. d
24. b
25. a

Capítulo 6

Página 245

Análise e contexto

2. Sendo x, y, z números naturais maiores que zero, a igualdade $x_n + y_n = z_n$ não tem solução se n for um número inteiro maior que 2 ($n > 2$).

3. Você é racional.

Página 246

Para pensar e discutir

1. Esfera, cilindro, cone, cubo, pirâmide e bloco retangular (paralelepípedo).

Página 249

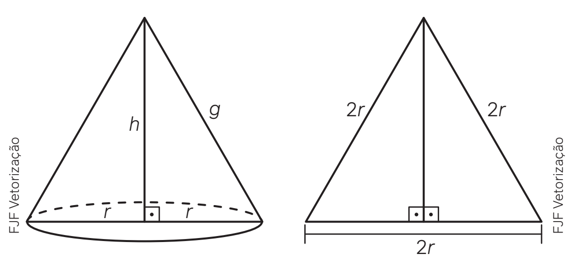
Atividades

1. Apenas 4.

2.
a) CD, EF e GH.
b) AE, AD, BC e BF.
c) AE, AD, BC, BF, DH, CG, EH e FG.

6.
a) Círculo e setor circular.
b) Cone.

7.
a)



b) Quadrado.

8.
a) Círculo.
b) Esfera, cone, tronco de cone ou cilindro.

Página 250

Para pensar e discutir

1. Triângulos, quadriláteros e pentágonos.

Página 251

Para pensar e discutir

1. Não.
2. D
3. Não.
4. Não no poliedro C; sim nos poliedros B e D.

Página 252

Para explorar

1.
a) Sim.
b) B, C e G.
c) A, B, C, D, F e G.

2.

Poliedro	Número de vértices	Número de arestas	Número de faces
A	12	18	8
B	4	6	4
C	8	12	6
D	6	9	5
E	7	12	7
F	10	15	7
G	6	12	8
H	20	37	19

3. Poliedro *A*: 12 – 18 + 8 = 2
Poliedro *B*: 4 – 6 + 4 = 2
Poliedro *C*: 8 – 12 + 6 = 2
Poliedro *D*: 6 – 12 + 7 = 2
Poliedro *F*: 10 – 15 + 7 = 2
Poliedro *G*: 6 – 12 + 8 = 2
Poliedro *H*: 20 – 37 + 19 = 2

4.

Poliedro	Número total de lados do polígono	Número total de arestas do poliedro
A	36	18
B	12	6
C	24	12
D	18	9
E	24	12
F	30	15
G	24	12
H	74	37

Página 253

Para pensar e discutir

1. Em cada poliedro é possível perceber que há faces com a mesma forma e que o número de arestas por vértice é o mesmo.

2. Todos.

Página 254

Atividades

9.
a) 7
b) 15
c) 10

10.
a) Sim.
b) Sim.
c) Não.
d) Não.

11.
a) 22 vértices, 33 arestas e 13 faces.
b) Sim.
c) 3
d) Não.

14.
a) 60; os vértices do poliedro.
b) 90; as arestas do poliedro.

15. e

16. c

Página 256

Para pensar e discutir

1. A diagonal de um quadrado de lado *a*.

2. $a\sqrt{2}$

3. $a\sqrt{3}$

Página 258

Atividades

17.
a) $\sqrt{52}$ cm, $\sqrt{116}$ cm e $\sqrt{136}$ cm
b) $\sqrt{152}$ cm

19.
a) 6,93 cm
b) 9,66 cm
c) Aproximadamente 1,39.

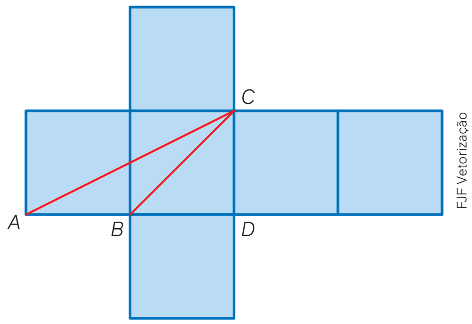
20.
a) Duplica.
b) Triplica.

21.
a) $1\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{2}$ cm e $3\sqrt{2}$ cm
b) $1\sqrt{3}$ cm, $2\sqrt{3}$ cm e $3\sqrt{3}$ cm

22. Aproximadamente 177,18 cm.

23.
a) 2
b) 8 cm, 4 cm e 6 cm

24. Resposta possível para os itens **a** e **b**.



Página 259

Para pensar e discutir

1. $a_p^2 = h^2 + r^2$
2. $a_\ell^2 = h^2 + R^2$
3. $a_\ell^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a_p^2$
4. $R^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Página 260

Para pensar e discutir

1. O raio da circunferência circunscrita à base da pirâmide.
2. O raio da circunferência inscrita na base da pirâmide.
3. A aresta lateral, o raio da circunferência inscrita e o raio da circunferência circunscrita.

Página 261

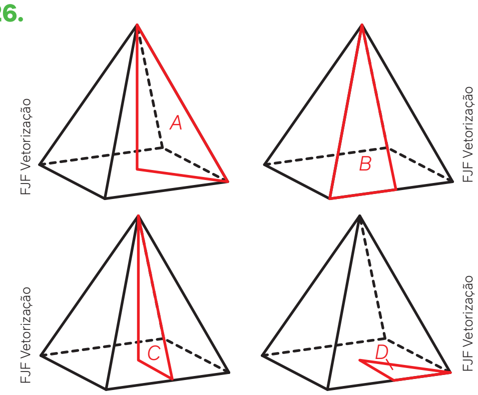
Para pensar e discutir

1. Têm a mesma medida.
2. $h = r\sqrt{3}$

Páginas 262-263

Atividades

26.



27.

a) $2\sqrt{2}$ cm
b) 4 cm
c) $2\sqrt{3}$ cm
d) 2 cm
e) $2\sqrt{2}$ cm

28.

a) $\frac{5}{2}$ cm
b) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm
c) 5 cm

29.

a) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$
b) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$
c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

30.

a) Aproximadamente 16,5 cm.
b) 2,5 cm
c) Aproximadamente 10,31.

31.

a) 5 cm
b) Aproximadamente 8,66 cm.

32. 16 cm

33.

b) 6 cm, 8 cm e 10 cm

Para explorar

Parte 1

Quadrado: $\ell = 2r$; hexágono: $\ell = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$; triângulo equilátero: $\ell = 2r\sqrt{3}$.

Parte 2

Quadrado: $\ell = R\sqrt{2}$; hexágono: $\ell = R$; triângulo equilátero: $\ell = R\sqrt{3}$.

Página 264

Para pensar e discutir

1. Como na relação, o raio R da esfera é constante; aumentando d, o valor de r diminui. Da mesma forma, podemos dizer que, diminuindo d, o valor de r aumenta.
2. $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Página 265

Atividades

34.

a) $r^2 + d^2 = 100$
b) $\sqrt{75}$ cm
c) 6 cm
d) 8 cm

36. Zero.

37. b

38. 5 cm

Página 268

Para pensar e discutir

1. O vértice do cone.
2. No segmento que representa a altura do cone.
3. Aquelas superfícies mais afastadas do paralelo que estão em contato com o cone.

Para pensar e discutir

1. Não.
2. As superfícies polares.

Página 269

Para pensar e discutir

1. Linhas retas.
2. Circunferências concêntricas.

Página 270

Análise e contexto

1. Semelhança de triângulos.
2. Sim.

Páginas 271-274

Atividades finais

1.

I. V
II. F
III. V
IV. V

2.

a) Cilindro.
b) Cone.

3.

a) 6
b) 8
c) 12

4.

a) $V + F - A = 2$
b) $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
c) $d = a\sqrt{3}$

Questões de vestibulares e Enem

5. a
6. c
7. d
8. a
9. b
10. d
11. c
12. c
13. a
14. e
15. b
16. a
17. e
18. e
19. b

Referências

ANDERSON, L.; EVES, H. *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.
O livro traz diversos fatos da história da Matemática que podem ser usados para a introdução de assuntos em sala de aula ou para o enriquecimento de atividades.

BARBOSA, R. M. *Descobrindo padrões em mosaicos*. São Paulo: Atual, 1993.
Esse livro aborda a identificação e a criação de padrões em mosaicos de pavimentações planas à luz da Geométrica Euclidiana.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Parecer nº 3, de 8 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, observadas as alterações introduzidas na LDB pela lei nº 13.415/2017. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, p. 49, 21 nov. 2018.
Nesse documento, que substituiu o modelo único de currículo do Ensino Médio por uma organização flexível e diversificada, encontram-se detalhadas as orientações para a implementação do Novo Ensino Médio.

BRASIL. *Lei nº 8069, de 13 de julho de 1990*. Dispõe sobre o Estatuto da Criança e do Adolescente e dá outras providencias. Brasília, DF: Presidência da República, 1990. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l8069.htm. Acesso em: 10 ago. 2020.
Lei que dispõe sobre a proteção integral à criança e ao adolescente.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018.
A BNCC é o documento que determina as competências, habilidades e aprendizagens essenciais que todas as crianças, adolescentes e jovens brasileiros devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

CARVALHO, P. C. P. *Introdução à Geometria Espacial*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
Nesse livro, em que a Geometria é tratada de forma axiomática, a introdução de cada conceito está acompanhada de exemplos de construções no espaço.

DUARTE, P. A. *Fundamentos da Cartografia*. Florianópolis: Editora da UFSC, 1994.
Com escrita acessível, a obra traz a história da Cartografia de maneira não eurocentrista, com reflexões sobre essa área de conhecimento que remonta à Antiguidade.

EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. cap. 13, p. 519-581.
O capítulo citado faz referência a um dos maiores prodígios da Matemática, Carl Gauss, e trata de um dos seus feitos mais conhecidos: a soma dos 100 primeiros números de maneira fácil de entender.

GERBASI, A. R. V. *As maravilhosas utilidades da Geometria*: da Pré-História à Era Espacial. Paraná: PUCPress, 2020.
Nessa obra, o autor apresenta a Geometria à luz de fenômenos da natureza e de realizações humanas, instigando o interesse e a curiosidade do leitor. Cada capítulo é dedicado a um tema.

HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática*: influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos. Porto Alegre: Globo, 1958.
O livro apresenta a história da Matemática e a relaciona com feitos históricos, culturais e sociais da humanidade.

IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018.
Esse atlas, que contém uma introdução à Cartografia, é destinado a estudantes do Ensino Fundamental e Médio.

IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática elementar*: Trigonometria. São Paulo: Atual, 2013. v. 3.
Nessa obra, o estudo da Trigonometria é feito por meio da apresentação do triângulo retângulo e da circunferência trigonométrica.

JONES, P. S. Medida angular. *In*: KENNEDY, E. S. *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula*: Trigonometria. São Paulo: Atual, 1992.
O livro reúne diversos fatos da história da Matemática que podem ser usados para a introdução de assuntos em sala de aula ou para o enriquecimento de atividades.

KASNER, E.; NEWMAN, J. *Matemática e imaginação*. Tradução de Jorge Fortes. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1968.
Nesse livro, os autores apresentam os fundamentos da Matemática de forma bem-humorada e acessível.

LAUNAY, M. *A fascinante história da Matemática*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.
Ao apresentar uma linha do tempo da Matemática, focando a relação entre sociedade e conhecimento, o autor demonstra a evolução dessa área do conhecimento.

LIMA, E. L. *et al. A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1998 v. 2.
A primeira parte dessa obra aborda progressões aritméticas e geométricas com aplicações na Matemática Financeira, análise combinatória e probabilidade.

LIMA, E. L. *Logaritmos*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1996. (Coleção do Professor de Matemática).
De forma clara e acessível, o autor aborda a definição tradicional de logaritmos e o conceito de funções logarítmicas, bem como algumas aplicações, como o cálculo de juros.

MARTINS, E. Quem foi Ada Lovelace? *In*: PARANÁ. Secretaria da Educação. Curitiba: SEED-PR, 17 jan. 2019. Disponível em: http://www.filosofia.seed.pr.gov.br/modules/noticias/article.php?storyid=703&tit=Quem-foi-Ada-Lovelace. Acesso em: 28 fev. 2024.

Esse texto trata das mulheres na ciência e de como muitas vezes, por mero estereótipo, elas são afastadas de áreas na qual foram pioneiras.

MEMÓRIA, J. M. P. *Breve história da Estatística*. Brasília, DF: Embrapa Informação Tecnológica, 2004. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~rvicente/JMPMemoria_Historia_Estatistica.pdf. Acesso em: 19 abr. 2024.
O livro conta a história da Estatística destacando a influência mútua das ideias dos pensadores mais representativos dessa ciência.

MLODINOW, L. *A janela de Euclides*. São Paulo: Geração Editorial, 2004.
Esse relato sobre a história da Geometria mostra, de forma clara e divertida, como ela faz parte de nosso cotidiano e influencia as mais diversas áreas, como arte e música.

PRECIOSO, J. C.; PEDROSO, H. A. História do número *e*: gênese e aplicações. *Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco*, Uberlândia, v. 1, n. 1, p. 31-44, jun. 2013. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/13913. Acesso em: 28 fev. 2024.
O texto apresenta alguns aspectos fundamentais da história do número *e*, assim como sua aplicação em vários ramos da ciência.

SINGH, S. *O último teorema de Fermat*. Rio de Janeiro: Record, 1998.
O livro conta a história do teorema que, durante 358 anos, não foi demonstrado. Em 1993, a prova foi apresentada à comunidade científica pelo professor Andrew Wiles, da Universidade de Princeton.

TOMEI, C. *Euclides*: a conquista do espaço. São Paulo: Odysseus, 2003.
Esse livro é uma reflexão sobre a vida de um dos matemáticos mais importantes da história, que contribuiu amplamente para o desenvolvimento de várias áreas do conhecimento nos últimos dois mil anos.

VAIANO, B. Todos os mapas-múndi estão (mais ou menos) errados. *Superinteressante*, São Paulo, 24 ago. 2017. Disponível em: https://super.abril.com.br/historia/todos-os-mapas-mundi-estao-errados/. Acesso em: 28 fev. 2024.
O texto explica um fato matemático curioso: a impossibilidade de representar uma esfera, sem deformações, em um plano. Apresenta diversos tipos de mapa criados para contornar esse problema, que variam de acordo com a finalidade.

Referências complementares

BRITTO, V. Em 2022, mercado de trabalho e Auxílio Brasil permitem recuperação dos rendimentos. *Agência IBGE*, [Brasília, DF], 11 maio 2023. Disponível em: https://cod.ibge.gov.br/5PIR6. Acesso em: 10 jun. 2024.
Artigo do IBGE que trata da evolução dos índices de rendimento mensal no Brasil ao longo de 2022.

CARZOLA, I. *et al.* (org). *Estatística para os anos iniciais do Ensino Fundamental*. Brasília, DF: SBEM, 2017. v. 9. *E-book*. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ebook_sbem.pdf. Acesso em: 22 abr. 2024.
Apesar de o título referir-se aos Anos Iniciais, o livro traz um panorama do assunto, com exemplos de uma pesquisa estatística envolvendo um ciclo investigativo que pode servir de base para os estudos de qualquer público.

FIGUEIREDO, D. *et al*. *Covid-19 em dados*: Brasil em perspectiva comparada. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 10 abr. 2020. Disponível em: https://bit.ly/3x2T6U5. Acesso em: 20 mar. 2024.
Os gráficos dessa publicação trazem informações a respeito dos casos de covid-19 ao longo dos quatro primeiros meses de 2020.

IBGE divulga rendimento domiciliar *per capita* 2023 para Brasil e unidades da Federação. *Agência IBGE*, [Brasília, DF], 28 fev. 2024. Editoria de Estatísticas Sociais. Disponível em: https://cod.ibge.gov.br/5WIEP. Acesso em: 6 jun. 2024.
O artigo apresenta os resultados da Pnad contínua sobre os rendimentos domiciliares *per capita* de 2023 para o Brasil e suas unidades federativas.

LIVIO, M. *Deus é matemático?* Rio de Janeiro: Record, 2010.
Nesse livro, além de explicar suas ideias a respeito da eficiência da Matemática em formular leis da natureza, o autor faz uma relação curiosa entre a mente humana e o mundo científico.

PORFÍRIO, F. Cultura africana. *Brasil Escola*, [*s. l.*], c2024. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/cultura/cultura-africana.htm. Acesso em: 9 maio 2024.
Artigo que apresenta diversos aspectos da cultura africana.

ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
A autora tem uma visão crítica a respeito de como a história da Matemática vem sendo contada. Visando acabar com o mito de que essa disciplina é acessível apenas aos gênios, a autora, ao abordar o desenvolvimento dos sistemas matemáticos, apresentada diferentes soluções para problemas semelhantes.

Sites

SCRATCH. [Massachusetts]: Lifelong Kindergarden Group: MIT Media Lab, [20--]. Disponível em: https://scratch.mit.edu/. Acesso em: 22 abr. 2024.
Nesse *site*, são disponibilizados diversos recursos para ajudar os jovens a pensar e trabalhar de forma criativa e colaborativa.

INTERAÇÃO

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

MATEMÁTICA ▸ APRENDENDO E RESOLVENDO PROBLEMAS

ADILSON LONGEN

- Doutor em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Mestre em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Professor do Ensino Médio

LUCIANA TENUTA DE FREITAS (COORD.)

- Mestre em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-Minas)
- Bacharel e licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
- Assessora pedagógica da Educação Básica, com atuação na formação de professores

1ª edição
São Paulo, 2024

Editora do Brasil

"Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada"

VOLUME 2

ENSINO MÉDIO – 2º ANO
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – MATEMÁTICA

CARA PROFESSORA, CARO PROFESSOR,

Para que as aprendizagens escolares capacitem os jovens a atuar, com competência e responsabilidade, na sociedade em que vivem, é importante que se apropriem da Matemática como uma das diversas formas de leitura da realidade e utilizem-na como ferramenta que os auxilie a intervir, de forma consciente e responsável, nessa realidade.

Com esse objetivo, apresentamos a você esta obra, que tem o estudante como centro do processo de aprendizagem, em uma proposta interativa e aberta de ensino de Matemática. Os diversos tipos de atividade propiciam aos estudantes a discussão de ideias, o desenvolvimento de hipóteses, a argumentação, a elaboração de problemas, o desenvolvimento de projetos, entre outros, enquanto desenvolvem tanto as competências gerais como as específicas de Matemática. Dessa forma, a sala de aula passa a ser um espaço vivo, no qual as ideias matemáticas são discutidas, confrontadas, validadas ou refutadas o tempo todo.

Cabe a você ser o(a) organizador(a)/mediador(a) desse processo estimulando as discussões, promovendo debates, orientando as reformulações, valorizando as produções e o posicionamento dos estudantes, ao mesmo tempo que contribui para o desenvolvimento integral deles.

Este Manual foi elaborado visando orientá-lo nesse processo. Esperamos que você possa aproveitar nossas sugestões de forma criativa, desenvolvendo e ampliando o trabalho de acordo com suas possibilidades e com a realidade em que está inserido(a).

Os autores

SUMÁRIO

A etapa do Ensino Médio na BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) está estruturada com base em dez competências gerais que devem ser desenvolvidas pelos estudantes desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

Competências gerais

Competências gerais

1 Conhecimento
Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2 Pensamento científico, crítico e criativo
Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3 Repertório cultural
Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4 Comunicação
Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5 Cultura digital
Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6 Trabalho e projeto de vida
Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7 Argumentação
Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8 Autoconhecimento e autocuidado
Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9 Empatia e colaboração
Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10 Responsabilidade e cidadania
Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 9. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

As quatro áreas de conhecimento estabelecidas para o Ensino Médio estão definidas por meio de competências específicas que se articulam às competências gerais. No caso da área de Matemática e suas Tecnologias são cinco competências específicas, e cada uma delas se desdobra em um conjunto de habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo dos três anos do Ensino Médio.

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 531. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

Distribuídas nessas cinco competências específicas encontram-se 43 habilidades sem uma ordem preestabelecida, porque, diferentemente do Ensino Fundamental, seus códigos não indicam uma progressão ano a ano, o que favorece a flexibilidade dos currículos e das propostas pedagógicas das escolas.

O desenvolvimento de competências e habilidades

Por meio do trabalho proposto nesta coleção, organizada em 3 volumes, pretendemos que os estudantes desenvolvam todas as competências gerais e específicas, além das habilidades de Matemática e suas Tecnologias, previstas na BNCC.

As competências gerais dizem respeito à formação integral dos estudantes e estão relacionadas tanto a seu desenvolvimento cognitivo quanto ao socioemocional.

Nesta obra, as competências gerais são desenvolvidas por meio dos diversos tipos de atividades propostos. A **competência geral 2**, por exemplo, que se refere ao exercício da curiosidade intelectual por meio da investigação, da análise crítica, da imaginação e da criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas, é mobilizada em vários momentos, uma vez que a resolução de problemas e a investigação matemática, que serão detalhadas a seguir, estarão presentes ao longo de todo o trabalho.

Ao resolver as atividades em grupos ou em duplas discutindo ideias, argumentando com base em fatos e informações confiáveis e confrontando diferentes pontos de vista, os estudantes mobilizam a **competência geral 7**. Nesse processo desenvolvem também a **competência geral 4**, ao usar diferentes formas de linguagem para se expressar. As atividades em grupos, por terem a capacidade de gerar conflitos, são uma oportunidade para o exercício democrático e a criação de consensos. Esse exercício favorece a construção de diálogos e o desenvolvimento de atitudes e valores como empatia, respeito e cooperação que são pressupostos da **competência geral 9**. Na parte específica deste manual estão apontadas e exemplificadas as competências gerais trabalhadas em cada volume, capítulo por capítulo.

Já as habilidades se relacionam ao "saber fazer". Elas são associadas a verbos como identificar, planejar, analisar, investigar, interpretar, construir, entre outros. Essas habilidades, associadas aos demais conhecimentos que se aprendem ao desenvolvê-las, como as próprias competências especificas da área de Matemática e as competências gerais, formam o conjunto daquilo que se espera do estudante e de seu desenvolvimento ao final do Ensino Médio.

De modo resumido, as habilidades que integram a **competência específica 1** estão relacionadas aos contextos externos à Matemática. Na **competência específica 2** estão as habilidades que se relacionam ao contexto social. A **competência específica 3** envolve habilidades que se referem à resolução de problemas e à modelagem matemática, e na **competência específica 4** estão agrupadas aquelas que dizem respeito a diferentes representações para um mesmo objeto matemático. E, por fim, na **competência específica 5** encontram-se as habilidades que envolvem um tratamento mais formal da Matemática. Assim agrupadas, habilidades que se referem a um mesmo conteúdo podem ser associadas a diferentes competências específicas. Esse é o caso, por exemplo, do estudo das probabilidades, que está ligado às competências específicas 1, 3 e 5 por meio das habilidades **EM13MAT106**, **EM13MAT311**, **EM13MAT312** e **EM13MAT511**.

Na parte específica deste manual estão indicadas as habilidades de Matemática trabalhadas em cada capítulo, com os respectivos exemplos.

Além disso, as possibilidades de trabalho interdisciplinar que ocorrem ao longo dos capítulos, nas mais diversas seções, e também na parte **Conexões e Projetos** que se encontra ao final de cada volume, contribuem para o desenvolvimento de competências de outras áreas de conhecimento, em especial da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Pressupostos teórico-metodológicos

A Matemática tem diferentes aplicações na vida das pessoas e estabelece relações com diversas áreas. É papel da escola mostrar essas relações, que podem ou não ser evidentes. Além disso, o trabalho com a Matemática deve levar os jovens a compreender a origem histórica de alguns conceitos, verificar suas aplicações nas diferentes expressões da área de Linguagens, nas Ciências Humanas e Sociais e, em especial, nas Ciências da Natureza, no campo da Biologia, da Física e da Química; enfim, perceber que a Matemática marca sua presença na vida das pessoas.

Constatar essa presença, fazer bom uso dela e aprender Matemática de maneira reflexiva, investigativa e valorizando os conhecimentos prévios é um caminho que auxilia o estudante tanto dentro quanto fora da escola.

O letramento matemático

De acordo com o que propõe a BNCC, o desenvolvimento das habilidades e competências no Ensino Médio está articulado às "aprendizagens essenciais estabelecidas para o Ensino Fundamental" devendo consolidá-las, ampliá-las e aprofundá-las.

Para tanto devemos observar que:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição) (Brasil, 2018, p. 266).

E ainda que:

> A área de Matemática, no **Ensino Fundamental**, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No **Ensino Médio**, na área de **Matemática e suas Tecnologias**, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (Brasil, 2018, p. 471).

Visando dar continuidade à proposta de desenvolvimento do letramento matemático do Ensino Fundamental, é essencial promover no Ensino Médio a consolidação, o aprofundamento e a ampliação do trabalho com as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, com foco na formulação e resolução de problemas em contextos variados, fazendo uso das ferramentas matemáticas e dos conhecimentos adquiridos previamente.

O documento afirma também que:

> Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior (Brasil, 2018, p. 528).

Assim, fica evidente o fato de que saber matemática não se resume ao estudo isolado de conteúdos específicos ou aos procedimentos de cálculo, mas está ligado principalmente ao desenvolvimento do letramento matemático. Isso significa ser capaz de usar a matemática para argumentar claramente sobre determinada situação, para defender seus pontos de vista, para escolher o modelo matemático mais adequado que resolve um problema, ter autonomia para raciocinar sobre caminhos a serem escolhidos, priorizar questões a serem resolvidas, comunicar e ler com propriedade as informações que lhe são apresentadas. A matemática tecnicista, que perdurou na escola por muito tempo, hoje dá lugar à valorização do pensamento matemático e do raciocínio sobre os fatos, sejam eles relacionados ao cotidiano do estudante ou a descobertas que ampliarão seu repertório.

Ao se apresentar dessa forma, a BNCC estimula você, professor, e os estudantes a buscar maneiras diferentes de ensinar e aprender Matemática, promovendo o protagonismo, a troca de ideias e o compartilhamento de estratégias, além da autonomia dos estudantes para avançar em suas aprendizagens escolhendo estratégias próprias de resolução dos problemas que encontrarem.

Sob essa perspectiva, os objetivos que fundamentam a proposta didático-pedagógica desta coleção, a seguir explicitada, visam ao letramento matemático e ao desenvolvimento da autonomia e do protagonismo dos estudantes por meio da resolução de problemas e da investigação matemática.

A resolução de problemas e a investigação matemática

Resolver problemas é uma prática diária, cotidiana e envolve os mais diversos tipos de situação. Assim como Sternberg (2001), partimos do pressuposto de que problema é toda situação inédita que leva o estudante a pensar e utilizar ferramentas mentais conhecidas por ele para se chegar a uma solução.

Para resolver um problema é necessário levantar hipóteses, discutir possibilidades, criar estratégias com base em conhecimentos prévios identificados visando atingir novos objetivos. Por mais simples que se configure, todo problema desafia quem o enfrenta, fomentando o gosto pela descoberta de formas para resolvê-lo. Ao sentir-se desafiado, o estudante desprende um esforço cognitivo que lhe possibilita ir além. Junto do trabalho de resolução de problemas, a investigação matemática estimula a busca por soluções criativas, inovadoras ou não, para situações que façam parte do cotidiano dos estudantes, dentro ou fora da escola.

Quando analisamos o trabalho em sala de aula sob o viés da resolução de problemas, entendemos que o desenvolvimento do pensamento matemático sempre parte de um problema e este é o meio pelo qual a Matemática será apreendida. Ao longo do processo histórico de constituição dos conceitos e conhecimentos matemáticos, o avanço dos estudos e as descobertas foram ocasionados pela necessidade de solucionar problemas nos mais variados contextos. Para resolvê-los, o processo de investigação ganhou força e se configurou como um caminho importante para se chegar a conclusões sobre temas matemáticos. George Polya (1978) resume assim as etapas de resolução de um problema:

- Compreender o problema.
- Destacar informações e dados importantes do enunciado para sua resolução.
- Elaborar um plano.
- Executar o plano
- Conferir resultados e estabelecer nova estratégia, se necessário, até chegar a uma solução aceitável.

Ao longo desta obra, além do trabalho fundamentado na resolução de problemas, várias atividades tiveram como base a proposta da investigação matemática, em que os estudantes buscam a solução para situações que podem envolver um ou mais problemas. No trabalho com investigação matemática, o caminho a ser percorrido é mais importante do que a meta final. Nesse sentido, cabe a você acompanhar o estudante ao longo de todo o processo.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira:

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2005, p. 23).

O seu papel, professor, tanto no campo da resolução de problemas quanto nas investigações matemáticas é saber dosar e fazer as perguntas certas nos momentos certos, sem dar respostas, criando um movimento de construção do espírito investigativo, com a intenção de levar os estudantes a alcançar conquistas maiores pelos próprios meios, promovendo, assim, a autonomia e a busca pelo aprendizado.

Os processos de investigação matemática estão estreitamente relacionados ao desenvolvimento da **competência específica 5** da área de Matemática e suas tecnologias proposta na BNCC para o Ensino Médio:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 531).

A proposta desta obra é recriada a todo momento, de acordo com os caminhos traçados por você e pelo próprio estudante, por isso é essencial que a criação de processos investigativos aconteça de maneira eficiente, visando manter a atenção e a curiosidade do estudante de forma efetiva, de acordo com o que você propõe e pelas descobertas próprias e da turma.

Diante do que foi exposto anteriormente cabe a você, professor, com base na realidade de sua turma e das possibilidades apresentadas nas atividades propostas em cada capítulo desta obra, elaborar seu planejamento alinhado ao Projeto Político Pedagógico da escola e ao currículo estadual, visando uma formação matemática consistente, que possibilite aos jovens usar com propriedade seus conhecimentos matemáticos pela vida afora.

O papel do erro

Os estudantes devem desenvolver o hábito de encarar suas dificuldades e entender que os erros são parte integrante do processo de aprendizagem. O próprio processo de investigação matemática favorece essa percepção: nele o estudante constrói, reconstrói, avalia e reavalia a situação quantas vezes for necessário. Ao explicar os próprios erros, os jovens se sentem desafiados a rever o percurso adotado, o que se torna mais uma oportunidade de aprendizagem.

Além disso, somente com a prática o estudante aprende a lidar naturalmente com o erro, com a confiança de que é possível explorar as ideias matemáticas de diferentes formas, por diferentes caminhos, partilhando com seus pares e discutindo estratégias de resolução para os problemas propostos. Para isso, é preciso que ele se sinta à vontade para dialogar com você e com os colegas a respeito das ideias matemáticas que forem surgindo, sabendo apresentar suas contribuições com argumentos cada vez mais consistentes, além de saber ouvir e mudar de ideia quando for o caso.

Essas oportunidades estarão presentes ao longo de toda a coleção por meio de questões para serem discutidas em duplas ou em pequenos grupos, além do desenvolvimento de projetos.

O trabalho em grupo

Na perspectiva da resolução de problemas e da investigação matemática que orientam o trabalho desta coleção, a realização das atividades em duplas ou em pequenos grupos é fundamental. Esse tipo de atividade exige uma organização da turma que difere do modelo enfileirado, em que o professor é o protagonista de todo o processo.

Em seu livro *Planejando o trabalho em grupo*, Cohen e Lotan (2017) defendem que, quando você, professor, propõe uma atividade em grupo e permite que os estudantes se esforcem sozinhos, inclusive cometendo erros, delega autoridade a eles e essa autoridade é a primeira característica-chave do trabalho em grupo.

A construção de um ambiente propício a esse tipo de trabalho, inclusive em relação à forma de constituição dos grupos, pode ocorrer com diálogo sobre os combinados que envolvem a relação entre professor e estudante e entre os próprios estudantes. Além do estímulo a serem autônomos na tomada de decisões, é seu papel fazer com que a turma coloque em jogo as decisões tomadas, vivenciando-as.

De acordo com as autoras, a segunda característica-chave do trabalho em grupo é que gere aprendizagens colaborativas e que a construção dos conhecimentos e soluções para os problemas sejam realizados coletivamente, e isso vai depender de que a atividade seja pensada/planejada com essa intenção.

A terceira característica-chave está relacionada, portanto, à natureza das atividades propostas.

> Se o professor quer que os alunos se comuniquem de maneira autônoma e produtiva, eles vão precisar ter algo a respeito do que irão conversar. Se o professor quer que os alunos se engajem em conversas substantivas e de alta qualidade, a atividade precisa estabelecer problemas complexos ou dilemas, ter diferentes soluções possíveis e contar com a criatividade (Cohen; Lotan, 2017, p. 2-3).

Nessa perspectiva, trabalhando em duplas ou em pequenos grupos por meio de atividades diversificadas, que envolvem discussões com os colegas, o estudante tem a oportunidade de levantar hipóteses, argumentar, defender suas ideias, mudar de opinião ao ouvir a argumentação do colega e, assim, desenvolver a empatia e o respeito pelo outro, o que contribui para sua formação humana. Esse exercício de respeito às opiniões dos outros, da valorização das diversas ideias apresentadas, com reflexão constante sobre o que o outro pensa, sem pré-julgamentos, desenvolve a escuta ativa e as **competências gerais 4**, **7** e **9** da BNCC relacionadas ao uso de diferentes linguagens, à argumentação e ao exercício da empatia, do diálogo, da resolução de conflitos e da cooperação, respectivamente.

Ao estudante que desenvolve um trabalho em grupo é dada a oportunidade de reconhecer as próprias emoções frente a opiniões contrárias às suas, ao ser questionado por seu posicionamento. Conflitos de opiniões são constantes na vida em sociedade e o trabalho em grupo se configura como uma experiência única no ambiente escolar, observado sob essa perspectiva, e promove o desenvolvimento integral do estudante.

Quando professores e estudantes compreendem a potencialidade de aprendizagem do trabalho em grupo, e incorporam a cultura desse tipo de trabalho, os resultados se efetivam em um ambiente envolto em compreensão, soluções de conflitos, com orientações claras, perguntas pertinentes, bom convívio, respeito e com parceria entre todos os envolvidos no processo.

Uma sugestão para esse tipo de trabalho, inclusive envolvendo turmas com número grande de estudantes, é constituir grupos permanentes para determinado período, um mês por exemplo. Dessa forma, esse mesmo grupo se reúne sempre que forem propostas atividades coletivas. Entre as vantagens desse tipo de organização está a facilidade de você ficar mais próximo dos estudantes para observar suas necessidades e fazer intervenções em relação a conhecimentos, habilidades, atitudes e valores. Seu olhar para o grupo como um todo possibilita a observação mais aguçada de cada estudante.

Nesse tipo de organização envolvendo grupos permanentes, as possibilidades de intervenção que atendam às necessidades individuais dos estudantes também se intensificam. Por exemplo, enquanto todos os grupos desenvolvem determinada atividade, você pode pedir a um ou mais estudantes que tenham necessidades comuns de aprendizagem, que se reúnam com você ou com estudantes que não apresentaram a mesma dificuldade, para que haja um atendimento mais específico. A reorganização dos grupos periodicamente, inclusive com a participação dos estudantes para definir critérios de escolha dos integrantes dos novos grupos, é fundamental para que desenvolvam competências ligadas à incorporação de direitos e responsabilidades, ponderação sobre consequências, participação social e liderança, entre outros.

O trabalho em grupo, incorporado como cultura, transforma consideravelmente os indivíduos de maneira positiva porque proporciona verdadeiro desenvolvimento pessoal e coletivo. A escola tem a oportunidade de tornar esses momentos propícios para a construção de uma sociedade mais empática, de respeito entre todos, a partir do momento em que os estudantes conseguem fazer um paralelo entre suas práticas ao longo do processo de aprendizagem e as atividades cotidianas.

Nesse modelo de ensino, o professor torna-se coadjuvante nos processos de ensino e aprendizagem, permitindo aos estudantes o protagonismo de seu aprendizado.

O pensamento computacional

Diferentemente do que se possa imaginar, o pensamento computacional não está necessariamente associado à programação de computadores, ao uso de tecnologias ou à comunicação pela internet.

Veja no esquema a seguir o que se entende por cultura digital, tecnologia digital e pensamento computacional nas etapas da Educação Básica.

Acervo editora

O pensamento computacional se relaciona aos processos de pensamento utilizados para modelar problemas e resolvê-los de forma eficiente, determinando soluções genéricas para classes inteiras de problemas e pode ser decomposto em quatro etapas (Wing, 2021):

- decomposição – divisão de um problema em partes menores;
- reconhecimento de padrões – identificação de um ou mais padrões que geram o problema;
- abstração – seleção dos dados essenciais de um problema;
- algoritmo – estabelecimento de uma sequência ou ordem em que o problema será resolvido.

De acordo com a BNCC (Brasil, 2018, p. 474), o pensamento computacional “envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos”.

Assim, o trabalho voltado para a autonomia do sujeito, por meio da investigação matemática e da resolução de problemas, conforme proposto nesta coleção, contém elementos essenciais para o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes.

Avaliação

Avaliar é uma ação cognitiva de que dispomos para tomar decisões e que nos orienta se estamos nos aproximando ou nos distanciando dos objetivos que queremos alcançar. A avaliação é um compromisso coletivo que a escola deve assumir para a garantia do direito à aprendizagem e à formação integral das juventudes.

Mudanças na concepção do ensino e da aprendizagem e na abordagem dos conteúdos implicam repensar as finalidades da avaliação, o que e como se avalia, em um trabalho cotidiano que pressupõe uma variedade de situações de aprendizagem, inclusive coletivas.

Quando se trabalha na perspectiva do desenvolvimento de competências e habilidades, o conceito de avaliação se amplia e deve levar em conta possibilidades de avaliar aprendizagens que vão além dos tópicos de conteúdo específico. Várias competências e habilidades de Matemática dizem respeito à investigação, à discussão de ideias, à capacidade de argumentação que demandam outros tipos de avaliação além das tradicionais **avaliações somativas**, que visam medir o desempenho dos estudantes em relação aos conteúdos, por meio do instrumento prova ou exame, ao final de um ciclo (bimestral, trimestral, semestral).

O compromisso com a formação integral dos estudantes e com o desenvolvimento de competências torna clara a superação das tradicionais **avaliações somativas** e **comparativas** (a referência é a comparação com base no desempenho dos outros estudantes) como norma escolar, para uma perspectiva da diversidade nas avaliações. Isso significa a adoção de modelos e instrumentos diversos de avaliação da aprendizagem que dê conta da complexidade e diversidade dos sujeitos e de como eles aprendem. A **avaliação ipsativa**, por exemplo, se refere ao estudante, que é comparado consigo mesmo, levando em conta aspectos como o esforço, o contexto em que o trabalho se desenvolve e os seus progressos.

Ao discutir a avaliação da aprendizagem, Andrade (2021) traduz diversas abordagens que a escola adota ou pode passar a adotar em suas práticas avaliativas de acordo com o foco, o propósito, a referência de comparação e os atores que protagonizam a ação de avaliar.

Abordagem	Foco	Propósito	Referência de comparação	Figura-chave
Avaliação **da** aprendizagem	Resultados somativos Metáfora: é como uma foto	Juízos sobre a posição, a promoção e as credenciais de cada estudante	Outros estudantes. Padrões ou expectativas de aprendizagem do currículo e de avaliações externas (ex.: SAEB, PISA)	Professor
Avaliação **para** aprendizagem	Processo de aprendizagem Metáfora: é como um filme	Informações para ajustes nas decisões, instruções didáticas e engajamento Devolutivas pedagógicas	Padrões ou expectativas de aprendizagem do currículo. Devolutivas do professor e entre pares	Professor, turma ou grupos de estudantes
Avaliação **como** aprendizagem		Automonitoramento, autocorreção e autoajuste	Objetivos pessoais e padrões do currículo	Estudante

Fonte: ANDRADE, J. P. *Aprendizagens visíveis*: experiências teórico-práticas em sala de aula. 1. ed. São Paulo: Panda Educação, 2021, p. 209.

A avaliação **da** aprendizagem, abordagem mais comum nas nossas escolas, está ligada à **avaliação somativa** e a critérios que se definem previamente, ou seja, as aprendizagens dos estudantes são analisadas em termos de critérios definidos.

A avaliação **para** aprendizagem nos diz muito sobre o modelo de **avaliação formativa**, que visa acompanhar o percurso de aprendizagem do estudante, gerando oportunidades de intervenção e retomadas durante a caminhada formativa. Esse tipo de avaliação propicia que tanto o professor como os estudantes possam identificar as necessidades de aprendizagem ao longo do processo e não só ao final dele.

Avaliação **como** aprendizagem dialoga com o que conhecemos por **autoavaliação**, que deve ser estimulada não somente do ponto de vista de o estudante reconhecer seus acertos e erros e "recalcular" a rota da aprendizagem, mas de tornar o próprio ato de avaliar objeto e objetivo de sua aprendizagem, contribuindo para o desenvolvimento de sua autonomia e confiança para vivenciar e enfrentar situações diversas dentro e fora da escola.

É importante ressaltar ainda a importância das **avaliações diagnósticas** que, independentemente dos tipos de instrumentos utilizados, devem auxiliá-lo na identificação do ponto de partida dos processos de ensino tendo como referência as aprendizagens ocorridas nos processos anteriores.

Para Frade, Val e Bregunci, esse tipo de avaliação:

> [...] é entendida também como a avaliação que ocorre ao longo dos processos de ensino e aprendizagem, visando a sua regulação. Ou seja, a avaliação diagnóstica pode ser entendida como aquela que verifica se o aluno aprendeu aquilo que lhe foi ensinado, a fim de identificar dificuldades de aprendizagem a serem superadas (Frade; Val; Bregunci, 2014, p. 39).

Ainda de acordo com as autoras, seja qual for a interpretação, a avaliação diagnóstica é parte de um percurso de aprendizagem cuja finalidade é delimitar pontos de partida e/ou de retomada para o ensino.

Cabe a você, professor, na elaboração do planejamento de uma etapa de trabalho, estabelecer momentos de avaliação prevendo, inclusive, um número de aulas para possíveis retomadas, de acordo com as necessidades de aprendizagem dos estudantes, evidenciadas nas avaliações.

Essas distintas abordagens podem e devem assumir um conjunto diverso de situações de aprendizagem e instrumentos de avaliação que sejam capazes de produzir evidências das aprendizagens que se espera que os estudantes construam.

Compartilhamos aqui alguns instrumentos e sua relação com as abordagens discutidas, condizentes com as características desta obra didática da área de conhecimento da Matemática, tanto de caráter formativo quanto de preparação para exames de larga escala.

- **Relatórios escritos**: contemplam o desenvolvimento descritivo, analítico e/ou explicativo de um processo criativo, investigativo e/ou de intervenção sociocultural. Ao longo dos capítulos de todos os volumes os estudantes produzem textos, nas mais diversas atividades, para comunicar ideias, fazer sínteses e expressar conclusões. Além disso, a última parte de cada volume desta obra, intitulada **Conexões & Projetos**, também contempla a produção de relatórios que expressam evidências das aprendizagens esperadas. Este tipo de relatório pode ser avaliado na perspectiva formativa, isto é, o docente acompanha sua produção ao longo do processo investigativo e apoia os estudantes na autorregulação das aprendizagens e no aprimoramento do relatório.
- **Observação informal** dos estudantes enquanto realizam a tarefa e apresentam suas conclusões à turma é parte cotidiana da avaliação formativa no processo de aprendizagem. Nesses momentos podem ser observados aspectos como o modo de mobilizar os conhecimentos matemáticos formais e informais, a maneira como entendem o processo investigativo e qual é o papel de cada estudante no desenvolvimento da atividade proposta. Cabe a você, quando oportuno, fazer perguntas e registros que evidenciem como os estudantes estão pensando, tornando os conhecimentos e as aprendizagens visíveis.
- **Apresentações orais**, nas quais os estudantes têm a oportunidade de apresentar a você e aos colegas os resultados de suas investigações. Esses momentos se constituem em oportunidade tanto para você avaliá-los quanto para o aprendizado dos estudantes, uma vez que possibilitam a eles desenvolverem processos de comunicação e de argumentação. As apresentações orais podem ser parte estratégica também em situações de aprendizagem que têm como objetivos avaliativos o levantamento de conhecimentos prévios dos estudantes (**avaliação diagnóstica**) que estão mobilizados na obra didática, sobretudo, na seção **Para pensar e discutir**. Além disso, na parte intitulada **Conexões e projetos**, os estudantes fazem a apresentação oral dos trabalhos desenvolvidos.
- **Painel de soluções** é uma estratégia metodológica ativa e colaborativa em que vários estudantes fazem registros, em um painel físico ou virtual, da resolução de problemas matemáticos. Essa estratégia possibilita que o professor avalie o raciocínio que utilizam na resolução dos problemas, avaliando não só o resultado final, mas o processo matemático que o estudante realiza para chegar em um resultado correto ou incorreto. O painel de soluções oportuniza também que os estudantes aprendam uns com os outros, autorregulando suas aprendizagens e ampliando seu repertório ao conhecer diversos caminhos e estratégias para chegar a um resultado correto ou confiável matematicamente.
- **Rubrica:** trata-se de um guia de avaliação baseado em critérios que consistem em uma gradação e descrições das características para cada ponto dessa gradação, ou seja, descreve graus de qualidade, proficiência ou compreensão ao longo de um *continuum*. Esse instrumento favorece a avaliação qualitativa do que foi realizado pelos estudantes, tornando palpável o que seria subjetivo. A rubrica é também um excelente instrumento de autoavaliação e coavaliação – quando grupos de estudantes avaliam o trabalho ou a apresentação oral de outros grupos de estudantes. Na produção de projetos pelos estudantes, mobilizada na parte **Conexões e projetos**, o instrumento rubrica é uma oportunidade significativa para a avaliação da aprendizagem dos e com os estudantes.

- **Prova em duplas:** nesse tipo de avaliação, o estudante tem oportunidade de discutir ideias, exercitar a argumentação, aprender a trabalhar de forma colaborativa e aprimorar as relações sociais. Para favorecer o desenvolvimento dessas habilidades, é fundamental que as questões propostas nesse tipo de prova propiciem o debate entre os estudantes.
- **Prova individual:** esse tipo de instrumento é um velho conhecido da Matemática, mas que pode assumir outro significado enquanto prática avaliativa, que favoreça a aprendizagem dos estudantes e a leitura avaliativa que o professor pode fazer dessas aprendizagens. Para isso, as questões devem ser planejadas e elaboradas com a intenção de levar o estudante a refletir e a estabelecer relações e não simplesmente repetir informações. O instrumento deve dar oportunidade para que o estudante explicite o seu raciocínio matemático e não apenas assinale as alternativas corretas. Após a realização da prova deve ser dada oportunidade para que os estudantes revejam os caminhos adotados para a resolução das questões, identifiquem os erros e acertos e pensem, com a mediação do professor, como poderiam propor outros caminhos para solucionar os problemas. O *feedback* individual para os estudantes que estejam com mais dificuldades é uma estratégia relevante a ser adotada após uma prova, pois fortalece a criação de vínculo e a autoconfiança do estudante.
- **Provas tipo teste:** de tempos em tempos podem ser aplicados testes como preparação para exames de vestibulares, Enem e avaliações de larga escala. Entretanto, é importante lembrar que não é o treinamento sistemático nesse tipo de prova que vai garantir o sucesso dos estudantes. Mais preparados estarão para se sair bem em qualquer tipo de prova aqueles que desenvolverem um pensamento matemático articulado e que souberem encontrar estratégias para resolver qualquer tipo de problema.

Para a utilização de qualquer um desses instrumentos, deve-se definir claramente os objetivos que orientam sua aplicação. Vasconcellos (2003) aponta questões fundamentais que servem de reflexão no planejamento de instrumentos de avaliação: Como os instrumentos são preparados? Como são aplicados? Como são analisados/corrigidos? Como os resultados são comunicados? E o mais importante, o que vai se fazer com os resultados?

As diferentes culturas juvenis

De acordo com Correa, Alves e Maia (2014) a expressão "culturas juvenis" se refere:

> [...] a todos os elementos que demarcam uma identidade própria desse grupo, por exemplo, a linguagem, as roupas e acessórios, os estilos musicais, os aparelhos tecnológicos, os espaços e modos de lazer e sociabilidade (Correa; Alves; Maia, 2014, p. 17-18).

As autoras defendem que:

> O uso de tais elementos dentro da escola para desenvolver o currículo pode e deve ser considerado, uma vez que pode aproximar a escola dos jovens, criando situações de diálogo entre a cultura escolar e as culturas juvenis (Correa; Alves; Maia, 2014, p. 18).

Quanto aos procedimentos para se trabalhar as culturas juvenis, as autoras reconhecem as práticas sociais com música, dança, grafite, esportes e tecnologias como importantes mediadores da construção de vivências das juventudes. Segundo elas,

> Uma *pedagogia da juventude* seria, assim, um conjunto de práticas educativas pensadas para jovens e com a participação dos jovens, considerando-se seus desejos, anseios, sonhos, projetos e necessidades presentes e futuras (Correa; Alves; Maia, 2014, p. 14).

Sendo assim, é importante que você esteja atento às características de sua turma, gostos, ambientes que frequentam, músicas que escutam, se constituem um grupo mais homogêneo ou mais heterogêneo, de modo que possa trazer as possibilidades de aprendizagem ligadas aos interesses desses jovens.

Além disso, esta coleção apresenta, na parte **Conexões e projetos**, várias oportunidades de se trabalhar, por meio de projetos, as competências gerais e específicas, além das habilidades ligadas às diversas unidades temáticas. Os projetos podem e devem ser adaptados, com a participação da turma, da forma que melhor atendam aos interesses dos jovens e às possibilidades apresentadas pela sua realidade.

No Observatório da Juventude da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), disponível em: https://observatoriodajuventude.ufmg.br/observatorio-da-juventude-2/, podem ser encontradas várias sugestões para o trabalho com as culturas juvenis.

A inclusão dos estudantes com deficiência

De acordo com Belisário (2005), quando se fala em inclusão, três aspectos precisam ser observados:

- **Formação continuada de professores**: oferecer programas de formação continuada para os professores, capacitando-os a lidar com as necessidades específicas dos alunos com deficiência. Isso inclui cursos e *workshops* sobre práticas pedagógicas inclusivas e estratégias de ensino adaptadas.
- **Adaptação do ambiente escolar**: adaptar a infraestrutura das escolas para torná-las acessíveis a todos os alunos. Isso envolve a construção de rampas, instalação de elevadores, sinalização tátil e auditiva e a criação de salas com recursos multifuncionais equipadas com materiais específicos para atender às necessidades dos alunos com deficiência.

- **Desenvolvimento de currículos flexíveis**: elaborar currículos flexíveis que permitam a personalização do ensino de acordo com as necessidades e habilidades de cada aluno. Isso inclui a adaptação de materiais didáticos, atividades diferenciadas e a avaliação contínua do progresso dos alunos.

Visando desenvolver currículos e práticas de ensino que sejam acessíveis para todos os estudantes, independentemente de suas habilidades, necessidades ou estilos de aprendizagem, o Desenho Universal para a Aprendizagem (DUA), baseia-se nos seguintes princípios:

- Fornecer várias formas de apresentar a informação para atender às diversas formas com que os estudantes percebem e compreendem os conteúdos que estão sendo trabalhados. Para isso, podem ser usados textos, áudios, vídeos, gráficos, infográficos, diagramas e outros recursos visuais.
- Oferecer diferentes maneiras para que os estudantes demonstrem o que sabem e o que aprenderam. Isso reconhece que os jovens têm preferências e habilidades variadas para expressar o que sabem. Para mostrar o que aprenderam sobre determinado assunto, eles podem produzir um texto, elaborar uma apresentação, gravar um *podcast* ou desenvolver um projeto artístico, por exemplo.
- Proporcionar várias maneiras de motivar e envolver os estudantes, considerando seus interesses, níveis de habilidade e preferências para manter seu envolvimento. Em uma aula de Matemática, por exemplo, o professor pode usar jogos, desafios de resolução de problemas e projetos práticos.

A organização da obra

O Manual do Professor

É formado por esta parte geral e uma parte específica, de acordo com cada volume.

Parte geral	Parte específica
Essa primeira parte consta do Manual do Professor em todos os volumes da coleção.	A parte específica de cada volume está assim distribuída: • Cronograma • Orientações específicas por capítulo

Orientações por capítulo	Conexões & projetos
• Objetivos • Justificativa • Competências gerais da BNCC • Competências específicas e habilidades de Matemática • Conexões com outras áreas de conhecimento • Temas Contemporâneos Transversais • Resoluções e comentários	• Competências gerais • Competências específicas • Habilidades • Orientações
Sugestões de leitura **Sugestão de atividades individuais e em grupos**	
Referências comentadas **Referências suplementares**	

Audiovisual
A coleção inclui 12 recursos audiovisuais por volume: 3 *podcasts*, 3 vídeos, 2 carrosséis de imagens, 3 infográficos clicáveis e 1 mapa clicável, fornecendo informações adicionais sobre cada recurso.

O Livro do Estudante

Veja a seguir a descrição detalhada de cada parte que integra o Livro do Estudante.

Esta coleção consta de três volumes sequenciais e a distribuição dos assuntos em cada volume teve como norte a presença de todas as cinco unidades temáticas – Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, Probabilidade e estatística.

Apresentamos a seguir o quadro de conteúdos dos três volumes.

Organização dos volumes

Volume 1			
Capítulo	**Tópicos e subtópicos**	**Unidades temáticas, competências e habilidades**	**Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**
1. Teoria dos conjuntos	**1. Noções de teoria dos conjuntos** • Conceitos iniciais • Subconjuntos • Operações entre conjuntos **2. Conjuntos numéricos** • Ampliações do campo numérico • Números reais	**Unidades temáticas:** • Números • Álgebra **Competências gerais**: 2, 4, 7, 9	• Diversidade cultural
2. Estatística e pensamento computacional	**1. Tabelas e gráficos estatísticos** • Análise e construção de tabelas e gráficos • Os índices socioeconômicos **2. Linguagem estatística** • Elementos em pesquisas estatísticas • Realizando uma pesquisa estatística **3. Pensamento computacional** • Algoritmos e fluxogramas • Introdução à programação	**Unidades temáticas:** • Números • Probabilidade e estatística **Competências gerais:** 1, 4, 5, 7, 9 **Competências específicas:** 1, 2, 3, 4 **Habilidades:** EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT202, EM13MAT315, EM13MAT405, EM13MAT406, EM13MAT407	• Ciência e tecnologia • Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras • Educação fiscal • Educação para os direitos humanos
3. Grandezas e medidas	**1. Grandezas e unidades fundamentais** • Unidades de medidas de grandeza • Notação científica e precisão nas medidas de grandezas **2. Grandezas direta e inversamente proporcionais** • Razão e proporção • Grandezas direta e inversamente proporcionais	**Unidade temática:** • Grandezas e medidas **Competências gerais:** 2, 4, 7, 9, 10 **Competências específicas:** 1, 2, 3 **Habilidades:** EM13MAT103, EM13MAT201, EM13MAT313, EM13MAT314, EM13MAT315	• Educação ambiental
4. Função afim	**1. A ideia de função** • Conceito de função • Função e teoria dos conjuntos • Representação de função no plano cartesiano **2. Função afim** • Conceito de função afim • Gráfico de uma função afim • Taxa de variação de uma função afim **3. Função afim e consequências** • Função linear e proporcionalidade **4. Funções e inequações** • Estudo dos sinais de uma função afim • Resolução de inequações do 1º grau	**Unidade temática:** • Álgebra **Competências gerais:** 2, 4, 5, 6, 9 **Competências específicas:** 1, 3, 4, 5 **Habilidades:** EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT401, EM13MAT404, EM13MAT501, EM13MAT510	• Educação Financeira
5. Função quadrática	**1. O estudo de equações do 2º grau** • Equações do 2º grau **2. Função quadrática** • Conceito e gráfico de função quadrática **3. Coordenadas do vértice da parábola** • Problemas de máximo ou de mínimo **4. Inequações do 2º grau** • Estudo dos sinais de uma função quadrática • Resoluções de inequações do 2º grau **5. Funções definidas por mais de uma sentença** • Lei de formação e gráficos	**Unidade temática:** • Álgebra **Competências gerais:** 2, 4, 5 **Competências específicas:** 3, 4, 5 **Habilidades:** EM13MAT302, EM13MAT402, EM13MAT404, EM13MAT405, EM13MAT502, EM13MAT503, EM13MAT506	• Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras • Educação para o consumo

Volume 1			
Capítulo	**Tópicos e subtópicos**	**Unidades temáticas, competências e habilidades**	**Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**
6. Geometria plana	**1. Conceitos de Geometria Plana** • Ângulos • Semelhanças **2. Polígonos e ângulos** • Soma das medidas dos ângulos internos e externos de um polígono • Os ângulos nos polígonos regulares **3. Medidas de superfícies** • Resolução de problemas de cálculo de áreas • Área do círculo	**Unidades temáticas:** • Geometria • Grandezas e medidas **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 **Competências específicas:** 2, 3, 5 **Habilidades:** EM13MAT201, EM13MAT307, EM13MAT308, EM13MAT505	• Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras • Educação para o trânsito • Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso

Volume 2			
Capítulo	**Tópicos e subtópicos**	**Unidades temáticas, competências e habilidades**	**Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**
1. Função exponencial e função logarítmica	**1. Potenciação** • Propriedades da potenciação **2. A função exponencial** • Conceito e gráfico de uma função exponencial • Resolução de equações e inequações exponenciais **3. Logaritmos** • Conceito de logaritmo • Propriedades dos logaritmos **4. A função logarítmica** • Conceito e gráfico de uma função logarítmica • Resolução de equações e inequações logarítmicas • O uso de logaritmos na resolução de problemas	**Unidades temáticas:** • Números • Álgebra **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10 **Competências específicas:** 1, 3, 4 **Habilidades:** EM13MAT101, EM13MAT304, EM13MAT305 EM13MAT313, EM13MAT403	• Saúde
2. Sequências numéricas	**1. Sequências numéricas** • Padrões numéricos e geométricos **2. Progressão aritmética** • Termo geral de uma progressão aritmética • Progressão aritmética e outras relações • Soma dos termos de uma progressão aritmética **3. Progressão geométrica** • Termo geral de uma progressão geométrica • Propriedades de uma progressão geométrica • Progressão geométrica e outras relações • Soma dos termos de uma progressão geométrica	**Unidade temática:** • Álgebra **Competências gerais:** 2, 3, 4, 5, 9 **Competências específicas:** 2, 4, 5 **Habilidades:** EM13MAT203, EM13MAT405, EM13MAT507, EM13MAT508	• Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
3. Estatística descritiva	**1. Medidas de tendência central** • Média aritmética • Moda • Mediana **2. Medidas de dispersão** • Amplitude total • Variância e desvio-padrão **3. Outra forma de análise de dados** • Utilizando quartis e o diagrama *boxplot*	**Unidade temática:** • Probabilidade e estatística **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 6, 7, 10 **Competências específicas:** 1, 2, 3, 4 **Habilidades:** EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT202, EM13MAT316, EM13MAT406, EM13MAT407	• Educação para o consumo

Volume 2			
Capítulo	**Tópicos e subtópicos**	**Unidades temáticas, competências e habilidades**	**Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**
4. Geometria das transformações e triângulos	**1. Geometria das transformações** • Transformações isométricas • Transformações homotéticas **2. Triângulos: relações trigonométricas** • Trigonometria no triângulo retângulo • Trigonometria em um triângulo qualquer	**Unidade temática:** • Geometria **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5 **Competências específicas:** 1, 3 **Habilidades:** EM13MAT105, EM13MAT308	
5. Funções trigonométricas	**1. Circunferência trigonométrica** • Arcos e ângulos • O plano cartesiano e a circunferência trigonométrica • Seno e cosseno na circunferência trigonométrica • A tangente na circunferência trigonométrica **2. As funções seno e cosseno** • Função seno • Função cosseno • O uso de funções trigonométricas na resolução de problemas	**Unidades temáticas:** • Álgebra • Geometria **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10 **Competência específica:** 3 **Habilidade:** EM13MAT306	• Direitos da criança e do adolescente
6. Os sólidos geométricos	**1. O método matemático** **2. Figuras geométricas espaciais** • Poliedros: relação de Euler **3. Relações métricas em sólidos geométricos** • Bloco retangular e cubo • Pirâmides regulares e cones • Esferas **4. Geometria dos mapas: projeções cartográficas** • Projeção cônica • Projeção cilíndrica • Projeção azimutal	**Unidades temáticas:** • Geometria • Grandezas e medidas **Competências gerais:** 1, 2, 3, 4, 5, 9 **Competência específica:** 5 **Habilidade:** EM13MAT509	

Volume 3			
Capítulo	**Tópicos e subtópicos**	**Unidades temáticas, competências e habilidades**	**Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**
1. Prismas e cilindros	**1. Prismas** • Área da superfície de um prisma • Área da superfície de um bloco retangular • Volume do bloco retangular **2. Cilindros** • Área dos cilindros • Volume do cilindro	**Unidades temáticas:** • Geometria • Grandezas e medidas **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 9, 10 **Competências específicas:** 2, 3, 5 **Habilidades:** EM13MAT201, EM13MAT309, EM13MAT504	• Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
2. Pirâmides, cones e esferas	**1. Pirâmides** • Área da superfície da pirâmide • Volume da pirâmide **2. Cones** • Área da superfície do cone • Volume do cone • Tronco de pirâmide e tronco de cone **3. Esfera** • Volume da esfera • Área da superfície esférica	**Unidades temáticas:** • Geometria • Grandezas e medidas **Competências gerais:** 1, 2, 3, 4, 6, 7 **Competências específicas:** 2, 3, 5 **Habilidades:** EM13MAT201, EM13MAT309, EM13MAT504	• Educação Ambiental
3. Sistemas lineares	**1. Sistemas de equações lineares** **2. Resolução de sistemas de equações lineares** • A forma escalonada	**Unidade temática:** • Álgebra **Competências gerais:** 2, 4, 9 **Competências específicas:** 3, 4 **Habilidades:** EM13MAT301, EM13MAT401	

Volume 3			
Capítulo	**Tópicos e subtópicos**	**Unidades temáticas, competências e habilidades**	**Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**
4. Análise combinatória	**1. Princípios de contagem** • Problemas iniciais de contagem • Princípio multiplicativo **2. Permutações** • Permutações simples • Permutações com repetição **3. Formando agrupamentos** • Arranjo simples • Combinação simples **4. Triângulo de Pascal** • Propriedades dos números binominais	**Unidade temática:** • Números **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 9 **Competências específicas:** 3, 4 **Habilidades:** EM13MAT310, EM13MAT315, EM13MAT405	
5. Probabilidades	**1. Probabilidade** • Espaço amostral e evento • Probabilidade **2. Adição de probabilidades** • Probabilidade condicional **3. Multiplicação de probabilidades** **4. Probabilidade e estatística** • Obtenção de uma curva	**Unidade temática:** • Probabilidade e estatística **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9 **Competências específicas:** 1, 3, 5 **Habilidades:** EM13MAT106, EM13MAT311, EM13MAT312, EM13MAT511	• Saúde
6. Matemática Financeira	**1. A matemática e a Educação Financeira** • Matemática Comercial **2. Matemática Financeira** • Juros simples • Juros compostos • Financiamentos	**Unidades temáticas:** • Números • Álgebra **Competências gerais:** 2, 4, 5, 9 **Competências específicas:** 1, 2, 3, 4 **Habilidades** EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT203, EM13MAT302, EM13MAT303, EM13MAT315, EM13MAT405	• Educação Financeira • Educação para o consumo • Educação fiscal

Além dos seis capítulos, cada volume contém, ao final, uma parte importante intitulada **Conexões & Projetos**, constituída de três projetos por meio dos quais os estudantes colocam em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas em alguns capítulos daquele volume.

A organização dos capítulos

Os capítulos que compõem cada volume são constituídos por um percurso que envolve, para cada tópico apresentado, atividades resolvidas seguidas de problematizações que levam os estudantes, trabalhando em duplas ou em pequenos grupos, a discutir ideias, propor e validar hipóteses, além de apresentar argumentações consistentes para as afirmações que fazem. Da forma como estão propostas, essas atividades propiciam o desenvolvimento de processos como comunicação, investigação, construção de modelos e resolução de problemas.

Para favorecer esse trabalho, em todos os volumes da coleção, sempre que possível, três elementos estarão presentes: **Produção de textos**, **Algoritmos e fluxogramas** e **Recursos digitais**.

Esses elementos garantem a diversidade de atividades, o desenvolvimento de habilidades e a participação dos estudantes como sujeitos ativos no processo de ensino e aprendizagem.

Produção de textos

A **competência geral 7** da BNCC propõe que o estudante deve ser capaz de:

> Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta (Brasil, 2018, p. 9).

Visando desenvolver essa competência, que envolve a capacidade de argumentação, em todos os capítulos são propostas atividades em que os estudantes produzirão textos, tanto oralmente como por escrito, principalmete nas seções **Para pensar e discutir** e **Para explorar**. Por meio desses textos eles descrevem formas de pensar, elaboram hipóteses e problemas, apresentam argumentações, entre outros.

É importante destacar que em todas essas situações os estudantes devem apresentar argumentos que justifiquem as ideias apresentadas, seja oralmente ou por escrito. Cabe a você, professor promover discussões em grupos ou com toda a turma para que os argumentos possam ser debatidos e justificados, inclusive por meio de expressões e cálculos matemáticos, quando for o caso. Dessa forma, contribui-se para que desenvolvam a capacidade de argumentar com base em dados e informações confiáveis.

Sobre a elaboração de problemas, vale ressaltar que um dos pontos de destaque que evidenciam a autonomia no desenvolvimento do pensamento matemático é a elaboração de problemas sobre determinado conceito. Em várias oportunidades os estudantes elaboram problemas sobre determinado assunto, refletem sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou propõem diferentes soluções para um problema apresentado.

Saber elaborar uma situação-problema requer um esforço cognitivo maior do que uma simples resolução, além de necessitar de conhecimento mais profundo sobre o assunto tratado.

Nesse sentido, a BNCC propõe:

> Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada (Brasil, 2018, p. 536).

Algoritmos e fluxogramas

O trabalho com algoritmos e fluxogramas favorece o desenvolvimento do pensamento computacional e está presente na BNCC desde o 6º ano do Ensino Fundamental. Esse tipo de pensamento permite que, diante de um problema, o sujeito possa dividi-lo em partes, identificar padrões, imaginar uma solução que seja válida para diversos problemas e definir uma sequência de passos que os resolvam. Esses passos podem ser expressos por meio de um algoritmo, que, por sua vez, pode ser representado por um fluxograma.

A partir do Capítulo 2 do Volume 1, quando são retomados e aprofundados, os algoritmos e fluxogramas são trabalhados, sempre que possível, envolvendo os mais diversos assuntos, visando desenvolver as seguintes habilidades:

(**EM13MAT315**) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(**EM13MAT405**) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Recursos digitais

Em diversas atividades, em todos os volumes, os estudantes fazem uso de planilhas eletrônicas, *softwares* de geometria dinâmica ou calculadoras.

De acordo com a BNCC,

> [...] o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações (Brasil, 2018, p. 536).

A importância do uso desses recursos fica evidente porque dezessete habilidades, distribuídas nas cinco competências específicas de Matemática, se referem ao uso das tecnologias digitais para a etapa do Ensino Médio na BNCC.

Seções

Abertura de capítulo

Na abertura de todos os capítulos é apresentado um pequeno texto que relaciona o assunto que será tratado a algum aspecto da realidade ou a situações reais, oportunizando, inclusive, um trabalho interdisciplinar. Com base nesse texto são propostas duas questões para serem debatidas em duplas ou em pequenos grupos, cujo objetivo é mobilizar os conhecimentos anteriores e provocar a necessidade de aquisição de novas habilidades e/ou conteúdos conceituais, inclusive envolvendo outras áreas de conhecimento. Esse momento pode ser aproveitado também para a avaliação diagnóstica da turma.

As questões propostas podem ser trabalhadas na perspectiva da “sala de aula invertida” (Bacich; Moran, 2018), em que o estudante, de alguma forma, tem acesso prévio ao assunto que será tratado no capítulo. Essa é uma das metodologias ativas propostas como forma de colocar o estudante no centro do processo de aprendizagem. Com essa perspectiva, as questões podem ser propostas com antecedência, envolvendo inclusive algum tipo de pesquisa, de modo que ao iniciar o capítulo o estudante já tenha tido a oportunidade de pensar sobre o assunto que será abordado. A primeira aula daquele capítulo passa a ser, então, um momento de ricas discussões sobre o assunto, com a contribuição de cada estudante, podendo contar também com a contribuição de professores de outras áreas e até gerar projetos interdisciplinares sobre o tema tratado.

Para pensar e discutir

Esta seção aparece ao longo de todos os capítulos, permeando o texto, cujo objetivo é colocar o estudante como participante ativo do próprio processo de aprendizagem. É constituída por situações que o levam a pensar individualmente, seja durante a aula, seja durante a tarefa de casa, para serem posteriormente discutidas. As questões propostas podem envolver investigação de propriedades, elaboração de novos problemas, conclusões ou sínteses que podem ser apresentadas por meio de um texto argumentativo ou de resoluções matemáticas para justificar os argumentos apresentados na discussão, conforme o caso, o que propicia mais uma oportunidade para o desenvolvimento da capacidade de argumentação. As discussões podem ocorrer em duplas, em grupos ou com toda a turma, sob sua mediação. A ideia é incentivar os estudantes a pensar sobre as questões propostas e apresentar argumentos bem fundamentados. No momento das discussões, é importante que você garanta um ambiente de respeito e permita que novos questionamentos sejam feitos, promovendo o desenvolvimento de ideias matemáticas e corrigindo, quando necessário, os conceitos envolvidos.

Para explorar

Os estudantes resolvem as atividades propostas nesta seção sempre em duplas ou em pequenos grupos. Eles trocam ideias ao investigar regras, padrões e propriedades matemáticas e ao fazer análises críticas, criativas e propositivas envolvendo diversos tipos de situação. Em alguns desses momentos são utilizadas tecnologias diversas, como calculadora, planilha eletrônica ou *softwares* de geometria dinâmica. As atividades propostas nesta seção possibilitam também o desenvolvimento do processo de metacognição (Leite; Darsie, 2011), por meio do qual os estudantes têm a oportunidade de pensar sobre como aprendem, promovendo o autoconhecimento, a autonomia intelectual e o controle das próprias atividades cognitivas. Durante a realização das atividades cabe a você incentivar os alunos a se expressarem com clareza, comunicarem suas formas de pensar e apresentarem argumentos que justifiquem suas afirmações.

Atividades resolvidas

Esta seção é utilizada como referência, ao final de cada assunto, para resolver problemas relativos ao assunto tratado. Você pode propor aos estudantes que analisem cada situação e a respectiva resolução individualmente ou em duplas, para posterior discussão. Em alguns casos, é solicitado aos estudantes que completem algumas resoluções ou que reflitam sobre o que ocorreria se modificassem alguns dados, valorizando, assim, suas formas de pensar e a elaboração de estratégias. Pode-se solicitar também que elaborem novos problemas a partir dos que foram apresentados.

Atividades

As atividades propostas ao final de cada tópico, podem ser abertas ou fechadas e, em alguns casos, envolver investigações matemáticas, produção de textos ou elaboração de algoritmos e fluxogramas. Pode haver atividades para serem resolvidas em grupos ou em duplas, usando ou não algum tipo de tecnologia digital.

Análise e contexto

Esta seção aparece pelo menos uma vez em cada capítulo, após uma seção de atividades, ao longo dos três volumes. É constituída por textos do cotidiano, notícias, ensaios, divulgação científica, textos de conteúdos matemáticos ou de história da Matemática, que são sempre acompanhados de questões para reflexão e análise. Busca contribuir para desenvolver a capacidade de argumentação com base em dados confiáveis.

Infográfico

Esta seção aparece em alguns capítulos de cada volume. Apresenta, de forma atrativa e utilizando elementos visuais, assuntos relacionados ao capítulo. O infográfico é sempre acompanhado de questões para discussão.

Atividades finais

Relação de atividades que envolvem todo o assunto estudado no capítulo, incluindo questões que podem ser utilizadas como verificação de aprendizagem. Podem ser abertas ou não. Inclui questões de vestibulares e do Enem, destacadas com o subtítulo **Questões de vestibulares e Enem**. Podem ser propostas como tarefa de casa ou para serem resolvidas durante a aula. Você pode selecionar algumas atividades para serem resolvidas em duplas e discutidas coletivamente.

Ao final desta seção, os estudantes terão a oportunidade de avaliar todo o percurso e seu processo de aprendizagem por meio da **autoavaliação**, que retoma os objetivos que constam no início do capítulo. É importante que eles sejam incentivados a fazer uma reflexão antes de realizá-la. Você pode encaminhar o levantamento dos resultados e fazer, com a turma, um planejamento para retomada dos assuntos em que os estudantes não se sentem seguros.

Observação importante: nas diferentes seções, as atividades que solicitam justificativas ou explicações apresentam como resposta para o professor, no Livro do Estudante, apenas "Resposta pessoal". Entretanto, na parte específica deste manual você encontrará orientações ou sugestões de resposta.

Conexões e projetos

A última parte do Livro do Estudante é constituída por uma seção denominada **Conexões e projetos**, formada por três projetos que visam levar os estudantes a colocar em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas ao longo dos capítulos. Por meio desses projetos, eles terão a oportunidade de desenvolver competências relacionadas a saberes e vivências da vida cotidiana usando diversos tipos de tecnologia e os conhecimentos matemáticos adquiridos.

Cada projeto apresenta possibilidades de trabalho interdisciplinar que pode ser desenvolvido juntamente com professores de outras áreas. Nesse caso, é importante que vocês façam a leitura prévia do projeto e o adaptem à sua realidade, não se esquecendo de verificar a coerência com o Projeto Politico Pedagógico da escola e com o currículo estadual.

É importante também que, dependendo da natureza das atividades propostas, seja garantida a segurança de todos os envolvidos (estudantes, professores e demais pessoas) no que diz respeito a eventuais riscos.

Para esse trabalho em conjunto é necessário desenvolver um cronograma de acordo com o número de aulas de cada componente curricular envolvido e com os temas que serão desenvolvidos/aprofundados por cada um, lembrando que existe a possibilidade de aprofundamento dos temas de acordo com a demanda de cada turma e a disponibilidade de tempo.

A escolha dos temas levou em conta a possibilidade de oferecer aos jovens a oportunidade de conhecer novas realidades, de se aprofundarem em temas relevantes para sua vida e, em alguns casos, fazer intervenções na comunidade.

Tendo em vista uma **escola que acolha as juventudes**, a proposta visa, de acordo com a BNCC (Brasil, 2018, p. 465):

- favorecer a atribuição de sentido às aprendizagens, por sua vinculação aos desafios da realidade e pela explicitação dos contextos de produção e circulação dos conhecimentos;
- garantir o protagonismo dos estudantes em sua aprendizagem e o desenvolvimento de suas capacidades de abstração, reflexão, interpretação, proposição e ação, essenciais à sua autonomia pessoal, profissional, intelectual e política;

- promover a aprendizagem colaborativa, desenvolvendo nos estudantes a capacidade de trabalharem em equipe e aprenderem com seus pares; e
- estimular atitudes cooperativas e propositivas para o enfrentamento dos desafios da comunidade, do mundo do trabalho e da sociedade em geral, alicerçadas no conhecimento e na inovação.

Essa parte da obra oferece, ainda, aos estudantes a oportunidade de (Brasil, 2018, p. 467):

- compreender e utilizar os conceitos e teorias que compõem a base do conhecimento científico-tecnológico, bem como os procedimentos metodológicos e suas lógicas;
- conscientizar-se quanto à necessidade de continuar aprendendo e aprimorando seus conhecimentos;
- apropriar-se das linguagens científicas e utilizá-las na comunicação e na disseminação desses conhecimentos; e
- apropriar-se das linguagens das tecnologias digitais e tornar-se fluentes em sua utilização.

Pensando na autonomia docente, os projetos são independentes e podem ser desenvolvidos por toda a turma, um de cada vez, de acordo com seu planejamento e o cronograma proposto por você. Outra opção é que cada grupo escolha um dos projetos para desenvolver ao longo de um período estabelecido por você. As opções são várias, analise previamente as propostas, entre nos endereços de *sites* indicados e, se necessário, faça adaptações que possam atender tanto à sua realidade como ao Projeto Político Pedagógico da escola e ao currículo estadual.

Cabe também a você escolher o melhor momento para dar início ao trabalho. Como o desenvolvimento de um projeto demanda tempo para que as várias etapas sejam cumpridas, sugerimos avaliar quando apresentar a proposta de trabalho e orientar os estudantes para que possam, inclusive, desenvolver seus projetos paralelamente ao desenvolvimento dos capítulos. Essa é mais uma oportunidade de investir na autonomia dos estudantes, uma vez que, caso necessário, podem acessar conteúdos de capítulos ainda não trabalhados, mas importantes para o desenvolvimento de seus projetos, o que potencializa seus processos de leitura e compreensão de textos, incluindo o texto matemático. Seu papel é fundamental para incentivá-los a se engajar nesse tipo de trabalho e atender às necessidades específicas de cada grupo.

Parte específica

Orientações específicas para este volume

Apresentamos a seguir uma sugestão de cronograma com três possibilidades de distribuição por capítulo: bimestral, trimestral ou semestral. Esse cronograma pode ser adaptado à sua realidade, de acordo com a programação e o calendário da escola.

Com base no cronograma, você pode elaborar seu planejamento para cada etapa de trabalho, incluindo momentos para a realização de avaliações formativas, que ocorrem ao longo do processo, seguidas de períodos para as possíveis retomadas com base nos resultados obtidos. É importante também analisar previamente as possibilidades de trabalho interdisciplinar, envolvendo professores de outras áreas de conhecimento, para que vocês possam, juntos, planejar as atividades que serão realizadas e incluídas nos planejamentos de ambos.

Cronograma

<table>
<tr><th>Capítulo</th><th>Bimestre</th><th>Trimestre</th><th>Semestre</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1º</td><td>1º</td><td>1º</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1º</td><td>1º</td><td>1º</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">2º</td><td>1º
Da pág. 114 até 141</td><td rowspan="2">1º</td></tr>
<tr><td>2º
Da pág. 142 até 155</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>2º
Da pág. 156 até 168</td><td rowspan="2">2º</td><td>1º
Da pág. 156 até 168</td></tr>
<tr><td>3º
Da pág. 169 até 195</td><td>2º
Da pág. 169 até 195</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>3º
Da pág. 196 até 219</td><td>2º
Da pág. 196 até 219</td><td>2º</td></tr>
<tr><td>4º
Da pág. 220 até 241</td><td>3º
Da pág. 220 até 241</td><td>2º</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4º</td><td>3º</td><td>2º</td></tr>
</table>

CAPÍTULO 1

Função exponencial e função logarítmica

Objetivos

- Compreender as propriedades da potenciação e utilizá-las no cálculo de potências.
- Identificar e representar números na notação científica.
- Conceituar função exponencial.
- Esboçar gráficos de funções exponenciais.
- Utilizar funções exponenciais para modelar e resolver problemas.
- Resolver equações e inequações exponenciais.
- Compreender e utilizar o conceito e as propriedades operatórias para calcular logaritmos.
- Efetuar mudança de base, calculando logaritmo com o uso de calculadora científica.
- Compreender o conceito de função logarítmica como função inversa da função exponencial de mesma base e identificar características da função logarítmica utilizadas na modelagem de situações.
- Esboçar gráficos de função logarítmica.
- Utilizar logaritmos para modelar e resolver problemas.

Justificativa

A compreensão de fenômenos cujas grandezas variam de forma exponencial ou logarítmica permite modelar e resolver problemas em vários contextos, sejam eles da esfera científica ou da vida cotidiana, por exemplo, os da área financeira. Entretanto, para que estejam aptos a modelar e resolver esses tipos de problemas, é necessário que os estudantes dominem as técnicas relativas ao cálculo de potências, a resolução de equações e inequações exponencias, bem como o cálculo de logaritmos e a resolução de equações e inequações logarítmicas.

Competências gerais da BNCC

Competência geral 1: Na seção **Análise e contexto** das páginas 43 e 44 os estudantes conhecem como os logaritmos foram criados, o que contribui para que valorizem e utilizem os conhecimentos historicamente construídos.

Competências gerais 2, 4, 5 e 9: Na seção **Para explorar** da página 26, os estudantes em grupos e usando um *software* de geometria dinâmica, investigam o comportamento de uma função exponencial de acordo com o valor da base e escrevem um texto contendo suas conclusões. Desenvolvem assim a **competência 2**, uma vez que exercitam a curiosidade intelectual por meio da investigação, da reflexão, da análise crítica, da imaginação e da criatividade. Desenvolvem também a **competência 4** enquanto se comunicam e discutem ideias utilizando a linguagem oral e a matemática para se expressar e partilhar informações. Como utilizam um *software* de geometria dinâmica, desenvolvem a **competência 5**. Além disso, mobilizam a **competência 9** ao trabalharem em grupos exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação.

Competências gerais 8 e 10: Essas competências são mobilizadas no trabalho com o infográfico da página 61. Os estudantes tomam conhecimento dos riscos mediante o aumento da intensidade sonora, o que contribui para o cuidado com sua saúde e desenvolve a **competência 8**. Ao elaborarem um trabalho para alertar as pessoas sobre esses riscos, mobilizam a **competência 10**.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 1

EM13MAT101: Nas páginas 57 e 58 os estudantes analisam o gráfico da área coberta por uma população de algas em função do tempo. Em seguida, utilizam o gráfico na escala logarítmica para facilitar a leitura do comportamento da função em pequenos intervalos do domínio.

Competência específica 3

EM13MAT304: Nas atividades propostas na página 29 os estudantes utilizam a função exponencial para modelar e resolver problemas em diversos contextos. Na seção **Para explorar** da página 28, eles elaboram um problema para os colegas resolverem.

EM13MAT305: A partir da página 57 os estudantes utilizam logaritmos para resolver problemas em diversos contextos. Na seção **Para pensar e discutir** da página 59 eles elaboram um problema que possa ser resolvido por meio de uma função logarítmica.

EM13MAT313: O uso da notação científica para expressar uma medida ocorre em diversas situações neste capítulo, como na seção **Para pensar e discutir** da página 10 e na atividade 4 da página 15.

Competência específica 4

EM13MAT403: Na seção **Para pensar e discutir** da página 52 os estudantes comparam "a velocidade de crescimento" das funções exponencial e logarítmica.

Conexões com outras áreas do conhecimento

Na seção **Para pensar e discutir** da página 58 são propostas algumas questões relativas ao crescimento de algas para serem discutidas com a participação dos professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Com base no infográfico da página 61, é proposto um trabalho com a participação dos professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** para alertar as pessoas sobre os riscos do aumento da faixa de intensidade sonora.

Temas Contemporâneos Transversais

O TCT **Saúde** é contemplado no infográfico da página 61 e nas respectivas atividades propostas em que são apresentados e discutidos os riscos para a saúde causados pelo aumento da faixa de intensidade sonora.

Resoluções e comentários

Página 9

Abertura

1. Sugestão de resposta: Proliferação de bactérias.
2. Espera-se que os estudantes encontrem gráficos em que há um aumento exacerbado. Peça a eles que analisem as variáveis que aparecem nos dois eixos e façam comentários acerca da forma como se relacionam. Aborde a importância de as pessoas saberem interpretar gráficos matemáticos para melhor compreenderem as notícias veiculadas. Você pode fazer uma parceria com os professores de Biologia e de Sociologia para analisar como essa ideia inicial sobre a pandemia do Coronavírus foi tratada pelas pessoas abordando a descrença em relação à gravidade da doença e à previsão do número de mortes, mesmo diante dos dados apresentados.

1. Potenciação

Página 10

Para pensar e discutir

1. 384 000 km $= 3{,}84 \cdot 10^5$ km
2. $3{,}84 \cdot 10^5$ km $= 3{,}84 \cdot 10^8$ m
3. $\alpha \in [1, 10)$ e $k \in \mathbb{Z}$

Página 12

Para explorar

1. 4ª propriedade:
   $(a \cdot b)^n = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot ... \cdot (a \cdot b)$, com n fatores de a e n fatores de b.
   Então: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
   5ª propriedade:
   $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot ... \cdot \left(\frac{a}{b}\right)$ com n fatores de a e n fatores de b.
   Então: $\frac{a \cdot a \cdot ... \cdot a}{b \cdot b \cdot ... \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}$
2. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
   $a^{0+n} = a^0 \cdot a^n$
   $a^n = a^0 \cdot a^n \Rightarrow a^0 = 1$
3.
   a) Cada valor é $\frac{1}{3}$ do valor anterior, isto é, os valores são divididos por 3 da esquerda para direita.
   b) x será 3^0, enquanto y será 1.

Página 13

Para pensar e discutir

1. Um número inteiro negativo.
2. Um número inteiro positivo.
3. $a^{-1} \cdot a^1 = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ ou
   $a^{-1} \cdot a^1 = a^{-1+1} = a^0 = 1$
   Nesse caso, dizemos que o número a^{-1}, para a positivo, é o inverso do número a. O mesmo se aplica quando a base é negativa.
4. $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{1}{-64} = -\frac{1}{64}$
   $(-4)^{-3} \cdot (-4)^3 = \frac{1}{(-4)^3} \cdot (-4)^3 = 1$

Páginas 14-15

Para pensar e discutir

1. Seja x um número real.
   $x \cdot 10^{-6} = x \cdot \frac{1}{10^6} = \frac{x}{10^6}$
   Logo, a resposta é sim.
2. É a propriedade de potência de potência, isto é, a 2ª propriedade.
3. Em 2^{3^2}, devemos calcular $3^2 = 9$ para depois calcular $2^9 = 512$. Já em $(2^3)^2$, devemos inicialmente calcular o que aparece entre parênteses, ou seja, $2^3 = 8$, e só então calcular $8^2 = 64$.

Atividades

1.
   a) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$
   b) $-3^4 = -1 \cdot 3^4 = -81$
   c) $(4 \cdot \sqrt{2})^2 = \left(2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2^5 = 32$
   d) $0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
   e) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{5}\right)^3} =$
   $= \frac{1}{-\frac{8}{125}} = -\frac{125}{8}$
   f) $(0{,}333...)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$
   $= \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$
2.
   a) Seja a um número negativo e n um número inteiro par. Podemos expressar isso como $a < 0$ e $n = 2k$, em que $k \in \mathbb{Z}$.
   $a^n = a^2 = (a^2)^k$
   Como a^2 é sempre positivo (pois o quadrado de um número negativo é positivo):
   $a^2 > 0$
   $(a^2)^k > 0$ para qualquer $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, quando a base é negativa e o expoente é par, o resultado é positivo.
   b) Seja a um número negativo e n um número inteiro ímpar. Podemos expressar isso como $a < 0$ e $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$.
   O resultado de an é dado por:
   $a^{2k} + 1 = a \cdot (a^2)^k$
   Sabemos que $a^2 > 0$, pois o quadrado de um número negativo é positivo. Então $(a^2)^k > 0$. No entanto, o fator a continua sendo negativo, portanto:
   $a \cdot (a^2)^k < 0$
   Isso mostra que quando a base é negativa e o expoente é ímpar, o resultado é negativo.
3.
   a) $0{,}000003 = 3 \cdot 10^{-6}$
   b) $12\,000\,000\,000 = 1{,}2 \cdot 10^{10}$
   c) $10\,425\,000 = 1{,}0425 \cdot 10^7$
   d) $0{,}000342 = 3{,}42 \cdot 10^{-4}$
4. $3{,}30 \cdot 10^{23}$, $6{,}42 \cdot 10^{23}$, $5{,}97 \cdot 10^{24}$, $5{,}68 \cdot 10^{26}$, $1{,}90 \cdot 10^{27}$
5. $x = (2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$
   $y = 2^{3^2} = 2^9$
   $z = 2^{2^3} = 2^8$
   $2^N = 2^6 \cdot 2^9 \cdot 2^8 = 2^{6+9+8} = 2^{23}$
   $N = 23$
6. $A = 3^{31}$
   $B = 81^6 = (3^4)^6 = 3^{24}$
   $C = 243^5 = (3^5)^5 = 3^{25}$
   $D = 3^{2^5} = 3^{32}$
   D é o maior.
7. $E = \frac{2^{n+5} \cdot 2 - 2^{n-2} \cdot 6}{4 \cdot 2^{n-3}} =$
   $= \frac{2^{n+6} - 2^{n-2} \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2^{n-3}} =$
   $= \frac{2^{n+6} - 2^{n-1} \cdot 3}{2^{n-1}} =$
   $= \frac{2^{n-1}(2^7 - 3)}{2^{n-1}} = 2^7 - 3 = 125$
8. $N = 5^{23} \cdot 2^{30} = 5^{23} \cdot 2^{23} \cdot 2^7 =$
   $= (5 \cdot 2)^{23} \cdot 2^7 = 10^{23} \cdot 128 = 1{,}28 \cdot 10^{25}$
   Logo, N tem 26 algarismos.
9. $x = 20^{100} = 20^{2 \cdot 50} = 400^{50} = y$
   Alternativa **a**.
10. $(0{,}2)^3 + (0{,}16)^2 =$
    $= (2 \cdot 10^{-1})^3 + (1{,}6 \cdot 10^{-1})^2 =$
    $= 8 \cdot 10^{-3} + 2{,}56 \cdot 10^{-2} =$
    $= 0{,}008 + 0{,}0256 = 0{,}0336$
    Alternativa **b**.
11. $12\,900$ km$^3 = 12\,900\ (10^3$ m$)^3 =$
    $= 12\,900 \cdot 10^9$ m$^3 =$
    $= 1{,}29 \cdot 10^4 \cdot 10^9$ m$^3 = 1{,}29 \cdot 10^{13}$ m^3
    1 m$^3 \rightarrow$ 1 000 L
    $1{,}29 \cdot 10^{13} \cdot 1\,000 = 1{,}29 \cdot 10^{16}$ L
    Alternativa **d**.

Página 18

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta:
$x = 1\,024^{\frac{3}{5}} = (2^{10})^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{30}{5}} = 2^6$

Para explorar

1. Usando uma calculadora científica:
$3^\pi = 9{,}42478$ e $\pi^3 = 31{,}00628$
Logo, π^3 é maior.

2. $E = \dfrac{(0{,}00032)^{\frac{1}{5}} \cdot (0{,}0256)^{\frac{1}{4}}}{(0{,}125)^{\frac{1}{3}}} =$
$= \dfrac{[(0{,}2)^5]^{\frac{1}{5}} \cdot [(0{,}4)^4]^{\frac{1}{4}}}{[(0{,}5)^3]^{\frac{1}{3}}} =$
$= \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}4}{0{,}5} = 0{,}16$

3. $x = \sqrt{\dfrac{2^{37}}{2^{35} + 2^{38} + 2^{39}}} =$
$= \sqrt{\dfrac{2^{37}}{2^{35} \cdot (1 + 2^3 + 2^4)}} =$
$= \sqrt{\dfrac{2^2}{1 + 2^3 + 2^4}} = \sqrt{\dfrac{4}{1 + 8 + 16}} =$
$= \sqrt{\dfrac{4}{25}} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$

4.
   a) $(-\pi)^2 = (-\pi)(-\pi) = \pi^2$
   b) $\sqrt{(-\pi)^2} = \sqrt{\pi^2} = \pi$
   c) $\sqrt{\pi^2} = \pi$
   d) $\sqrt[5]{\pi^{10}} = \pi^{\frac{10}{5}} = \pi^2$

5. $0{,}0625^{-0{,}25} = [(0{,}5)^4]^{-\frac{1}{4}} =$
$= (0{,}5)^{4 \cdot -\frac{1}{4}} = (0{,}5)^{-1} = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$
$81 = 3^4 \rightarrow 81^{0{,}5} = (3^4)^{\frac{1}{2}} = 3^{4 \cdot \frac{1}{2}} =$
$= 3^2 = 9$
$0{,}0625^{-0{,}25} + 81^{0{,}5} = 2 + 9 = 11$

6. Calculando por meio de uma calculadora científica, obtém-se:
$(0{,}25)^{1\,006} \cdot 2^{2\,013} =$
$= [(0{,}5)^2]^{1\,006} \cdot 2^{2\,013} =$
$= (0{,}5)^{2 \cdot 1006} \cdot 2^{2\,013} =$
$= (0{,}5)^{2\,012} \cdot 2^{2\,012} \cdot 2 =$
$= (0{,}5 \cdot 2)^{2\,012} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$

Página 19

Atividades

12.
   a) $10^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{10^2}$; 2,5119
   b) $128^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{128}$; 25,3983
   c) $\pi^{0{,}2} = \pi^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\pi}$; 1,2573
   d) $5^{-0{,}5} = 5^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; 0,4472

13. $E = \sqrt[4]{0{,}0016} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{0{,}008}} =$
$= \sqrt[4]{\dfrac{16}{10\,000}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{8}{1\,000}}} =$
$= \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{1}{\frac{2}{10}} = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{10}{2} = 1$

14. $x = \sqrt{\dfrac{3^{10} + 3^9 + 3^8}{13 \cdot 3^6}} =$
$= \sqrt{\dfrac{3^8 \cdot (3^2 + 3 + 1)}{13 \cdot 3^6}} =$
$= \sqrt{\dfrac{3^2 \cdot (9 + 3 + 1)}{13}} = \sqrt{\dfrac{9 \cdot 13}{13}} = 3$
Precisou colocar 3^8 em evidência.

15. $x = 6^{300} = (3 \cdot 2)^{300} = 2^{300} \cdot 3^{300} =$
$= 2^{300} \cdot (3^3)^{100} = 2^{300} \cdot 9^{100}$
$y = 2^{800} = 2^{300} \cdot 2^{500} =$
$= 2^{300} \cdot (2^5)^{100} = 2^{300} \cdot 32^{100}$
$32 > 9 \Rightarrow y > x$

16. $6 \cdot 5^{10} < 5 \cdot 6^{10}$
$\dfrac{6 \cdot 5^{10}}{5 \cdot 6} < \dfrac{5 \cdot 6^{10}}{5 \cdot 6} \Rightarrow 5^9 < 6^9$
Portanto, a sentença inicial é verdadeira.

17. $x^2 = 4 \cdot 5 = 20$
$y^2 = 9 \cdot 2 = 18$
$z^2 = 25 \cdot 3 = 75$
$y^2 < x^2 < z^2 \Rightarrow y < x < z$.
Alternativa **c**.

18.
   I. Falso. $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12} \neq x^7$
   II. Verdadeiro. $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$
   III. Falso. $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12} \neq x^{81}$
   IV. Verdadeiro. $x^3x^4 = x^{3+4} = x^7$
   V. Falso. $x^3x^4 = x^{3+4} = x^{12}$
   VI. Falso. $ab = ac$ não garante que $b = c$. Veja o contraexemplo.
   Sejam $a = 0$, $b = 2$ e $c = 3$.
   $0 \cdot 2 = 0 \cdot 3 = 0$
   $ab = ac$ e $b \neq c$

Alternativa **e**.

19. $\sqrt[3]{(3\sqrt{3})} = \sqrt[3]{\left(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)} = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}}$
Alternativa **c**.

20. $2 \cdot 81^3 + 3 \cdot 9^6 + 4 \cdot 27^4 =$
$= 2 \cdot 3^{12} + 3^{13} + 4 \cdot 3^{12} =$
$= 3^{12} \cdot (4 + 2) + 3^{13} =$
$= 3^{12} \cdot (3 \cdot 2) + 3^{13} =$
$= 2 \cdot 3^{13} + 3^{13} = 3 \cdot 3^{13} =$
$= 3^{14} = (3^2)^7 = 9^7$
Alternativa **b**.

21. $\left(4^{\frac{3}{2}} + 8^{-\frac{2}{3}} - 2^{-2}\right) \div 0{,}75 =$
$= \dfrac{\left[(2^2)^{\frac{3}{2}} + (2^3)^{-\frac{2}{3}} - 2^{-2}\right]}{\frac{3}{4}} =$
$= 4 \cdot \dfrac{[(2^3 + 2^{-2} - 2^{-2})]}{3} = \dfrac{4 \cdot 8}{3} = \dfrac{32}{3}$
Alternativa **e**.

22. $\dfrac{5 \cdot 10^2\,\text{g}}{2{,}5 \cdot 10^{-2}\,\text{g}} = 2 \cdot 10^4$; $2 \cdot 10^4$ grãos
Alternativa **a**.

23. Todo número da forma 2^{4n+1}, para $n \in \mathbb{N}$ termina com o algarismo 2.
$2^{95} = 2^{93+2} = 2^{93} \cdot 2^2 = 2^{4 \cdot 23 + 1} \cdot 2^2$.
Ao multiplicar um número que na casa da unidade termina em 2 por 4, o seu algarismo na casa da unidade será 8.
Alternativa **e**.

2. A função exponencial

Página 20

Para pensar e discutir

1. Na sequência (3, 10, 17, 24, ...), cada termo, desde o segundo, é o imediatamente anterior com o aumento de 7 unidades. Já na sequência (12, 6, 0, –6, ...), cada termo, desde o segundo, é o imediatamente anterior com a diminuição de 6 unidades.
2. Enquanto os valores de x aumentam de 1 em 1, os valores de $f(x)$, aumentam de 5 em 5.
3. Cada termo, a partir do segundo termo, é o anterior multiplicado por 3.
4. Cada termo, a partir do segundo termo, é o anterior dividido por 2 (ou multiplicado por $\frac{1}{2}$).

Página 21

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Pela definição, o domínio da função é $\mathbb{R}$. Se a fosse igual a 0, a função não estaria definida para valores negativos de x. Se a fosse igual 1, a função seria constante.
2. Sim, pois, $f(m + n) = a^{m+n} =$
$= a^m \cdot a^n = f(m) \cdot f(n)$.
3. Nas funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = \pi^x$, a imagem aumenta conforme o valor de x aumenta; já nas funções
$f(x) = (0{,}2)^x$ e $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, a imagem diminui conforme o valor de x aumenta.

Páginas 22-23

Para pensar e discutir

1. Não, pois $f(2m) = 2 \cdot 5^{2m}$ e
$[f(m)]^2 = (2 \cdot 5^m)^2 = 4 \cdot 5^{2m}$.

2. $(0{,}64)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{64}{100}\right)^{\frac{3}{2}} = \left[\left(\frac{8}{10}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} =$

$= \left(\frac{8}{10}\right)^3 = \frac{512}{1\,000} = 0{,}512$

Atividades

24.

a) $f(0) = 4^0 = 1$

b) $f(3) = 4^3 = 64$

c) $f(4) = 4^4 = 256$

25. $f(3) \cdot g(3) = 25^3 \cdot 25^{-3} = 25^0 = 1$

26. Cada termo, desde o segundo, é o anterior multiplicado por π.

$a_n = a_{n-1} \cdot \pi$

27.

a) $f(0{,}301) \cong 2$

b) $S = 0{,}001 + 0{,}01 + 0{,}1 + 1 + 10 + 100 + 1\,000 = 1\,111{,}111$

28. $f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = 2$

$f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$

$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$S = f(-1) + f(-2) + f(1) + f(2) =$

$= 2 + 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 6{,}75$; $S = 6{,}75$

29.

a) $f(1) + g(1) = 2^{3^1} + (2^3)^1 = 16$

b) $f(2) - g(2) = 2^{3^2} - (2^3)^2 = 448$

30. $t = 0 \Rightarrow N(0) = 400 = CA^0 = C$

$t = 3 \Rightarrow N(3) = 50$

$50 = N(3) = 400 \cdot A^3$

$A^3 = \frac{50}{400} \Rightarrow A^3 = \frac{1}{8}$

$A = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{1}{2}$

$N(4) = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 400 \cdot \frac{1}{16}$

$N(4) = 25$; 25 indivíduos

Alternativa **c**.

31. $s(2) = 1\,800 \cdot (1{,}03)^2 = 1\,909{,}62$

Alternativa **e**.

32. $T_{vendas} = V(4) + V(5) + V(6) =$

$= 5 + 2^4 + 5 + 2^5 + 5 + 2^6 =$

$= 15 + 16 + 32 + 64 =$

$= 127$; 127 refrigerantes

Alternativa **c**.

33. Após 20 minutos, temos

$p\left(\frac{1}{3}\right) = 40 \cdot 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 40 \cdot 2 = 80,$

em milhares de bactérias. Logo, em 20 minutos, a população de bactérias dobrou.

Alternativa **d**.

Página 24

Para pensar e discutir

1. Uma possível resposta é que o aumento do número de casos é extremamente acentuado, contrastando com o aumento ocorrido nos períodos anteriores.
2. Não. Para ser um crescimento linear o gráfico deve ser uma linha reta.

Página 25

Para pensar e discutir

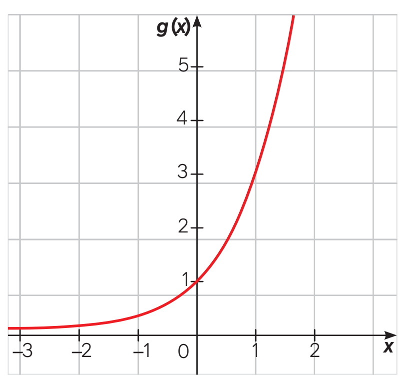
1. Na função $f(x) = 2^x$.
2. Na função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
3. Ambas têm o domínio $\mathbb{R}$ o contradomínio $\mathbb{R}_+^*$ e o conjunto imagem $\mathbb{R}_+^*$.
4. Os dois gráficos interceptam o eixo das ordenadas no ponto (0,1). Nenhum dos gráficos intercepta o eixo das abscissas.

Página 26

Para explorar

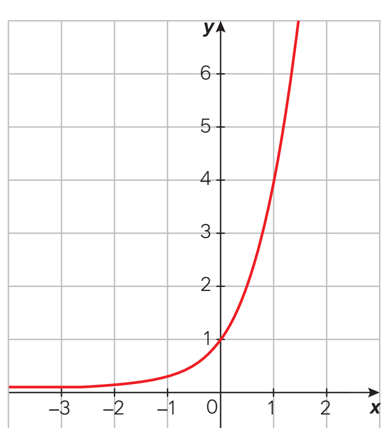
1.

a) $f(x) = 3^x$



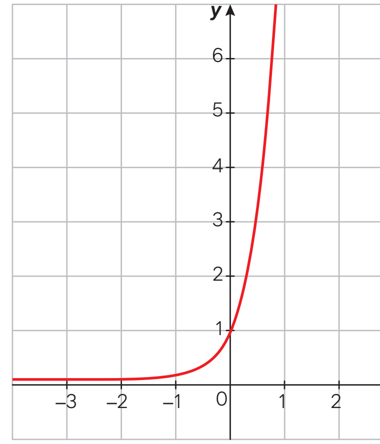
Tarcísio Garbellini

b) $g(x) = 4^x$



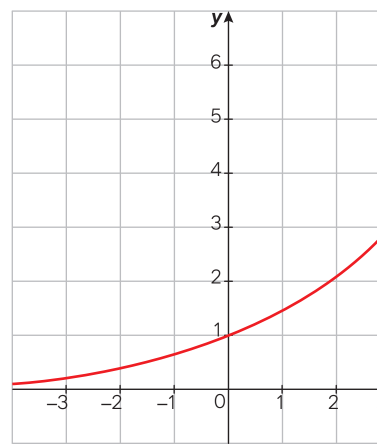
Reinaldo Vignati

c) $h(x) = 10^x$



Reinaldo Vignati

d) $m(x) = (1{,}5)^x$



Tarcísio Garbellini

2.

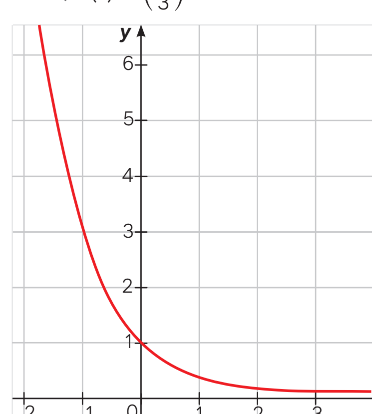
a) Os valores de y aumentam também. As funções são crescentes.

b) Sim, pelo gráfico é possível observar que valores diferentes de x têm imagens diferentes.

c) Nas quatro funções, o conjunto imagem é $\mathbb{R}_+^*$.

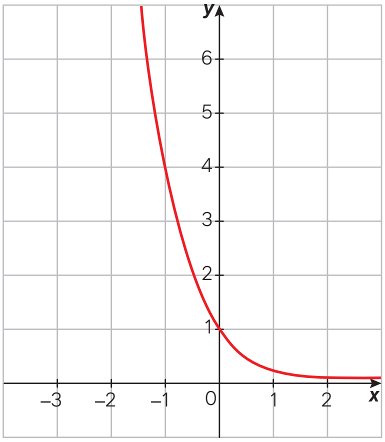
3.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

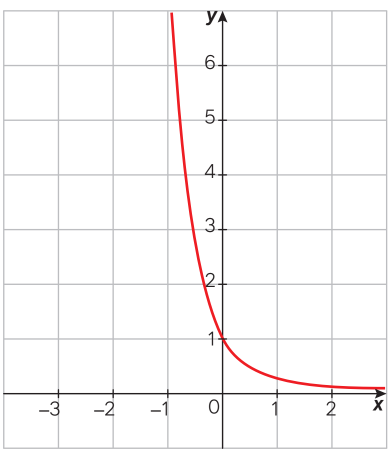


Reinaldo Vignati

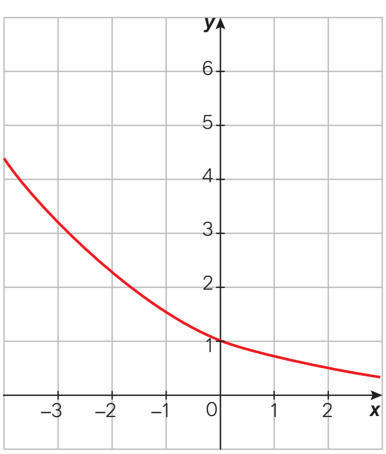
b) $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$



c) $h(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$



d) $m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$



4.

a) Os valores de y diminuem. As funções são decrescentes.

b) Sim, pelo gráfico é possível observar isso.

c) Nas quatro funções, o conjunto imagem é $\mathbb{R}_+^*$.

5. Se $0 < a < 1$, então $m < n \Rightarrow a^m > a^n$.

$a > 1 \Rightarrow m < n \Rightarrow a^m < a^n$

Logo, para valores de a entre zero e 1 a função é decrescente e para valores de a maiores que 1 a função é crescente.

Página 27

Para pensar e discutir

1. A função é crescente, pois conforme observado nas características de uma função exponencial, se a base é maior que um, a função é crescente.

2. O único valor de x é 2, pois $7^2 = 49$. Ele é único, visto que a função exponencial é injetora.

3. A função é decrescente, pois conforme observado nas características de uma função exponencial, se a base é um número entre zero e um, a função é decrescente.

4. Não existe valor de x tal que a imagem seja negativa na função, já que funções exponenciais da forma $f(x) = a^x$, com domínio em $\mathbb{R}$ e a sendo um número real positivo, têm imagem definida nos reais positivos.

Página 28

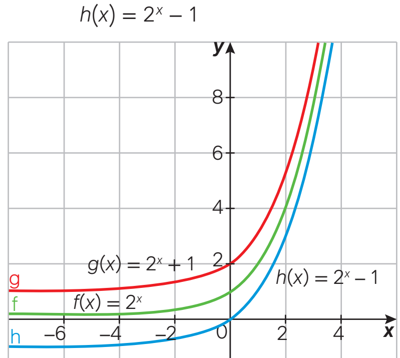
Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Conforme a propriedade fundamental das funções exponenciais, se $a^x = a^y$, então $x = y$, desde que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Para explorar

1.

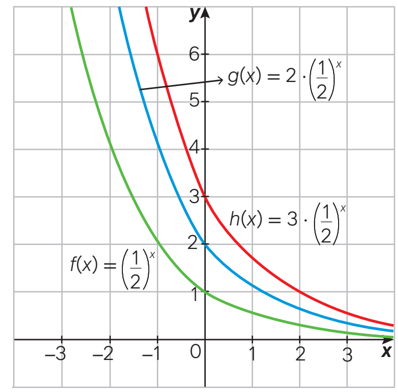
a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^x + 1$ e $h(x) = 2^x - 1$



b) Sugestão de resposta: Os estudantes podem dizer que o gráfico da função g é o gráfico da função f com um deslocamento de 1 unidade para cima em relação ao eixo das abscissas. Já na função h, o deslocamento é de 1 unidade para baixo em relação ao eixo das abscissas.

2.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $h(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$



b) Sugestão de resposta: Os estudantes podem afirmar que, ao multiplicar por 2 ou por 3 a função f para obter as funções g e h, a curva de f não foi deslocada, mas sofreu uma mudança na forma.

3. Incentive os estudantes a elaborar problemas de diferentes contextos.

Página 29

Atividades

34.

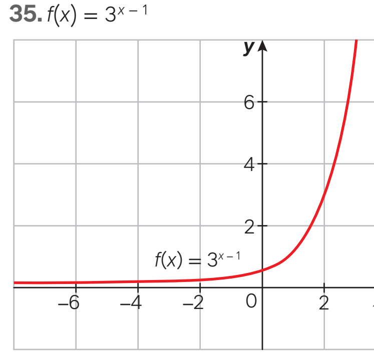
a) Crescente.

b) Crescente.

c) Decrescente.

d) Decrescente.

35. $f(x) = 3^{x-1}$



a) O conjunto imagem é $\mathbb{R}_+^*$.

b) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

c) $3^{1-1} = 3^0 = 1$

d) Não existe $x \in \mathbb{R}$ que anule a função.

36.

a) $N(3) = 100 \cdot 2^{\frac{3}{3}} = 100 \cdot 2 = 200$; 200 bactérias

b) $51\,200 = N(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$

$512 = 2^{\frac{t}{3}} \Rightarrow 2^9 = 2^{\frac{t}{3}}$

$t = 27$; 27 horas

37. Do gráfico, tem-se que

$10^4 = f(0) = a \cdot b^0 \Rightarrow a = 10^4$.

Também é possível observar que

$f(3) = a \cdot b^3 = 10^4 \cdot 8$

$b^3 = 8 \Rightarrow b = 2$

Assim, quando

$t = 30$ minutos $= \frac{1}{2}$ hora:

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 10^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} =$

$= 10^4 \cdot \sqrt{2} \cong 14\,000$;

14 000 bactérias

Então, o número de bactérias na amostra é de aproximadamente 14 000.

Alternativa **d**.

38.

a) R$ 75.000

b) $\frac{1}{8} \cdot 75\,000 = 75\,000 \cdot 4^{-0,2t}$

$\frac{1}{8} = 4^{-0,2t}$

$2^{-3} = 2^{-0,4t}$

$-3 = -0,4^t \Rightarrow 3 = 0,4t$

$t = 7,5$; 7,5 anos

39.

a) $N(0) = 256 \cdot 2^{0,75 \cdot 0} =$

$= 256 \cdot 1 = 256$ bactérias.

b) $2\,048 = N(t) = 256 \cdot 2^{0,75 \cdot t}$

$8 = 2^{0,75 \cdot t} \Rightarrow 2^3 = 2^{0,75 \cdot t}$

$t = \frac{3}{0,75} = 4$; 4 horas

40. $2,5 = q(t) = 10 \cdot 2^{-\frac{t}{4}}$

$\frac{1}{4} = 2^{-\frac{t}{4}} \Rightarrow 2^{-2} = 2^{-\frac{t}{4}}$

$-2 = -\frac{t}{4} \Rightarrow t = 8$; 8 horas

Alternativa **e**.

41. $125 = f(3) = 8 \cdot a^3 \Rightarrow \frac{125}{8} = a^3$

$\frac{5}{2} = a$

$\frac{f(4)}{f(5)} = \frac{8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4}{8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^5} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^4}{\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4} =$

$= \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$

Alternativa **d**.

Página 30

Para pensar e discutir

1. A partir do gráfico dado, as soluções são: $x = 0$ para $3^x = 1$, $x = 1$ para $3^x = 3$ e $x = 2$ para $3^x = 9$.

2. De início deve-se verificar como o estudante procede, diante de uma equação exponencial, para obter a solução.

Página 31

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Na etapa *a*, usou a propriedade $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$; na etapa *b*, colocou o 3^x em evidência.

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Fatorando o primeiro membro da igualdade, isto é:

$5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

$5^x \cdot 5^x - (5 + 1) \cdot 5^x + 5 = 0$

$5^x \cdot 5^x - 5^x \cdot 5 - 5^x + 5 = 0$

$5^x \cdot (5^x - 5) - (5^x - 5) = 0$

$(5^x - 5) \cdot (5^x - 1) = 0$

$5^x - 5 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou

$5^x - 1 = 0$

$x = 0$

Para pensar e discutir

1. $V(0) = 10\,000 \cdot (0,9)^0 =$

$= 10\,000 \cdot 1 = 10\,000$

2. Significa reduzir esse valor em 10%.

Página 32

Atividades

42.

a) $4^x = 128 \Rightarrow 2^{2x} = 2^7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

b) $3^{2x-1} = 3^0 \Rightarrow 2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

c) $25^{2y} = 125 \Rightarrow (5^2)^{2y} = 5^3$

$2 \cdot 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{4}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-m} = 27^{-1} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} =$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow m = -3$

e) $8^{2x} = 16 \Rightarrow (2^3)^{2x} = 2^{3 \cdot 2x} = 2^4$

$6x = 4 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

f) $81^{3x} = 27 \Rightarrow (3^4)^{3x} = 3^3$

$3^{4 \cdot 3x} = 3^3 \Rightarrow 3 = 12x \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

43. A equação não apresenta solução real, pois a função $f(x) = 2^x$ tem seu conjunto imagem $\mathbb{R}^*_+$, isto é, não tem imagem negativa.

44.

a) $4^x \cdot (1 + 4^1 + 4^2) = 336$

$4^x \cdot 21 = 336$

$4^x = 16 \Rightarrow x = 2$

b) $2 \cdot 9^x - 9^{x-1} = 17 \Rightarrow 2 \cdot 9^x - 9^{x-1} =$

$= 18 - 1 = 2 \cdot 9 - 1$

$2 \cdot 9^x - 9^{x-1} = 2 \cdot 9 - 1 \Rightarrow x = 1$

45.

a) Não, pois 13 não é uma potência inteira de base 2.

b) Como o conjunto imagem da função exponencial é $\mathbb{R}^*_+$, temos que 13 faz parte desse conjunto, isto é, existe x tal que $f(x) = 13$.

c) $2^3 = 8$ e $2^4 = 16$, assim, a solução está no intervalo [3, 4].

46.

a) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$2^x \cdot (2^x - 4) - (2^x - 4) = 0$

$(2^x - 1) \cdot (2^x - 4) = 0$

$2^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou

$2^x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$S = \{0, 2\}$

b) $9^x - 30 \cdot 3^x + 81 = 0$

$(3^2)^x - 3 \cdot 3x - 27 \cdot 3x + 81 = 0$

$3^x \cdot (3^x - 27) - (3 \cdot 3^x - 81) = 0$

$(3^x - 3) \cdot (3^x - 27) = 0$

$3^x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $3^x - 27 = 0$

$x = 3$

$S = \{1, 3\}$

c) $5^{2x} - 24 \cdot 5^x - 25 = 0$

$(5^x + 1) \cdot (5^x - 25) = 0$

$5^x + 1 = 0$ (não possui solução nos reais)

$5^x - 25 = 0 \Rightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

47. $2^{2x+1} - 2^{x+4} = 2^{x+2} - 32$

$2^{2x+1} - 2^{x+4} - 2^{x+2} + 32 = 0$

$2^x \cdot (2^{x+1} - 2^4) - (2^{x+2} - 2^5) = 0$

$2^x \cdot (2^{x+1} - 2^4) - (2^{x+2} - 2^5) = 0$

$(2^x - 2^3) \cdot (2^{x+1} - 2^2) = 0$

$(2^x - 2^3) = 0 \Rightarrow x = 3$ ou

$(2^{x+1} - 2^2) = 0 \Rightarrow x = 1$

$3 + 1 = 4$

Alternativa **c**.

48. Inicialmente, calcula-se o valor de k quando $x = 0$ e $y = 1$:

$1 = y = 46 - k \cdot 3^{-0,1 \cdot 0}$

$45 = k \cdot 1 = k$

Agora, é necessário encontrar o valor de x quando $y = 31$:

$31 = 46 - 45 \cdot 3^{-0,1 \cdot x}$

$15 = 45 \cdot 3^{-0,1 \cdot x} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3^{0,1 \cdot x}}$

$3^1 = 3^{0,1 \cdot x} \Rightarrow 0,1 \cdot x = 1 \Rightarrow x = 10$

Assim, tem-se que 31 estudantes são contaminados após 10 horas.

49. $\frac{1}{64} = \frac{4 \cdot 2^x}{4^x} = \frac{2^{x+2}}{(2^2)^x} = \frac{2^{x+2}}{2^{2x}}$

$\frac{1}{64} = 2^{x+2-2x}$

$2^{-6} = 2^{2-x}$ $-6 = 2 - x \Rightarrow x = 8$

Alternativa **e**.

50. Pela forma como a função $V(t)$ foi construída, a aplicação dobrará quando o valor de $0,0625 \cdot t$ for igual a 1.

$0,0625 \cdot t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{0,0625} = 16$

Alternativa **c**.

Página 33

Para pensar e discutir

1. Sim. Outra maneira seria dizer que: quanto menor o valor de x, menor o valor de y.
2. Sim. Outra maneira seria dizer que: quanto menor o valor de x, maior o valor de y.
3. Na Situação 1.
4. Na Situação 2.

Páginas 34-35

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: A passagem indicada por (*a*) é justificada pois, sendo a base 2 maior que 1, a função é crescente e a desigualdade se mantém para os expoentes.

Para pensar e discutir

1. A passagem indicada por (*a*) é justificada pois, sendo a base (0,9) entre 0 e 1, a função é decrescente e a desigualdade se inverte para os expoentes.

Atividades

51.

a) $4^x < 1\,024 \Rightarrow 4^x < 4^5 \Rightarrow x < 5$

$S = \{x \in \mathbb{R} / x < 5\}$

b) $0,2^x < 0,04^x \Rightarrow 0,2^x < (0,2)^2$

$0,2^x < 0,2^2 \Rightarrow x > 2$

$S = \{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$

c) $32^x \geq 64 \Rightarrow (2^5)^x \geq 2^6 \Rightarrow x \geq \frac{6}{5}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{6}{5}\right\}$

d) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-x} \leq 216 \Rightarrow 6^x \leq 6^3 \Rightarrow x \leq 3$

$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\}$

52. $3^{x-3} \leq 81 \Rightarrow 3^{x-3} \leq 3^4$

$x - 3 \leq 4 \Rightarrow x \leq 7$

$S = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 7\}$

$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$

53.

a) $1 \leq 2^{x+1} \leq 32 \Rightarrow 2^0 \leq 2^{x+1} \leq 2^5$

$0 \leq x + 1 \leq 5$

$S = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 4\}$

b) Ao todo, 6 números inteiros: $-1, 0, 1, 2, 3$ e 4.

54. $10^x + 10^{x+1} + 10^{x+2} + 10^{x+3} + 10^{x+4} < 11\,111$

$10^x + 10^{x+1} + 10^{x+2} + 10^{x+3} + 10^{x+4} < 1 + 10 + 100 + 1\,000 + 10\,000$

$10^x + 10^{x+1} + 10^{x+2} + 10^{x+3} + 10^{x+4} < 10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4$

Assim, pode-se observar que a inequação é válida para

$S = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$

55. $(0,5)^{x^2} \geq (0,25)^{2x}$

$(0,5)^{x^2} \geq \left[(0,5)^2\right]^{2x}$

$(0,5)^{x^2} \geq (0,25)^{4x}$

$x^2 \leq 4x \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$

$S = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 4\}$

Alternativa **a**.

56. $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} > \left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

$2^{-(3x+5)} > 2^{-2x}$

$3x - 5 < 2x \Rightarrow x < 5$

$S = \{x \in \mathbb{R} / x < 5\}$

Alternativa **b**.

57. O número máximo de horas que um animal pode esperar para receber a vacina e sobreviver após ser infectado é dado pela seguinte equação:

$512\,000 = N(t) = 1\,000 \cdot 2^t$

$512 = 2^t \Rightarrow t = 9$; 9 horas

Alternativa **b**.

58. Queremos encontrar t tal que

$64\,000 = f(t) = 1\,000 \cdot 2^{\frac{2 \cdot t}{3}}$. Logo:

$64\,000 = 1\,000 \cdot 2^{\frac{2 \cdot t}{3}}$

$1\,000 \cdot 2^6 = 1\,000 \cdot 2^{\frac{2 \cdot t}{3}}$

$6 = \frac{2 \cdot t}{3} \Rightarrow t = 9$; 9 dias

Alternativa **a**.

59. Queremos encontrar o número de dias $t \in \mathbb{N}$ tal que

$63\,000 < 64\,000 \cdot (1 - 2^{-0,1 \cdot t})$

Dividindo os termos por 1 000 e resolvendo a desigualdade:

$63 < 64 \cdot (1 - 2^{-0,1 \cdot t})$

$64 - 1 < 2^6 \cdot (1 - 2^{-0,1 \cdot t})$

$(1 - 2^{-6}) < (1 - 2^{-0,1 \cdot t})$

$-6 < -0,1 \cdot t \Rightarrow t > 60$; 60 dias

Alternativa **d**.

Para explorar

1. Resposta possível: cada termo da sequência a partir do primeiro é o antecedente multiplicado por 10.

2.

a) Calculando $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ com os valores dados, obtém-se, utilizando uma calculadora, os seguintes resultados nos primeiros 6 dígitos:

$f(1) = 2$;

$f(10) = 2,593742$;

$f(100) = 2,704814$;

$f(1\,000) = 2,716924$;

$f(10\,000) = 2,718146$;

$f(100\,000) = 2,718268$;

$f(1\,000\,000) = 2,718280$;

$f(10\,000\,000) = 2,718282$;

$f(100\,000\,000) = 2,718282$.

b) Não.

c) Até a 4ª casa decimal, eles são iguais.

3. O número

$e^1 = e = 2,71828182845904...$

Uma conclusão possível é que esses valores são muito próximos, pois

$f(100\,000\,000) = 2,7182818146763...$

4. A conclusão é que esses valores ficarão cada vez mais próximos.

3. Logaritmos

Página 36

Para pensar e discutir

1. $2^x = 8 \Rightarrow x = 3$
2. $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$
3. Sugestão de resposta: Não é possível determinar a solução, apesar de que, conforme o gráfico, é possível dizer que está situada entre os números 2 e 3.

Página 37

Para pensar e discutir

1. $\log 100\,000 = \log_{10} 100\,000 = \log_{10} 10^5 = 5 \cdot \log_{10} 10 = 5$
2. Pela definição, $\log_a a$ é o expoente ao qual elevamos o a para obter a potência de a. Esse expoente é 1, pois $a^1 = a$.

   Além disso, $\log_a 1$ é o expoente ao qual elevamos a para obter a potência 1. Esse expoente é 0, pois $a^0 = 1$.

   Por fim, $\log_a a^n$ é o expoente ao qual elevamos a para obter a potência a^n. Esse expoente é n.

Páginas 38-39

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Respondendo às perguntas, "10 elevado a quanto é igual a 10 000?"; "7 elevado a quanto é igual a $\frac{1}{49}$?" e "3 elevado a quanto é igual a 243?"; depois de substituir os valores descobertos, calcular o valor de *M*.

Atividades

60.

a) $\log_5 125 = x \Rightarrow 5^x = 125 \Rightarrow 5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$

b) $\log_2 128 = x \Rightarrow 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$

c) $\log_{14} 1 = x \Rightarrow 14^x = 1 \Rightarrow 14^x = 14^0 \Rightarrow x = 0$

d) $\log_7 \sqrt{7} = x \Rightarrow 7^x = \sqrt{7} \Rightarrow 7^x = 7^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

e) $\log_3 9\sqrt{3} = x \Rightarrow 3^x = 9\sqrt{3} \Rightarrow 3^x = 3^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

f) $\log_{32}\left(\frac{1}{64}\right) = x \Rightarrow 32^x = \frac{1}{64} \Rightarrow 32^x = \frac{1}{32 \cdot 2}$

$32^x = 32^{-1} \cdot 32^{-\frac{1}{5}} \Rightarrow x = -\frac{6}{5}$

g) $\log 0{,}0001 = x \Rightarrow 10^x = 0{,}0001 \Rightarrow 10^x = 10^{-4} \Rightarrow x = -4$

h) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{9}{4}\right) = x \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3^2}{2^2}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^2 \Rightarrow x = -2$

61.

a) $3^x = 7 \Rightarrow x = \log_3 7$

b) $\pi^x = 9 \Rightarrow x = \log_\pi 9$

c) $10^x = 2 \Rightarrow x = \log_{10} 2$

d) $4^x = 10 \Rightarrow x = \log_4 10$

62.

a) $\log 2 \cong 0{,}301$

b) $\log 3 \cong 0{,}477$

c) $\log 5\,000 \cong 3{,}699$

d) $\log 7\,008 \cong 3{,}846$

63.

a) 3ª consequência: $\log_a a^n = n \Rightarrow \log_3 3^{22} = 22$

b) 4ª consequência: $a^{\log_a b} = b \Rightarrow 5^{\log_5 201} = 201$

c) 2ª consequência: $\log_a a = 1 \Rightarrow \log_7(\log_7 7) = \log_7 1$

1ª consequência: $\log_a 1 = 0 \Rightarrow \log_7 1 = 0$

d) 2ª e 3ª consequências:

$\log_{10}(\log_{10} 10^{10}) = \log_{10} 10 = 1$

64.

a) $\log_4 8 = y \Rightarrow 4^x = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$m = 16^{\log_4 8} = 16^{\frac{3}{2}} = (2^4)^{\frac{3}{2}} = 2^6 = 64$

b) $m = 16^{\log_4 8} = (4^2)^{\log_4 8} = (4^{\log_4 8})^2 = 8^2 = 64$

65.

a) $x^1 = 10 \Rightarrow x = 10$

b) $\log_x 400 = 2 \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = 20$

c) $\log_a\left(\frac{1}{16}\right) = 2 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

d) $\log_a\left(\frac{1}{16}\right) = -2 \Rightarrow a^{-2} = \frac{1}{16} \Rightarrow (a^{-1 \cdot 2})^{-1} = \left(\frac{1}{16}\right)^{-1}$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

e) $\log_a 1 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$ e $a \neq 1$

f) $\log_a 10 = 2 \Rightarrow a^2 = 10 \Rightarrow a = \sqrt{10}$

66. Seja x o número inicial. Foram feitas as seguintes operações: $5 \cdot x$, $\log_{10} 5 \cdot x$ e, por fim, $5 \cdot \log_{10} 5 \cdot x$, tendo como resultado o número 10.

$10 = 5 \cdot \log_{10}(5 \cdot x) \Rightarrow 2 = \log_{10}(5 \cdot x) \Rightarrow 10^2 = 5 \cdot x \Rightarrow x = 20$

Alternativa **a**.

67. $\text{pH} = 5 = -\log_{10} x \Rightarrow 5 = -\log_{10} x = \log_{10} x^{-1}$

$x = (10^{-1})^5 = 10^{-5}$

Alternativa **b**.

68. $\log_2 16 = x \Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$

$x^2 - 5x + 5 = 4^2 - 5 \cdot 4 + 5 = 16 - 20 + 5 = 1$

Alternativa **b**.

69. $24^{n+1} = 3^{n+1} \cdot 16 \Rightarrow (3 \cdot 8)^{n+1} = 3^{n+1} \cdot 16$

$3^{n+1} \cdot 8^{n+1} = 3^{n+1} \cdot 16$

$(2^3)^{n+1} = 2^4$

$2^{3n+3} = 2^{3n} \cdot 2^3 = 2^4 \Rightarrow 2^{3n} = 2$

$3n = 1 \Rightarrow n = \frac{1}{3}$

$\log_3 n = \log_3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$

Alternativa **b**.

Para pensar e discutir

1. Adição dos expoentes: $3 + 5 = 8$.
2. O $\log_3 6\,561$ é a soma de $\log_3 27$ com $\log_3 243$.
3. Utilizando o quadro apresentado:

$\frac{2\,187}{243} = \frac{3^7}{3^5} = \frac{3^5 \cdot 3^2}{3^5} = 3^2 = 9$

$\log_3 2\,187 - \log_3 243 = 7 - 5 = 2 = \log_3 9$

Página 40

Vídeo - Terremotos

Apresente o vídeo *Terremotos* para os estudantes. O vídeo aborda a escala de magnitude, o cálculo da energia liberada e como esses eventos são quantificados matematicamente, ajudando os estudantes a compreender a relação entre os cálculos e os impactos reais de um terremoto.

Página 41

Para pensar e discutir

1. Os estudantes devem observar que os valores aproximados são os mesmos.

$\log 60 \cong 1{,}778$; $\log 2{,}5 \cong 0{,}398$

2. Como não conhecemos log 5 e estamos na base 10, ao escrever 5 como $\frac{10}{2}$, podemos empregar a propriedade do logaritmo do quociente e expressar log 5 como log 10 – log 2.
3. Uma possibilidade de resposta é:

$\log\left(\frac{25}{10}\right) = \log 25 - \log 10 = \log\left(\frac{100}{4}\right) - \log 10 =$

$= \log 100 - \log 4 - \log 10 = \log 100 - \log(2 \cdot 2) - \log 10 =$

$= \log 100 - (\log 2 + \log 2) - \log 10$

$\log\left(\frac{25}{10}\right) \cong 2 - 0{,}301 \cdot 2 - 1 = 0{,}398$

Para pensar e discutir

1. Para explicar a passagem I, podemos usar logaritmos para "trazer o expoente para baixo", permitindo que a equação seja resolvida algebricamente. Já para justificar a passagem II, usamos a propriedade dos logaritmos que afirma que:
$\log_b(a^c) = c \, . \log_b a$
2. $2^{2,3222} \cong 5,00025 \cong 5$

Páginas 42-43

Carrossel de imagens – Logaritmos na Astronomia

Apresente o carrossel de imagens, que explora a aplicação dos logaritmos na Astronomia, abordando como essa ferramenta matemática ajuda a calcular distâncias estelares e a medir a magnitude dos objetos celestes.

Atividades

70.

a) $\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2 \cong 3 \cdot 0,3 = 0,9$

b) $\log 12 = \log(3 \cdot 4) = \log 3 + \log 4 = \log 3 + \log(2 \cdot 2) =$
$= \log 3 + 2 \cdot \log 2 \cong 0,48 + 0,6 = 1,08$

c) $\log 3,2 = \log(32 \cdot 10^{-1}) = \log 32 + \log 10^{-1} =$
$= \log 2^5 - \log 10 \cong 5 \cdot 0,3 - 1 = 0,5$

d) $\log 500 = \log\left(\frac{10}{2} \cdot 100\right) = \log\left(\frac{10}{2}\right) + \log 100$
$\log 500 = \log 10 - \log 2 + \log 100 \cong 1 + 2 - 0,3 = 2,7$

e) $\log \sqrt{6} = \log \sqrt{2 \cdot 3} = \log(2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (\log 2 + \log 3)$
$\log \sqrt{6} \cong \frac{1}{2} \cdot (0,3 + 0,48) = 0,39$

f) $\log 0,02 = \log(2 \cdot 10^{-2}) = \log 2 - 2 \cdot \log 10$
$\log 0,02 \cong 0,3 - 2 = -1,7$

71. $\log_{11}\left(\frac{5 \cdot 3^7}{2^4}\right) = \log_{11}(5 \cdot 3^7) - \log_{11} 2^4 =$
$= \log_{11} 5 + \log_{11} 3^7 - \log_{11} 2^4 =$
$= \log_{11} 5 + 7 \cdot \log_{11} 3 - 4 \cdot \log_{11} 2$

72.

a) $\log_{10}\left(\frac{A^2B}{C^3}\right) = \log_{10}(A^2B) - \log_{10} C^3 =$
$= \log_{10} A^2 + \log_{10} B - \log_{10} C^3 =$
$= 2 \cdot \log_{10} A + \log_{10} B - 3 \cdot \log_{10} C =$
$= 2 \cdot 3 + 7 - 3 \cdot (-2) = 6 + 7 + 6 = 19$

b) $\log_{10}\left(\frac{AB^4}{C}\right) = \log_{10}(A \cdot B^4) - \log_{10} C =$
$= \log_{10} A + \log_{10} B^4 - \log_{10} C =$
$= \log_{10} A + 4 \cdot \log_{10} B - \log_{10} C =$
$= 3 + 4 \cdot 7 - (-2) = 3 + 28 + 2 = 33$

73. $\log 2 \cong 0,301$ e $\log 3 \cong 0,477$:

a) $\log 7^2 = 2 \cdot \log 7$. Usando como aproximação para $7^2 = 49 \cong 50$:
$2 \cdot \log 7 = \log 7^2 \cong \log 50 = \log(10 \cdot 5) = \log 10 + \log 5$
$\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 \cong 1 - 0,301 = 0,699$
$\log 50 = \log 10 + \log 5 \cong 1 + 0,699 = 1,699$
$2 \cdot \log 7 \cong 1,699 \Rightarrow \log 7 \cong \frac{1,699}{2} = 0,845 \Rightarrow 7 \cong 10^{0,845}$

b) $\log 18 = \log(2 \cdot 9) = \log(2 \cdot 3^2) = \log 2 + \log 3^2 =$
$= \log 2 + 2\log 3 \cong 1,255 \Rightarrow 18 \cong 10^{1,255}$

c) $\log 257 \cong \log 256 = \log 4^4 = 4 \cdot \log 4 = 4 \cdot \log(2 \cdot 2) =$
$= 4 \cdot (\log 2 + \log 2) \cong 4 \cdot (0,301 + 0,301) = 2,408$
$257 \cong 10^{2,410}$

d) $\log 9\,021 \cong \log 9\,000 = \log(9 \cdot 1\,000) =$
$= \log 9 + \log 1\,000 = \log 3 + \log 3 + \log 1\,000$
$\log 9\,021 \cong 0,477 + 0,477 + 3 = 3,952$
$9\,021 \cong 10^{3,952}$

74. $\log_{10} 20 = \log_{10} 2 \cdot 10 = \log_{10} 2 + \log_{10} 10$
$\log_{10} 20 \cong 0,301 + 1 = 1,301$.
Analogamente, obtém-se os valores de $\log_{10} 200 \cong 2,301$, $\log_{10} 2\,000 \cong 3,301$, $\log_{10} 20\,000 \cong 4,301$ e $\log_{10} 200\,000 \cong 5,301$.

a) A parte decimal dos logaritmos não foi alterada.

b) A parte inteira dos logaritmos foi alterada.

75.

a) $\log_2 x = 2 \cdot \log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 3^2 + \log_2 5 =$
$= \log_2(3^2 \cdot 5) = \log_2 45 \Rightarrow x = 45$

b) $\log_5 x = 3 \cdot \log_5 10 - 2\log_5 2 = \log_5 10^3 - \log_5 2^2 =$
$= \log_5\left(\frac{10^3}{2^2}\right) = \log_5 250 \Rightarrow x = 250$

c) $\log_{10} x = 4 + 2 \cdot \log_{10} 3 - 4 \cdot \log_{10} 2 =$
$= \log_{10} 10\,000 + \log_{10} 3^2 - \log_{10} 2^4$
$\log_{10} x = \log_{10}\left(\frac{10\,000 \cdot 3^2}{2^4}\right) = \log_{10} 5\,625 \Rightarrow x = 5\,625$

76. $\log 288 = \log(2 \cdot 12^2) = \log 2 + \log 12^2 =$
$= \log 2 + 2 \cdot \log 12 = \log 2 + 2 \cdot \log(3 \cdot 4) =$
$= \log 2 + 2 \cdot (\log 3 + \log 4) =$
$= \log 2 + 2 \cdot [\log 3 + \log(2 \cdot 2)] =$
$= \log 2 + 2 \cdot [\log 3 + \log(2 \cdot 2)] =$
$= \log 2 + 2 \cdot (\log 3 + \log 2 + \log 2) =$
$= \log 2 + 2 \cdot \log 3 + 4 \cdot \log 2 = x + 2 \cdot y + 4 \cdot x = 5x + 2y$
Alternativa **b**.

77. $\log_b(m \cdot n) + \log_b\left(\frac{n}{m}\right) =$
$= \log_b m + \log_b n + \log_b n - \log_b m = 2 \cdot \log_b n$
$\log_b(m \cdot n) + \log_b\left(\frac{n}{m}\right) = 2 \cdot \log_b n = 2y$
Alternativa **b**.

Página 44

Análise e contexto

1. "Para multiplicar dois números basta somar seus logaritmos; o resultado é o logaritmo do produto."
"De forma semelhante, para dividir dois números basta subtrair os logaritmos". "Para elevar um número a uma potência basta multiplicar o logaritmo do número pelo expoente."
2. Na Ciência e na Tecnologia, além, é claro, da Astronomia, conforme Kepler.
3. A elaboração de uma tábua de logaritmos.

Página 45

Para pensar e discutir

1. O valor de x é aproximadamente 2,2266.
2. Pode-se representar por $\log_5 36 = \dfrac{\log_{10} 36}{\log_{10} 5}$.
3. Pode-se representar por $\log_5 36 = \dfrac{\log_e 36}{\log_e 5}$.

Página 47

Para pensar e discutir

1. Os logaritmos têm valores inversos.

$$\log_{10} 7 = \frac{\log_7 7}{\log_7 10} = \frac{1}{\log_7 10}$$

2. Os logaritmos são iguais.

$$\log_{3^{400}} 2^{400} = \frac{\log_3 2^{400}}{\log_3 3^{400}} = \frac{400 \cdot \log_3 2}{400 \cdot \log_3 3} = \log_3 2$$

Atividades

78.

a) $\log_7 10 \cong 1{,}183$

b) $\log_{12} 5 \cong 0{,}648$

c) $\log_{20} 100 \cong 1{,}537$

d) $\log_5 3 \cong 0{,}683$

79. $\log_{10} 2 \cong 0{,}30$ e $\log_{10} 3 \cong 0{,}48$

a) $\log_3 2 = \dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \cong \dfrac{0{,}3}{0{,}48} = 0{,}625$

b) $\log_2 10 = \dfrac{\log_{10} 10}{\log_{10} 2} \cong \dfrac{1}{0{,}3} \cong 3{,}33$

c) $\log_{200} 2 = \dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 200} = \dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10}(2 \cdot 100)} =$

$$= \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 2 + \log_{10} 100} \cong \frac{0{,}3}{0{,}3 + 2} \cong 0{,}13$$

d) $\log_9 8 = \dfrac{\log_{10} 8}{\log_{10} 9} = \dfrac{3 \cdot \log_{10} 2}{2 \cdot \log_{10} 3} \cong \dfrac{3 \cdot 0{,}3}{2 \cdot 0{,}48} = 0{,}9375$

80. $x = (\log_3 2) \cdot (\log_4 9) \cdot (\log_8 27) \cdot (\log_{81} 16)$

$$x = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 3^2}{\log_{10} 2^2} \cdot \frac{\log_{10} 3^3}{\log_{10} 2^3} \cdot \frac{\log_{10} 2^4}{\log_{10} 3^4}$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{2 \cdot \log 3}{2 \cdot \log 2} \cdot \frac{3 \cdot \log 3}{3 \cdot \log 2} \cdot \frac{4 \cdot \log 2}{4 \cdot \log 3}$$

$$x = \frac{\log 2 \cdot \log 3 \cdot \log 3 \cdot \log 2}{\log 3 \cdot \log 2 \cdot \log 2 \cdot \log 3} = 1$$

81. $x = \log_3 a = \dfrac{\log_9 a}{\log_9 3} = \dfrac{\log_9 a}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \log_9 a = \log_9 a^2 = x$

Alternativa **b**.

82. $\log_4 7 = \dfrac{\log_{16} 7}{\log_{16} 4} = \dfrac{\log_{16} 7}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \log_{16} 7 = \log_{16} 7^2 = \log_{16} 49$

$x - y = \log_4 7 - \log_{16} 49 = \log_{16} 49 - \log_{16} 49 = 0$

Alternativa **e**.

83. $\log_5 18 = \dfrac{\log_{10} 18}{\log_{10} 5} = \dfrac{\log_{10}(2 \cdot 3 \cdot 3)}{\log_{10}\left(\frac{10}{2}\right)} = \dfrac{\log_{10} 2 + 2 \cdot \log_{10} 3}{\log_{10} 10 - \log_{10} 2}$

$\log_5 18 = \dfrac{x + 2y}{1 - x}$

Alternativa **a**.

Para explorar

1. Oriente os estudantes para que aprendam a usar as teclas na ordem correta da calculadora.
2. O mesmo valor inicial atribuído a x.
3. O mesmo valor inicial atribuído a x.
4. Espera-se que os estudantes observem que tanto no item 2 quanto no item 3 “o que uma operação faz a outra desfaz”. Atividade de exploração é conduzir os estudantes a investigar a relação entre uma função exponencial e uma função logarítmica na mesma base, preparando para o estudo que vem a seguir.

4. A função logarítmica

Página 48

Para pensar e discutir

1. Para $x \in \mathbb{R}$, obtém-se o mesmo número.

$\log_{10}(10^x) = x \cdot \log_{10} 10 = x \cdot 1 = x$

2. Para $x \in \mathbb{R}$, obtém-se o mesmo número.

$\ln(e^x) = x \cdot \ln e = x \cdot 1 = x$

3. É fundamental que os estudantes observem, por meio de exemplos, que esse resultado ocorre para qualquer base positiva e diferente de um.

Página 50

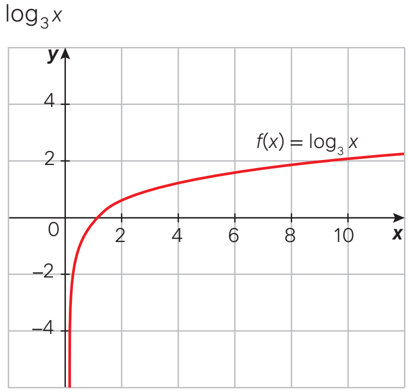
Para pensar e discutir

1. Nas duas funções, embora tenham sido atribuídos poucos valores para x, é possível perceber que o conjunto imagem é $\mathbb{R}$.
2. Na função $f(x) = \log_2 x$, aumentando-se x, aumenta-se o valor de y; já na função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, aumentando-se x, o valor de y diminui.
3. A partir do conceito de logaritmo, temos que se $y = \log_2 x$, então $x = 2^y$.
4. A partir do conceito de logaritmo, temos que se $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, então $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$.

Página 51

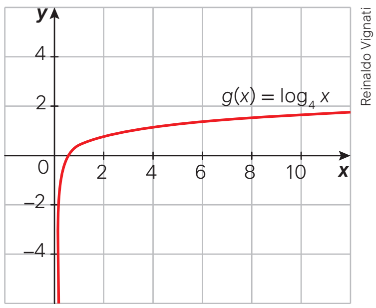
Para explorar

1. $f(x) = \log_3 x$

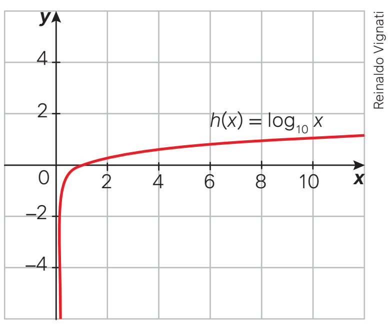


Reinaldo Vignati

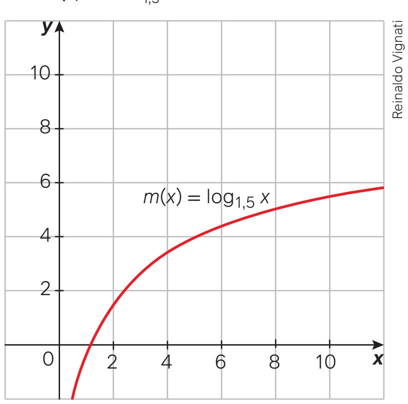
$g(x) = \log_4 x$



$h(x) = \log_{10} x$



$m(x) = \log_{1,5} x$



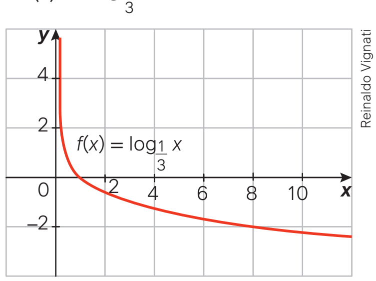
2.

a) Os valores de y aumentam também. As funções são crescentes.

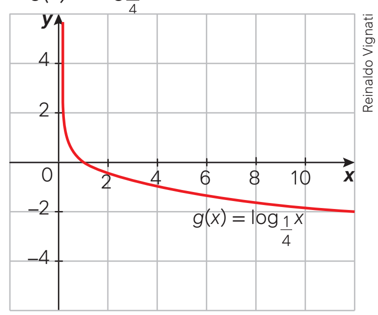
b) Sim, pelo gráfico é possível observar que valores diferentes de x têm suas imagens diferentes.

c) Nas quatro funções o conjunto imagem é $\mathbb{R}$.

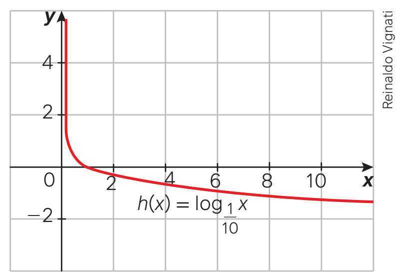
3. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



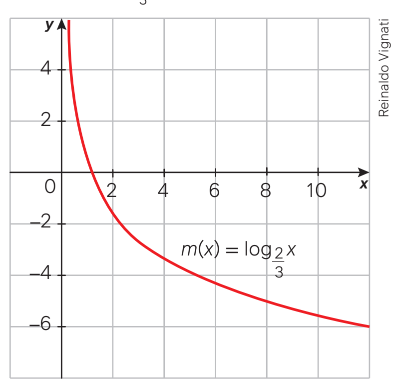
$g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$



$h(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$



$m(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$



4.

a) Os valores de y diminuem. As funções são decrescentes.

b) Sim, pelo gráfico é possível observar que valores diferentes de x têm suas imagens diferentes.

c) Nas quatro funções o conjunto imagem é $\mathbb{R}$.

5. Resposta esperada: Quando a base é maior que 1, a função logarítmica é crescente; quando a base é um número entre 0 e 1, a função logarítmica é decrescente.

Página 52

Para pensar e discutir

1. A função é crescente, pois a base é maior que um.

2. O único valor de x é 49, pois $\log_7 49 = 2$. Ele é único, pois a função é injetora.

3. A função é decrescente, pois a base é um número entre zero e um.

4. $(0,1)^2 = x \Rightarrow x = \frac{1}{100}$

5. Enquanto a partir do ponto (0,1) do gráfico da função exponencial o crescimento é "acentuado", a partir do ponto (1,0) no gráfico da função logarítmica o crescimento é "lento".

Página 54

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Calculamos g(4) e depois calculamos f do resultado obtido

2. Sugestão de resposta: Calculamos f(5) e depois calculamos g do resultado obtido.

Páginas 55-57

Para pensar e discutir

1. Resolvendo a inequação, temos que $x > 5$, portanto $x > 0$. Assim, os valores de x que verificam a inequação são todos aqueles tais que $x > 5$.

2. Resolvendo a inequação, temos que $x \leq 5$ (a base está entre zero e um, deve-se inverter o sentido da desigualdade). Como x é o logaritmando, devemos ter $x > 0$. Assim, os valores que verificam as duas condições são $0 < x \leq 5$.

Atividades

84.

a) Como a base é maior do que 1, a função é crescente.

b) Como a base é maior do que 1, a função é crescente.

c) Como a base é menor do que 1, a função é decrescente.

d) Como a base é menor do que 1, a função é decrescente.

85. Exemplo de respostas: Seja $g(x)$ a função inversa de $f(x)$.

a) $f(x) = 5^x \Rightarrow g(x) = \log_5 x$

b) $f(x) = 0{,}2x \Rightarrow g(x) = \log_{0,2} x$

86.

a) $f(x) = \log_3 x$

$f(1) + f(3) + f(9) + f(27) =$
$= \log_3 1 + \log_3 3 + \log_3 9 +$
$+ \log_3 27 = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$

b) $4 = f(x) = \log_3 x \Rightarrow 3^4 = x = 81$

c) Sim, pois
$f(M \cdot N) = \log_3(M \cdot N) =$
$= \log_3 M + \log_3 N = f(M) + f(N)$.

d) Sim, pois
$f\left(\frac{M}{N}\right) = \log_3\left(\frac{M}{N}\right) =$
$= \log_3 M - \log_3 N = f(M) - f(N)$.

87.

a) De acordo com o gráfico:
$2 = f(x) = \log_n 16$
$n^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{n^2} = \sqrt{16} \Rightarrow n = 4$

b) $f(128) = \log_4 128 = \log_4 6(4 \cdot 2) =$
$= \log_4 64 + \log_4 2 = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

88.

a) $\log_3\left[\log_8(\log_{10} x)\right] = -1$
$3^{-1} = \log_8(\log_{10} x) = \frac{1}{3}$
$8^{\frac{1}{3}} = \log_{10} x = 2$
$10^2 = x \Rightarrow x = 100$

b) $(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 12 = 0$

Seja $\log_2 x = y$.
$y^2 + y - 12 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm 7}{2}$
$y = -4$ ou $y = 3$
$\log_2 x = -4 \Rightarrow 2^{-4} = x \Rightarrow x = \frac{1}{16}$
ou $\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 8$

c) $\frac{1}{\log_9 x} + \frac{1}{\log_{24} x} = 3$
$\log_x 9 + \log_x 24 =$
$= \log_x(9 \cdot 24) = \log_x 216 = 3$
$x^3 = 216$
$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{216} \Rightarrow x = 6$

89. Sejam $f(x) = 2 \cdot 3^x$ e $g(x) = \log_3 x$.

a) Pode-se ver que os pontos A e D cruzam a reta perpendicular ao eixo x por onde passa a curva de $g(x)$:
$0 = y = \log_3 x \Rightarrow 3^0 = x \Rightarrow x = 1$
A e D são da forma $(1, y)$.
Os pontos A e B estão na reta perpendicular ao eixo y por onde passa a curva de $f(x)$. Assim:
$y = f(0) = 2 \cdot 3^0 = 2 \cdot 1 \Rightarrow y = 2$.
Portanto, os pontos A e B são da forma $(x, 2)$.
Assim, pode-se obter todos os outros pontos do retângulo $ABCD$:
Pelo que foi feito acima, $A = (1, 2)$.
$B = (\log_3 3x, 2) \in g(x)$
$2 = \log_3 x \Rightarrow 3^2 = x \Rightarrow x = 9$
$B = (9, 2)$
$D = (1, 2 \cdot 3^x) \in f(x)$
$D_y = 2 \cdot 3^1 = 6 \Rightarrow D = (1, 6)$
$C = (B_x, D_y) \Rightarrow C = (9, 6)$

b) $P = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 24$; 24 u.c.
$A = 4 \cdot 8 = 32$; 32 u.a.

90. $f(x) = \log_{10} x$
$f\left(\frac{1}{x}\right) = \log_{10}(x^{-1}) = -\log_{10} x$
$f(100x) = \log_{10}(100x) = \log_{10} 100 +$
$+ \log_{10} x$
$f\left(\frac{1}{x}\right) + f(100x) = -\log_{10} x +$
$+ \log_{10} 100 + \log_{10} x = \log_{10} 100 = 2$
Alternativa **b**.

91. $V_A(t) = V_B(t)$
$\log_2(t + 4) = \log_4(t^2 + 3t + 31) =$
$= \frac{\log_2(t^2 + 3t + 31)}{\log_2 4} =$
$= \frac{1}{2} \cdot \log_2(t^2 + 3t + 31)$
Substituindo na igualdade inicial:
$\log_2(t + 4) = \frac{1}{2} \cdot \log_2(t^2 + 3t + 31)$
$2 \cdot \log_2(t + 4) = \log_2(t + 4)^2 =$
$= \log_2(t^2 + 3t + 31)$
$(t + 4)^2 = t^2 + 3t + 31$
$t^2 + 8t + 16 = t^2 + 3t + 31$
$5t = 15 \Rightarrow t = 3$; 3 s
Alternativa **b**.

92. $\log 13 - \log 4 = \log\left(\frac{13}{4}\right) = \log 3{,}25$
$f(x) = \log(x + 1)$
$\log 3{,}25 = \log(2{,}25 + 1) = f(2{,}25)$
Verificando o ponto $x = 2{,}25$ no gráfico, observa-se que ele equivale a aproximadamente 0,5.
Alternativa **a**.

93. $Q(t) = 100 \cdot 5^{-0{,}3 \cdot t}$
$Q(0) = 100 \cdot 5^{-0{,}3 \cdot 0} = 100 \cdot 5^0 = 100$;
100 g/L;
$100 - 50 = 50 = Q(t)$
$\log 50 = \log 100 \cdot 5^{-0{,}3 \cdot t}$
$\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 50 =$
$= \log 5 + \log 10 \cong 0{,}7 + 1 = 1{,}7$
$\log 10 \cdot 5^{-0{,}3 \cdot t} = \log 100 +$
$+ \log 5^{-0{,}3 \cdot t} = 2 + (-0{,}3t) \cdot \log 5 \cong$
$\cong 2 - 0{,}21 \cdot t$
$\log 50 = \log 100 \cdot 5^{-0{,}3 \cdot t}$
$1{,}7 = 2 - 0{,}21 \cdot t$
$-0{,}3 = -0{,}21 \cdot t \Rightarrow t \cong 1{,}4$; 1,4 horas
Alternativa **d**.

94. Pelo gráfico, tem-se que:
$3 \cdot \log 2 = 4 \cdot \log m \Rightarrow 2^3 = m^4 \; 2^{\frac{3}{4}} = m$
Alternativa **b**.

95. $A = (1, 0)$ e $D = (2, \log_2 2) \Rightarrow D = (2, 1)$
Para obter o ponto C:
$2 = \log_2 x \Rightarrow 2^2 = x \Rightarrow x = 4$
$C = (4, 2)$ e $D = (4, 0)$.

$A = \frac{(2-1) \cdot 1}{2} + \frac{(1+2) \cdot 2}{2}$
$A = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2} = 3{,}5$; 3,5 cm^2
Alternativa **c**.

Página 58

Para pensar e discutir

1. O expoente t aparece dividido por 18 porque o tempo está em dias e os valores da função duplicam a cada 18 dias.
2. O crescimento é extremamente acentuado a partir de determinado momento, o que dificulta a análise da variável no eixo das ordenadas.
3. O crescimento acentuado de algas é em razão do aumento de nutrientes na água. Ocorre por causas naturais, mas também pode ser ocasionado por ações humanas. A pesca ou produção de determinados peixes e frutos do mar pode ser interrompida, impactando no acesso e consumo a esses alimentos tanto na localidade em que se produz como em localidades que os importam.

Página 59

Para pensar e discutir

1. (0, 12).
2. (0, 1,079). A ordenada obtida é o valor aproximado do logaritmo decimal de 12.
3. Incentive os estudantes a elaborar problemas de diferentes contextos. Eles podem, inclusive, buscar na internet possíveis contextos.

Para pensar e discutir

1. $8 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right) \Rightarrow \frac{24}{2} = \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$
$10^{12} = \frac{E}{E_0}$
$\frac{10^{12}}{10^{\frac{21}{2}}} = 10^{12 - \frac{21}{2}} = 10^{\frac{3}{2}} =$
$\sqrt{1\,000} \cong 31{,}6$; aproximadamente 31,6 vezes mais intenso.

Página 61

Infográfico

1. Incentive os estudantes a trocar experiências, relembrando situações que tenham vivido. As estimativas acerca do valor alcançado pelos ruídos relatados devem ter como parâmetro os dados e as situações apresentados no infográfico.

2. Você pode planejar previamente um trabalho conjunto com o professor da área de Ciências da Natureza sobre o assunto.

Páginas 62-65

Atividades

96.

a) $P(1) = 30\,000 \cdot 0{,}9^1 = 27\,000$; 27 000 habitantes

b) $15\,000 = P(t) = 30\,000 \cdot (0{,}9)^t$

$15\,000 = 30\,000 \cdot (0{,}9)^t \Rightarrow \frac{1}{2} = (0{,}9)^t$

$\frac{1}{2} = (0{,}9)^t \Rightarrow \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log(0{,}9)^t$

$\log(2)^{-1} = \log\left(\frac{9}{10}\right)^t \Rightarrow -\log 2 = t \cdot (2 \cdot \log 3 - \log 10)$

Usando $\log 2 \cong 0{,}301$ e $\log 3 \cong 0{,}477$.

$-0{,}301 = t(0{,}477 + 0{,}477 - 1)$

$-0{,}301 = t \cdot (-0{,}046) \Rightarrow t \cong 6{,}6$; 6,6 anos

97.

a) $P(0) = 250\,000 \cdot (1{,}28)^0 = 250\,000$; 250 000 reais

b) $2 \cdot 250\,000 = P(t) = 250\,000 \cdot (1{,}28)^t$

$2 = (1{,}28)^t \Rightarrow \log 2 = \log(1{,}28)^t$

$\log 2 = t \cdot \log\left(\frac{128}{100}\right)$

$\log 2 = t \cdot (\log 128 - \log 100)$

$\log 2 = t \cdot (\log 2^7 - \log 100)$

$0{,}30 = t(7 \cdot 0{,}3 - 2) \Rightarrow t \cong 3$; 3 anos

98.

a) $P(29) = P_0 \cdot 2^{-k \cdot 29} = \frac{1}{2} \cdot P(0) = \frac{1}{2} P_0 \cdot 2^{-k \cdot 0}$

$P_0 \cdot 2^{-k \cdot 29} = \frac{1}{2} P_0 \cdot 2^{-k \cdot 0} \Rightarrow 2^{-k \cdot 29} = \frac{1}{2}$

$\log(2^{-k \cdot 29}) = \log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \log(2^{-k \cdot 29}) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$

$-29 \cdot k \cdot \log 2 = -\log 2 \Rightarrow k = \frac{1}{29}$

b) $P(t) = P_0 \cdot 2^{-k \cdot t} = \frac{1}{5} P(0) \Rightarrow 2^{-k \cdot t} = \frac{1}{5}$

$\log_2(2^{-k \cdot t}) = \log_2\left(\frac{1}{5}\right)$

$\log_2(2^{-k \cdot t}) = \log_2\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow -k \cdot t \cdot \log_2 2 = \log_2\left(\frac{2}{10}\right)$

$-k \cdot t = \log_2 2 - \log_2 10$

$-k \cdot t = \log_2 2 - \log_2 10 \Rightarrow -k \cdot t = 1 - \log_2 10$

$t = \frac{1 - \log_2 10}{-k} \Rightarrow t \cong 67{,}28$; 67,28 anos

99.

a) $\frac{Q(0) - Q(1)}{Q(0)} \cdot 100 = \frac{Q_0 - 0{,}64 \cdot Q_0}{Q_0} \cdot 100$

$\frac{Q_0(1 - 0{,}64)}{Q_0} = 0{,}36 = 36\%$

b) $Q(t) = Q_0 \cdot (0{,}64)^t = \frac{1}{2} Q_0 \Rightarrow 0{,}64^t = \frac{1}{2}$

$\log(0{,}64)^t = \log\left(\frac{1}{2}\right)$

$\log(0{,}64)^t = \log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow t \cdot \log\left(\frac{64}{100}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$

$t \cdot (\log 64 - \log 100) = \log 2^{-1}$

$t = \frac{-\log 2}{6 \cdot \log 2 - \log 100}$

$t \cong \frac{-0{,}3}{1{,}8 - 2} = \frac{-0{,}3}{-0{,}2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$; 1,5 horas

100. $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-x \cdot t} = \frac{Q_0}{2}$

$e^{-x \cdot t} = \frac{1}{2}$

$\ln(e^{-x \cdot t}) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -x \cdot t \cdot \ln e = -1 \cdot \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{x}$

Alternativa **b**.

101.

a) $L(1) = a \cdot e^{b \cdot 1} = 60$ e $L(2) = a \cdot e^{b \cdot 2} = 30$

$\frac{L(1)}{L(2)} = \frac{60}{30} = \frac{a \cdot e^b}{a \cdot e^{b \cdot 2}} \Rightarrow 2 = e^{-b}$

$\ln 2 = \ln(e^{-b}) \Rightarrow b = -\ln 2$

$L(1) = 60 = a \cdot e^{-\ln 2} = a \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a = 120$

b) $L(x) = 120 \cdot e^{-\ln 2 \cdot x} = 15 \Rightarrow e^{-\ln 2 \cdot x} = \frac{1}{8}$

$\ln(e^{-\ln 2 \cdot x}) = \ln\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow -\ln 2 \cdot x \cdot \ln e = \ln(2^{-3})$

$-\ln 2 \cdot x = -3 \cdot \ln 2 \Rightarrow x = 3$

102.

a) $y = 4 \Rightarrow x = 1$ e $y = 6 \Rightarrow x = 2$

(I) $4 = n + \log\left(\frac{k}{2}\right)$ (II) $6 = 2 \cdot n + \log\left(\frac{k}{2}\right)$

Subtraindo (II) de (I) obtêm-se $n = 2$.

$4 = 2 + \log\left(\frac{k}{2}\right) \Rightarrow \log\left(\frac{k}{2}\right) = 2 \Rightarrow \frac{k}{2} = 100 \Rightarrow k = 200$

b) $y = 2 \cdot x + x \Rightarrow \log E = 2 \cdot \log(\Delta\ell) + 2$. Quando $\Delta\ell = 3$:

$\log E = 2 \cdot \log 3 + 2 = \log(3^2) + \log 100 = \log 9 \cdot 100 =$

$= \log 900 \Rightarrow E = 900$

103.

a) $1 = Q(0) = \log_{10}\left(\frac{10^n}{0 + 1}\right) \Rightarrow 10^n = 10 \Rightarrow n = 1$

b) A experiência termina quando $\log_{10}\left(\frac{10}{t + 1}\right) = 0$, que ocorre quando $\frac{10}{t + 1} = 1$.

$t + 1 = 10 \Rightarrow t = 9$; 9 horas

Atividades finais

1.

a) $36^x = (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3)^x = 2^x \cdot 2^x \cdot 3^x \cdot 3^x = m^2 \cdot n^2$

b) $8^x = (2 \cdot 2 \cdot 2)^x = 2^x \cdot 2^x \cdot 2^x = m^3$

c) $81^x = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)^x = 3^x \cdot 3^x \cdot 3^x \cdot 3^x = n^4$

d) $64^x = (2^6)^x = (2^x)^6 = m^6$

2. $y = \frac{2^{67} + 2^{65}}{10} = \frac{2 \cdot 2^{64}(2^2 + 1)}{2 \cdot 5} = 2^{64} = (2^{16})^4 =$

$= \sqrt[4]{(2^{16})^4} = 2^{16} = 2^k \Rightarrow k = 16$

3. $\frac{10^{-2} \cdot 10^{-3}}{10^{-4}} = \frac{\frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{10^3}}{\frac{1}{10^4}} = \frac{10^4}{10^5} = \frac{1}{10}$

Alternativa **d**.

4. Como a função é da forma a^x, com $a > 1$, sabe-se que a função é crescente para todo x pertencente ao domínio.

Como a função é injetora, o gráfico da função cruza o eixo das ordenadas em apenas um ponto (0, 1).

Pela forma como a função está definida, o domínio é $\mathbb{R}_+^*$.

Como a função é crescente, se $f(1{,}2) > f(1{,}3)$, isso implica que $1{,}2 > 1{,}3$, uma contradição.

a) V

b) F

c) F

d) F

5.

a) $2^{x+3} - 62 = 2^{x-2} \Rightarrow 2^{x-2} \cdot (2^5 - 1) = 62$

$2^{x-2} = \frac{62}{31} = 2 \Rightarrow x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$

b) $3^{x-1} + 3^x - 3^{x+1} + 3^{x+2} = 66$

$3^{x-1} \cdot (1 + 3 - 3^2 + 3^3) = 66 \Rightarrow 3^{x-1} = \frac{66}{22} = 3$

$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

c) $25^y + 125 = 30 \cdot 5^y \Rightarrow (5^y - 5) \cdot (5^y - 25) = 0$

$5^y - 5 = 0$ ou $5^y - 25 = 0$

$y = 1$ ou $y = 2 \Rightarrow S = \{1, 2\}$

d) $3 \cdot 7^x + 4 \cdot 7^x = 7^x \cdot (3 + 4) = 7^x \cdot 7 = 7^{x+1} = -49 = -7^2$

$7^{x+1} = -7^2$. Como a função 7^{x+1} tem imagem em $\mathbb{R}_+^*$, 7^{x+1} não pode ser igual *a* -49. Assim, $S = \{\}$.

6.

a) $5^{3x-1} \geq 25 \Rightarrow 5^{3x-1} \geq 5^2 \Rightarrow 3x - 1 \geq 2 \Rightarrow x \geq 1$

b) $(0,3)^{9x-1} < (0,3)^{17} \Rightarrow 9x - 1 > 17 \Rightarrow x > 2$

7. $E = \log_4 1\,024 + \log_{36} 216 = \log_4(4^5) + \frac{\log_6 216}{\log_6 36}$

$E = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5$

8.

a) $\log_{10} 72 = \log_{10}(2^3 \cdot 3^2) = \log_{10} 2^3 + \log_{10} 3^2 =$

$= 3 \cdot \log_{10} 2 + 2 \cdot \log_{10} 3 \cong 3 \cdot 0{,}301 + 2 \cdot 0{,}477 = 1{,}857$

b) $\log_{10} 15 = \log_{10}(3 \cdot 5) = \log_{10}\left(3 \cdot \frac{10}{2}\right) =$

$= \log_{10} 3 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \cong 0{,}477 + 1 - 0{,}301 = 1{,}176$

c) $\log_{10} 2{,}4 = \log_{10}\left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{10}\right) = \log_{10}(2^3 \cdot 3) - \log_{10} 10 =$

$= 3 \cdot \log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1 \cong 0{,}380$

d) $\log_{10} 128 = \log_{10}(2^7) = 7 \cdot \log_{10} 2 \cong 7 \cdot 0{,}301 = 2{,}107$

9.

a) $\log_2 20 = \frac{\log_{20} 20}{\log_{20} 2} = \frac{1}{a}$

b) $\log_6 400 = \frac{\log_{20} 400}{\log_{20} 6} = \frac{2}{\log_{20} 2 + \log_{20} 3} = \frac{2}{a + b}$

10. $\log 10\,000 = 4 \Rightarrow \log 4 \cong 0{,}602 \Rightarrow \log 0{,}602 \cong -0{,}22$

Ou seja, $k = 3$

11.

a) $f(1) + f(2) + f(4) = \log_4 1 + \log_4 2 + \log_4 4 =$

$= 0 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

b) $\log_4 x = 4 \Rightarrow 4^4 = x \Rightarrow x = 256$

12.

I. Falsa. Funções da forma $\log_a x$ com $0 < a < 1$ são decrescentes.

II. Verdadeira. Por definição, funções da forma $\log_a x$ com $0 < a < 1$ tem imagem em $\mathbb{R}$.

III. Falsa. Como $10 > 2$ e f é uma função decrescente, $f(10) < f(2)$.

IV. Verdadeira. $\log_{0,3} 1 = 0$, já que $(0,3)^0 = 1$.

13.

a) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x}{\log_2 8} =$

$= \log_2 x \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 22$

$\log_2 x = \frac{22}{\left(\frac{11}{6}\right)} = \frac{22 \cdot 6}{11} = 12$

$2^{12} = x \Rightarrow x = 4\,096 \Rightarrow S = \{4\,096\}$

b) $(\log x)^2 - 5 \cdot \log x - 6 = 0$

$\log x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 7}{2}$

$\log x = 6 \Rightarrow x = 10^6$ ou $\log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1}$

$S = \{10^6, 10^{-1}\}$

Questões de vestibulares e Enem

14. $1\text{ mm}^3 = (10^{-3}\text{ m})^3 = 10^{-9}\text{ m}^3 = 10^{-9} \cdot 10^3\text{ L} = 10^{-6}\text{ L}$

Milímetro cúbico de sangue:

$\frac{5{,}5}{10^{-6}} = 5{,}5 \cdot 10^6$

Número de glóbulos vermelhos:

$5{,}5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^6 = 27{,}5 \cdot 10^{12} = 2{,}75 \cdot 10^{13}$

Alternativa **e**.

15. $A = 10^{100} \Rightarrow \ell = \sqrt{(10^{100})} = 10^{50}$

$P = 4 \cdot 10^{50} = 4 \cdot 10^2 \cdot 10^{48} = 20^2 \cdot 10^{48}$

Alternativa **d**.

16. $v(t) = 2\,500 \cdot (1{,}03)^t \Rightarrow v(m) = 2\,500 \cdot (1{,}03)^{\frac{m}{12}}$

Alternativa **e**.

17. $54\,675 = Q(t) = 25 \cdot 3^{2t-7} \Rightarrow 2\,187 = 3^{2t-7}$

$3^7 = 3^{2t-7} \Rightarrow 2t - 7 = 7 \Rightarrow t = 7$; 7 dias

Alternativa **b**.

18. 5 dias possuem 120 horas. Então, a amostra *A* decai 6 vezes e a amostra *B* decai 8 vezes.

$\frac{m_A}{m_B} = \frac{100 \cdot 2^{-6}}{100 \cdot 2^{-8}} = \frac{2^8}{2^6} = 2^2 = 4$

Alternativa **d**.

19. Valor hoje:

$200\,000 = V \cdot a^0 = V \Rightarrow V = 200\,000$

Daqui a 4 anos:

$100\,000 = 200\,000 \cdot a^4 \Rightarrow \frac{1}{2} = a^4 \Rightarrow a = 2^{-\frac{1}{4}}$

Daqui a 8 anos:

$200\,000 \cdot \left(2^{-\frac{1}{4}}\right)^8 = \frac{200\,000}{4} = 50\,000$; R$ 50.000,00

Alternativa **c**.

20. $3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 18 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 9 \cdot 3^x + 18 = 0$

$(3^x - 6)(3^x - 3) = 0$

As raízes da equação são $x = 1$ e x tal que $3^x - 6 = 0$

$3^x = 6 \Rightarrow \log_3 3^x = \log_3 6 \Rightarrow x = \log_3 3 + \log_3 2$

$x = 1 + \log_3 2$

Alternativa **a**.

21. $f(x) = 7^{x+1}$ e $g(x) = \log_7 x$

$f(g(x)) = 7^{g(x)+1} = 7^{\log_7 x + 1} = 7^{\log_7 x} \cdot 7 = 7x$

Alternativa **b**.

22. $25 = V(t) = 50 \cdot (0{,}25)^{\frac{t}{6}} \Rightarrow \frac{1}{2} = (0{,}25)^{\frac{t}{6}}$

$0{,}5 = ((0{,}5)^2)^{\frac{t}{6}} \Rightarrow 0{,}5 = (0{,}5)^{\frac{2t}{6}} \Rightarrow 1 = \frac{2t}{6} \Rightarrow t = 3$

Alternativa **b**.

23. $f(x) = \log_a x = \log_2 x$, $g(x) = \log_b x = \log_3 x$ e $h(x) = \log_c x = \log_5 x$. Calculando o log (abc) tem-se que:

$\log (a \cdot b \cdot c) = \log (2 \cdot 5 \cdot 3) = \log (10 \cdot 3) =$

$= \log 10 + \log 3 = 1 + \log 3$

Alternativa **d**.

24. $\log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[4]{x} + \log \sqrt[8]{x} + \log \sqrt[16]{x} = 62$

$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) \log x = \frac{31}{16} \cdot \log x = 62$

$\log x = 32 \Rightarrow x = 10^{32}$

Alternativa **d**.

25. Um gugol possui 101 algarismos. 1 gugolplex $= 10^{\text{gugol}}$ é o número 1 seguido de 10^{100} zeros. Portanto, tem $10^{100} + 1$ algarismo.

Alternativa **d**.

26. $\log_{10} E = K + \frac{3}{2} \cdot M \Rightarrow E = 10^{\left(K + \frac{3}{2} \cdot M\right)}$

$E_7 = 10^{\left(K + \frac{3}{2} \cdot 7\right)} = 10^K \cdot 10^{\frac{21}{2}}$ e $E_3 = 10^{\left(K + \frac{3}{2} \cdot 3\right)} = 10^K \cdot 10^{\frac{9}{2}}$

$\frac{E_7}{E_3} = \frac{10^K \cdot 10^{\frac{21}{2}}}{10^K \cdot 10^{\frac{9}{2}}} = 10^{\frac{12}{2}} = 10^6$

Alternativa **e**.

27. A sequência de teclas digitadas equivale a:

$\sqrt[3]{(((8)^2)^2)^2} = \sqrt[3]{8^{2 \times 2 \times 2}}$

Alternativa **b**.

28. $6\,563 = K(m) = 81 \cdot 3^{\frac{1}{3} \cdot m} + 2 \Rightarrow 6\,563 - 2 = 81 \cdot 3^{\frac{1}{3} \cdot m}$

$6\,561 = 3^8 \Rightarrow 3^8 = 3^4 \cdot 3^{\frac{1}{3} \cdot m} \Rightarrow 3^4 = 3^{\frac{1}{3} \cdot m}$

$4 = \frac{1}{3} \cdot m \Rightarrow m = 12$

Alternativa **d**.

29. $30 = 5 \cdot \log_2(t + 1) \Rightarrow 6 = \log_2(t + 1) \Rightarrow 2^6 = t + 1 \Rightarrow t = 63$

$40 = 5 \cdot \log_2(t + 1) \Rightarrow 8 = \log_2(t + 1) \Rightarrow 2^8 = t + 1 \Rightarrow t = 255$

$255 - 63 = 192$; 192 dias

Alternativa **d**.

CAPÍTULO 2

Sequências numéricas

Objetivos

- Obter os termos de uma sequência com base na fórmula do termo geral ou da fórmula de recorrência.
- Compreender o conceito de progressão aritmética, suas propriedades e a fórmula do termo geral.
- Relacionar progressão aritmética com função afim e com juros simples.
- Compreender a relação matemática para o cálculo da soma dos termos de uma progressão aritmética.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo progressão aritmética.
- Compreender o conceito de progressão geométrica, suas propriedades e a fórmula do termo geral.
- Relacionar progressão geométrica com função exponencial e com juros compostos.
- Compreender a relação matemática para o cálculo da soma dos termos de uma progressão geométrica finita e do limite da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica em que o último termo tende a zero.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo progressão geométrica.

Justificativa

O trabalho com sequências e progressões, tanto as aritméticas como as geométricas, permite a investigação de propriedades e o estabelecimento de conjecturas matemáticas, além de oferecer mais uma oportunidade para a consolidação de habilidades relativas à modelagem e à resolução de problemas.

Competências gerais da BNCC

Competências gerais 2, 4 e 9: na seção **Para explorar**, da página 98, ao explorarem a sequência de construção de um fractal, os estudantes exercitam a curiosidade intelectual, exploram ideias, fazem conexões, elaboram hipóteses, mobilizando assim a **competência 2**. Nessa mesma seção, eles elaboram um algoritmo que representa a formação da sequência apresentada. Utilizam, então, diferentes linguagens, tanto para se comunicar durante a troca de ideias quanto para se expressar por meio de um algoritmo, o que mobiliza a **competência 4**. Como trabalham em grupos, exercitam a empatia, o diálogo e a cooperação, aprendendo a acolher a perspectiva do outro e valorizando a diversidade, o que desenvolve a **competência 9**.

Competência geral 3: na seção **Análise e contexto**, da página 78, os estudantes pesquisam em *sites* de busca alguma fotografia de tecido da cultura afro-brasileira que contenha figuras geométricas formando padrões, o que contribui para o desenvolvimento dessa competência.

Competência geral 5: as tecnologias digitais são utilizadas em diversos momentos ao longo deste capítulo, por exemplo, na página 88, em que os estudantes utilizam uma planilha eletrônica.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 2

EM13MAT203: na seção **Para explorar**, da página 88, os estudantes utilizam uma planilha eletrônica para calcular os valores de uma dívida, mês a mês, contraída a juros simples.

Competência específica 4

EM13MAT405: nas páginas 95 e 96, os estudantes analisam um algoritmo para representar a curva de Koch. Em seguida, na seção **Para pensar e discutir**, desenvolvem outro algoritmo para representar essa mesma curva. Na seção **Para explorar**, da página 98, escrevem um algoritmo para representar o “Floco de neve” de Koch.

Competência específica 5

EM13MAT507: essa habilidade é mobilizada na seção **Para pensar e discutir**, da página 89.

EM13MAT508: essa habilidade é mobilizada nas atividades 72, da página 105, e 88, da página 110.

Temas Contemporâneos Transversais

O TCT **Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras** é abordado na seção **Análise e contexto**, da página 78, em que os estudantes leem um texto sobre a cultura afrodescendente no Brasil e pesquisam em *sites* de busca alguma fotografia de tecido da cultura afro-brasileira que contenha figuras geométricas formando padrões.

Página 67

Abertura

1. Na Progressão Geométrica, o número seguinte é o dobro do anterior, então, temos que $a_n = a_{n-1} \cdot 2$. Na Progressão Aritmética, o número seguinte é obtido adicionando 2 ao anterior, então, temos: $a_n = a_{n-1} + 2$.

2. PG: (02, 04, 08, 16, 32, 64, 128, 256, ...)

PA: (02, 04, 06, 08, 10, 12, 14, 16, ...)

É possível observar que, no início, as progressões possuem valores equivalentes (etapas 1 e 2). Pouco depois, a PG se mostra com o dobro do valor da PA (etapa 4) e na etapa 8 a PG já se mostra 16 vezes maior que a PA. Pode ser feita uma parceria com o professor de Geografia para analisar mais profundamente a teoria de Malthus. Para auxiliá-lo na fundamentação sobre esse assunto, acesse:

Entenda a Teoria Malthusiana de uma vez por todas. Disponível em: https://www.politize.com.br/teoria-malthusiana/. Acesso em: 8 out. 2024.

1. Sequências numéricas

Página 68

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Os correios precisam utilizar números para localização e entrega de correspondências.

2. Sugestão de resposta: De um lado da rua, aparecem números pares e, do outro lado, números ímpares.

3. É importante que alguns estudantes elaborem sequências numéricas e externem para os demais colegas.

Página 70

Para pensar e discutir

1. O sexto termo é 21. Observando a regularidade na sequência, temos que os primeiros números triangulares são (1, 3, 6, 10, 15, 21, ...). Os acréscimos de um termo para o outro vão aumentando 1 unidade. Desse modo, do 1º termo para o 2º termo acrescenta-se 2, do 2º termo para o 3º termo acrescenta-se 3, e assim sucessivamente.

2. Na sequência dos números quadrados, temos que $Q_n = n^2$, sendo n um número natural diferente de zero.
Então: $Q_{10} = 10^2 = 100$

3. O 5º número pentagonal é igual a 35. O padrão é dado pelo acréscimo de 4 do 1º para o 2º termo; de 7 do 2º para o 3º termo; de 10 do 3º para o 4º termo, e assim por diante.

Páginas 71-73

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta:

$(n + 2)^2 - n^2 = 2 \cdot (2n + 2)$

$2 \cdot (2 \cdot 30 + 2) = 124$

Atividades

1.

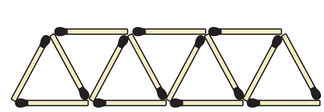
a) 8 quadradinhos. A quantidade de quadradinhos na sequência aumenta de 2 em 2, ou seja, 2, 4, 6, 8, ...

b) Seguindo o mesmo raciocínio do item **a**, 20 é a quantidade de quadradinhos que farão parte da figura 10.

c) $Q_n = 2n$, sendo n um número natural diferente de zero.

2.

a)



Reinaldo Vignati

b)

Figura	Número de palitos	Número de triângulos
1	3	1
2	7	3
3	11	5
4	15	7
5	19	9
6	23	11
7	27	13
8	31	15
9	35	17
10	39	19
11	43	21
12	47	23
13	51	25
14	55	27
15	59	29
16	63	31
17	67	33
18	71	35
19	75	37
20	79	39

3. A curiosidade é que os números seguem um padrão na escrita por extenso – **d**ois, **d**ez, **d**oze, **d**ezesseis, **d**ezessete, **d**ezoito, **d**ezenove – todos começam pela letra **d**. Assim, o próximo número que começará pela letra **d** é **d**uzentos. Portanto, 200 é o número que falta.

4. Incentive os estudantes a pesquisar desafios que estejam relacionados à formação de sequências de números ou mesmo de figuras.

5. A resposta varia conforme a interpretação dos estudantes sobre a formação dos quadrados. Exemplo: localize e conecte os pontos médios do quadrado maior para formar outro quadrado, pinte a área entre eles e repita o processo até o quinto quadrado, pintando as regiões intermediárias.

6.

a) A quantidade de quadrados segue a sequência (10, 12, 14, ...), isto é, a partir da 1ª figura há um acréscimo de 2 quadrados para formar a próxima figura.

b) A regra de formação da sequência é $(n + 3) \cdot 3 - (1 + n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Assim, a 11ª figura possui:
$(11 + 3) \cdot 3 - (11 + 1) = 30$; 30 quadrados.

7.

a) Nos retângulos da 1ª linha, os números a partir do 1 aumentam de 3 em 3. Já os números da 2ª linha são obtidos dos números imediatamente acima e à esquerda da 1ª linha, mas multiplicados por 4.

b) $X = 10 + 3 = 13$ e $Y = 4 \cdot 10 = 40$

8.

a) Cada retângulo é sustentado por dois retângulos abaixo, e o número nele contido é a soma dos números nos dois retângulos que o suportam.

b) $A = 6 + 4 = 10$
$B = 9 + 11 = 20$
$C = 11 + A = 11 + 10 = 21$
$D = 14 + B = 14 + 20 = 34$
$E = B + C = 20 + 21 = 41$
$F = D + E = 34 + 41 = 75$

Página 74

Para pensar e discutir

1. 10º termo: $4 \cdot 9 = 36$;
20º termo: $4 \cdot 19 = 76$

2. $4(n - 1)$

3. O 22º termo da sequência.

Infográfico clicável – Sequências e a música

Apresente o infográfico *Sequências e a música* para os estudantes. Esse recurso didático explora a relação entre matemática e música, focando a série harmônica e como as sequências numéricas estão presentes na composição musical. O infográfico utiliza exemplos de frequências sonoras e notas musicais para demonstrar como as sequências harmônicas são fundamentais na construção de escalas musicais.

Página 75

Podcast – Falando em sequências

Apresente o *podcast Falando em sequências* para os estudantes. Esse recurso explora o mundo das sequências numéricas abordando conceitos como progressão aritmética (PA), progressão geométrica (PG) e a sequência de Fibonacci. O *podcast* ainda discute aplicações práticas dessas sequências, desde cálculos financeiros até criptografia, e convida os ouvintes a refletir sobre padrões presentes no cotidiano.

Para explorar

1. Sugestão de resposta:
$a_n = 2n + 1$ para $n \in \mathbb{N}$.

a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 e 19

b) A sequência é formada pelo dobro do número, n que indica sua posição na sequência, mais 1.

2. Sugestão de resposta:
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$, $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$.

a) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89

b) Nesse momento, você pode caminhar pela sala verificando se as duplas estão de acordo com as resoluções.

3. Anos bissextos são aqueles múltiplos de 4, exceto os que são múltiplos de 100. Entretanto, também são anos bissextos os que são múltiplos de 400.

Páginas 76-77

Atividades

9.

a) (5, 9, 13, 17, 21, 25).

b) (5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, ...)

Portanto, 41 é o 10º termo.

c) Sim. É possível explicar atribuindo valores para n (1, 2, 3 etc.) e verificar se gera a sequência.

10.

a) $(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6})$

b) 1, 2, 3, 4 e 5.

11.

a) (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29)

b) $C_n = (n - 1)^3 \Rightarrow C_{10} = 9^3 = 729$

12.

a) (3, 6, 10, 15, 21)

b) (1, 4, 9, 16, 25)

13.

a) 46 triângulos

b) Resposta possível:
(1, 1 + 3, 4 + 6, 10 + 9, 19 + 12,31 + 15, ...). Cada número (correspondente à quantidade de triângulos) a partir do segundo é o anterior acrescido de um múltiplo de 3, iniciando em 3.

14.

a) (1, 6, 15, 20, 15, 6, 1)

b) (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...)

c) 11ª linha:
(1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1)
$1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 1\,024$

d) Sugestão de resposta: Cada linha começa e termina com o número 1. A partir da terceira linha, os demais números (exceto o primeiro e o último) de cada linha sempre resultam da soma de dois números consecutivos da linha imediatamente acima.

15. Nessa atividade, os estudantes poderão elaborar, por exemplo, sequências formadas pelo número de palitos em cada figura, sequências com o número de quadrados de mesmo tamanho em cada figura, sequências com a medida de áreas etc.

16.

a) $H_1 = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) = 1$
$H_2 = 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1) = 6$
$H_3 = 3 \cdot (2 \cdot 3 - 1) = 15$
$H_4 = 4 \cdot (2 \cdot 4 - 1) = 28$
$H_5 = 5 \cdot (2 \cdot 5 - 1) = 45$
$H_6 = 6 \cdot (2 \cdot 6 - 1) = 66$
$H_7 = 7 \cdot (2 \cdot 7 - 1) = 91$
Os sete primeiros números hexagonais são:
(1, 6, 15, 28, 45, 66, 91)

b) $H_n = n \cdot (2n - 1) \Rightarrow 780 = 2n^2 - n$
$2n^2 - n - 780 = 0$
$$n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-780)}}{2 \cdot 2}$$
$$n = \frac{1 \pm \sqrt{6241}}{4}$$
$$n = -\frac{39}{2} \text{ ou } n = 20$$
n é um número natural não nulo, pois representa a ordem do termo, assim 780 é o 20º número hexagonal.

17. $a_2 = a_1 + 4 = 3 + 4 \Rightarrow a_2 = 7$
$a_3 = a_2 + 4 = 7 + 4 \Rightarrow a_3 = 11$
$a_4 = a_3 + 4 = 11 + 4 \Rightarrow a_4 = 15$
$a_5 = a_4 + 4 = 15 + 4 \Rightarrow a_5 = 19$
$a_6 = a_5 + 4 = 19 + 4 \Rightarrow a_6 = 23$
$a_7 = a_6 + 4 = 23 + 4 \Rightarrow a_7 = 27$
Espera-se que os estudantes percebam que os termos dessa sequência aumentam de 4 em 4.

18. Os termos dessa sequência serão diferentes, porque o valor do primeiro termo foi alterado para 5. Porém, os termos continuarão aumentando de 4 em 4.

19.

a) Exemplo de fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1, \text{ sendo } n \in N \text{ e } n \geq 2 \end{cases}$$

b) Considerando o exemplo do item **a**, temos:

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot a_1 + 1 = 2 \cdot (-2) + 1 \Rightarrow a_2 = -3$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot a_2 + 1 = 2 \cdot (-3) + 1 \Rightarrow a_3 = -5$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot a_3 + 1 = 2 \cdot (-5) + 1 \Rightarrow a_4 = -9$
$n = 5 \Rightarrow a_5 = 2 \cdot a_4 + 1 = 2 \cdot (-9) + 1 \Rightarrow a_5 = -17$
$n = 6 \Rightarrow a_6 = 2 \cdot a_5 + 1 = 2 \cdot (-17) + 1 \Rightarrow a_6 = -33$
$n = 7 \Rightarrow a_7 = 2 \cdot a_6 + 1 = 2 \cdot (-33) + 1 \Rightarrow a_7 = -65$
$n = 8 \Rightarrow a_8 = 2 \cdot a_7 + 1 = 2 \cdot (-65) + 1 \Rightarrow a_8 = -129$
$n = 9 \Rightarrow a_9 = 2 \cdot a_8 + 1 = 2 \cdot (-129) + 1 \Rightarrow a_9 = -257$
$n = 10 \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot a_9 + 1 = 2 \cdot (-257) + 1 \Rightarrow a_{10} = -513$

c) Caso haja discordância, você pode mediar um debate saudável para que exponham seus argumentos.

20.

a) A sequência numérica formada pela quantidade de cubos é (1, 5, 14, 30, 55, ...). A 5ª figura terá a quantidade de cubos da 4ª figura + 5^2, ou seja, 30 + 25 = 55.

b) O primeiro termo é 1 e cada termo, a partir do segundo, é obtido somando o termo anterior ao número da posição elevado ao quadrado. Ou seja, a fórmula de recorrência é $a_n = a_{n-1} + n^2$, sendo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$.

Página 78

Análise e contexto

Aqui temos um momento importante para o desenvolvimento do trabalho de Arte relacionado ao uso de padrões em diversos tipos de manifestações artísticas. O próprio texto aponta algumas sugestões.

As respostas dependem da pesquisa. Este é um momento de valorização da cultura afro-brasileira. É importante envolver os estudantes no trabalho, que pode ser feito em dupla.

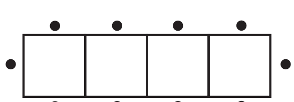
2. Progressão aritmética

Página 79

Para pensar e discutir

1. Ao se juntarem 2 mesas, perdem-se 2 lugares e, ao se juntarem 3 mesas, perdem-se 4 lugares.

2.



Tarcisio Garbellini

10 pessoas

3. Podemos usar o algoritmo $P_n = 2(n + 1)$, sendo n um número natural diferente de zero, que indica o número de mesas.

$30 = 2(n + 1) \Rightarrow 15 = n + 1 \Rightarrow n = 14$; 14 mesas

4. A sequência é (4, 6, 8, 10, 12, ...). Pode-se explicar afirmando que, a partir do número 4 (primeiro termo da sequência), cada termo é o anterior com o acréscimo de 2.

Página 80

Para pensar e discutir

1. A razão deve ser maior que zero ($r > 0$).

2. Progressão aritmética constante.

3. A progressão aritmética é decrescente.

Página 81

Para pensar e discutir

1. $a_{10} = a_1 + 9r$

2. $a_{100} = a_1 + 99r$

3. Representa o 503º termo, a_{503}.

4. O n-ésimo termo é representado por $a_n = a_1 + (n - 1)r$. Essa discussão favorece a compreensão da generalização.

Páginas 83-84

Atividades

21.

a) Temos $a_1 = 20$ e $r = 15 - 20 = -5$. Então:
$a_n = 20 + (n - 1) \cdot (-5) \Rightarrow a_n = -5n + 25$

b) $a_{15} = -5 \cdot 15 + 25 = -50$

22.

a) $a_1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$
$a_2 = 4 \cdot 2 - 1 = 7$
$a_3 = 4 \cdot 3 - 1 = 11$
$a_4 = 4 \cdot 4 - 1 = 15$
Os termos são (3, 7, 11, 15).

b) $a_{25} = 4 \cdot 25 - 1 = 99$

23.

a) $a_{20} = 100 + (20 - 1) \cdot (-7{,}2) = -36{,}8$

b) $a_n = 100 + (n - 1) \cdot (-7{,}2)$
$a_n = -7{,}2n + 107{,}2$

24.

a) Sim, pois cada termo, a partir do segundo, corresponde ao termo anterior adicionando-se a constante $-1 - \sqrt{2}$.

b) $a_1 = 3 - \sqrt{2}, r = -1 - \sqrt{2}$
$a_{20} = \left(3 - \sqrt{2}\right) + (20 - 1) \cdot \left(-1 - \sqrt{2}\right)$
$a_{20} = -16 - 20\sqrt{2}$

25.

a) $a_1 = 102$ e $r = 3$
$a_n = 102 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 99$

b) $a_1 = 2$ e $r = 2$
$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2n$

c) $a_1 = 52$ e $r = 4$
$a_n = 52 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 48$

26.

a) $a_3 = 16$ e $r = -6$
$a_3 = a_1 + (3 - 1) \cdot (-6)$
$16 = a_1 + 2 \cdot (-6) \Rightarrow a_1 = 28$
$a_1 = 28$ e $r = -6$
$a_8 = 28 + (8 - 1) \cdot (-6) = -14$

b) $a_1 = -2$, $r = 3 - (-2) = 5$ e $a_n = 48$
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$48 = -2 + (n - 1) \cdot 5$
$n = 11$; 11 termos

c) $a_{10} = 39$ e $r = 4$
$a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot 4 \Rightarrow 39 = a_1 + 36 \Rightarrow a_1 = 3$

d) $a_1 = 35$, $r = 7$ e $a_n = 245$
$a_n = 35 + (n - 1) \cdot 7 = 7n + 28$
Para $a_n = 245$:
$a_n = 7n + 28 \Rightarrow 245 = 7n + 28 \Rightarrow 7n = 217$
$n = 31$; 31 múltiplos

e) O estudante poderá pensar, por exemplo, na quantidade de múltiplos de 11 entre dois números naturais; em quantos múltiplos naturais de 11 são formados por três algarismos etc.

27.

a) $(x - r, x, x + r)$

b) $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$

c) Sim. $x - r + x + x + r = 180° \Rightarrow 3x = 180° \Rightarrow x = 60°$

d) Sim. Utilizando o artifício de três números em PA e o teorema de Pitágoras, temos:
$(x + r)^2 = x^2 + (x - r)^2$
$x^2 + 2xr + r^2 = x^2 + x^2 - 2xr + r^2$
$x^2 - 4xr = 0 \Rightarrow x(x - 4r) = 0$
$x = 0$ (não convém) ou $x = 4r$
Portanto, os lados medem $(3r, 4r, 5r)$. Assim, as medidas dos lados são proporcionais às medidas dos lados de um triângulo de medidas 3, 4 e 5. A razão da PA representará a constante de proporcionalidade.

28. Sendo (a, b, 3, c) uma PA podemos reescrevê-la como:
$(a, a + r, 3, a + 3r)$
$3 = a + 2r \Rightarrow a = 3 - 2r$ (I)
$(a) + (a + r) + (3) + (a + 3r) = 8 \Rightarrow 3a + 4r + 3 = 8$ (II)
Substituindo (I) em (II):
$3a + 4r + 3 = 8$
$3 \cdot (3 - 2r) + 4r + 3 = 8$
$9 - 6r + 4r + 3 = 8 \Rightarrow r = 2$
De (I), temos que:
$a = 3 - 2r \Rightarrow a = 3 - 2 \cdot 2 = -1$
$b = a + r \Rightarrow b = -1 + 2 = 1$
$c = a + 3r \Rightarrow c = -1 + 3 \cdot 2 = 5$
$a \cdot b \cdot 3 \cdot c = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 = -15$
Alternativa **c**.

29. $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 1197 = 21 + (n - 1) \cdot 7 \Rightarrow n = 169$
Alternativa **c**.

30. $a_1 = x$
$a_1 + r = a_2 = x + 3 \Rightarrow r = 3$
$a_1 + 2r = a_3 = 2x + 1$
$x + 2 \cdot 3 = 2x + 1 \Rightarrow 2x - x = 5 \Rightarrow x = 5$
$a_{20} = a_1 + 19r = 5 + 19 \cdot 3 = 62$
Alternativa **b**.

31. Sabe-se que as medidas do triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 formam uma progressão aritmética de razão 1. Multiplicando seus lados por 3, o triângulo mantém suas proporções, porém, com lados 9, 12 e 15, com suas medidas formando uma PA de razão 3.
Alternativa **c**.

Página 85

Para pensar e discutir

1. Sendo x o segundo termo da PA e r a razão, então, o termo anterior a ele é $x - r$ e o termo posterior é $x + r$. Logo, os três termos podem ser representados por $(x - r, x, x + r)$.

2. É importante que os estudantes tentem resolver o desafio usando as próprias hipóteses e estratégias. É um bom momento para observar como eles pensam ao tentar resolvê-lo. Esse desafio será resolvido mais à frente. A resolução desta atividade é retomada na **atividade resolvida 10** da página 86.

Página 87

Para explorar

1. As quatro afirmações são verdadeiras em qualquer PA.

2.

a) Espera-se que os estudantes tenham feito progressões aritméticas diferentes.

b) Espera-se que os estudantes tenham chegado à mesma conclusão, independentemente da PA elaborada.
Essa investigação possibilita aos estudantes que no mínimo “desconfiem” da existência de certa regularidade em relação às afirmações. Comente com eles que essas afirmações valem para quaisquer progressões aritméticas.

Página 88

Para pensar e discutir

1. Não. Os juros aumentam sempre R$ 1.000,00, correspondente a 10% do valor emprestado.

2. Sim. Os montantes aumentam sempre R$ 1.000,00, correspondente a 10% do valor emprestado.

3. $a_{10} = 11\,000 + (10 - 1) \cdot 1\,000 = 20\,000$; R$ 20.000,00

Para explorar

Parte 1

Número de meses	Valor inicial da dívida	Taxa	Montante
1	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.090,00
2	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.180,00
3	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.270,00
4	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.360,00
5	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.450,00
6	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.540,00
7	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.630,00
8	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.720,00
9	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.810,00
10	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.900,00

Oriente os estudantes na construção do gráfico de colunas em um planilha eletrônica.

Parte 2

Incentive os estudantes a usar a taxa de juros mensal do contexto atual para refletirem sobre os percentuais praticados, mesmo em situações com juros simples, que são raramente usados em transações comerciais e empréstimos em instituições financeiras.

Página 89

Para pensar e discutir

1. O coeficiente da variável n é chamado de taxa de crescimento da função e, na PA, indica o valor da razão. O valor de $f(10)$ corresponde ao 10º termo da PA.

2. $f(1) = -5 \cdot 1 + 20 = -5 + 20 = 15$
$f(2) = -5 \cdot 2 + 20 = -10 + 20 = 10$
$r = f(2) - f(1) = 10 - 15 = -5$

Páginas 90-91

Para pensar e discutir

1. O 11º termo da PA.

Atividades

32.

a) Sim, é uma PA, pois é formada pelos valores de uma função afim. Determinamos os termos da sequência ($f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ...):
$f(1) = 2 \cdot 1 - 10 = 2 - 10 = -8$
$f(2) = 2 \cdot 2 - 10 = 4 - 10 = -6$
$r = f(2) - f(1) = -6 - (-8) = 2$
PA (–8, –6, –4, ...), de razão $r = 2$.

b) $f(30) - f(29) = r = 2$

33.

a) $a_1 = 10$ e $r = 8 - 10 = -2$
$a_n = 10 + (n - 1) \cdot (-2)$
$a_n = -2n + 12$

b) $a_{120} = 10 + (120 - 1) \cdot (-2)$
$a_{120} = -228$

34.

a) $\dfrac{4x + (-x - 6)}{2} = x + 2 \Rightarrow x = 10$

b) $\dfrac{x^2 - 1 + (x + 5)}{2} = 4x - 1$

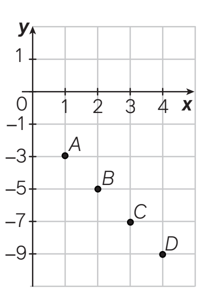
$x^2 - 7x + 6 = 0$

$x = \dfrac{12}{2} = 6$ ou $x = \dfrac{2}{2} = 1$

35.

a) $f(1) = -2 \cdot 1 - 1 = -3$
$f(2) = -2 \cdot 2 - 1 = -5$
$f(3) = -2 \cdot 3 - 1 = -7$
$Im(f) = \{-3, -5, -7, -9...\}$

b)



Tarcísio Garbellini

36.

a)

Mês	Juros	Montantes
1	R$ 30,00	R$ 1.530,00
2	R$ 30,00	R$ 1.560,00
3	R$ 30,00	R$ 1.590,00
4	R$ 30,00	R$ 1.620,00
5	R$ 30,00	R$ 1.650,00
6	R$ 30,00	R$ 1.680,00
7	R$ 30,00	R$ 1.710,00
8	R$ 30,00	R$ 1.740,00

b) $8 \cdot 30 = 240$; R$ 240,00

c) R$ 1.740,00

37. Exemplo de situação: Everton contraiu uma dívida de R$ 3.500,00; ficou acordado que pagaria 3% ao mês de juros, na modalidade juros simples, e só pagaria 5 meses depois. Usando os itens da atividade **36**:

a)

Mês	Juros	Montantes
1	R$ 105,00	R$ 3.605,00
2	R$ 105,00	R$ 3.710,00
3	R$ 105,00	R$ 3.815,00
4	R$ 105,00	R$ 3.920,00
5	R$ 105,00	R$ 4.025,00

b) $5 \cdot 105 = 525$; R$ 525,00

c) R$ 4.025,00.

38. Embora o gráfico apresentado seja uma semirreta é importante observar que o domínio é formado por números naturais e as imagens no gráfico por pontos isolados.

a) R$ 12.000,00.

b) $\dfrac{13\,440 - 12\,000}{12\,000} = 0{,}12 = 12\%$

c) $M(t) = 12\,000 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot t)$
$M(t) = 12\,000 + 1\,440t$

d) $M(3) = 12\,000 + 1\,440 \cdot 3$
$M(3) = 16\,320$; R$ 16.320,00

39.

a) 7,2

b) A sequência
($f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$; ...)
pode ser escrita como:
($7{,}2 \cdot 1 - 10$; $7{,}2 \cdot 2 - 10$;
$7{,}2 \cdot 3 - 10$; $7{,}2 \cdot 4 - 10$; ...),
que é igual a:
(–2,8; 4,4; 11,6; 18,8; ...)
Assim, a sequência é uma PA de razão 7,2, ou seja, a taxa de crescimento da função é igual à razão da progressão aritmética.

40. Doações do empresário A:
$a_n = 12\,000 + (n - 1) \cdot (-600)$
Doações do empresário B:
$b_n = 300 + (n - 1) \cdot (300)$
$a_n = b_n$
$12\,000 + (n - 1) \cdot (-600) =$
$= 300 + (n - 1) \cdot (300)$
$n = \dfrac{12\,600}{900} = 14$
As doações se igualam no 14º mês, em fevereiro de 2026.

41. Na segunda coluna, temos $(2, b_2, c_2)$ com razão r.
Na segunda linha, temos $(b_1, b_2, 6)$ com razão r.
Assim, podemos escrever:
$(2, 2 + r, 2 + 2r)$ na segunda coluna e $(6 - 2r, 6 - r, 6)$ na segunda linha.
Portanto: $2 + r = b_2 = 6 - r \Rightarrow r = 2$
Assim, temos que a segunda linha e a segunda coluna são da forma (2, 4, 6).
A primeira coluna é uma PA da forma $(a_1, 2, 3)$, com razão r_1:
$(a_1, a_1 + r_1, a_1 + 2 \cdot r_1)$
$a_1 + 2 \cdot r_1 - a_1 + r_1 = 3 - 2 \Rightarrow a_1 = 1$
A primeira linha é $(1, 2, a_3)$. De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, pode-se ver que a razão dessa PA é 1 e, portanto, $a_1 = 3$. Assim, a terceira coluna é da forma $(3, 6, c_3)$, e pode-se perceber que a razão dessa PA é 3, logo $c_3 = 9$.
$a_1 + c_3 = 1 + 9 = 10$
Alternativa **c**.

Página 92

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Calculando-se a soma entre parênteses, obtém-se 36. $36^2 = 1\,296$.

2. A ideia aqui é que os estudantes observem que $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + (...) + 20^3$ corresponde a $(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 20)^2$, e que nessa segunda expressão a soma $1 + 2 + 3 + ... + 20$ corresponde à soma dos termos de uma progressão aritmética, cuja fórmula será obtida a seguir nesse estudo.

Página 93

Para pensar e discutir

1. $1 + 2 + 3 + ... + 25 =$
$= \dfrac{(1 + 25) \cdot 25}{2} = 25 \cdot 13 = 325$

2. $a_{30} = S_{30} - S_{29} =$
$= (2 \cdot 30^2 - 30) - (2 \cdot 29^2 - 29) =$
$= 1\,770 - 1\,653 = 117$

Página 94

Atividades

42.

a) $a_1 = 1$, $a_{100} = 199$, $r = 2$.

$S_{100} = \dfrac{(1 + 199)}{2} \cdot 100$

$S_{100} = 10\,000$

b) Com $a_1 = 1$ e $r = 2$. Então:

$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2$

$a_n = 2n - 1$

$S_n = \dfrac{(1 + 2n - 1)}{2} \cdot n = n^2$

43.

a) $n = 1 \Rightarrow a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 = 2$

b) $S_2 = 2 \cdot 2^2 = 8$

$a_1 + a_2 = 8 \Rightarrow 2 + a_2 = 8$

$a_2 = 8 - 2 = 6$

c) $r = a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4$

d) $a_1 = 2$ e $r = 4$

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_{20} = 2 + (20 - 1) \cdot 4 = 78$

44.

a) $a_1 = -10$, $r = -6 - (-10) = 4$

$a_n = -10 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 14$

b) $S_n = \dfrac{(-10 + 4n - 14) \cdot n}{2}$

$S_n = 2n^2 - 12n$

45. Exemplo de resposta:

a) PA (7, 5, 3, 1, –1, –3, –5, ...)

b) $a_1 = 7$, $r = 5 - 7 = -2$

$a_n = 7 + (n - 1) \cdot (-2) = 9 - 2n$

c) $S_n = \dfrac{(7 + 9 - 2n) \cdot n}{2}$

$S_n = 8n - n^2$

46.

a) $a_1 = 2$ e $S_{10} = 200$

$S_{10} = \dfrac{(2 + a_{10})}{2} \cdot 10$

$200 = (2 + a_{10}) \cdot 5 \Rightarrow a_{10} = 38$

b) $a_3 = 10$ e $a_{98} = 90$. Os termos a_3 e a_{98} são equidistantes dos termos extremos, ou seja:

$a_1 + a_{100} = a_3 + a_{98} = 10 + 90 = 100$

$S_{100} = \dfrac{(a_1 + a_{100})}{2} \cdot 100$

$S_{100} = 100 \cdot 50 = 5\,000$

c) $a_1 = 3$, $a_n = 31$, $S_n = 136$

$136 = \dfrac{(3 + 31)}{2} \cdot n$

$n = \dfrac{136}{17} = 8$

47. $a_1 = 5$ km, $r = 0{,}2$ km

$a_{10} = 5 + (10 - 1) \cdot (0{,}2) = 6{,}8$

$S_{10} = \dfrac{(a_1 + a_{10})}{2} \cdot 10$

$S_{10} = \dfrac{(5 + 6{,}8)}{2} \cdot 10 = 59$; 59 km

48. $a_1 = 720$ e $r = 70$

$a_{16} = 720 + (16 - 1) \cdot 70 = 1\,770$

$S_{16} = \dfrac{(a_1 + a_{16})}{2} \cdot 16$

$S_{16} = (2\,490) \cdot 8 = 19\,920$

Logo, a meta não será atingida.

49. $a_1 = 1\,000$ e $r = -20$,

$a_{24} = 1\,000 + (24 - 1) \cdot (-20)$

$a_{24} = 1\,000 - 480 + 20 = 540$

$S_{24} = \dfrac{(1\,000 + 540)}{2} \cdot 24$

$S_{24} = 18\,480$; R$ 18.480,00

50. $a_1 = 1$, $r = 3$, $S_n = 925$

$a_n = 3n - 2$

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

$925 = \dfrac{(-1 + 3n)}{2} \cdot n$

$3n^2 - n - 1\,850 = 0$

$n = \dfrac{1 \pm 149}{6} \Rightarrow n = 25$ ou $n = -\dfrac{74}{3}$

$N = 3n - 2 \Rightarrow N = 3 \cdot 25 - 2 \Rightarrow N = 73$

Alternativa **c**.

51. $a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_n = 8 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 4$

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

$540 = \dfrac{(8 + 4n + 4)}{2} \cdot n$

$n^2 + 3n - 270 = 0$

$n = \dfrac{-3 \pm 33}{2}$

$n = \dfrac{30}{2} = 15$ ou $n = -\dfrac{36}{2} = -18$

Como a PA não pode ter uma quantidade negativa de termos, $n = 15$.

Agora, podemos conferir as afirmações dadas.

a) Falso. $a_1 + a_8 = a_{10}$

$8 + 4 \cdot 8 + 4 = 4 \cdot 10 + 4$

$44 = 44$

O número de poltronas é igual.

b) Falso.

$a_{10} = 44$

c) Falso, pois sabemos que haverá $n = 15$ fileiras no cinema.

d) Verdadeiro.

$a_{15} = 4 \cdot 15 + 4 = 60 + 4 = 64$

Alternativa **d**.

52. O último número ímpar antes de 100 é 99, e existem 50 números ímpares entre 1 e 100.

$S_{50} = \dfrac{(a_1 + a_{50})}{2} \cdot 50$

$S_{50} = \dfrac{(1 + 99)}{2} \cdot 50 = 50^2$

Alternativa **c**.

3. Progressão geométrica

Página 96

Para pensar e discutir

1. Comece com um segmento, divida-o em 3 partes iguais e gire a parte central 60° no sentido anti-horário. Adicione um segmento de mesma medida, formando um triângulo equilátero sem base. Repita esse processo indefinidamente com os novos segmentos.

2. A linha da figura 2 tem comprimento menor que o comprimento da linha da figura 3.

3. A regra dessa sequência é o termo seguinte ter quatro vezes o terço do comprimento da linha da figura anterior:

figura 1: $a_1 = 1$;

figura 2: $a_2 = 1 \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{3}$ (são 4 segmentos de comprimento $\dfrac{1}{3}$);

figura 3: $a_3 = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{16}{9}$ (são 16 segmentos de comprimento $\dfrac{1}{9}$);

figura 4: $a_4 = \dfrac{16}{9} \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{64}{27}$ (são 64 segmentos de comprimento $\dfrac{1}{27}$);

figura 5: $a_5 = \dfrac{64}{27} \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{256}{81}$ (são 256 segmentos de comprimento $\dfrac{1}{81}$).

O comprimento da soma das linhas da figura 5 pode ser representado pelo número $\dfrac{256}{81}$ u.c.

Página 97

Para pensar e discutir

1. Sim, quando a razão for igual a 1, pois 1 é o elemento neutro da multiplicação. Exemplo: (10, 10, 10, 10, ...).

2. Espera-se que o estudante responda que uma PG é oscilante quando os termos consecutivos dela têm sinais contrários, isto é, um positivo e outro negativo. Exemplo: (1, –2, 4, –8, ...).

3. Sim. Por exemplo, com razão positiva $\dfrac{1}{2}$ e primeiro termo $a_1 = 1$, temos $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dots\right)$.

4. A partir da primeira figura com comprimento de 1 u.m., divide-se em três partes, substituindo a parte central por duas inclinadas, formando quatro partes de um terço. Esse processo se repete, resultando na razão de $\dfrac{4}{3}$.

Página 98

Para explorar

1. Exemplo de resposta: Partindo de um triângulo equilátero, dividimos cada segmento (cada lado) em três partes iguais. Na parte do meio, construímos um triângulo equilátero e apagamos o lado que já existia desse triângulo. Repetimos essas etapas para cada novo segmento de reta obtido.
2. A sequência é a PG (3, 12, 48, 192, ...).
3. $a_1 = 3 \Rightarrow 12 = 3q^{2-1} \Rightarrow q = 4$
   $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Na primeira figura, são 3 segmentos e cada um tem comprimento 1 u.c.
   $P_1 = 3$; 3 u.c.
   Na segunda figura, são 12 segmentos e cada um tem comprimento $\frac{1}{3}$ u.c.
   $P_2 = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4$; 4 u.c.
   Na terceira figura, são 48 segmentos e cada um tem comprimento $\frac{1}{9}$ u.c.
   $P_3 = 48 \cdot \frac{1}{9} = \frac{16}{3}$; $\frac{16}{3}$ u.c.
   Na quarta figura, são 192 segmentos e cada um tem comprimento $\frac{1}{27}$ u.c.
   $P_4 = 192 \cdot \frac{1}{27} = \frac{64}{9}$; $\frac{64}{9}$ u.c.
   E assim por diante.
   $\text{PG} = \left(3, 4, \frac{16}{3}, \frac{64}{9}, \ldots\right)$.
5. No texto que os estudantes irão apresentar, instrua-os não apenas a fornecer informações, mas mostrar relações ou descrições de como os fractais que eles pesquisaram foram formados.

Página 99

Atividades

53.

a) $q = \frac{10^{-2}}{10^{-1}} = 10^{-2-(-1)} = 10^{-1}$

$q = 10^{-1}$

b) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = 10^{-1} \cdot (10^{-1})^{n-1} = 10^{-1} \cdot \frac{10^1}{10^n}$

$a_n = \frac{1}{10^n} = 10^{-n}$

$a_n = 10^{-n}$

54. $q = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{1} = 3$

Podemos, então, calcular os demais termos da PG multiplicando o anterior por 3: $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, 81, 243\right)$.

Portanto, são 8 termos.

$243 = \frac{1}{9} \cdot 3^{n-1} \Rightarrow 3^7 = 3^{n-1}$

$7 = n - 1 \Rightarrow n = 8$

Logo, a PG tem 8 termos.

55. $30\,000 = 3 \cdot q^{5-1}$

$q^4 = 10\,000$

$\pm\sqrt[4]{10^4} = q$

$q = \pm 10$

Logo, a razão poderá ser 10 (PG crescente) ou –10 (PG oscilante).

56.

a) $q = \frac{4}{1} = 4$

$a_6 = 1 \cdot 4^{6-1} = 1\,024$

b) $q = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$

$a_7 = 1 \cdot (0{,}5)^{7-1} = 0{,}015625$

Outra solução é utilizar a razão na forma de fração $\frac{1}{2}$:

$a_7 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-1} = \frac{1}{64} = 0{,}015625$

c) $q = \frac{2}{-1} = -2$

$a_8 = (-1) \cdot (-2)^{8-1}$

$a_8 = (-1) \cdot (-128) = 128$

57. Um cuidado a ser tomado aqui é que existe uma tendência de os estudantes considerarem apenas um valor para a razão da progressão geométrica quando estiverem diante da passagem $q^6 = 729$.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 729 = 1 \cdot q^{7-1}$

$729 = q^6 \Rightarrow q = \sqrt[6]{729} = \pm 3$

Existem duas possibilidades para $q = 3$ e $q = -3$. Calculamos os demais termos para cada razão:

$a_2 = 1 \cdot (\pm 3)^{2-1} = 1 \cdot (\pm 3)^1 = \pm 3$

$a_3 = 1 \cdot (\pm 3)^{3-1} = 1 \cdot (\pm 3)^2 = 9$

$a_4 = 1 \cdot (\pm 3)^{4-1} = 1 \cdot (\pm 3)^3 = \pm 27$

$a_5 = 1 \cdot (\pm 3)^{5-1} = 1 \cdot (\pm 3)^4 = 81$

$a_6 = 1 \cdot (\pm 3)^{6-1} = 1 \cdot (\pm 3)^5 = \pm 243$

Logo, existem duas possibilidades: (1, 3, 9, 27, 81, 243, 729) e (1, –3, 9, –27, 81, –243, 729).

58.

a) $q = \frac{9}{-3}$

$a_8 = (-3) \cdot (-3)^{8-1} = 6\,561$

b) $a_n = (-3) \cdot (-3)^{n-1} = (-3)^n$

59.

a) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow a_1 = 2 \cdot 3^{1-1} = 2$

b) $a_2 = 2 \cdot 3^{2-1} = 6$

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$

c) $a_7 = 2 \cdot 3^{7-1} = 2 \cdot 729 = 1\,458$

60. Uma PG de razão $q = 2$, em que a quantidade de bactérias no início de cada dia são os seus termos.

$a_1 = 100\,000$.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_5 = 100\,000 \cdot 2^{5-1} = 1\,600\,000$

61.

a) Área do primeiro triângulo equilátero:

$A_1 = \frac{\ell_1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 10 \text{ cm}^2$

O segundo triângulo é construído ligando os pontos médios do primeiro triângulo, assim, $\ell_2 = \frac{\ell_1}{2}$.

$A_2 = \frac{\ell_2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{\ell_1}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\ell_1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{10}{4} \text{ cm}^2$.

b) O segundo triângulo é construído ligando os pontos médios do segundo triângulo, assim

$\ell_3 = \frac{\ell_2}{2} = \frac{\frac{\ell_1}{2}}{2} = \frac{\ell_1}{4}$.

$A_3 = \frac{\ell_3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{\ell_1}{4}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{1}{16} \cdot \frac{\ell_1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{10}{16} \text{ cm}^2$

c) Dividindo o segundo termo pelo primeiro, obtemos a razão q:

$q = \frac{\frac{10}{4}}{10} = \frac{10}{4 \cdot 10} = \frac{1}{4}$

Agora, basta descobrir a fórmula do termo geral:

$a_n = 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

Portanto, a área do n-ésimo triângulo é dada por:

$a_n = 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \text{ cm}^2$

62. $a_4 = 345 \cdot 3^{4-1} = 345 \cdot 3^3$

Alternativa **c**.

63. Nas etapas dadas, temos que as áreas dos quadrados são:

$a_1 = 100$; $a_2 = 100 \cdot \frac{3}{4}$

$a_3 = 100 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{900}{16} = \frac{225}{4}$

Então, essas áreas formam uma PG de primeiro termo 100 u.a. e razão $q = \frac{3}{4}$

$a_6 = 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{6-1} = 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$

Alternativa **e**.

64. Em 2015, temos: $59{,}5 \cdot 1{,}14 = 67{,}83$
Logo, em 2015 eram 67,83 milhões de pessoas em deslocamento forçado.
Alternativa **b**.

65. A sequência forma uma PG (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) finita. Seja a área do triângulo de origem dada por $a_1 = \frac{\ell_1^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. Ao conectar os pontos médios de cada lado desse triângulo, são formados 3 triângulos escuros, cada um deles com área $A_2 = \frac{\left(\frac{\ell_1^2}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. Como são formados 3 triângulos, a área ocupada por eles é:

$$a_2 = 3 \cdot A_2 = 3 \cdot \frac{\left(\frac{\ell_1^2}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} =$$

$$= 3 \cdot \frac{\frac{\ell_1^2}{4} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\ell_1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} =$$

$= \frac{3}{4} \cdot a_1$, que é a área escura da segunda figura.
Assim, a razão q dessa PG é dada por: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{3}{4} \cdot a_1}{a_1} = \frac{3}{4}$.
Alternativa **a**.

Página 102

Infográfico clicável – Juros compostos

Apresente o infográfico *Juros compostos* para os estudantes. Esse recurso didático explora o conceito de juros compostos, mostrando como o montante de um investimento cresce exponencialmente ao longo do tempo. O infográfico inclui uma tabela e um gráfico que permitem visualizar e entender a relação entre o capital, a taxa de juros e o período, facilitando a compreensão dos estudantes sobre a matemática financeira.

Para pensar e discutir

1. A sequência formada por (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5) = ($C \cdot (1 + i)$, $C \cdot (1 + i)^2$, $C \cdot (1 + i)^3$, $C \cdot (1 + i)^4$, $C \cdot (1 + i)^5$) é uma progressão geométrica de razão igual a $1 + i$.

2. Considerando o 1º termo como o primeiro montante e a razão n, temos:
$M_n = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)^{n-1} = C \cdot (1 + i)^n$

Páginas 104-105

Para pensar e discutir

1. Vamos considerar que (x_1, x_2, x_3, ...) formem uma progressão geométrica de razão q. Calculando as imagens, temos:
$f(x_1) = \log_a x_1$
$f(x_2) = \log_a x_2 = \log_a(x_1 \cdot q) =$
$= \log_a x_1 + \log_a q$
$f(x_3) = \log_a x_3 = \log_a(x_1 \cdot q^2) =$
$= \log_a x_1 + \log_a q + \log_a q =$
$= \log_a x_1 + 2\log_a q$
(...)
A sequência formada é uma progressão aritmética de razão $\log_a q$.

Atividades

Devido a importância do assunto tratado neste capítulo sugerimos que a maioria dessas atividades sejam conduzidas para resolução em sala de aula, individualmente e em duplas. Lembre-se de que é um momento importante de sistematização de conteúdos diversos que se relacionam aqui.

66.
a) $f(x) = 4 \cdot 5^{-x}$
$f(1) = 4 \cdot 5^{-1} = \frac{4}{5}$
$f(2) = 4 \cdot 5^{-2} = \frac{4}{25}$
$f(3) = 4 \cdot 5^{-3} = \frac{4}{125}$
$f(4) = 4 \cdot 5^{-4} = \frac{4}{625}$
$f(5) = 4 \cdot 5^{-5} = \frac{4}{3\,125}$
$\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{25}, \frac{4}{125}, \frac{4}{625}, \frac{4}{3\,125}\right)$
b) É uma progressão geométrica decrescente de razão igual a $\frac{1}{5}$ e primeiro termo $\frac{4}{5}$.

67. $f(1) = \log_2 1 = 0$
$f(2) = \log_2 2 = 1$
$f(4) = \log_2 4 = 2$
$f(8) = \log_2 8 = 3$
A sequência formada é (0, 1, 2, 3, ...). É uma sequência em que os termos crescem de 1 em 1 e o primeiro termo é 0 (recebe o nome de progressão aritmética de razão igual a 1).

68.
a) $M_1 = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}025)^1 = 5\,125$
$M_2 = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}025)^2 \cong 5\,253{,}13$
$M_3 = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}025)^3 \cong 5\,384{,}45$
$M_4 = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}025)^4 \cong 5\,519{,}06$
$M_5 = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}025)^5 \cong 5\,657{,}04$
$M_6 = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}025)^6 \cong 5\,798{,}47$

M_1	R$ 5.125,00
M_2	R$ 5.253,13
M_3	R$ 5.384,45
M_4	R$ 5.519,06
M_5	R$ 5.657,04
M_6	R$ 5.798,47

b) Os montantes, nessa ordem, formam uma progressão geométrica crescente de razão igual a 1,025.

69. A dívida será o dobro do valor inicial:
$2 \cdot 5.000 = 10.000$; R$ 10.000,00.
$M_n = C \cdot (1 + i)^n$
$10\,000 = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}025)^n$
$\frac{10\,000}{5\,000} = 1{,}025^n \Rightarrow 2 = 1{,}025^n$
$\log 2 = \log 1{,}025^n$
$\log 2 = n \cdot \log 1{,}025 \Rightarrow \frac{\log 2}{\log 1{,}025} = n$
$n \cong 28{,}071$
Logo, serão necessários 29 meses.

70. A cada ano, o valor corresponde a $100\% - 10\% = 90\% = 0{,}9$ do valor do ano anterior.
$M = 10\,000 \cdot (0{,}9)^5$
$M = 10\,000 \cdot 0{,}59049$
$M = 5\,904{,}9$; R$ 5.904,90
Alternativa **d**.

71. Exemplo de problema: Considere um carro com valor inicial de R$ 20.000,00 e que desvaloriza 10% ao ano.
A cada ano, o valor corresponde a $100\% - 10\% = 90\% = 0{,}9$ do valor do ano anterior.
$M_0 = 20\,000 \cdot (0{,}9)^0 = 20\,000$
$M_1 = 20\,000 \cdot (0{,}9)^1 = 18\,000$
$M_2 = 20\,000 \cdot (0{,}9)^2 = 16\,200$
$M_3 = 20\,000 \cdot (0{,}9)^3 = 14\,580$
$M_4 = 20\,000 \cdot (0{,}9)^4 = 13\,122$
$M_5 = 20\,000 \cdot (0{,}9)^5 = 11\,809{,}80$

Novo	R$ 20.000,00
1º ano de uso	R$ 18.000,00
2º ano de uso	R$ 16.200,00
3º ano de uso	R$ 14.580,00
4º ano de uso	R$ 13.122,00
5º ano de uso	R$ 11.809,80

$p = \frac{11\,809{,}80}{20\,000} = 0{,}59049 \cong 59{,}05\%$
ou $p = (0{,}9)^5 = 0{,}59049 \cong 59{,}05\%$

O percentual correspondente à desvalorização total nesse período foi de aproximadamente 59,05%.

72. É igual a $\frac{1}{4}$, temos:

$\frac{1}{4} = \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{r \cdot e^{2 \cdot k}}{r \cdot e^k} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^k$

Observando a soma dos valores $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$:

$r \cdot e^k + r \cdot e^{2 \cdot k} + r \cdot e^{3 \cdot k} + r \cdot e^{4 \cdot k} =$

$= \frac{255}{128}$

$r \cdot \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4\right] =$

$= \frac{255}{128}$

$r \cdot \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}\right] = \frac{255}{128}$

$r \cdot \left[\frac{64 + 16 + 4 + 1}{256}\right] = \frac{255}{128}$

$r \cdot \frac{85}{2} = 255 \Rightarrow r = 6$

Portanto, r é um número múltiplo de 3. Alternativa **c**.

73. **I.** Correta. Os valores das 6 parcelas formam uma PG. Sabendo a segunda e a quinta parcelas, calculamos a razão.

$a_5 = a_2 \cdot q^3 \Rightarrow 1\,600 = 12\,800 \cdot q^3$

$\frac{1\,600}{12\,800} = q^3 \Rightarrow q = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{1}{2}$

Então:

$a_2 = a_1 \cdot q^2$

$12\,800 = a_1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 25\,600$

$a_3 = a_1 \cdot q^2 = 25\,600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6\,400$

$a_4 = a_1 \cdot q^3 = 25\,600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3\,200$

Logo, as 6 prestações formam a PG (R$ 25.600,00; R$ 12.800,00; R$ 6.400,00; R$ 3.200,00; R$ 1.600,00; R$ 800,00).

$25\,600{,}00 + 12\,800{,}00 + 6\,400{,}00 + 3\,200{,}00 + 1\,600{,}00 + 800{,}00 = 50\,400$; R$ 50 400,00.

O valor da entrada é 15% do valor total das prestações, ou seja, $50\,400{,}00 \cdot 0{,}15 = 7\,560$; R$ 7.560,00.

$\frac{7\,560}{25\,600} \cong 0{,}30 = 30\%$. Portanto, a entrada é de R$ 7.560,00, o que corresponde a aproximadamente 30% do valor da primeira prestação.

II. Incorreta.

O valor do carro é $50.400 + 7.560 = 57.960$; R$ 57.960,00, que é inferior a R$ 60.000,00.

III. Correta. O total das três últimas prestações é $3.200 + 1.600 + 800 = 5.600$; R$ 5.600,00.

$\frac{5\,600}{57\,960} \cong 0{,}097 = 9{,}7\%$

Assim, o total das três últimas parcelas corresponde a aproximadamente 9,7% do valor do carro, inferior a 15%.

IV. Correta. As três primeiras prestações totalizam:

$25\,600 + 12\,800 + 6\,400 = 44\,800$; R$ 44.800,00.

$\frac{44\,800}{57\,960} \cong 0{,}77 = 77\%$

Temos que $\frac{3}{4} = 75\%$. Então, as três primeiras prestações juntas correspondem a mais que $\frac{3}{4}$ do valor do carro. Logo, são corretas as afirmações I, III e IV.

Alternativa **c**.

74.

a) O valor do carro diminui em 10% a cada ano, ou seja, passa a ser 100% − 10% = 90% = 0,90 do valor do ano anterior. Então, podemos escrever $V = V_0 \cdot 0{,}90^t$

b) $V = V_0 \cdot 0{,}90^t$.

$V = 32\,000 \cdot 0{,}90^6 \cong 17\,006{,}11$

Podemos dizer que o valor deste carro é, após 6 anos, aproximadamente R$ 17.000,00.

75.

a) $f(x) = \frac{4}{2^x}$

Vamos considerar que A, B, C e D sejam os pontos da curva correspondentes às abscissas 0, 1, 2 e 3, respectivamente. Então:

Ponto A $(x = 0)$

$f(0) = \frac{4}{2^0} = \frac{4}{1} = 4$

Ponto B $(x = 1)$

$f(1) = \frac{4}{2^1} = 2$

Ponto C $(x = 2)$

$f(2) = \frac{4}{2^2} = \frac{4}{4} = 1$

Ponto D $(x = 3)$

$f(3) = \frac{4}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Logo, as ordenadas dos pontos A, B, C e D são, respectivamente, 4, 2, 1 e $\frac{1}{2}$.

b) A razão é $\frac{1}{2}$.

76.

a) Para calcular a taxa de juros i, no sistema de juros compostos, podemos usar a fórmula $M_n = C \cdot (1 + i)^n$. Escolhendo o montante no 1º ano e o valor inicial do empréstimo, temos:

$1\,060 = 1\,000 \cdot (1 + i)^1$

$\frac{1\,060}{1\,000} = (1 + i)$

$1{,}060 - 1 = i \Rightarrow i = 0{,}060 = 6\%$

Logo, a taxa é de 6% ao ano.

b) $q = 1 + i = 1 + 0{,}060 = 1{,}060$

Os montantes estão em progressão geométrica, com razão igual a 1,06.

c) $M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M(t) = 1\,000 \cdot (1 + 0{,}06)^t$

$M(t) = 1\,000 \cdot (1{,}06)^t$

Página 106

Para pensar e discutir

1. Na passagem (*) utilizamos o conceito de PG (um termo multiplicado pela razão resulta no próximo termo).
   Na passagem (**) temos que $a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ é a soma dos n primeiros termos menos o primeiro termo.
2. Porque o denominador da fórmula obtida não pode ser igual a zero.
3. Se $q = 1$, a PG é constante. A soma dos n termos pode ser obtida multiplicando-se o primeiro termo (valor comum) pela quantidade de termos da sequência.
4. $S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}, q \neq 1$

   $S_n = \frac{(a_1 \cdot q^{n-1}) \cdot q - a_1}{q - 1}$

   $S_n = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q - 1}$

   Assim $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ para $q \neq 1$.

Página 108

Para pensar e discutir

1. Supondo que o primeiro quadrado possua 1 u.m. de comprimento de lado, ou seja, sua área é (1 u.m.)² = 1 (u.m.)²; a segunda imagem apresenta triângulos retângulos com 0,5 u.m. de comprimento de lado, ou seja, sua área é $\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{2}$ (u.m.)² = $\frac{1}{8}$ (u.m.)²; mas como temos 4 triângulos, então a soma das áreas é $\frac{1}{2}$ (u.m.)². Ou seja, o 2º quadrado tem a metade da área do 1º quadrado.
2. Como cada quadrado tem a área igual à metade da área do quadrado anterior, temos uma PG de razão $\frac{1}{2}$.

3. Essa pergunta objetiva verificar o conhecimento intuitivo do estudante a respeito da situação envolvendo PG com infinitos termos em que o último termo se aproxima de zero.

Páginas 109-113

Para explorar

1.

a) Considerando a medida do lado do 1º quadrado como 1 u.c., temos que a medida da diagonal do 2º quadrado é igual a 1 u.c. (é igual ao lado do 1º quadrado). Então, calculamos a medida do lado do 2º quadrado:

$D = 1$ e $D = L \cdot \sqrt{2}$

$L = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Assim, as medidas dos lados dos quadrados formam a PG $\left(1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right)$, com $a_1 = 1$ e $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Calculamos a soma dos infinitos termos:

$S = \dfrac{a_1}{1-q}, q \neq 1$

$S = \dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{2-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

$S = \dfrac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$

Logo, o limite da soma das medidas dos lados dos quadrados construídos é $2 + \sqrt{2}$ u.c.

b) Basta multiplicarmos a medida de cada lado por 4 ou multiplicar a soma das medidas de todos os quadrados por 4.

$S = 4 \cdot (2 + \sqrt{2}) = 8 + 4\sqrt{2}$

Logo, o limite da soma da medida de todos os lados do quadrado é de $S = 8 + 4\sqrt{2}$ u.c.

2. Considerando a medida do lado do primeiro triângulo como 1 u.c., temos que a medida do lado do 2º triângulo é $\dfrac{1}{2}$.

Assim, as medidas dos lados dos triângulos formam a PG $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right)$; com $a_1 = 1$ e $q = \dfrac{1}{2}$.

Calculamos a soma dos infinitos termos:

$S = \dfrac{a_1}{1-q}, q \neq 1$

$S = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}} = 2$

Logo, o limite da soma das medidas dos lados dos triângulos construídos é 2 u.c.

Podemos multiplicar a medida de cada lado por 3 para obter o perímetro ou multiplicar a soma das medidas de todos os lados dos triângulos por 3.

$S = 3 \cdot 2 = 6$

O limite da soma dos perímetros dos triângulos construídos é 6 u.c.

3. Os estudantes podem apresentar suas resoluções para a turma para que comparem entre si.

Atividades

77.

a) Podemos escrever a dízima periódica como uma soma infinita de números decimais.

$x = 0{,}5555\ldots$ (dízima periódica)

$x = 0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005 + 0{,}0005 + \ldots$

A razão entre esses números decimais é

$q = \dfrac{0{,}05}{0{,}5} = 0{,}1$. Então:

$S = \dfrac{a_1}{1-q}, q \neq 1$

$S = \dfrac{0{,}5}{1-0{,}1} = \dfrac{0{,}5}{0{,}9} = \dfrac{5}{9}$

b) Analogamente:

$x = 0{,}212121\ldots$ (dízima periódica)

$x = 0{,}21 + 0{,}0021 + 0{,}000021 + {}$
${} + 0{,}00000021 + \ldots$

A razão entre esses números decimais é

$q = \dfrac{0{,}0021}{0{,}21} = 0{,}01$. Então:

$S = \dfrac{a_1}{1-q}, q \neq 1$

$S = \dfrac{0{,}21}{1-0{,}01} = \dfrac{0{,}21}{0{,}99} = \dfrac{21}{99}$

78. Temos $a_1 = 10$, $q = 2$ e $n = 10$. Então:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_{10} = 10 \cdot 2^{10-1} = 10 \cdot 512 = 5\,120$

Assim:

$S_n = \dfrac{a_n \cdot q - a_1}{q-1}, q \neq 1$

$S_{10} = \dfrac{5\,120 \cdot 2 - 10}{2-1} = 10\,230$

Logo, a soma dos 10 primeiros termos da sequência é 10 230.

79.

a) O primeiro membro da equação $x + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{16} + \ldots = 64$ corresponde à soma dos termos de uma PG de primeiro termo $a_1 = x$ e razão $q = \dfrac{1}{4}$

$S = \dfrac{a_1}{1-q}, q \neq 1$

$64 = \dfrac{x}{1-\dfrac{1}{4}} \Rightarrow 64 = \dfrac{x}{\dfrac{3}{4}}$

$x = 64 \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{192}{4} = 48$

b) Temos que $y = 0{,}001 + {}$
${} + 0{,}000001 + 0{,}000000001 + \ldots$ corresponde à soma dos infinitos termos de uma PG de primeiro termo $a_1 = 0{,}001$ e razão

$q = \dfrac{0{,}000001}{0{,}001} = 0{,}001$. Então:

$S = \dfrac{a_1}{1-q}, q \neq 1$

$S = \dfrac{0{,}001}{1-0{,}001} = \dfrac{0{,}001}{0{,}999} = \dfrac{1}{999}$

$y = 0{,}001 + 0{,}000001 + 0{,}0000\,00001 + \ldots = \dfrac{1}{999}$

80.

a) Temos a PG finita $(1, 2, 4, \ldots, a_n)$ tal que $S_n = 1\,023$. A razão dessa PG é $q = \dfrac{2}{1} = 2$. Então:

$S_n = \dfrac{a_n \cdot q - a_1}{q-1}, q \neq 1$

$1\,023 = \dfrac{a_n \cdot 2 - 1}{2-1}$

$1\,023 + 1 = a_n \cdot 2 \Rightarrow 1\,024 = 2a_n$

$a_n = \dfrac{1\,024}{2} = 512$

O último termo dessa PG é 512.

b) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 512 = 1 \cdot 2^{n-1}$

$2^9 = 2^{n-1} \Rightarrow 9 = n - 1 \Rightarrow n = 10$

Logo, essa PG tem 10 termos.

81.

a) Temos a equação:

$1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2 \cdot n} + \ldots = \dfrac{25}{16}$

Então: $q = \dfrac{x^2}{1} = x^2$

Logo, a razão é x^2.

b) $a_{25} = 1 \cdot (x^2)^{25-1} = 1 \cdot x^{48} = x^{48}$

Logo, o 25º termo é x^{48}.

c) $S = \dfrac{a_1}{1-q}, q \neq 1$

$\dfrac{25}{16} = \dfrac{1}{1-x^2} \Rightarrow 25 - 25x^2 = 16$

$25x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \dfrac{9}{25}$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{25}}$

$x' = \dfrac{3}{5}$ e $x'' = -\dfrac{3}{5}$

$S = \left\{\dfrac{3}{5}, -\dfrac{3}{5}\right\}$

82.

a) Temos $a_1 = 2$, $q = 3$ e $n = 10$.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_{10} = 2 \cdot 3^{10-1} = 2 \cdot 3^9 = 39\,366$
Logo, apodreceram 39 366 frutos no 10º dia.

b) $S_n = \dfrac{a_n \cdot q - a_1}{q-1}, q \neq 1$

$S_{10} = \dfrac{39\,366 \cdot 3 - 2}{3-1} = 59\,048$

Logo, havia 59 048 frutos.

83. Os lados dos triângulos formam uma PG com $a_1 = 1$ e $q = \dfrac{2}{3}$. Calculamos a soma das medidas dos lados.

$S = \dfrac{a_1}{1-q}, q \neq 1$

$S = \dfrac{1}{1-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

A soma das medidas dos lados dos infinitos triângulos é igual a 3 e, portanto, a soma dos perímetros é igual a 9. Alternativa **a**.

84.

a) Incentive os estudantes a elaborar a situação envolvendo os quadrados, observando que esses quadrados irão diminuir de tamanho, conforme sugerem as figuras apresentadas no enunciado.

b) Peça aos estudantes que resolvam entre si e comparem os resultados.

85. A razão entre esses números é $q = \dfrac{0{,}5}{1} = \dfrac{1}{2}$. Sendo $a_1 = 1$, temos:

$E = \dfrac{a_1}{1-q}, q \neq 1$

$E = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Assim, a soma infinita definida por $E = 1 + 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + \ldots = 2$ e o $\log_2 E = \log_2 2 = 1$.

86. Seja $x = 4 + 8 + 16 + \ldots + 2\,048$ uma soma finita. Sejam $a_1 = 4$ e $a_2 = 8$. Assim:

$q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{8}{4} = 2$

$S_n = \dfrac{a_n \cdot q - a_1}{q-1}, q \neq 1$

$S_n = \dfrac{2\,048 \cdot 2 - 4}{2-1} = 4\,092$

A soma finita definida por:

$x = 4 + 8 + 16 + \ldots + 2\,048 = 4\,092$

87. Os valores dos faturamentos nesses 5 meses formam uma PG de razão $q = 1{,}2$.

$a_3 = a_1 \cdot q^2$

$28\,800 = a_1 \cdot 1{,}2^2$

$a_1 = \dfrac{28\,800}{(1{,}2)^2}$

$a_1 = 20\,000$

$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 20\,000 \cdot 1{,}2^4 = 41\,472$

Com os valores de a_1 e a_5, podemos calcular a soma dos termos dessa PG finita:

$S_n = \dfrac{a_n \cdot q - a_1}{q-1}, q \neq 1$

$S_5 = \dfrac{41\,472 \cdot 1{,}2 - 20\,000}{1{,}2 - 1}$

$S_5 = \dfrac{29\,766{,}4}{0{,}2} = 148\,832$

Portanto, nesse período de 5 meses, o faturamento foi de R$ 148.832,00.

88. A sequência definida por $(f(0), f(1), f(2), \ldots, f(100))$ forma uma PG finita de 100 termos e de razão

$q = \dfrac{f(1)}{f(0)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$

Assim, considerando $a_1 = 1$, $a_{101} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{100} = 2^{-100}$. Logo, a soma S desses 101 termos é dada por:

$S_n = \dfrac{a_n \cdot q - a_1}{q-1}, q \neq 1$

$S_{101} = \dfrac{2^{-100} \cdot \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$

$S = \dfrac{2^{-100} \cdot 2^{-1} - 2^0}{-\frac{1}{2}}$

$S = \dfrac{2^{-101} - 2^0}{-2^{-1}} = \dfrac{2^{-101}}{-2^{-1}} - \dfrac{2^0}{-2^{-1}}$

$S = -2^{-100} + 2 = 2 - 2^{-100}$

A soma dos 101 primeiros termos dessa PG é $2 - 2^{-100}$.

Atividades finais

1.

a) Seja $a_n = 5n - 1$. Então:

$a_1 = 5 \cdot 1 - 1 = 5 - 1 = 4$

$a_2 = 5 \cdot 2 - 1 = 10 - 1 = 9$

A razão r da PA pode ser obtida calculando $a_2 - a_1$:

$r = a_2 - a_1 = 9 - 4 = 5$

b) A soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

$S_n = \dfrac{(4 + 5n - 1)}{2} \cdot n$

$S_n = \dfrac{5n^2}{2} + \dfrac{3n}{2}$

2. Para que uma PA seja constante, deve-se ter que $a_i = a_j$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}^*$, $i \neq j$.

Sejam $i = 1$ e $j = 2$.

$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_2 = a_2 + r$

$a_2 - a_2 = r$

$r = 0$

Para que uma PA seja constante, sua razão deve ser igual a zero.

3. Em uma PA finita com n termos, sejam $a_1 = 40$, $r = 20$, $a_n = 2\,000$ e $n = ?$. Então:

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$2\,000 = 40 + (n-1) \cdot 20$

$2\,000 = 40 + 20n - 20$

$1\,980 = 20n$

$n = \dfrac{1\,980}{20} = 99$; 99 termos.

4. Temos $a_1 = 3$, e $r = 7 - 3 = 4$ e $a_n = ?$.

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_n = 3 + (n-1) \cdot 4$

$a_n = 4n - 1$

O termo geral da PA é $a_n = 4n - 1$.

5. Considere a fórmula do termo geral de uma PA:

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_n = (a_1 - r) + r \cdot n$

Ou seja, o coeficiente de n na fórmula do termo geral é a razão da PA. Logo, na PA cujo termo geral é dado por $a_n = -7n + 10$, temos que o coeficiente -7 é a razão desta PA.

O coeficiente de n representa a razão da progressão aritmética.

6. Seja $f(x) = 4x - 7$ uma função afim.

A sequência definida por $(f(1), f(2), f(3), \ldots)$ forma uma progressão aritmética? Primeiro, vamos descobrir o valor de $f(1)$:

$f(1) = 4 \cdot 1 - 7 = 4 - 7 = -3$

Agora, vamos rescrever a fórmula de $f(x)$ para comparar com a fórmula do termo geral de uma PA:

$f(x) = 4x - 7$

$f(x) = (4x - 4) - 3$

$f(x) = -3 + (4x - 4)$

$f(x) = f(1) + (x - 1) \cdot 4$

Finalmente, comparando a fórmula obtida para $f(x)$ com a fórmula do termo geral, temos:

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$f(x) = f(1) + (x-1) \cdot 4$

Considerando que $x \in \mathbb{N}^*$, podemos concluir que a sequência definida por $(f(1), f(2), f(3), \ldots)$ se comporta como uma progressão aritmética de razão $r = 4$, primeiro termo $f(1) = -3$ e termo geral:

$f(x) = f(1) + (x-1) \cdot 4$

7. A soma 0,32 + 0,0032 + 0,000032 + + ... corresponde à soma dos infinitos termos da PG com $a_1 = 0{,}32$ e $q = \frac{0{,}0032}{0{,}32} = 0{,}01$. Então:

$S = \frac{a_1}{1-q}, q \neq 1$

$S = \frac{0{,}32}{1-0{,}01} = \frac{0{,}32}{0{,}99} = \frac{32}{99}$

8. Espera-se que o estudante entenda que a sequência descrita é uma progressão geométrica.

Em uma sequência numérica em que o quociente entre um termo e seu antecessor é constante, temos que:

$x = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

$a_{n+1} = a_n \cdot x, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

Vamos supor que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, vale que $a_n = a_1 \cdot x^{n-1}$.

Para confirmar que isso é válido, é necessário fazer uma indução.

Para $n = 1$, é fácil ver que isso se confirma:

$a_1 = a_1 \cdot x^{1-1} = a_1 \cdot x^0 = a_1 \cdot 1 = a_1$

Verificando se vale para $n + 1$:

$a_{n+1} = a_n \cdot x = (a_1 \cdot x^{n-1}) \cdot x = a_1 \cdot x^n$

Portanto, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, temos que o termo geral dessa sequência é $a^n = a_1 \cdot x^{n-1}$ e podemos concluir que se o quociente entre um termo e o seu antecessor é constante em uma sequência, essa sequência é uma progressão geométrica.

9. A razão deverá ser igual a 1 ou o primeiro termo é nulo.

Para uma PG ser constante, é preciso que $a_i = a_j$ para quaisquer i, $j \in \mathbb{N}^*, i \neq j$.

Seja $i > j$. Assim:

$a_i = a_j$

$a_1 \cdot q^{i-1} = a_1 \cdot q^{j-1}$

$a_1 \cdot q^{i-1-j+j} = a_1 \cdot q^{j-1}$

$a_1 \cdot q^{j-1} \cdot q^{i-j} = a_1 \cdot q^{j-1}$

$a_1 \cdot q^{i-j} = a_1$

Portanto, para que uma PG seja constante: $a_1 = 0$ ou $q^{i-j} = 1$. Como $q^{i-j} = 1$ independentemente da escolha de i e j, temos que a razão da PG que a torna constante é $q = 1$.

10.

a) A razão dessa PG é $q = \frac{9}{3} = 3$. Então, o termo geral é:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

b) A razão dessa PG é $q = \frac{6}{3} = 2$.

Então, o termo geral é:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$

O termo geral é $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

11. As condições para que isso ocorra são que a razão deverá ser negativa e o primeiro termo não pode ser nulo.

Questões de vestibulares e Enem

12. Sabemos que $a_2 = 32$ e $a_7 = 243$. Então:

$a_7 = a_2 \cdot q^{7-2}$

$243 = 32 \cdot q^5$

$q^5 = \frac{243}{32}$

$q = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{3}{2}$

Calculamos, então, o termo a_4:

$a_4 = a_2 \cdot q^{2-2} = 32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 72$

Alternativa **b**.

13. Pelo enunciado, temos:

$\frac{a_1 + a_2}{2} = 6$, então $a_1 + a_2 = 12$ (I)

$\frac{a_2 + a_3}{2} = 18$, então $a_2 + a_3 = 36$ (II)

Podemos escrever um sistema com (I) e (II):

$\begin{cases} a_1 + a_2 = 12 \text{ (I)} \\ a_2 + a_3 = 36 \text{ (II)} \end{cases}$

Sabemos que $a_2 = a_1 \cdot q^1$ e $a_3 = a_1 \cdot q^2$, sendo q a razão da PG citada. Então:

$\begin{cases} a_1 + (a_1 \cdot q) = 12 \text{ (I)} \\ (a_1 \cdot q) + a_1 \cdot (q^2) = 36 \text{ (II)} \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 \cdot (1 + q) = 12 \text{ (I)} \\ a_1 \cdot (q + q^2) = 36 \text{ (II)} \end{cases}$

Isolamos a_1 na equação (I):

$a_1 \cdot (1 + q) = 12$

$a_1 = \frac{12}{1+q}$

Substituímos em (II):

$\frac{12}{1+q} \cdot (q + q^2) = 36$

$\frac{12}{1+q} \cdot q \cdot (1 + q) = 36$

$12 \cdot q = 36$

$q = \frac{36}{12}$

$q = 3$

Substituindo q em (I):

$a_1 \cdot (1 + q) = 12$

$a_1 \cdot (1 + 3) = 12$

$4a_1 = 12 \Rightarrow a_1 = \frac{12}{4} = 3$

Por fim, calculamos a soma de a_1, a_2 e a_3:

$S = 3 + 9 + 27 = 39$. Alternativa **c**.

14. Cada novo triângulo tem lado com metade da medida do lado do triângulo anterior e, consequentemente, com metade do perímetro. Então, os perímetros formam a PG $\left(3L, \frac{3L}{2}, \frac{3L}{4}; \ldots\right)$, com $a_1 = 3L$, e $q = \frac{1}{2}$. Calculamos a soma dos infinitos termos:

$S = \frac{a_1}{1-q}, q \neq 1$

$S = \frac{3L}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3L}{\frac{1}{2}} = 3L \cdot 2 = 6L$

Alternativa **c**.

15. Temos do enunciado que $a_9 = 1\,792$ e $a_4 = 56$. Calculamos a razão:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_9 = a_4 \cdot q^5$

$1\,792 = 56 \cdot q^5$

$q^5 = \frac{1\,792}{56} = 32$

$q = \sqrt[5]{32} = 2$

Então, encontramos o primeiro termo da PG:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_4 = a_1 \cdot q^3$

$56 = a_1 \cdot 2^3$

$a_1 = \frac{56}{8} = 7$

Na outra PG, a razão corresponde a $q + 1$; então, $q = 3$. O primeiro termo também é $b_1 = 7$. Calculamos o termo b_4:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$b_4 = 7 \cdot 3^{4-1} = 7 \cdot 27 = 189$

Logo, o quarto termo é 189.

Alternativa **a**.

16. Considere a soma $\log 2^2 + \log 2^3 + \log 2^4 \ldots + \log 2^{50}$. Podemos reescrevê-la como:

$\log 2^2 + \log 2^3 + \log 2^4 \ldots + \log 2^{50} = 2 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 2 + 4 \cdot \log 2 \ldots + 50 \cdot \log 2 = \log 2 \cdot (2 + 3 + 4 + \ldots + 50)$.

Observe que a sequência dos coeficientes de cada log, dada por (2, 3, 4, ..., 50), é uma PA finita de 49 termos com primeiro termo $a_1 = 2$ e razão $r = 1$. Assim, a soma desses coeficientes é:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

$S_{49} = \frac{(2 + 50)}{2} \cdot 49$

$S_{49} = \frac{52}{2} \cdot 49 = 1\,274$

Logo, a soma dos logaritmos é:

$\log 2^2 + \log 2^3 + \log 2^4 \ldots + \log 2^{50} = \log 2 \cdot (2 + 3 + 4 + \ldots + 50) = 1\,274 \cdot \log 2 = \log 2^{1\,274}$

Alternativa **b**.

17. De acordo com o enunciado, o salário é acrescido de um mesmo valor a cada mês. Ou seja, o salário do estagiário nesses meses pode ser interpretado como uma PA finita de 5 termos, com $a_1 = 1\,500$, $a_5 = 5\,000$ e razão $r = ?$. Então:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_5 = a_1 + (5 - 1)r$

$5\,000 = 1\,500 + 4r$

$5\,000 - 1\,500 = 4r$

$4r = 3\,500$

$r = \dfrac{3\,500}{4} = 875$

Agora, basta encontrar o salário em abril, que é igual a:

$a_4 = a_1 + (4 - 1)r$

$a_4 = 1\,500 + 3 \cdot 875 = 4\,125$

Alternativa **c**.

18.

a) Incorreta.

Os números triangulares podem ser escritos como $T_n = \dfrac{1+n}{2} \cdot n$.

Assim, o 15º número triangular é:

$T_{15} = \dfrac{1+15}{2} \cdot 15 = \dfrac{16}{2} \cdot 15 = 120$

O 15º número triangular não é 162.

b) Incorreta.

Os números oblongos podem ser escritos como $O_n = n^2 + n$. Assim, o 30º número oblongo é:

$O_{30} = 30^2 + 30 = 30 \cdot (30 + 1) = 930$

Logo, O_{30} é par, não ímpar.

c) Incorreta.

Temos que verificar se 156 é um número oblongo ou um número triangular. Assim, vamos primeiro checar se 156 é oblongo:

$156 = n^2 + n$

$n^2 + n - 156 = 0$

$n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-156)}}{2 \cdot 1}$

$n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{625}}{2}$

$n = \dfrac{-1 \pm 25}{2}$

Como n não pode ser negativo, $n = \dfrac{-1 + 25}{2} = \dfrac{24}{2} = 12$. Logo, 156 é um número oblongo e a afirmação está errada.

d) Correta.

Temos que verificar se 210 é um número oblongo e um número triangular. Assim, vamos primeiro checar se 210 é oblongo:

$210 = n^2 + n$

$n^2 + n - 210 = 0$

$n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-210)}}{2 \cdot 1}$

$n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{841}}{2} = \dfrac{-1 \pm 29}{2}$

Como n não pode ser negativo, $n = \dfrac{-1 + 29}{2} = \dfrac{28}{2} = 14$. Logo, 210 é um número oblongo.

Agora, vamos checar se 210 é um número triangular:

$T_n = \dfrac{1+n}{2} \cdot n$

$210 = \dfrac{1+n}{2} \cdot n$

$210 \cdot 2 = (1 + n) \cdot n$

$420 = n^2 + n$

$n^2 + n - 420 = 0$

$n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-420)}}{2 \cdot 1}$

$n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1681}}{2}$

$n = \dfrac{-1 \pm 41}{2}$

Como n não pode ser negativo, $n = \dfrac{-1 + 41}{2} = \dfrac{40}{2} = 20$.

Logo, 210 é um número triangular.

e) Incorreta.

É preciso verificar se a sequência definida por $(T_2 - T_1, T_3 - T_2, T_4 - T_3, \ldots) =$
$= (2, 3, 4, \ldots)$ é uma progressão geométrica. Vamos supor que seja. Então, podemos calcular sua razão:

$q = \dfrac{T_3 - T_2}{T_2 - T_1} = \dfrac{T_4 - T_3}{T_3 - T_2}$

$q = \dfrac{3}{2} = \dfrac{4}{3}$, uma contradição.

Assim, a sequência das diferenças entre dois números triangulares consecutivos não forma uma progressão geométrica.

Alternativa **d**.

19. A quantidade de pés de jiló plantados por círculo define uma progressão aritmética finita de 10 termos, da forma $(4, 8, 12, \ldots, a_{10})$. Então, temos $a_1 = 4$, $r = 8 - 4 = 4$ e $a_{10} = ?$.

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot 4$

$a_{10} = 4 + 9 \cdot 4 = 40$

Calculando a soma dos termos dessa PA:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

$S_{10} = \dfrac{4 + 40}{2} \cdot 10 = 44 \cdot 5 = 220$

Portanto, a quantidade de pés de jilós plantados dentro do alcance do aspersor é de 220.

Alternativa **d**.

20. Dada uma progressão aritmética finita com 30 termos, em que o último termo é 30 vezes maior que o primeiro, ou seja, $a_{30} = 30a_1$, temos:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_{30} = a_1 + (30 - 1)r$

$a_{30} = a_1 + 29r$

$30a_1 = a_1 + 29r$

$29a_1 = 29r$

$a_1 = r$

Do enunciado, temos que a soma dos 3 menores termos é igual a 18. Então:

$a_1 + a_2 + a_3 = 18$

$a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r = 18$

$3a_1 + 3r = 18$

$3r + 3r = 18$

$r = \dfrac{18}{6} = 3$

Portanto, a PA em questão tem razão $r = 3$.

Alternativa **c**.

21. As parcelas pagas por Joana no celular definem uma progressão aritmética finita com $n = 24$ termos, $a_1 = 120$ e $r = 126 - 120 = 6$. Para saber o total que deve ser pago no celular, temos que encontrar a_{24}:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_{24} = a_1 + (24 - 1)r$

$a_{24} = 120 + 23 \cdot 6 = 258$

Então, o total que deve ser pago por Joana é:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

$S_{24} = \dfrac{120 + 258}{2} \cdot 24$

$S_{24} = 378 \cdot 12 = 4\,536$

Porém, Joana não pagou a 19ª parcela, que é dada por a_{19}:

$a_{19} = a_1 + (19 - 1)r$

$a_{19} = 120 + 18 \cdot 6 = 228$

$S_{24} - a_{19} = 4\,536 - 228 = 4\,308$;

R$ 4.308,00.

Alternativa **d**.

22. A média dos 2 021 primeiros termos da PA é igual a 102. Isso é o mesmo que escrever:

$102 = \dfrac{S_{2\,021}}{2\,021} =$

$= \dfrac{(a_1 + a_{2\,021})}{2 \cdot 2\,021} \cdot 2\,021$

$2 \cdot 102 = a_1 + a_{2\,021}$

Dado que $a_1 = 1$:

$204 = a_1 + a_{2\,021}$

$204 = 1 + a_{2\,021}$

$a_{2\,021} = 203$

Agora, vamos usar isso para descobrir a razão r desta PA:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_{2\,021} = a_1 + (2\,021 - 1)r$

$203 = 1 + 2\,020r$

$202 = 2\,020r$

$r = \frac{202}{2\,020} = 0{,}10$

Alternativa **a**.

23. A área do teatro corresponde a $\frac{1}{6}$ da área da circunferência com o mesmo raio r do arco que define a área do teatro. Assim:

$\frac{1}{6} \cdot \pi r^2 = 600\pi$

$r^2 = 6 \cdot 600$

$r = \sqrt{3\,600} = 60$

Assim, o raio r que define a área do teatro é igual a 60 metros. Como cada fileira no teatro tem largura de 2,5 metros, temos que a quantidade de n de fileiras é $n = \frac{60}{2{,}5} = 24$. Do enunciado, temos que a sequência da quantidade de cadeiras por fileira forma uma progressão aritmética finita com $n = 24$ termos, $a_1 = 6$, $r = 10 - 6 = 4$

$a_{24} = a_1 + (24 - 1)r = 98$

A quantidade total de lugares no teatro é dada por:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

$S_{24} = \frac{6 + 98}{2} \cdot 24$

$S_{24} = 104 \cdot 12 = 1\,248$

Portanto, o teatro possui 1 248 assentos.

Alternativa **e**.

24. Essa PA possui $a_1 = 3$, $r = 6 - 3 = 3$ e $a_{10} = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_{10} = a_1 + (10 - 1)r$

$a_{10} = 3 + 27 = 30$

Logo, no décimo círculo há 30 pontos que formam um polígono regular.

Assim, a medida do ângulo central do arco de quaisquer dois pontos consecutivos no círculo C_{10} é dada por:

$\frac{2\pi}{30}\text{rad} = \frac{\pi}{15}\text{rad}$

Alternativa **c**.

25. $3 \cdot 60 + 36 = 216$; 216 s

Dado que Marcos levou 60 segundos para concluir a sua parte da prova, para finalizar o restante do revezamento, os outros 3 integrantes da equipe levaram:

$216 - 60 = 156$; 156 s

Como os tempos em que esses 3 integrantes concluíram suas respectivas partes da prova formam uma progressão aritmética de razão $r = 2$, temos:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

$S_3 = \frac{(a_1 + a_3)}{2} \cdot 3$

$156 = \frac{(a_1 + a_3)}{2} \cdot 3$

$156 \cdot 2 = (a_1 + a_3) \cdot 3$

$\frac{312}{3} = a_1 + a_3$

$104 = a_1 + a_3$

Como $a_3 = a_1 + 2r$, temos:

$104 = a_1 + a_1 + 2r$

$104 = 2 \cdot (a_1 + r)$

$\frac{104}{2} = a_1 + r$

$52 = a_1 + r = a_2$

Como Luiz foi o último desses 3 competidores a participar da prova, ele levou $52 + 2 = 54$ segundos para realizar sua parte da prova.

Alternativa **e**.

26. Os termos ímpares dessa sequência possuem o termo geral:

$a_{2n+1} = 2 + 6n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sendo 101 um número ímpar, podemos reescrevê-lo como $101 = 2 \cdot 50 + 1$.

$a_{2n+1} = 2 + 6n$

$a_{101} = 2 + 6 \cdot 50$

$a_{101} = 2 + 300 = 302$

Portanto, o 101º termo dessa sequência é 302.

Alternativa **c**.

27. Temos $a_1 = 5$, $r = 2$ e $a_6 = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_6 = a_1 + (6 - 1)r$

$a_6 = 5 + 5 \cdot 2$

$a_6 = 5 + 10 = 15$

Assim, ao final do mês de junho, a *startup* terá 15 clientes.

Alternativa **e**.

28. Temos que (a, b, c) e (ab, bc, ca) são progressões aritméticas de mesma razão. Seja r essa razão. Então, podemos reescrever a, b e c em função de a e r:

$b = a + r$

$c = a + 2r$

Considere o termo ca da segunda PA. Podemos reescrever ca de duas formas:

(I) $ca = (a + 2r) \cdot a$

(II) $ca = ab + 2r = a \cdot (a + r) + 2r$

Igualando (I) e (II):

$(a + 2r) \cdot a = a \cdot (a + r) + 2r$

$a^2 + 2ra = a^2 + ra + 2r$

$ra = 2r$

$a = 2$

Considere agora o termo bc da segunda PA. Podemos reescrever cb de duas formas:

(III) $bc = (a + r) \cdot (a + 2r)$

(IV) $bc = ab + r = a \cdot (a + r) + r$

Igualando (III) e (IV):

$(a + r) \cdot (a + 2r) = a \cdot (a + r) + r$

$a^2 + 2ra + ra + 2r^2 = a^2 + ra + r$

$2ra + 2r^2 = r$

Como $a = 2$, temos:

$2r \cdot 2 + 2r^2 = r$

$2r^2 + 4r - r = 0$

$2r^2 + 3r = 0$

$r = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0}}{2 \cdot 2}$

$r = \frac{-3 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow r = \frac{-3 \pm 3}{4}$

$r = 0$ ou $r = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

Como a, b e c são distintos, $r = -\frac{3}{2}$.

Vamos calcular o produto abc:

$abc = a \cdot (a + r) \cdot (a + 2r)$

$abc = 2 \cdot \left(2 - \frac{3}{2}\right) \cdot \left[2 + 2\left[-\frac{3}{2}\right]\right]$

$abc = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)$

$abc = -1$

Alternativa **c**.

29. Sejam $a, b > 0$ tais que $a \neq b$. Sendo $f(x) = b \cdot a^x$, a sequência definida por $(f(1), f(2), f(3),...)$ é uma progressão geométrica. Assim, a razão dessa PG é $q = \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{ba^2}{ba} = a$. Portanto, a soma infinita definida por $f(1) + f(2) + f(3)...$ pode ser calculada por:

$S = \frac{a_1}{1 - q}, q \neq 1$

$S = \frac{ba^1}{1 - a} = \frac{ab}{1 - a}$

Alternativa **b**.

30. Considerando que o quadrado inicial tenha lado l, podemos concluir que a sequência dos lados de cada um desses quadrados que estão sendo construídos forma uma progressão geométrica, da forma $\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{4}, \frac{l}{8}, \dots\right)$, de razão $\frac{1}{2}$ e que a sequência das áreas dos quadrados coloridos também forma uma PG, da forma $\left(\frac{l^2}{4}, \frac{l^2}{16}, \frac{l^2}{64}, \dots\right)$, de razão $q = \frac{1}{4}$.

Assim, podemos concluir que a soma infinita das áreas coloridas é:

$$S = \frac{a_1}{1-q}, q \neq 1 \Rightarrow S = \frac{\frac{l^2}{4}}{1-\frac{1}{4}} \Rightarrow S = \frac{\frac{l^2}{4}}{\frac{3}{4}} \Rightarrow S = \frac{l^2}{4} \cdot \frac{4}{3}$$

$$S = l^2 \cdot \frac{1}{3}$$

Portanto, a soma das áreas coloridas corresponde a $\frac{1}{3}$ da área do quadrado original.

Alternativa **c**.

31. A soma infinita definida por $S = x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \ldots = 18$ é uma progressão geométrica, com razão $q = \frac{\frac{x}{3}}{x} = \frac{1}{3}$.

Assim, essa soma infinita é definida por:

$$S = \frac{a_1}{1-q}, q \neq 1$$

$$18 = \frac{x}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow 18 = \frac{x}{\frac{2}{3}}$$

$$18 = \frac{3x}{2} \Rightarrow 18 \cdot 2 = 3x$$

$$36 = 3x \Rightarrow x = \frac{36}{3} = 12$$

Alternativa **d**.

32. Temos a sequência (80, 100, 120, ..., 1 380) formada pelas distâncias dos postes à praça, sendo n o número de postes colocados, $a_1 = 80$, $r = 100 - 80 = 20$ e $a_n = 1\,380$. Vamos determinar o número de postes colocados:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$1\,380 = 80 + (n-1) \cdot 20$$

$$1\,380 = 80 + 20n - 20$$

$$1\,380 = 20n + 60$$

$$20n = 1\,380 - 60$$

$$20n = 1\,320$$

$$n = \frac{1\,320}{20}$$

$$n = 66$$

Logo, serão colocados 66 postes.

O máximo que a prefeitura poderá gastar com os postes é:

$66 \cdot 8\,000 = 528\,000$; R$ 528.000,00

Alternativa **c**.

33. Da figura dada, temos que a cada metro de profundidade, a intensidade luminosa diminui com razão

$$q = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$$

Sabendo que quando a profundidade é igual a 0 metro, $a_1 = L_0$, quando a profundidade chega a 6 metros a intensidade luminosa é dada por a_7, que é igual a:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_7 = a_1 \cdot q^{7-1}$$

$$a_7 = L_0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \Rightarrow a_7 = \frac{64}{729} L_0$$

Alternativa **d**.

34. Considerando que x, y e z representem, respectivamente, o número de embalagens de 50 g, de 100 g e de 200 g a serem compradas, temos que a soma S deve ser mínima, isto é:

$S = 2x + 3{,}6y + 6{,}4z + 10$ (I)

Além disso, temos:

$2x + 4y + 6z = 12$ (II)

Como a solução será formada por valores inteiros para as incógnitas, uma maneira de resolver é atribuindo valores naturais às ternas (x, y, z):

(6, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 2), (4, 1, 0),
(3, 0, 1), (2, 2, 0) e (1, 1, 1).

A terna que verifica as duas condições é (0, 3, 0). Então, temos:

$$S = 2 \cdot 0 + 3{,}6 \cdot 3 + 6{,}4 \cdot 0 + 10$$

$$S = 20{,}80$$

Portanto, a menor quantia a ser gasta por essa menina e que possibilite levar o bichinho de pelúcia nessa promoção é R$ 20,80.

Alternativa **c**.

CAPÍTULO 3

Estatística descritiva

Objetivos

- Identificar e calcular as medidas de tendência central em uma distribuição de dados.
- Compreender as medidas de tendência central como valor que representa um rol de dados.
- Identificar e calcular as medidas de dispersão em uma distribuição de dados.
- Compreender as medidas de dispersão como forma de analisar uma distribuição de dados.
- Analisar e construir diagrama de *boxplot* associado a uma distribuição de dados.
- Elaborar uma pesquisa e analisar os resultados tendo como referência medidas de tendência central e/ou medidas de dispersão.

Justificativa

A estatística descritiva possibilita a leitura de vários tipos de dados, por meio de técnicas que favorecem sua análise e interpretação. Portanto, o desenvolvimento de habilidades que envolvem esse ramo da estatística favorece a interpretação crítica de situações socioeconômicas e cotidianas em vários aspectos, além daquelas relativas a diversas áreas do conhecimento.

Competências gerais da BNCC

Competência geral 1: A valorização dos conhecimentos historicamente construídos está presente na seção **Análise e contexto**, das páginas 149 e 150, em que os estudantes leem um texto sobre a história da Estatística e, em seguida, fazem uma pesquisa estatística.

Competência geral 2: Esta competência é mobilizada em vários momentos ao longo do capítulo. No item 2 da seção **Para pensar e discutir**, da página 145, por exemplo, o estudante esboça um *boxplot* sem números para o colega analisar, de acordo com alguns critérios. Utilizam assim a imaginação e a criatividade para formular problemas e criar soluções.

Competência geral 4: Esta competência é mobilizada na atividade 31, da página 146, em que os estudantes, em grupos, constroem um diagrama *boxplot* por meio de dados apresentados em um diagrama de ramo e folhas. Eles utilizam a linguagem oral para se comunicar, a matemática para representar os dados e a linguagem verbal escrita para redigir um texto que será discutido com os colegas.

Competência geral 5: Neste capítulo, em várias atividades os estudantes utilizam recursos tecnológicos para tabulação de dados e construção de gráficos estatísticos, como na seção **Para explorar**, da página 139, em que utilizam uma planilha eletrônica para elaborar uma tabela contendo as classes das alturas dos estudantes da turma, a frequência e o valor médio de cada classe.

Competência geral 6: Esta competência é mobilizada na realização de diferentes atividades desenvolvidas em grupos ou em duplas, muitas delas envolvendo pesquisas, por meio das quais os estudantes têm a oportunidade de valorizar a diversidade de saberes e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhes possibilitem entender as relações do mundo do trabalho.

Competência geral 7: Esta competência é mobilizada ao longo de todo o capítulo pelo próprio assunto que é trabalhado. Utilizando dados estatísticos e as diversas formas de representá-los, os estudantes têm a oportunidade de argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis.

Competência geral 10: Esta competência é mobilizada na seção **Para pensar e discutir**, da página 119, em que os estudantes analisam uma conta de água ou de energia e fazem propostas para diminuir o consumo.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 1

EM13MAT102: Essa habilidade é contemplada em grande parte deste capítulo, pois os estudantes têm a oportunidade de analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação.

EM13MAT104: Essa habilidade é mobilizada na seção **Para pensar e discutir**, da página 117, em que os estudantes pesquisam sobre como é calculada a renda *per capita* brasileira e analisam a distribuição da renda *per capita* no Brasil. Na atividade 6, da página 122, por meio da análise de um gráfico, eles elaboram um pequeno texto comparando os rendimentos médios *per capita* entre as regiões brasileiras e entre as regiões e a média do Brasil, no ano de 2022.

Competência específica 2

EM13MAT202: Essa habilidade está contemplada na seção **Análise e contexto**, das páginas 149 e 150, em que, depois de lerem um texto sobre a história da Estatística, os estudantes fazem uma pesquisa com três turmas do Ensino Médio da escola e, utilizando medidas de tendência central e/ou medidas de dispersão, elaboram um texto comparando os dados obtidos.

Competência específica 3

EM13MAT316: Esta habilidade é trabalhada da página 116 até a página 130, por meio da resolução de problemas de contextos diversos, em que os estudantes precisam calcular e interpretar medidas de tendência central: média, moda e mediana. Da página 131 até a página 141, trabalham com as medidas de dispersão: amplitude, variância e desvio-padrão. Em diversas situações eles elaboram problemas e desafios para os colegas resolverem, como na atividade 22 da página 140.

Competência específica 4

EM13MAT406: Na pesquisa proposta na seção **Análise e contexto**, das páginas 149 e 150, os estudantes utilizam medidas de tendência central e/ou medidas de dispersão para comparar os dados obtidos.

EM13MAT407: A partir da página 142, os estudantes utilizam tanto os diagramas de ramo e folhas como *boxplot* para interpretar e comparar dados estatísticos, reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

Temas Contemporâneos Transversais

O TCT **Educação para o Consumo** é tratado na seção **Para pensar e discutir**, da página 119, em que os estudantes analisam uma conta de água ou de energia e fazem propostas para diminuir o consumo.

Resoluções e comentários

Páginas 114-115

Abertura

1. De acordo com a BNCC, as medidas de tendência central (média, moda e mediana) foram abordadas durante o 8º ano do Ensino Fundamental.
2. As medidas de tendência central e medidas de dispersão são ferramentas poderosas que auxiliam os pesquisadores e profissionais das Ciências Aplicadas a entenderem os dados relacionados aos fenômenos sociais, econômicos e demográficos. Pode ser feita uma parceria com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e o assunto pode ser debatido por meio de um seminário.

1. Medidas de tendência central

Página 116

Para pensar e discutir

1. Sejam M_A e M_B a média aritmética de pontos do jogador *A* e do jogador *B*, respectivamente.
   $M_A = \dfrac{22 + 23 + 20 + 19 + 21}{5} = 21$
   $M_B = \dfrac{34 + 12 + 10 + 35 + 22 + 13}{6}$
   $M_B = 21$
   Ambos têm a mesma média.
2. Um técnico, por exemplo, pode escolher um jogador tanto pela regularidade (jogador *A*) quanto pelo desempenho, mesmo que ele não seja regular.

Página 117

Para pensar e discutir

1. A renda *per capita* é um indicador econômico que representa a média da renda de uma determinada área geográfica (como um país, estado ou cidade) dividida pelo número de habitantes dessa área.
2. É calculada pela soma de todas as rendas individuais e, depois, dividida pelo número total de habitantes.
3. A distribuição da renda *per capita* no Brasil é historicamente desigual.

As áreas urbanas, geralmente, têm uma renda *per capita* mais alta do que as áreas rurais, e também existem diferenças significativas entre os estados.

Página 119

Para pensar e discutir

1. A média não corresponde a qualquer um dos consumos. Entretanto, poderia ser, também, um desses valores.
2. Como a média é igual a 35,4 m^3, multiplicando-a por 10, obtemos:

   $10 \cdot M_a = 10 \cdot 35{,}4 = 354$; 354 m^3.
3. Diminuindo 5 metros cúbicos em cada mês:

   $$M_a = \frac{39+35+39+37+34+29+25+17+16+33}{10} = 30{,}4$$

   A média também diminuirá 5 metros cúbicos.
4. Algumas sugestões para diminuir o consumo: evitar banhos longos ou desligar da tomada aparelhos que não estiverem sendo usados.

Página 120

Para pensar e discutir

1. Ocorreu que a nota 6 foi repetida 180 vezes.
2. Significa que sua contribuição para o resultado geral da média será menor. Isso ocorre porque a palavra "peso" se refere à importância relativa de cada valor na média.
3. Sim, quanto maior for a frequência de uma nota, maior será o "peso" dessa nota no cálculo da média.

Páginas 121-122

Para explorar

1.

Altura	Frequência absoluta	Média da classe
[1,39, 1,48[	4	1,435
[1,48, 1,57[	9	1,525
[1,57, 1,66[	11	1,615
[1,66, 1,75[	8	1,705
[1,75, 1,84[	5	1,792
[1,84, 1,93[	3	1,885
Total	40	

2. Pode-se utilizar o ponto médio de cada faixa como representante. Isso nos permite calcular uma média aproximada com base nessas representações:

   $$M_p = \frac{4 \cdot 1{,}435 + 9 \cdot 1{,}525 + 11 \cdot 1{,}615 + 8 \cdot 1{,}705}{40} +$$
   $$+ \frac{5 \cdot 1{,}792 + 3 \cdot 1{,}885}{40} \cong 1{,}64$$

Atividades

1.
   a) Admitindo peso 1 para todas as etapas:

   $$M_p = \frac{1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 7}{4} = 7{,}0$$

   b) $M_p = \dfrac{1 \cdot 7 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 7}{8} = 7{,}125$

2. $M_p = \dfrac{37 \cdot 9 + 36 \cdot 4 + 35 \cdot 2 + 34 \cdot 5}{20} = 35{,}85$; 35,85 °C
3. $\dfrac{A + B}{2} = 5 \Rightarrow A + B = 10$ (I)

   Dessa forma:

   $\dfrac{2A + 3B}{5} = 5{,}2 \Rightarrow 2A + 3B = 26$ (II)

   A partir da equação I, obtemos: $B = 10 - A$

   Agora, substituímos B na equação II:

   $2 \cdot A + 3 \cdot (10 - A) = 26 \Rightarrow -A = -4 \Rightarrow A = 4$

   Logo, $B = 6$. Portanto, o produto entre A e B é 24.
4.
   a) $M_p = \dfrac{12 \cdot 4 + 13 \cdot 5 + 14 \cdot 3 + 15 \cdot 1 + 16 \cdot 4 + 17 \cdot 5}{22}$

   $M_p = \dfrac{319}{22} = 14{,}5$; 14,5 anos

   b) Pelo gráfico, 12 estudantes estão abaixo da média.
5.
   a) Sim; 34 °C é a temperatura máxima mais frequente.

   b) Sim; 23 °C é a temperatura mínima mais frequente.

   c) $M_a = \dfrac{34 + 30 + 34 + 34 + 39 + 35 + 33}{7} \cong 34{,}1$; 34,1 °C

   d) $M_a = \dfrac{23 + 23 + 23 + 23 + 21 + 18 + 19}{7} \cong 21{,}4$; 21,4 °C
6.
   a) Comparando com a média de rendimento nacional, o Sudeste geralmente supera a média, enquanto o Norte e o Nordeste podem ficar abaixo.

   b) Média do PIB em 2021:

   $M_{2021} = \dfrac{940 + 929 + 1\,678 + 1\,804 + 1\,814}{5}$

   $M_{2021} = \dfrac{7\,165}{5} = 1\,433$

   Média do PIB em 2022:

   $M_{2022} = \dfrac{1\,096 + 1\,011 + 1\,857 + 1\,891 + 1\,927}{5}$

   $M_{2022} = \dfrac{7\,782}{5} = 1\,556{,}4$

   Exemplo de resposta: Regiões mais desenvolvidas, como Sudeste e Sul, viram aumento nos rendimentos, impulsionadas pela recuperação econômica pós-pandemia. Centro-Oeste e Nordeste também registraram crescimento moderado, enquanto o Norte pode ter enfrentado desafios econômicos.
7. $M_p = \dfrac{6 \cdot 4 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 2}{12} = \dfrac{86}{12} = 7{,}16 \cong 7{,}2$

   Alternativa **d**.
8. $M_a = \dfrac{240 + 180 + 180 + 240 + 120}{5} = \dfrac{960}{5} = 192$; 192 min

   $\dfrac{192}{60} = 3{,}2$; 3,2 h

   O tempo de uso é superior a três horas.

   Alternativa **a**.
9. Calculando a média dos três estudantes, temos:

   $M_A = \dfrac{5 + 9 + 8}{3} = 7{,}3$; $M_B = \dfrac{7 + 8 + 4}{3} = 6{,}3$;

   $M_C = \dfrac{8 + 6 + 7}{3} = 7$

   O estudante B não alcançou a média.

   Alternativa **a**.

Página 123

Para pensar e discutir

1. Quando a média aritmética não é a melhor representação de um conjunto de valores, a moda pode ser utilizada. Percebe-se que o valor 2 reais é o que representa mais adequadamente o conjunto de valores do grupo, pois, dos 6 valores, ele aparece 4 vezes.
2. A resposta depende da idade dos estudantes da turma.

Página 124

Para explorar

Por se tratar de uma atividade coletiva, os estudantes precisam ser organizados para isso.

Etapa 1:

1. Encontre a idade que mais aparece entre os estudantes.

2. Veja quantas canetas cada estudante tem e descubra qual número de canetas é o mais comum.

3. Anote o mês de aniversário de cada estudante e descubra qual mês tem o maior número de aniversariantes.

Etapa 2: discussão coletiva:

Pergunta: "Para representar os dados da turma, o que é melhor usar: a média aritmética ou a moda?"

Justificativa: a moda é mais adequada quando queremos saber o que é mais comum ou frequente, como a idade mais comum na turma, a quantidade de canetas que mais estudantes possuem, ou o mês com mais aniversariantes.

Etapa 3: Exemplo: "Suponha que a maioria dos estudantes na turma tenha 12 anos e alguns tenham 10 ou 13 anos. Se quisermos saber qual é a idade mais comum na turma, a moda (12 anos) é mais representativa do que a média aritmética, que pode não mostrar a idade que a maioria tem."

Página 125

Para pensar e discutir

1. A moda é a quantidade 24, que aparece 6 vezes ao todo.
2. Embora não exista uma posição central, pois o número de termos é par, podemos dizer que são dois valores iguais a 23 que ocupam as posições centrais da distribuição.

   $M_a = \dfrac{23 + 23}{2} = 23$
3. $M_a = \dfrac{511}{24}$

   $M_a \cong 21{,}29$

   Logo, não é o mesmo valor.
4. Não. Uma vez que a média não representa efetivamente um valor correspondente à quantidade de livros, pois não é um número natural.

Páginas 128-129

Atividades

10.

a) $M_a = \dfrac{28 + 30 + 29 + 28 + 29 + 28 + 26 + 33 + 34}{9}$

$M_a = \dfrac{265}{9} \cong 29{,}4$; 29,4 °C

b) A moda é 28 °C, pois aparece em três estados.

c) Temperaturas máximas: 26, 28, 28, 28, 29, 29, 29, 30, 33, 34.

$M_e = 29$; 29°C

d) Observa-se que essas três medidas estão muito próximas. Assim, qualquer uma delas poderia ser utilizada adequadamente, sem maiores problemas, para representar o grupo de temperaturas.

11.

a) $M_a = \dfrac{35 + 35 + 37 + 38 + 39 + 40}{6} = 37{,}3; 37{,}3\ m^3$

b) A moda de consumo é de 35 m^3.

c) $M_a = \dfrac{37 + 38}{2} = 37{,}5;\ 37{,}5\ m^3$

12. $M_a = \dfrac{20 + 8 + 1 + 2 + 12 + 24 + 36 + 2 + 2 + 3}{10} = 11; 11$ mm

Consumo em m^3: 1, 2, 2, 2, 3, 8, 12, 21, 20, 36.

$M_e = \dfrac{3 + 8}{2} = 5{,}5;\ 5{,}5$ mm

$M_o = 2$ mm

13. $M_a = \dfrac{15 + 17 + 21 + 25 + 25 + 29 + 33 + 35}{8} =$

$= \dfrac{200}{8} = 25$

$M_e = \dfrac{25 + 25}{2} = \dfrac{200}{8} = 25$

$M_o = 25$

Alternativa **d**.

14.

a) Há 85 policiais nesse município.

b) $M_p = \dfrac{12 \cdot 25 + 15 \cdot 28 + 25 \cdot 30 + 15 \cdot 33}{85}$

$M_p = \dfrac{10 \cdot 35 + 8 \cdot 40}{85} = \dfrac{2\,635}{85} = 30$; 30 anos

Como a moda, a média e a mediana são 30 anos, essa é a idade que representa esse grupo de pessoas.

$M_e = \dfrac{30 + 30}{2} = 30$; 30 anos

15. Seja x o número de estudantes que jogam futebol e $x + 1$ o número de estudantes que jogam basquete. Assim, o total de estudantes é: $x + x + 1 = 2x + 1$. Notemos que $2x + 1$ é um número ímpar. Então, a mediana é um único elemento, ou seja, 1,67 m é a mediana, que também é a altura de F. Assim, os estudantes com altura inferior a 1,67 m jogarão futebol, e os com altura superior ou igual a 1,67 m jogarão basquete. Logo, P e J jogam futebol, e F e M jogam basquete. Alternativa **c**.

16. $M_e = \dfrac{34 + 34}{2} = 34$; 34 anos e $M_o = 33$; 33 anos

$34 + 33 = 67$

Alternativa **a**.

17. Sendo x e y o número de pessoas atendidas na sexta-feira e no sábado, respectivamente, temos:

$\dfrac{20 + 17 + 16 + 19 + x + y}{6} = 21 \Rightarrow x + y = 54$

Como a moda é maior que 20, temos: $x = y$. Logo, $x = y = 27$.

Alternativa **c**.

18. Colocando os dados em ordem crescente, temos: 20, 25, 30, 35, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70.

$$M_e = \frac{40 + 45}{2} = 42{,}5$$

Alternativa **b**.

19. Primeiro, vamos organizar os dados em ordem crescente:

25 testes com até 5 pontos;

15 testes com 6 pontos; 10 testes com 7 pontos; 20 testes com 8 pontos; 30 testes com mais de 8 pontos.

$$M_e = \frac{7 + 8}{2} = 7{,}5$$

Alternativa **d**.

20. $M_p = \frac{3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 6 \cdot 5}{20} = \frac{63}{20} = 3{,}15$

Mediana: $M_e \in [3, 4]$. Moda: 6 com frequência 5.

01 + 02 + 16 = 19

Página 130

Para explorar

Parte 1

Por exemplo, suponhamos que tenhamos as alturas de 20 estudantes.

1,52; 1,56; 1,61; 1,67; 1,68; 1,71; 1,72; 1,72; 1,75; 1,75; 1,76; 1,78; 1,79; 1,80; 1,81; 1,87; 1,88; 1,90; 1,91; 2,01.

Altura	Frequência
[1,50, 1,60[	2
[1,60, 1,70[	3
[1,70, 1,80[	8
[1,80, 1,90[	4
[1,90, 2,00[	2
[2,00, 2,10[	1

Parte 2

Distribuição simétrica: Um exemplo clássico é a distribuição normal ou distribuição em forma de sino, em que a média, a mediana e a moda são iguais.

Parte 3

Na distribuição assimétrica enviesada para a esquerda, a cauda da distribuição se estende mais para a esquerda. Nesse caso, a média é menor que a mediana, que é menor que a moda.

Parte 4

Na distribuição assimétrica enviesada para a direita, a cauda da distribuição se estende mais para a direita. Nesse caso, a moda é menor que a mediana, que é menor que a média.

Parte 5

Sugestão de elaboração do relatório:

Introdução: os estudantes podem explicar o que são distribuições simétricas e assimétricas, e por que é importante estudá-las.

Distribuição simétrica: eles descrevem o exemplo encontrado, apresentando o histograma e explicando como a média, a mediana e a moda se alinham no centro da distribuição.

Distribuição assimétrica enviesada para a esquerda: os estudantes apresentam o exemplo encontrado, mostrando o histograma. Explicam como a cauda longa à esquerda indica que a distribuição é enviesada para a esquerda, com a média menor que a mediana e a moda.

Distribuição assimétrica enviesada para a direita: os estudantes descrevem o exemplo e apresentam o histograma correspondente. Explicam como a cauda longa à direita indica uma distribuição enviesada para a direita, com a média maior que a mediana e a moda.

Conclusão: Eles resumem as principais diferenças entre as distribuições simétricas e assimétricas e discutem como essas características podem influenciar a interpretação de dados em diferentes contextos.

2. Medidas de dispersão

Página 131

Para pensar e discutir

1. Exemplo de resposta: as três cidades possuem a mesma temperatura média nesse dia.
2. Exemplo de resposta: apesar de as três cidades terem apresentado a mesma temperatura média, a cidade de Porto Velho tem maior amplitude térmica, isto é, maior diferença entre os valores mínimo e máximo.

Página 132

Para pensar e discutir

1. Resposta irá depender do dia e do estado de residência do estudante.
2. Os locais do mundo com maior amplitude térmica diária são, geralmente, regiões desérticas ou semiáridas. Isso ocorre devido às condições atmosféricas nessas áreas, que favorecem grandes variações de temperatura entre o dia e a noite.

Página 134

Para explorar

Parte 1: respostas dependem das temperaturas previstas e indicadas pelo estudante.

Parte 2: respostas dependem das temperaturas pesquisadas.

Parte 3: exemplo de resposta: Aparelho de TV LG 32'.

Site	Preço R$
Site 1	R$ 1.186,55
Site 2	R$ 1.139,00
Site 3	R$ 1.198,77
Site 4	R$ 1.049,00
Site 5	R$ 999,00

$A_T = 1\,198{,}77 - 999 = 199{,}77$; R$ 199,77

Uma pequena amplitude pode sugerir que a dispersão dos dados é baixa, o que significa que há pouca variabilidade nos valores observados.

Página 136

Para pensar e discutir

1. É a média aritmética da soma dos quadrados das diferenças entre cada nota e a média aritmética correspondente.
2. $A_{T_A} = 8 - 4 = 4$
   $A_{T_B} = 9 - 4 = 5$; $A_{T_C} = 9 - 5 = 4$
   $A_{T_D} = 8 - 4 = 4$
   A amplitude das notas dos candidatos *A*, *C* e *D* é menor.
3. Exemplo de resposta: o candidato *A* registrou a menor variância ($V_A = 2$), sendo a variância um indicador da distância de cada valor em relação à média.

Página 138

Para pensar e discutir

1. Sim. Por exemplo: se os valores estiverem próximos da média, há uma menor variabilidade; se estiverem mais espalhados, a variabilidade é maior.
2. Exemplo de resposta: um desvio-padrão muito próximo de zero indica que os valores estão altamente concentrados em torno da média.
3. Exemplo de resposta: a variância é uma medida da dispersão dos valores ao quadrado, enquanto o desvio-padrão é a raiz quadrada da variância.

Página 139

Para pensar e discutir

1. Os extremos de cada classe. O valor médio é a soma dos valores extremos dividida por 2.
2. Foi usada a média aritmética ponderada com os valores médios das classes, o que significa que cada valor é ajustado conforme o tamanho da classe correspondente em estatísticas.
3. Exemplo de resposta: o valor indica que a distribuição das alturas desses estudantes não é homogênea.

Para explorar

Solicite a cada estudante que escreva sua altura em um papel e o deposite no envelope ou saco plástico previamente providenciado por você. Promova um ambiente de respeito entre os colegas durante toda a atividade. Se julgar oportuno, aproveite essa proposta para orientar a turma de forma mais minuciosa acerca da confecção de gráficos com amparo de dados dispostos em uma planilha eletrônica.

Páginas 140-141

Atividades

21.

a) Calculando a amplitude de cada atendente, temos:

$A_{T_{\text{Adriana}}} = 15 - 8 = 7$

$A_{T_{\text{Carlos}}} = 12 - 8 = 4$

$A_{T_{\text{Joana}}} = 16 - 10 = 6$

$A_{T_{\text{Antônio}}} = 12 - 8 = 4$

É possível notar maior regularidade pelos atendentes Carlos e Antônio.

b) Ambos tem a mesma amplitude, e por isso não é possível indicar qual é mais regular.

c) $M_{\text{Adriana}} = \dfrac{8 + 12 + 15 + 9 + 11}{5} = 11$

$M_{\text{Carlos}} = \dfrac{11 + 10 + 8 + 11 + 12}{5} = 10{,}4$

$M_{\text{Joana}} = \dfrac{15 + 12 + 16 + 10 + 11}{5} = 12{,}8$

$M_{\text{Antônio}} = \dfrac{10 + 9 + 11 + 12 + 8}{5} = 10$

d) Adriana:

$V = \dfrac{(-3)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (-2)^2 + (0)^2}{5}$

$V = \dfrac{30}{5} = 6$; $D_P = \sqrt{6} \cong 2{,}45$

Carlos:

$V = \dfrac{(0{,}6)^2 + (-0{,}4)^2 + (-2{,}4)^2 + (0{,}6)^2 + (1{,}6)^2}{5}$

$V = \dfrac{9{,}2}{5} = 1{,}84$; $D_P = \sqrt{1{,}84} \cong 1{,}36$

Joana:

$V = \dfrac{(2{,}2)^2 + (-0{,}8)^2 + (3{,}2)^2 + (-2{,}8)^2 + (-1{,}8)^2}{5}$

$V = \dfrac{26{,}8}{5} = 5{,}36$; $D_P = \sqrt{5{,}36} \cong 2{,}32$

Antônio:

$V = \dfrac{(0)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (-2)^2}{5}$

$V = \dfrac{10}{5} = 2$; $D_P = \sqrt{2} \cong 1{,}41$

e) Exemplo de resposta: Adriana atende, em média, 11 chamadas por dia, com variação de 2,45. Carlos atende 10,4 chamadas, com variação de 1,36. Joana atende 12,8 chamadas, com variação de 2,32. Antônio atende 10 chamadas, com variação de 1,41.

22. Exemplo de resposta: em uma situação hipotética, analisamos o desempenho em Matemática e Ciências com classes de médias distintas. Para calcular a média geral de cada disciplina, usamos a média aritmética ponderada, considerando as frequências. Esse exemplo mostra a aplicação da média ponderada e do desvio-padrão para dados agrupados.

23.

a) A média aritmética dessa distribuição de valores é 7, já que todos os 100 elementos do conjunto têm valor igual a 7.

b) A variância é uma medida de dispersão dos valores em relação à média. Como todos os valores são iguais a 7, não há dispersão em torno da média. Portanto, a variância é zero.

c) O desvio médio é a média das diferenças entre cada valor e a média. Como todos os valores são iguais a 7, as diferenças entre cada valor e a média (7 – 7) são todas iguais a zero. Portanto, o desvio médio é zero.

d) O desvio-padrão é a raiz quadrada da variância. Como a variância é zero, o desvio-padrão também é zero.

24.

I. Falso, pois, como o desvio-padrão do conjunto *A* (2,1) é maior do que o do conjunto *B* (1,2), isso sugere que os valores do conjunto *A* estão mais dispersos em relação à média do que os valores do conjunto *B*.

II. Verdadeiro, pois como $D_P = \sqrt{V}$, logo $V_A = (2{,}1)^2 = 4{,}41$ e $V_B = (1{,}2)^2 = 1{,}44$. Portanto, a variância de *A* é maior que a de *B*.

III. Falso, pois sabemos que quanto mais próximo de 0 for o desvio-padrão, mais homogêneos são os dados.

IV. Verdadeiro, pois da mesma forma que, na afirmação I, se o desvio-padrão do conjunto *B* (1,2) é menor do que o do conjunto *A* (2,1), isso sugere que os valores do conjunto *B* estão menos dispersos em relação à média do que os valores do conjunto *A*, ou seja, mais próximos de 0.

25.

a) $M_a = \dfrac{50 + 55 + 62 + 70 + 75 + 80 + 88 + 88}{8}$

$M_a = \dfrac{568}{8} = 71$; 71 kg

b) $M_e = \dfrac{70 + 75}{2} = 72{,}5$; 72,5 kg

c) $M_o = 88$ kg

d) $D_M = \dfrac{|-21| + |-16| + |-9| + |-1| + |4| + |9| + |17| + |17|}{8}$

$D_M = \dfrac{94}{8} = 11{,}75$; 11,75 kg

e) $V = \dfrac{|-21|^2 + |-16|^2 + |-9|^2 + |-1|^2 + |4|^2}{8}$

$V = \dfrac{|9|^2 + |17|^2 + |17|^2}{8}$

$V = 181{,}75$; 181,75 kg

f) $D_P = \sqrt{181{,}75} \cong 13{,}48$; 13,48 kg

26. $M_a = \dfrac{264}{12} = 22$

$V = \dfrac{(-7)^2 + (-5)^2 + (0)^2 + (-2)^2 + (-14)^2 + (-5)^2 + (3)^2}{12} +$

$+ \dfrac{(-12)^2 + (-10)^2 + (26)^2 + (-7)^2 + (33)^2}{12}$

$V = \dfrac{2\,366}{12} \cong 197$

$D_P = \sqrt{197} \cong 14$

27.

a) Média candidato A: $M_A = 79{,}5$

Média candidato B: $M_B = 86{,}5$

b) $V_A = \dfrac{299}{4} = 74{,}75$; $D_{P_A} = \sqrt{74{,}75} \cong 8{,}65$

$V_B = \dfrac{109}{4} = 27{,}25$; $D_{P_B} = \sqrt{27{,}25} \cong 5{,}22$

O candidato B.

28. Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 números inteiros, em que x_1 é o menor deles e x_4 o maior.

I. $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 7 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28$

II. Como a moda e a mediana da lista são ambas iguais a 8, o rol dessa distribuição é x_1, 8, 8, x_4. Assim, podemos concluir que:

$x_1 + 8 + 8 + x_4 = 28$

$x_1 + x_4 = 12$ (Equação I)

$x_4 - x_1 = 24 \Rightarrow x_4 = 24 + x_1$ (Equação II)

Substituindo II em I, temos:

$24 + x_1 + x_1 = 12 \Rightarrow x_1 = -6$ e $x_4 = 18$

Variância:

$V = \dfrac{292}{4} = 73$; $D_P = \sqrt{73}$

Alternativa **e**.

29. $M_p = \dfrac{5 \cdot 3 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 21 + 2 \cdot 28 + 1 \cdot 23 + 0 \cdot 18}{100} = \dfrac{185}{100}$

$M_p = 1{,}85$

$V = \dfrac{3 \cdot (3{,}15)^2 + 7 \cdot (2{,}15)^2 + 21 \cdot (1{,}15)^2 + 28 \cdot (0{,}15)^2}{100}$

$\dfrac{23 \cdot (-0{,}85)^2 + 18 \cdot (-1{,}85)^2}{100} \cong 1{,}70$

$D_P = \sqrt{1{,}70} \cong 1{,}4$

Alternativa **a**.

30. Marco e Paulo têm médias iguais, mas Marco possui desvio-padrão menor, o que indica que suas notas estão mais próximas da média. Isso reflete um desempenho mais consistente, classificando Marco melhor no concurso.

Alternativa **b**.

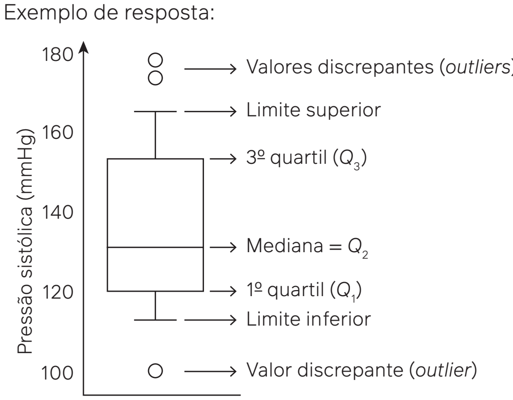
3. Outra forma de análise de dados

Página 145

Para pensar e discutir

1. Os menores valores concentram-se entre 5 e 8, com haste inferior curta. Os maiores estão entre 32 e 36. Valores entre o primeiro quartil e a mediana são mais concentrados que entre a mediana e o terceiro quartil.

2. Exemplo de resposta:



Reinaldo Vignati

Páginas 146-148

Para explorar

Exemplo de resposta:

A = {1, 4, 5, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 20, 24, 26, 28, 30, 30, 34, 36, 38, 40}

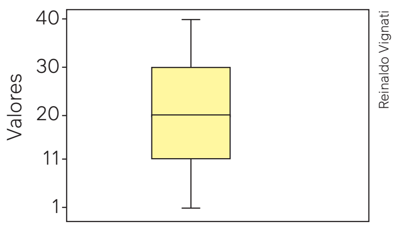
$Q_1 = \dfrac{10 + 12}{2} = 11$

$Q_2 = M_e = \dfrac{20 + 20}{2} = 20$

$Q_3 = \dfrac{30 + 30}{2} = 30$

limite superior = 40

limite inferior = 1



B = {1, 1, 3, 3, 20, 20, 22, 23, 25, 30, 30, 30, 31, 31, 35, 35, 35, 36, 36, 40}

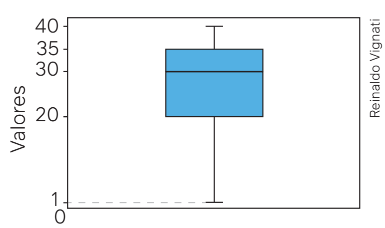
$Q_1 = \dfrac{20 + 20}{2} = 20$

$Q_2 = M_e = \dfrac{30 + 30}{2} = 30$

$Q_3 = \dfrac{35 + 35}{2} = 35$

limite superior = 40

limite inferior = 1



C = {1, 2, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 8, 10, 10, 12, 13, 20, 20, 20, 25, 30, 35, 40}

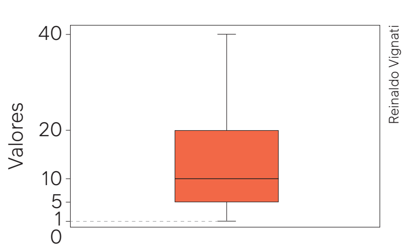
$Q_1 = \dfrac{5 + 5}{2} = 5$

$Q_2 = M_e = \dfrac{10 + 10}{2} = 10$

$Q_3 = \dfrac{20 + 20}{2} = 20$

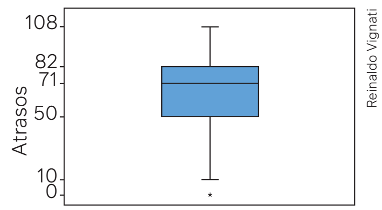
limite superior = 40

limite inferior = 1



Atividades

31. a)



b) Sugestão de resposta: 25% dos funcionários tiveram entre 82 e 108 atrasos. A faixa mais concentrada indica os 25% que tiveram de 71 a 82 atrasos, enquanto a faixa mais dispersa é a de 10 a 50 atrasos. Somente 1 pessoa não teve atrasos no ano analisado.

c) Espera-se que os estudantes destaquem as regiões, delimitadas pelos quartis, com maior e menor amplitude, além do ponto fora (*outlier*).

32. O *boxplot* é um gráfico feito com base no resumo de cinco números, constituído por: valor mínimo, 1º quartil (Q_1), mediana (Q_2), 3º quartil (Q_3) e valor máximo.

Alternativa **a**.

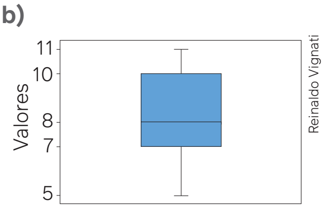
33.

a) $Q_2 = M_e = \dfrac{8 + 8}{2} = 8$; $Q_1 = 7$;

$Q_3 = 10$; limite superior = 11;

limite inferior = 5

b)



34.

Etapa 1

Fornecedor A: 73,34; 73,6; 74,04; 74,85; 75,00; 75,33; 75,47; 75,93; 76,16; 76,95

$Q_2 = M_e = \dfrac{75 + 75{,}33}{2} = 75{,}16$

$Q_1 = 74{,}04$

$Q_3 = 75{,}93$

limite superior = 76,95

limite inferior = 73,34

Etapa 2

Fornecedor B: 74,62; 74,65; 74,75; 74,92; 74,94; 74,94; 75,25; 75,35; 75,44; 75,46

$Q_2 = M_e = \dfrac{74{,}94 + 74{,}94}{2} = 74{,}94$

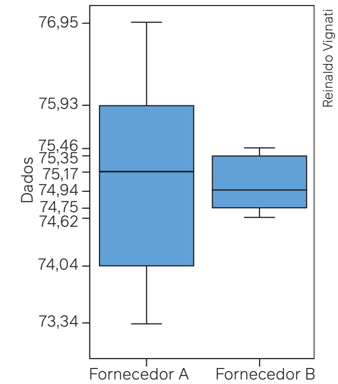
$Q_1 = 74{,}75$

$Q_3 = 75{,}35$

limite superior = 75,46

limite inferior = 74,62

Etapa 3



O fornecedor B tem uma distribuição mais homogênea.

35. *A* é o menor valor, ou seja, 23.

F é o maior valor de todos, ou seja, 58.

$C = Q_2 = M_e = 35$

$B = Q_1 = 32$

$D = Q_3 = 42$

$Q_3 - Q_1 = 42 - 32 = 10$

Comprimento máximo da haste:

$1{,}5 \cdot 10 = 15$

Como 42 + 15 = 57, o que ultrapassar este valor será *outlier*.

Portanto, $E = 57$ e $F = 58$.

Alternativa **a**.

36.

a) Falso. A temperatura máxima é menor que 35 °C.

b) Verdadeiro, pois 25% dos dados estão representados na haste inferior e 50% dentro da caixa, somando 75% dos dados que estão abaixo de 30 graus Celsius.

c) Falso, pois adicionando-se os 25% dos valores dentro da caixa acima da mediana com os 25% que estão na haste superior, temos 50% das medições.

Entretanto, entre esses valores, encontram-se alguns que estão abaixo de 25 °C.

d) Falso, pois a temperatura máxima é maior que 30 °C.

e) Falso, pois 100% das medições estão entre 15 °C e um valor um pouco menor que 35 °C.

Alternativa **b**.

37.

a) Falso. Há mais de 25% das pessoas analisadas entre os valores de R$ 40,00 e R$ 60,00.

b) Falso. Existe um *outlier* em R$ 140,00.

c) Falso. Não há moda em *boxplot*.

d) Verdadeiro. $M_d = Q_2 =$ R$ 40,00.

e) Falso. O primeiro quartil está entre R$ 20,00 e R$ 40,00.

Alternativa **d**.

38.

a) Falso. O 3º quartil é 32.

b) Falso. O 1º quartil está entre 24 e 26.

c) Falso. O limite superior está entre 34 e 36.

d) Falso. O 2º quartil está entre 28 e 30.

e) Verdadeiro. Só há um *outlier* acima de 42.

Alternativa **e**.

39. O gráfico indicado para apresentar o primeiro e o terceiro quartis, a mediana e a possível presença de *outlier* é o *boxplot*.

Alternativa **c**.

40.

I. Verdadeiro, pois Q_1 do Grupo 1 está acima de Q_2 do Grupo 2.

II. Verdadeiro, pois a distância entre Q_1 e Q_3 no Grupo 1 é maior do que a distância entre Q_1 e Q_3 no Grupo 2.

III. Falso, pois há dois *outliers* no Grupo 2.

Alternativa **c**.

Páginas 149-155

Análise e contexto

1. Esta atividade auxilia o estudante a conduzir uma análise sobre textos, fazendo parte do letramento matemático.

2. Espera-se que o estudante observe que, conforme o texto, os levantamentos estatísticos eram feitos no sentido da obtenção de dados numéricos, o que é muito utilizado nas campanhas políticas ainda hoje.

3. Enfatize que um dos dados a ser pesquisado deve ter um valor numérico para que os estudantes obtenham, entre outras, a média desses valores (comparando assim as médias entre as três turmas pesquisadas) e/ou o desvio-padrão (para comparar essas três turmas em relação à variável pesquisada, concluindo qual das turmas é mais homogênea e qual é mais heterogênea).

Atividades finais

1.

a) Média, moda e mediana.

b) Divide-se por 5 a soma dos 5 valores.

c) Os 5 valores são colocados em ordem crescente e identifica-se aquele que ocupa a posição média (3ª posição).

d) Os 6 valores são colocados em ordem crescente e identificam-se os dois valores que ocupam as posições médias (3ª e 4ª posições). A seguir, calcula-se a média aritmética desses dois valores.

e) A moda indica o elemento mais frequente.

f) Nem sempre. Quando há valores muito grandes ou muito pequenos em relação à maioria dos valores do conjunto, a média aritmética não os representa adequadamente.

2.

a) Amplitude, variância, desvio médio e desvio-padrão.

b) Calcula-se a média aritmética desses valores; calcula-se o quadrado da diferença entre cada valor e a média; calcula-se a média aritmética dos quadrados dessas diferenças obtidas; extrai-se a raiz quadrada desse resultado.

c) Não. Quanto maior o desvio-padrão de uma amostra, maior a dispersão desses valores.

3.

a) Mínimo, máximo, mediana, 1º quartil, 3º quartil.

b) A mediana.

Questões de vestibulares e Enem

4. $M_p = \dfrac{16 \cdot 4,5 + 9 \cdot 8 + 18 \cdot 10 + 7 \cdot 13}{50} = \dfrac{415}{50} = 8,3$; 8,3 cm

$M_o = 10$; 10 cm

$M_e = \dfrac{8 + 10}{2} = 9$; 9 cm

Alternativa **c**.

5. Substituindo as numerações menores que 40 pela moda (42).

$M_A = \dfrac{836}{20} = 41,75$

Alternativa **b**.

6. $M_a = \dfrac{4 + 5 + 7 + 8}{4} = \dfrac{24}{4} = 6$

$V = \dfrac{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2}{4} = \dfrac{10}{4} = 2,5$

$D_p = \sqrt{2,5} \cong 1,58$

Alternativa **b**.

7. A mediana está na 13ª posição, logo a mediana é 2.

Alternativa **b**.

8. $17 = \dfrac{S}{6} \Rightarrow S = 102$

$M_e = 16,5 = 16 + \dfrac{17}{2}$

Com a entrada de uma pessoa de 24 anos:

$S = 102 + 24 = 126$

$n = 6 + 1 = 7$

$M_a = \dfrac{126}{7} = 18$

Com a entrada de uma pessoa, o conjunto das idades passou a ter 7 elementos. Como 24 é maior que 17, 17 passa a ser o termo central.

Alternativa **b**.

9. Seja x a quantidade de pessoas que conseguiram levantar o peso p_1 e y a quantidade de pessoas que conseguiram levantar o peso p_2.

Coleta 1: $\dfrac{x \cdot p_1 + y \cdot p_2}{40} = x \cdot p_1 + y \cdot p_2 = 2\,200$ (I);

Coleta 2: $\dfrac{x \cdot p_1 + y \cdot (p_2 + 10)}{40} = x \cdot p_1 + y \cdot p_2 + 10 = 2\,280$ (II).

Subtraindo II e I, temos:

$y \cdot (p_2 + 10 - p_2) = 80 \Rightarrow y = \dfrac{80}{10} = 8$

Alternativa **e**.

10. $n = \dfrac{(1 + 30) \cdot 30}{2} = 455$

Logo, a mediana estará na posição 233ª. Seja x o número na posição 233ª.

$\dfrac{x(x + 1)}{2} = 233$

Seguindo a sequência dos números, podemos admitir:

$x = \dfrac{21 \cdot (21 + 1)}{2} = 231$

Dessa forma, garantimos que na posição 231 esteja o 21 e, em seguida, na posição seguinte, o 22.

Alternativa **a**.

11. A mais consistente seria a mediana, pois é ela quem divide a amostra em duas partes, com a mesma quantidade ou seja, 50%.

Alternativa **b**.

12. Soma das notas após o erro: $7{,}2 \cdot 25 = 180$

Soma das notas corrigidas: $180 - 3{,}6 + 8{,}6 = 185$

Logo, $\frac{185}{24} = 7{,}4$

Alternativa **b**.

13. O gráfico nos mostra que a mediana estará no intervalo entre 10 e 13, representando 14% do total.

$14\% + 21\% + 11\% + x = 50\%$

$x = 4\%$

Para a proporção se manter:

$\frac{13 - 10}{14\%} = \frac{d - 10}{4\%} \Rightarrow d \cong 10{,}9$

Alternativa **a**.

14. Variação de vendas entre os dias.

$|D2 - D1| = 7$

$|D3 - D2| = 15$

$|D4 - D3| = 7$

$|D5 - D4| = 4$

$|D6 - D5| = 4$

$|D7 - D6| = 6$

$|D8 - D7| = 0$

$|D9 - D8| = 4$

$|D10 - D9| = 2$

A moda será 4.

Alternativa **d**.

15.

$M_a = \frac{6\,240 \cdot 3 + 6\,780 \cdot 4 + 7\,236 \cdot 5}{12}$

$M_a = \frac{89\,100}{12} = 7\,425$; R\$ 7.425,00

Alternativa **e**.

16. A variação do ano IV para o ano III será igual à variação do ano III para o II adicionada à média aritmética entre essa variação e a variação do ano II para o I.

$\Delta_{\text{IV para III}} = 3{,}2 + \frac{(3{,}2 + 2)}{2} = 5{,}8$

$7{,}4 + 5{,}8 = 13{,}2$

Alternativa **c**.

17. Em primeiro lugar, vamos calcular qual foi a média de pães vendidos por dia, entre os dias listados na tabela.

$250 + 208 + 215 + 251 + 187 + 187 + 186 = 1\,484$

$\frac{1\,484}{7} = 212$; 212 pães

O dia mais próximo da média foi a terça-feira.

Alternativa **c**.

18.

$M_p = \frac{60}{100} \cdot 30 + \frac{40}{100} \cdot 35 \Rightarrow M_p = 32$

A média de idade de analfabetos dessa cidade é 32 anos, que se encaixa no Recurso III, de acordo com a tabela.

Alternativa **c**.

19. Calculando a média dos salários:

$M_p = \frac{75 \cdot 2\,000 + 25 \cdot 7\,000}{100}$

$M_p = \frac{325\,000}{100} = 3\,250$; R\$ 3.250,00

Alternativa **c**.

20. Pelo enunciado temos que a média das alturas é:

$M_a = 1{,}80$; 1,80 m

A soma das alturas de todos os jogadores passou a ser:

$36 - 0{,}20 = 35{,}8$; 35,8 m

$M_a = \frac{38{,}5}{20} = 1{,}79$; 1,79 m

Alternativa **c**.

21. Determinando o lucro em cada ano:

1º ano: $325 - 250 = 75$; 2º ano: $355 - 270 = 85$

3º ano: $350 - 290 = 60$; 4º ano: $365 - 280 = 85$

5º ano: $305 - 260 = 45$

$M_a = \frac{75 + 85 + 60 + 85 + 45}{5}$

$M_a = \frac{350}{5} = 70$

Alternativa **b**.

22. Ao traçar uma linha horizontal na altura de 1,65 m e uma linha vertical na altura de 80 kg, podemos identificar o que é pedido no segundo quadrante: valores menores que 80 kg e maiores que 1,65 m, ou seja, dois entre os 10 estudantes atendem às condições oferecidas, isto é, $\frac{2}{10} = 20\%$.

Alternativa **b**.

23. A moda é a variável que mais repete. Logo, 94 repetiu 3 vezes.

Alternativa **d**.

24. Para calcular a amplitude em cada lote, vamos subtrair o valor mínimo do valor máximo de cada um deles.

Lote I: $10{,}30 - 9{,}80 = 0{,}50$

Lote II: $10{,}60 - 10{,}55 = 0{,}05$

Lote III: $10{,}20 - 9{,}80 = 0{,}40$

Lote IV: $10{,}20 - 9{,}90 = 0{,}30$

Lote V: $9{,}50 - 9{,}30 = 0{,}20$

A maior amplitude é a do lote I, que é de 0,50 unidades. Portanto, o lote a ser descartado é o lote I. Alternativa **a**.

25.

I. 45, 45, 85, 90

Mediana I $= \frac{45 + 85}{2} = 65$

II. 70, 70, 75, 80

Mediana II $= \frac{70 + 75}{2} = 72{,}5$

III. 75, 75, 75, 80

Mediana III $= \frac{75 + 75}{2} = 75$

IV. 5, 35, 85, 90

Mediana IV $= \frac{35 + 85}{2} = 60$

V. 60, 70, 70, 75

Mediana V $= \frac{70 + 70}{2} = 70$

Apenas os estudantes IV e V acertaram suas notas.

Alternativa **e**.

26. Pelo gráfico, temos que a moda é igual a 3.

$M_e = \frac{4 + 4}{2} = 4$

$M_p = \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 55 + 4 \cdot 25 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 50 + 7 \cdot 10}{160}$

$M_p = \frac{665}{160} \cong 4{,}16$

Desse modo, temos que moda < mediana < média.

Alternativa **e**.

CAPÍTULO 4

Geometria das transformações e triângulos

Objetivos

- Identificar e compreender diferentes transformações isométricas.
- Resolver e elaborar problemas relacionados às transformações isométricas.
- Identificar e compreender diferentes transformações homotéticas.
- Obter relações métricas em triângulos retângulos por meio da semelhança de triângulos.
- Resolver e elaborar problemas com o uso de relações trigonométricas em triângulos quaisquer.

Justificativa

O trabalho com transformações isométricas e homotéticas permite a criação e análise de produções em diversas áreas. As relações métricas e trigonométricas em triângulos são utilizadas na resolução de problemas dos mais diferentes contextos que envolvem medições de distâncias inacessíveis, bem como aqueles que se relacionam ao estudo de um sistema de forças, em Física.

Competências gerais da BNCC

Competência geral 1: Por meio do texto e das atividades que se encontram na seção **Análise e contexto** das páginas 176 e 177, os estudantes têm a oportunidade de valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico para entender e explicar a realidade, desenvolvendo, assim, essa competência.

Competência geral 2: Na seção **Para explorar**, da página 181, os estudantes elaboram um procedimento para atravessar um rio, a partir de determinadas condições. Dessa forma, utilizam a imaginação e a criatividade para elaborar e testar hipóteses, além de criar soluções com base nos conhecimentos trabalhados no capítulo.

Competências gerais 4 e 5: Na seção **Para explorar** da página 163, os estudantes pesquisam tutoriais de *softwares* de geometria dinâmica para fazerem construções geométricas e explorarem suas finalidades. Depois de construírem figuras geométricas de acordo com alguns critérios, elaboram um relatório abordando a importância do uso desse recurso tecnológico. Como trabalham em grupos, utilizam diferentes linguagens para se comunicar, partilhar informações e resolver problemas, como a linguagem verbal, oral, visual e digital, além de utilizarem a linguagem escrita para produzir o relatório; desse modo, desenvolvem a **competência 4**. O uso da tecnologia de forma crítica e reflexiva contribui para o desenvolvimento da **competência 5**.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 1

EM13MAT105: O trabalho com as transformações geométricas é desenvolvido na primeira parte deste capítulo. Os estudantes utilizam as noções construídas acerca das transformações isométricas, por exemplo, para analisar figuras em ladrilhamento de calçadas, como na página 158, e nas diversas atividades das páginas 159 a 164. As transformações homotéticas são trabalhadas da página 165 a 168.

Competência específica 3

EM13MAT308: Na segunda parte deste capítulo, os estudantes resolvem e elaboram problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. Da página 170 até 182, são explorados problemas que envolvem as razões trigonométricas no triângulo retângulo em diversas situações. A partir da página 183, os estudantes resolvem e elaboram problemas utilizando as relações trigonométricas em triângulos quaisquer, em contextos variados.

Conexões com outras áreas do conhecimento

Pode ser feita uma integração com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** por meio do trabalho com a Física, ao se abordar a Regra do paralelogramo nas páginas 186 e 187 e a Lei de Lamy na página 191.

Resoluções e comentários

Página 157

Abertura

1. Sugestão de resposta: Os mosaicos são feitos de pequenas peças (pedras ou outros materiais) arrumadas para formar desenhos e preencher superfícies, como pisos ou paredes.
2. Sugestão de resposta: A matemática está presente na formação de um mosaico das seguintes maneiras: geometria, proporção, escala, frações, medidas, padrões, simetria.

Pode ser feita uma parceria com o professor de Arte para que os estudantes criem mosaicos e tenham a oportunidade de explorar a matemática presente nesse tipo de trabalho.

1. Geometria das transformações

Página 158

Para pensar e discutir

1. Significa deslocar uma figura em uma certa distância e direção. Exemplo: trocar um quadro na parede para outro lugar, mantendo a posição horizontal e vertical.
2. Significa girar uma figura em torno de seu centro ou em torno de um ponto. Exemplo: o ponteiro das horas, ao passar de 1 para 2 horas, faz uma rotação.
3. Na sugestão 1, com base nos dois primeiros triângulos da esquerda, os demais são rotações. Na sugestão 2, com base nos dois primeiros triângulos da esquerda, os demais são translações.

4. Sugestão de resposta:

Reinaldo Vignati

Página 159

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: rotação e reflexão.
   É fundamental que os estudantes identifiquem esses movimentos analisando e apontando na ilustração.
2. Espera-se que os estudantes identifiquem outros exemplos de movimentos mencionados no texto.

Página 161

Vídeo - Movimentos da Lua

Apresente o vídeo *Movimentos da Lua* para os estudantes. Esse recurso didático explora os diferentes movimentos da Lua, como translação e rotação, do ponto de vista de um observador da Terra. O vídeo auxilia na compreensão de como a rotação do planeta influencia a percepção dos movimentos celestes, como o nascer e o pôr da Lua, e como ela mantém a mesma face voltada para a Terra durante seu movimento de translação.

Página 162

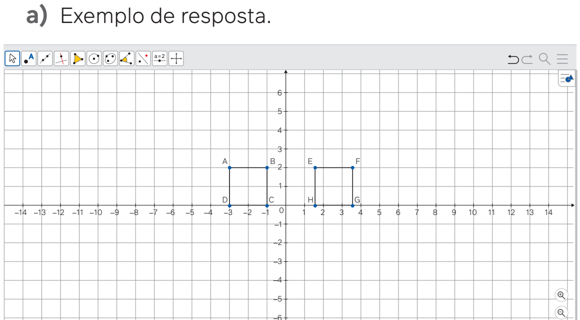
Para pensar e discutir

1. Reflexão em torno do eixo das abscissas e reflexão em torno do eixo das ordenadas.
2. Os estudantes podem interpretar que são duas reflexões sucessivas: de *D* para obter *B*, faz-se uma reflexão em torno do eixo *y* (obtendo *C*) e depois uma reflexão em torno do eixo *x* para obter *B*. Outra maneira seria uma rotação de 180° no sentido horário do triângulo em relação à origem.

Página 163

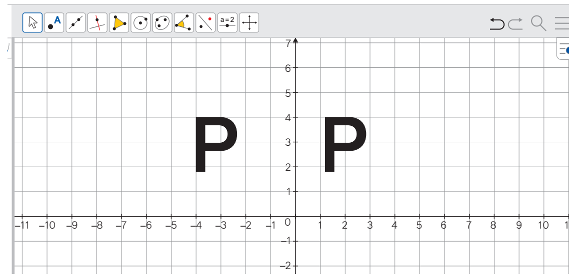
Para explorar

1. O estudante poderá encontrar tutoriais em *sites* da internet.
2. Destine tempo em sala de aula para os grupos se planejarem e se familiarizarem com a ferramenta de geometria dinâmica.
   a) Exemplo de resposta.



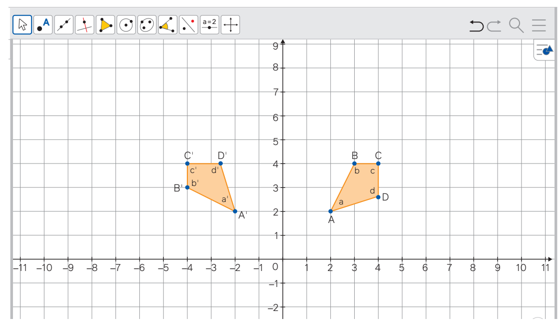
Acervo editora

b) Exemplo de resposta.



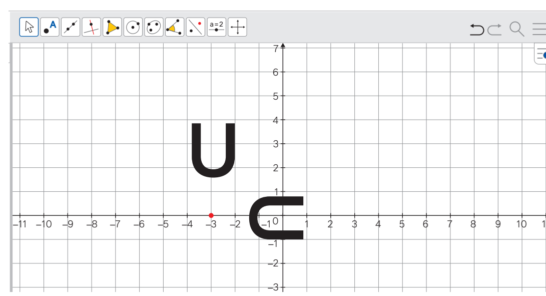
Acervo editora

c) Exemplo de resposta.



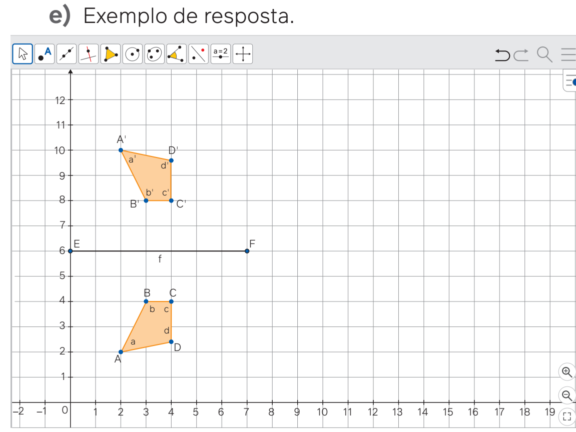
Acervo editora

d) Exemplo de resposta.



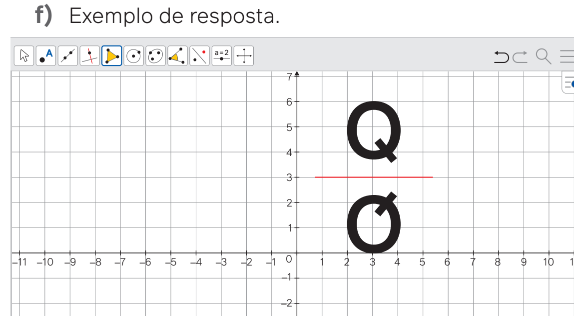
Acervo editora

e) Exemplo de resposta.



Acervo editora

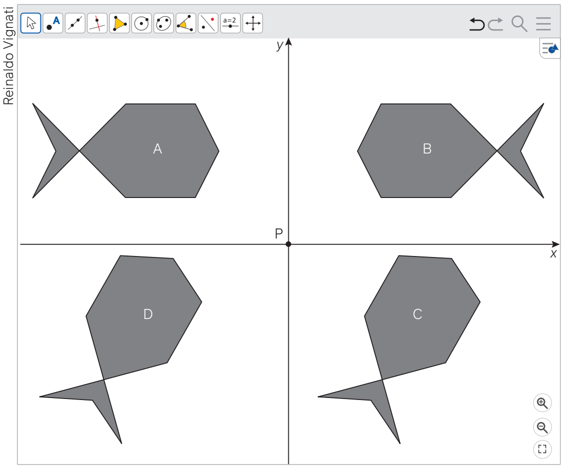
f) Exemplo de resposta.



Acervo editora

3. Exemplo de resposta.

Reinaldo Vignati



Movimento de *A* para *B*: reflexão no eixo *y*.
Movimento de *A* para *D*: rotação anti-horária de 60° no ponto *P*.
Movimento de *D* para obter *C*: apenas uma translação.

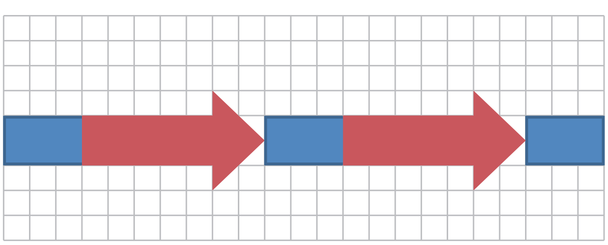
4. Espera-se que os estudantes percebam a importância do *software* de geometria dinâmica para criar polígonos regulares e não regulares facilmente, além de outras funções.

Página 164

Atividades

1.
   a) Fazendo translações para a direita, de 6 em 6 quadradinhos.
   b) Translação.

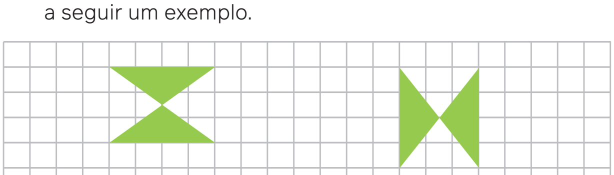
2. A ideia é ver se os estudantes usam as peças para criar outra faixa. Verifique se alguém apresenta solução com outros movimentos.



Tarcisio Garbellini

3. Sugestão de resposta: Translação de 1 unidade (lado do quadrado da malha) para baixo, seguida de 8 unidades para a direita e rotação de 90° no centro da figura. Explique aos estudantes que a ordem dessas transformações pode variar, permitindo outras respostas.

4. Resposta depende da figura que cada dupla elaborar. Veja a seguir um exemplo.



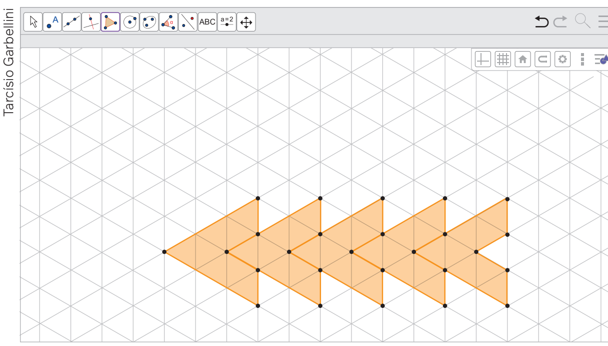
Tarcisio Garbellini

Nessa figura ocorre translação de 10 unidades para a direita e rotação de 90° no centro da figura.

5.
   a) A figura *B* é obtida de *A* por uma reflexão no eixo *y*. Já a figura *C* é obtida de *A* por reflexão no eixo *y* e, em seguida, nova reflexão em torno do eixo *x*. A figura *D* é obtida de *A* por reflexão no eixo *x*. Verificar outras possíveis respostas.
   b) Por uma reflexão no eixo *y*.
   c) Não, pois as cores dos triângulos são invertidas.

6.
   a) A ideia é que os estudantes explorem individualmente essa ferramenta. Exemplo:

Tarcisio Garbellini



   b) A transformação utilizada no item **a** foi translação.

7. Respostas dependem da pesquisa dos estudantes. Dois pontos importantes: constatar as transformações em faixas decorativas (encontradas em diversos ambientes) e o uso de isometria em obras de arte.

Página 165

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Planta de uma casa em escala; mapa de uma cidade; foto ou imagem ampliada/reduzida no computador.
2. O original foi reproduzido em uma malha quadriculada.
3. A seta 2 indica o desenho ampliado, aumentando o tamanho dos quadradinhos da malha. A seta 3 indica a redução, diminuindo o tamanho dos quadradinhos.

Página 166

Para pensar e discutir

1. Significa que o triangulo *A'B'C'* representa uma ampliação de 100% (duplicou) do triângulo *ABC*.

Página 167

Para pensar e discutir

1. Sim. Os dois desenhos são iguais, mas com procedimentos diferentes.
2. Teríamos uma redução em vez de uma ampliação.
3. Para uma ampliação de 50%, cada medida deve ser 50% maior, ou seja, multiplicada por 1,5. Assim, *k* é 1,5.
4. Sim. Esses procedimentos também reduzem figuras. Peça aos estudantes que façam ampliações e reduções em papel.

Página 168

Para explorar

As respostas vão depender das pesquisas, escolhas e criatividade de cada grupo. Reserve momentos em sala para o planejamento e a familiarização com a ferramenta de geometria dinâmica.

Atividades

8.

a) $\frac{8}{4} = \frac{8\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 2$

A razão é 2. Houve ampliação.

b) • Triângulo *ABC*: *A*(3, 1), *B*(3, 5) e *C*(7, 1).

• Triângulo *A'B'C'*: *A'*(6, 4), *B'*(6, 12) e *C'*(14, 4).

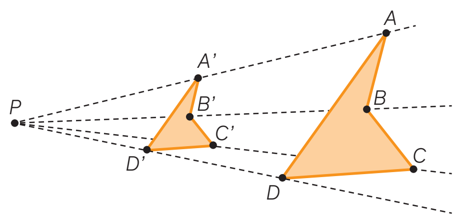
c) O centro de homotetia é o ponto de intersecção das retas que conectam os pontos correspondentes, logo o centro é (0, –2).

9.

a) Os estudantes construirão essa figura entre a original e o ponto correspondente ao centro de homotetia.

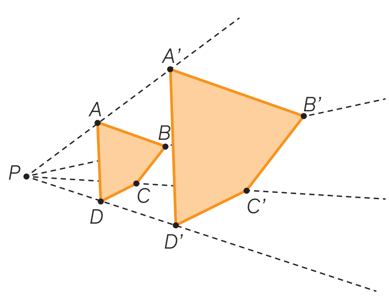
b) Para essas construções os estudantes usarão régua e compasso. Exemplos de resposta.

Redução:



Tarcísio Garbellini

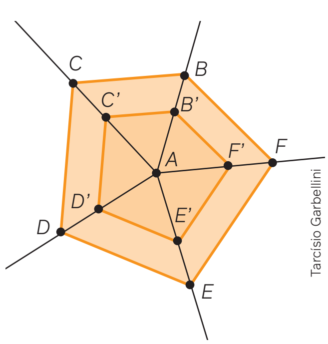
Ampliação:



Tarcísio Garbellini

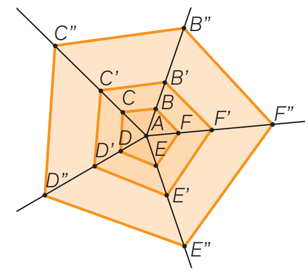
10. Exemplos de resposta.

a) Redução.



Tarcísio Garbellini

b) Duas ampliações.



Tarcísio Garbellini

2. Triângulos: relações trigonométricas

Página 169

Para pensar e discutir

1. Representa o raio da Terra.
2. Representa a adição dos segmentos do raio da Terra e da altura *h* em que está o satélite em relação à superfície da Terra.
3. O ângulo mede 90°. Sugestão de resposta: Quando traçamos uma reta tangente à circunferência a partir de um ponto externo a essa circunferência, o ângulo determinado pela tangente e o raio no ponto de tangência é reto.

Página 170

Para pensar e discutir

1. O que permanece inalterada é a forma. Os ângulos não se alteram quando são figuras semelhantes.
2. O que se altera são as medidas dos lados, porém, proporcionalmente.
3. No triângulo menor 3 u.c., 4 u.c. e 5 u.c.;
no triângulo médio 6 u.c., 8 u.c. e 10 u.c.;
no triângulo maior 12 u.c., 16 u.c. e 20 u.c.
O cálculo da hipotenusa é feito por meio do teorema de Pitágoras: $h^2 = a^2 + b^2$.

Página 173

Mapa clicável – Triângulos na história

Apresente o mapa interativo *Triângulos na história* para os estudantes. Esse recurso didático leva os estudantes a uma jornada através de locais históricos, explorando as contribuições de matemáticos como Tales, Pitágoras, Euclides e Apolônio para a geometria.

Para pensar e discutir

1. A relação é $d = \ell\sqrt{2}$ e pode ser obtida por meio do teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo.
2. A relação é $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ e pode ser obtida por meio do teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo.
3.

Razões trigonométricas			
Razões	**30°**	**45°**	**60°**
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Página 174-175

Para pensar e discutir

1. Os estudantes devem discutir a questão da acessibilidade das pessoas cadeirantes a lugares públicos, por exemplo.
2. Basta determinar a medida da altura da rampa e do seu comprimento; o quociente entre ambos, nessa ordem, dará o seno do ângulo de inclinação.

Vídeo – Rampas de acessibilidade

Apresente o vídeo *Rampas de acessibilidade* para os estudantes. Esse recurso didático explora a importância das rampas de acesso para garantir a mobilidade e a inclusão social de pessoas em cadeiras de rodas. O vídeo explica como calcular a inclinação das rampas de acordo com a norma ABNT NBR-9050, destacando a relação entre altura e comprimento, e a importância de seguir essa norma para garantir segurança e acessibilidade.

Atividades

11.

a) $\text{sen}\ \beta = \frac{b}{a}, \cos\beta = \frac{c}{a}, \text{tg}\ \beta = \frac{b}{c}$

b) O seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

c) Nos ângulos complementares, as tangentes são inversas uma da outra.

d) O resultado é igual a 1. A justificativa é feita obtendo essas razões, a exemplo do que foi calculado antes para o ângulo α.

12.

a) Sendo a hipotenusa o maior lado:

$\text{sen}\ \alpha = \frac{3k}{5k} = 0{,}6$ ou

$\text{sen}\ \beta = \frac{4k}{5k} = 0{,}8$

b) $\cos\beta = \frac{3k}{5k} = 0{,}6$ ou

$\cos\alpha = \frac{4k}{5k} = 0{,}8$

c) $\text{tg}\ \alpha = \frac{3k}{4k} = 0{,}75$ ou

$\text{tg}\ \beta = \frac{4k}{3k} = 1{,}333...$

13. Utilizando a calculadora é possível obter 37° e 57°, aproximadamente. Instrua os estudantes a explorar essas funções da calculadora.

14. Sugestão de resposta: Um poste de sinalização está localizado em uma estrada. Um motorista se aproxima do poste e nota que, a uma certa distância, o ângulo entre sua linha de visão e a hipotenusa formada pelo poste é de 60°. Se o motorista está a 10 metros do pé do poste, qual é a altura do poste?

15. Sugestão de resposta: 5 000 m é a hipotenusa, e a altura é o cateto oposto ao ângulo de 40°. Assim, obterão sen 40° que é, aproximadamente, 0,643. Daí, tem-se:

$\text{sen}\ 40° = \frac{h}{5\,000} \Rightarrow h = 3\,215$; 3 215 m

16.

a) Resposta esperada: Os valores das tangentes aumentam.

Exemplo:

$\text{tg}\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} < \text{tg}\ 60° = \sqrt{3}$

b) Resposta esperada: Os valores dos cossenos diminuem.

Exemplo:

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} > \cos 60° = \frac{1}{2}$

c) Resposta esperada: Os valores dos senos aumentam.

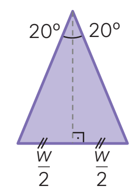
Exemplo:

$\text{sen}\ 30° = \frac{1}{2} < \text{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) Sugestão de resposta: A tangente tende a um valor muito grande, o seno tende ao número 1 e o cosseno tende a 0.

e) Sugestão de resposta: A tangente e o seno tendem a 0, enquanto o cosseno tende ao número 1.

17. A altura do triângulo isósceles divide o ângulo em dois triângulos de 20° e a base em partes iguais de $\frac{w}{2}$.



Tarcísio Garbellini

No triângulo retângulo, o cateto é oposto a 20° e mede $\frac{w}{2}$, e a hipotenusa 7 cm.

Logo, $\text{sen}\ 20° = \frac{\frac{w}{2}}{7} = \frac{w}{14}$

Alternativa **c**.

18.

a) $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{10}{AB} = \frac{1}{12} \Rightarrow AB = 120$; 120 cm

b) $\frac{BC}{AB} = \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{10}{AB} = \frac{1}{20} \Rightarrow AB = 200$; 200 m

Usaremos o teorema de Pitágoras para calcular AC:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 = 200^2 + 10^2 = 10\sqrt{401}$;

$10\sqrt{401}$ cm

Páginas 176-177

Análise e contexto

1. Sim. Se os ângulos de um triângulo, dois a dois, são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.
2. Não, pois triângulos de tamanhos diferentes podem ter ângulos correspondentes congruentes.
3. Representam os valores aproximados para sen 40° (ou cos 50°), cos 40° (ou sen 50°) e tg 40°, respectivamente.

Página 178

Para pensar e discutir

1. $A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \cdot \text{sen}\ 20° \cong 20{,}5$; $20{,}5\ \text{cm}^2$
2. Não, pois duplicando o ângulo, a área não duplica.
   $A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \cdot \text{sen}\ 40° \cong 38{,}6$; $38{,}6\ \text{cm}^2$

Página 180

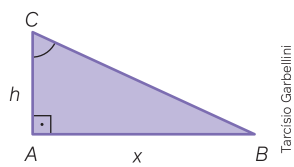
Para pensar e discutir

1. Altura do teodolito em relação ao solo.
2. Na relação, basta fazer $h = 0$. Nesse caso, $\text{tg}\ \beta = \frac{H}{x}$.
3. Sugestão de resposta: Se a ideia é aproximar ou se a altura em relação ao teodolito for muito maior, podemos desprezar h.

Páginas 181-182

Para explorar

1 e 2. Sugestão de resposta: A solução é considerar o triângulo ABC reto em A. Meça AC (h) com a trena e o ângulo CBA com o teodolito. A tangente de CBA é $\frac{BA}{CA}$, então, obtenha BA.



Atividades

19.

a) $\text{tg } \alpha = \frac{h}{\frac{h}{3}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = 3$

Aproximadamente 72°.

b) $\text{tg } 80° = \frac{h}{4} \Rightarrow h \cong 22{,}7$; 22,7 m

c) $AB = \frac{h}{\text{sen } \alpha}$

d) $AB = \frac{d}{\cos \alpha}$

20.

a) Exemplo de resposta:

Digitamos 0,30 → Apertamos a tecla: 2^{nd} → Apertamos a tecla: $\tan^{-1}$ → O ângulo aproximado é 16,7°.

b) Espera-se que os estudantes respondam que é o ângulo cujo valor da tangente é igual a 1, isto é, 45°.

21.

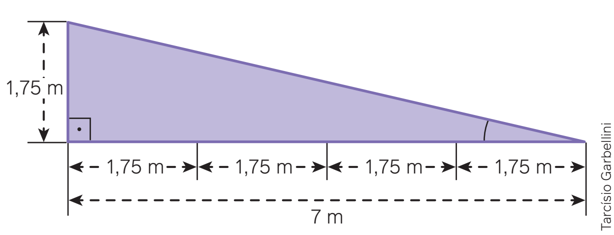
a) $T = F \cdot d \cdot \cos 45° \cong F \cdot d \cdot 0{,}71$

b) $T = F \cdot d \cdot \cos 60° \cong F \cdot d \cdot 0{,}5$

c) $T = F \cdot d$, quando $\cos \theta = 0$, ou seja, para $\theta = 0°$.

Recomendamos discutir a atividade com o professor de Física para que esclarecer o conceito de **força**.

22. Sugestão de resposta: Considerando que a distância do pé da pessoa até o ponto em que se forma o ângulo desejado é 4 vezes a sua altura. Assim, a tangente do ângulo é $\frac{1}{4}$, resultando em aproximadamente 14° com a função $\tan^{-1}$.



$\text{tg } \alpha = \frac{h}{4h} = 0{,}25 \Rightarrow \alpha = 14°$

23. Sugestão de resposta: No terreno, meça horizontalmente (ver linha tracejada) e verticalmente a altura correspondente à inclinação. No desenho da direita, essas medidas são x e y, respectivamente. Calcule a tangente do ângulo como $\frac{y}{x}$ e use $\tan^{-1}$ para encontrar o ângulo.

24. $\text{sen } 30° = \frac{195}{x} \Rightarrow x = 390; 390$ m

Alternativa **c.**

Página 183

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Sendo x a distância no desenho (em cm) entre o farol e o hotel, y e Y as distâncias no desenho e a real do farol ao navio, e z e Z as distâncias no desenho e a real do hotel ao navio, use a proporção: $\frac{x}{5 \text{ km}} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z}$. As distâncias y e z vêm diretamente do desenho.

2. Sugestão de resposta: Sugere-se que os estudantes tracem, por exemplo, a altura do triângulo relativa ao lado de medida y para formar um triângulo retângulo. Auxilie os estudantes a desenvolverem suas estratégias.

Página 185

Para pensar e discutir

1. No paralelogramo, os ângulos internos são suplementares: 50° e 130°. Assim, os ângulos são 50°, 50°, 130° e 130°.

2. Com a calculadora, os estudantes podem obter:

$\cos 130° \cong -0{,}643$

Depois, utilizar a lei dos cossenos para determinar que a outra diagonal mede aproximadamente 18,206 cm.

Página 186

Para pensar e discutir

1. Utilizando uma calculadora com a função "arcos" ou "$\cos^{-1}$", temos $\theta = 62{,}53°$.

Páginas 187-188

Atividades

As **atividades 27** e **28** envolvem a Física; o professor desse componente curricular pode auxiliar os estudantes.

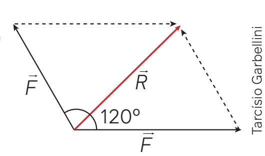
25. Usaremos a lei dos cossenos.

$x^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 120°$

$x = 17{,}4$; 17,4 cm

26.

a)

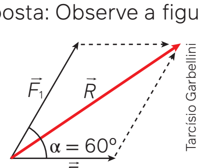


b) $R^2 = F^2 + F^2 + 2F \cdot F \cdot \cos 120°$

$R = F$; FN

A direção e o sentido da resultante estão determinados na figura. Considere nessa resolução: $\cos 120° = -\cos 60°$. Em caso de dúvida, oriente os estudantes para que utilizem uma calculadora.

27. Sugestão de resposta: Observe a figura a seguir:



Supondo que os módulos das forças sejam $F_1 = 5{,}0$ N e $F_2 = 3{,}0$ N, o módulo da força resultante é obtido pela regra do paralelogramo:

$R^2 = 5^2 + 3^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 60° \Rightarrow R = 7$; 7 N

28.

a) $x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 40°$

$x \cong 2{,}57$; 2,57 cm

$y^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 70°$

$y \cong 4{,}10$; 4,10 cm

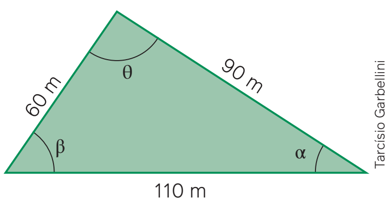
$z^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 100°$

$z \cong 5{,}40$; 5,40 cm

b) Observando os resultados é possível perceber que não.

$$\frac{4{,}10 - 2{,}57}{70 - 40} \neq \frac{5{,}40 - 4{,}10}{100 - 70}$$

29.



$60^2 = 90^2 + 110^2 - 2 \cdot 90 \cdot 110 \cdot \cos \alpha$

$\cos \alpha \cong 0{,}838 \Rightarrow \alpha \cong 33°$

$90^2 = 60^2 + 110^2 - 2 \cdot 60 \cdot 110 \cdot \cos \beta$

$\cos \beta \cong 0{,}576 \Rightarrow \beta \cong 55°$

$110^2 = 60^2 + 90^2 - 2 \cdot 60 \cdot 90 \cdot \cos \theta$

$\cos \theta \cong 0{,}037 \Rightarrow \theta \cong 92°$

Os ângulos são: $\alpha \cong 33°$, $\beta \cong 55°$ e $\theta \cong 92°$.

30.

a) Traçando-se a altura relativamente ao lado AB. Utilizando a razão trigonométrica seno:

$\text{sen } 60° = \frac{125}{x}$

$x \cong 144{,}34$; 144,34 m

$2 \cdot x \cong 2 \cdot 144{,}34 = 288{,}68$; 288,68 m

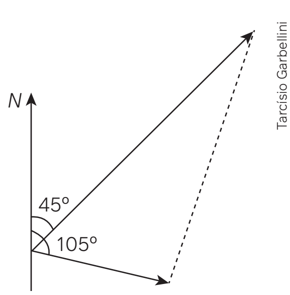
b) Utilizando-se a lei dos cossenos:

$250^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 120°$

$x \cong 144{,}34$; 144,34 m

$2 \cdot x \cong 2 \cdot 144{,}34 = 288{,}68$; 288,68 m

31.



Calculamos o ângulo entre os vetores velocidade: $a = 105° - 45° = 60°$.

Aplicando a lei dos cossenos:

$x^2 = 16^2 + 6^2 - 2 \cdot 16 \cdot 6 \cdot \cos 60°$

$x = 14$; 14 km

Alternativa **b**.

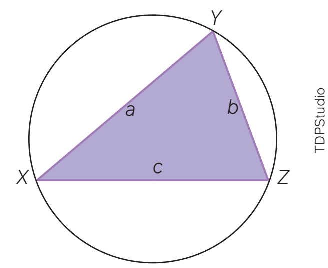
Página 189

Orientações

Sugere-se uma atividade com o auxílio de recursos de geometria dinâmica para que os estudantes verifiquem os três resultados indicados no Livro do Estudante.

Sugestão de respostas:

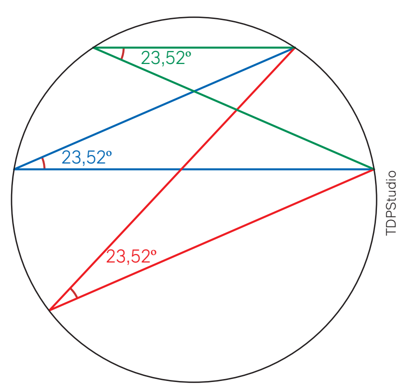
Resultado 1



Peça aos estudantes que construam diversos triângulos de ângulos e lados com medidas diferentes. Para cada um deles, oriente-os para que verifiquem se é possível traçar uma circunferência que o circunscreve.

Nessa construção, eles constatarão que qualquer triângulo sempre admite uma circunferência circunscrita, isto é, o **resultado 1** mencionado no Livro do Estudante.

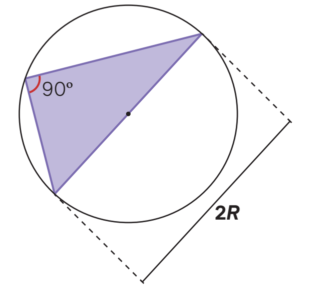
Resultado 2



Peça as estudantes que construam uma circunferência e, nessa circunferência, marquem um arco. Com base nesse arco, tracem vários ângulos inscritos na circunferência relativos a ele.

Nessa construção, eles constatarão que os ângulos inscritos referentes a um mesmo arco têm ângulos iguais, isto é, são congruentes, conforme a **resultado 2** mencionado no Livro do Estudante.

Resultado 3



Peça as estudantes que construam uma circunferência e, depois, desenhem vários triângulos inscritos a ela em que um dos lados represente o diâmetro. Observem, então, os ângulos opostos a esses lados.

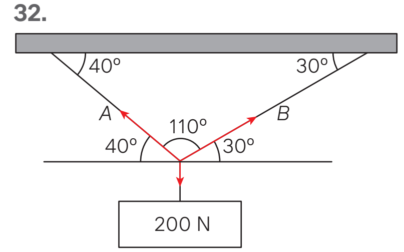
Nessa construção, eles constatarão que os triângulos construídos são todos retângulos, conforme o **resultado 3** mencionado no Livro do Estudante.

Página 192

Atividades

A ideia central dessas atividades é o trabalho com a lei dos senos, podendo também ser usada a lei dos cossenos em algumas situações.

32.



$$\frac{T_A}{\text{sen } 120°} = \frac{T_B}{\text{sen } 130°} = \frac{200}{\text{sen } 110°}$$

$$\frac{T_A}{\text{sen } 120°} = \frac{200}{\text{sen } 110°}$$

$T_A \cong 184$; 184 N

$$\frac{T_B}{\text{sen } 130°} = \frac{200}{\text{sen } 110°}$$

$T_B \cong 163$; 163 N

33. Aplicando a lei dos senos:

$$\frac{150}{\text{sen } 45°} = \frac{AB}{\text{sen } 30°}$$

$AB \cong 106$; 106 m

34.

a) e b) Sugestão de resposta: O engenheiro pretende construir uma ponte sobre determinada lagoa ligando os pontos A e B que estão em margens opostas. Ele está na mesma margem do ponto A e assinala com uma estaca um ponto C, em seu lado da lagoa, a uma distância de 40 m de A. Com alguns equipamentos, ele mede os ângulos

$B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$, encontrando 100° e 30°. A medida da distância de A a B será de quantos metros?

35.

a) Utilizando a lei dos senos podemos determinar o raio (R):

$\dfrac{40}{\text{sen } 28°} = 2R$

$R \cong 42{,}6; 42{,}6$ cm

b) $\dfrac{80}{\text{sen } 28°} = 2R$

$R \cong 85{,}2; 85{,}2$ cm

A medida do raio irá dobrar.

36.

a) Usando a lei dos senos:

$\dfrac{AC}{\text{sen } 57°} = \dfrac{AB}{\text{sen } 59°} = \dfrac{3\,000}{\text{sen } 64°}$

$AC \cong 2\,796; 2\,796$ m

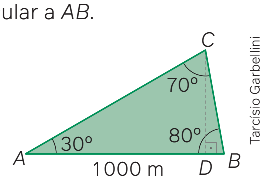
$AB \cong 2\,860; 2\,860$ m

b) $A = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \text{sen } 64°$

$A = \dfrac{1}{2} \cdot 2796 \cdot 2860 \cdot 0{,}899$

$A \cong 3\,594\,454; 3\,594\,454$ m²

37. Para que a ponte tenha comprimento mínimo, CD precisa ser perpendicular a AB.



O valor do ângulo C é obtido por:

$30° + 80° + C = 180° \Rightarrow C = 70°$

Vamos aplicar a lei dos senos:

$\dfrac{AC}{\text{sen } 80°} = \dfrac{1\,000}{\text{sen } 70°}$

$AC \cong 1\,048; 1\,048$ m. Assim:

$\text{sen } 30° = \dfrac{CD}{AC} \Rightarrow \dfrac{1}{2} \cong \dfrac{CD}{1\,048}$

$CD \cong 524; 524$ m

Alternativa **a**.

38. O ângulo B do triângulo ABC mede:

$180° = B + 30° + 105° \Rightarrow B = 45°$

No triângulo retângulo BDC, temos:

$\text{sen } 30° = \dfrac{h}{a} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{h}{a} \Rightarrow a = 2h$

Calcularemos o segmento BC, com a lei dos senos:

$\dfrac{BC}{\text{sen } 30°} = \dfrac{50}{\text{sen } 45°}$

$BC = 25\sqrt{2}; 25\sqrt{2}$ m

Considerando que:

$a = 2h$ e que $a = BC$, temos:

$BC = 2h \Rightarrow 25\sqrt{2} = 2h$

$h = 12{,}5\sqrt{2}; 12{,}5\sqrt{2}$ m

Alternativa **b**.

39. Vamos calcular para um triângulo equilátero:

$x = y = z = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$

$\text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen } x \cdot \text{sen } y \cdot \text{sen } z = \dfrac{k \cdot x \cdot y \cdot z}{R^3}$

$k = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$. Alternativa **c**.

Páginas 193-195

Atividades finais

1.

a) Rotação, translação e reflexão.

b) Transformação de homotetia.

c) Os valores são, respectivamente, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

d) Os valores são, respectivamente, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e 1.

e) Os valores são, respectivamente, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$.

f) É o quociente entre as medidas do cateto oposto ao ângulo e da hipotenusa.

g) É o quociente entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo e da hipotenusa.

h) É o quociente entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo.

i) A lei dos senos pode ser interpretada simbolicamente por:

$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{c}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C} = 2r$

j) A lei dos cossenos pelas seguintes relações:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$

2.

a) As medidas de comprimento dos lados da figura II são metade da figura I, então, a razão é igual a 2.

b) O perímetro será 2, pois as medidas foram dobradas.

c) A **figura I** têm área igual a 32, e a **figura II** têm área igual a 8, logo a razão será $\dfrac{32}{8} = 4$.

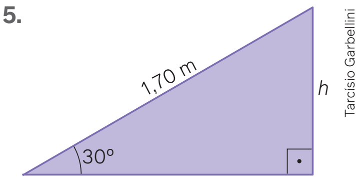
Questões de vestibulares e Enem

3. Observando a figura, para retornar à posição original, deve-se girá-la no sentido horário e o ângulo será de: 45° + 90° = 135°. Alternativa **b**.

4. Para que uma figura seja simétrica à outra em relação a um ponto O, a distância de todos os pontos de uma ao ponto O devem ser a mesma dos pontos simétricos da outra em relação a esse ponto O. Se for traçado um eixo vertical e um horizontal passando pelo ponto O e pelos lados da figura, percebe-se que a original se encontra no segundo quadrante. Sendo assim, a figura simétrica deve estar no quarto quadrante.

Alternativa **e**.

5.



$\text{sen } 30° = \dfrac{h}{1{,}7} \Rightarrow h = 0{,}85$; 85 cm

Alternativa **a**.

6. $12{,}5 = \dfrac{(2x-1) \cdot (x+2)}{2}$

$2x^2 + 3x - 27 = 0$

$x = 3$ ou $x = -4{,}5$ (não convém)

$x + 2 = 3 + 2 = 5$

$y^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow y \cong 7$

$\text{sen } \theta \cong \dfrac{5}{7} \cong 0{,}71$

Alternativa **d**.

7. $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 2^2 + 1^2 \Rightarrow AC = \sqrt{5}$

$AD^2 = AB^2 + BD^2$

$AD^2 = 2^2 + 6^2 \Rightarrow AD = 2\sqrt{10}$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ACD:

$CD^2 = AC^2 + BD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos \theta$

$5^2 = (\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{10})^2 - 2\sqrt{5} \cdot$

$\cdot\, 2\sqrt{10} \cdot \cos \theta$

$\cos \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45°$

Alternativa **c**.

8.

a) $75° + 60° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 45°$

b) Usaremos a lei dos senos:

$\dfrac{x}{\text{sen } 60°} = \dfrac{8}{\text{sen } 45°}$

$x = 4\sqrt{6}; 4\sqrt{6}$ cm

9. Pela lei dos cossenos temos que:

$11^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos \theta$

$\cos \theta = -\dfrac{1}{27}$

Alternativa **b**.

10. $120° + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 30°$

$\cos 30° = \dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x} \Rightarrow x = 3$

Alternativa **a**.

11. Aplicando a lei dos cossenos:

$AB^2 = AT^2 + BT^2 - 2 \cdot AT \cdot BT \cdot \cos \theta$

$AB^2 = 32^2 + 13^2 - 2 \cdot 32 \cdot 13 \cdot \cos 120°$

$AB \cong 40$; 40 m

12. Aplique a lei dos cossenos.

Maior lado: $a = 15$ m, $b = 10$ m.

Menor lado: $c = 8$ m.

Seja α, o ângulo oposto ao maior lado:

$15^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = -0{,}38125$

Alternativa **a**.

13. No triângulo ABD, $AB = AD = x$, então, pelo Teorema de Pitágoras:

$BD^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow BD = x\sqrt{2}$

$A_{ABD} = \frac{x^2}{2}$

Vamos aplicar a lei dos cossenos no triângulo BCD.

$\left(x\sqrt{2}\right)^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 45°$

$x^2 = 4 - \sqrt{2}$

$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \text{sen } 45° = \sqrt{2}$

Seja A a área do quadrilátero $ABCD$.

$A = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \Rightarrow A = 2;\ 2\,\text{cm}^2$

Alternativa **b**.

14. $DG = DF = 3$, logo, $GE = 1$.

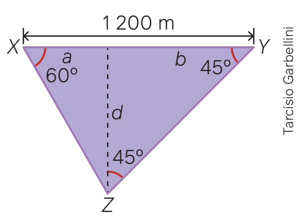
BG é altura do triângulo equilátero. ABD de lado 6, logo: $BG = 3\sqrt{3}$.

No triângulo retângulo BGE, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$BE^2 = 1^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow BE = \sqrt{28}$

Alternativa **c**.

15.



$a + b = 1\,200 \quad \text{(I)}$

$\text{tg } 60° = \frac{d}{a} \Rightarrow a = \frac{11d}{19}$

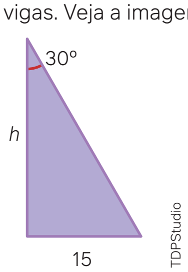
$\text{tg } 45° = \frac{d}{b} \Rightarrow b = d$

Substituindo os valores em (I).

$\frac{11}{19}d + d = 1\,200\ d = 760; 760$ m

Alternativa **b**.

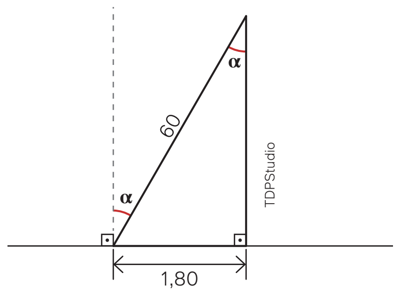
16. Com o sol a pino, 100% da área não protegida recebe luz. Na posição desejada, a iluminação é metade da área total, ou seja, 15 cm dos 30 cm entre as vigas. Veja a imagem.



$\text{tg } 30° = \frac{15}{h} \Rightarrow h \cong 26; 26$ cm

Alternativa **c**.

17.



$\text{sen } \alpha = \frac{1{,}80}{60} = 0{,}03$

$0{,}026 < \text{sen } \alpha < 0{,}031 \Rightarrow 1{,}5 < \alpha < 1{,}8$

Alternativa **c**.

CAPÍTULO 5

Funções trigonométricas

Objetivos

- Identificar e relacionar as unidades de medida de ângulos (grau e radiano).
- Conceituar circunferência trigonométrica.
- Indicar o seno e o cosseno de um arco trigonométrico.
- Definir as funções trigonométricas seno e cosseno.
- Identificar a periodicidade em funções trigonométricas seno e cosseno.
- Relacionar as funções trigonométricas a fenômenos periódicos.
- Resolver e elaborar problemas modelados por funções trigonométricas.

Justificativa

Para que estejam aptos a modelar e resolver problemas que envolvem as funções trigonométricas, é necessário que os estudantes tenham noções básicas da trigonometria na circunferência, o que justifica a primeira parte deste capítulo. Na segunda parte são estudadas as funções seno e cosseno visando à resolução de problemas que envolvem fenômenos periódicos.

Competências gerais da BNCC

Competência geral 1: O trabalho com a trigonometria, que é utilizada até hoje para resolver inúmeros problemas das mais diversas áreas, remete a essa competência que é desenvolvida em todo o capítulo, o que leva os estudantes a valorizarem e utilizarem os conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar a realidade.

Competências gerais 2, 4, 5, 7 e 9: Na seção **Para explorar**, da página 224, os estudantes investigam, em grupos, os significados dos parâmetros A, B, C e D na função $y = f(x) = A\text{sen}(Bx + C) + D$. Como, nesse processo, eles exercitam a curiosidade intelectual e recorrem à abordagem própria das ciências por meio da reflexão, da análise crítica, da imaginação e da criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas, desenvolvem a **competência 2**. Por trabalharem em grupos discutindo ideias, utilizam diferentes linguagens, como a verbal oral, a visual, a digital e a matemática, tanto gráfica como algébrica, mobilizando a **competência 4.** Para construir os gráficos das funções que serão investigadas, os estudantes utilizam um *software* de geometria dinâmica, desenvolvendo, assim, a **competência 5**, pois utilizam as tecnologias digitais de forma significativa e reflexiva. Ao longo de todo o processo de investigação, os estudantes argumentam com base em fatos e informações confiáveis, fazem inferências, confrontam pontos de vista e, assim, desenvolvem também a **competência 7**. Além disso, os estudantes têm a oportunidade de desenvolver a **competência 9**, pois a atividade de investigação é realizada em grupos, o que mobiliza o exercício da empatia, do diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação.

Competência geral 8: O trabalho com o infográfico da página 236, que aborda o Estatuto da criança e do adolescente, possibilita o desenvolvimento desta competência.

Competência geral 10: Esta competência é mobilizada quando, ao observar o infográfico da página 236, os estudantes escolhem um dos direitos da criança e do adolescente e escrevem um pequeno texto defendendo sua importância e apresentando os devidos argumentos.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 3

EM13MAT306: A partir da página 233 são propostos problemas em diversos contextos, como a Física e a Medicina, que podem ser modelados e resolvidos por meio das funções seno e cosseno, envolvendo, inclusive, seus gráficos.

Conexões específicas e habilidades de Matemática

A atividade proposta na seção **Análise e contexto** sobre corrente alternada e corrente contínua, que consta na página 221, pode ser desenvolvida e ampliada com a participação do professor de Física, da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Temas Contemporâneos Transversais

O TCT **Direitos da criança e do adolescente** é abordado no infográfico da página 236, em que os estudantes têm a oportunidade de conhecer alguns dos direitos da criança e do adolescente, escolher um deles e escrever um pequeno texto defendendo sua importância, apresentando os devidos argumentos para, depois, compartilhar com os colegas.

Resoluções e comentários

Página 197

Abertura

1. Exemplos que podem ser citados pelos estudantes: o ciclo de dia e noite, passagem das estações, anos, alta e baixa da maré.
2. Os estudantes podem pesquisar os fenômenos da natureza que sejam cíclicos e os respectivos ciclos. Podem, então, ser organizados em grupos para que cada um deles apresente para os colegas os fenômenos pesquisados e discuta as possibilidades de alteração dos ciclos. O professor de Geografia pode ser envolvido nesta atividade.

1. Circunferência trigonométrica

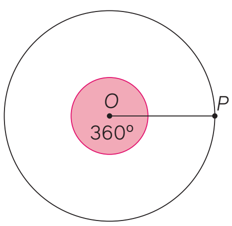
Página 199

Para pensar e discutir

1. As medidas indicadas podem ser interpretadas como: $\cos\theta = \frac{q}{m}$; $\text{tg}\,\theta = \frac{p}{q}$
2. Espera-se que os estudantes digam que a lei dos senos é um teorema que define uma relação entre o lado de um triângulo e o ângulo oposto a esse lado e que essa razão é constante. Além disso, caso o triângulo esteja inscrito em uma circunferência, essa razão corresponde ao diâmetro dela:
$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C} = 2R$
Já a lei dos cossenos relaciona os lados de um triângulo a um de seus ângulos:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$
$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos A$
$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos B$
3. Sim.

Página 200

Para pensar e discutir

1. Sabemos que a medida completa de uma circunferência corresponde a 360°; logo, a medida do ângulo central correspondente a um arco que representa um quarto da circunferência é igual a 90°.
$\frac{1}{4} \cdot 360° = \frac{360°}{4} = 90°$
E a medida do ângulo central, correspondente a um arco que representa um terço da circunferência é igual a 120°.
$\frac{1}{3} \cdot 360° = \frac{360°}{3} = 120$
Portanto, 90° e 120°.
2. 

Tarcísio Garbellini
Sabemos que a medida completa de uma circunferência corresponde a 360°; logo, se escolhemos um ponto *P* da circunferência de centro *O*, temos que o ângulo central, começando em *P* e percorrendo a circunferência até, novamente, o ponto *P*, é de 360°.
3. O comprimento é $2\pi r$.
4. Se o comprimento de uma circunferência de raio *r* é igual ao arco da circunferência completa e a circunferência completa tem medida igual a 360°, então um arco de comprimento ℓ e ângulo θ é $\frac{\pi r\theta}{180°}$.
$\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360°}{\theta} \Rightarrow \ell = \frac{2\pi r\theta}{360°} = \frac{\pi r\theta}{180°}$

Página 201

Para pensar e discutir

1. Temos que: $\alpha = 2\pi$ rad, em que α é o ângulo central correspondente a uma volta completa, ou seja, $\alpha = 360°$. Logo, $360° = 2\pi$ rad.
2. Como sabemos que a medida de um ângulo de 180° é metade de 360°, então sabemos que a medida do comprimento do arco de um ângulo central de 180° é metade da medida do comprimento da circunferência. Assim, considere uma circunferência de raio *r*.
$\frac{1\text{ rad}}{180°} = \frac{r}{r\pi} \Rightarrow 180° = \pi$ rad

3. 1 radiano é aproximadamente 57°. Pode-se obter essa medida por meio de proporção:
$\frac{1}{\pi} = \frac{\alpha}{180°} \Rightarrow \alpha \cong \frac{180°}{3{,}14} \cong 57°$

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta:
π rad = 180°
$\frac{\pi}{2}$ rad = 90°
$\frac{\pi}{4}$ rad = 45°
Então:
$7 \cdot \frac{\pi}{4}$ rad = $7 \cdot 45° = 315°$

Página 203

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Utilizando uma proporção, considerando que se 2π é proporcional a $2\pi r$ (comprimento da circunferência inteira), então $\frac{\pi}{12}$ é proporcional a x.

Páginas 204-205

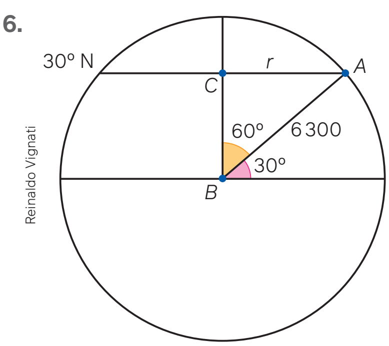
Atividades

Nas atividades a seguir, o objetivo é verificar se os estudantes compreenderam como calcular comprimento de arco, como transformar graus em radianos e como transformar radianos em graus. Na **atividade 6**, recomendamos envolver a disciplina de Geografia. A observação de um globo terrestre pode auxiliar a identificação das coordenadas geográficas dos pontos indicados.

1. Nessa questão é importante que você faça um exemplo com os estudantes.
   a) Se seguirmos o padrão das calculadoras científicas, primeiro pressionamos o botão *ON* para ligá-la. Começamos pressionando o número 2. Logo depois, pressionamos *SHIFT,* a tecla *ANS* e depois o número 2. Feitos esses passos na ordem solicitada, pressionamos = e pronto.
   2 rad é aproximadamente 114°.
   b) Realizando o procedimento análogo, temos que 3 rad é aproximadamente 171°.
   c) Realizando o procedimento análogo, temos que 4 rad é aproximadamente 228°.
   d) Realizando o procedimento análogo, temos que 5 rad é aproximadamente 285°.

Outra forma de resolver seria observar que 1 rad é aproximadamente 57° e, com base nisso, obter 2 rad, 3 rad, 4 rad e 5 rad, como se pede na atividade.

2.
   a) Usando a relação já estudada anteriormente, temos que:
   $\frac{2\pi \text{ rad}}{2{,}5 \text{ rad}} = \frac{2\pi r}{8{,}5}$
   $r = \frac{8{,}5}{2{,}5} = 3{,}4$; 3,4 cm
   Ou, de modo mais direto, se usarmos a relação:
   Ângulo central =
   $= \frac{\text{Comprimento do arco}}{\text{raio}}$
   chegamos, também, ao raio de 3,4 cm.
   b) Para essa questão vamos usar a seguinte relação:
   $\frac{2\pi \text{ rad}}{2{,}5 \text{ rad}} = \frac{360°}{\theta} \Rightarrow \theta \cong 143{,}3°$
   Logo, o ângulo central é 143,3° aproximadamente.
3. A ideia é que os estudantes observem a relação entre a medida do ângulo em radianos, o comprimento de um arco e a medida do raio, verificando como determinar cada um em cada caso para a elaboração de um problema.
4.
   a) Utilizando proporções, temos:
   $x \cdot \pi \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \text{rad} \cdot 180°$
   $x = \frac{2\pi \cdot 180°}{3\pi} = 2 \cdot 60° = 120°$
   b) Utilizando proporções, temos:
   $x \cdot \pi \text{ rad} = \frac{3\pi}{4} \text{rad} \cdot 180°$
   $x = \frac{3\pi \cdot 180°}{4\pi} = 3 \cdot 45° = 135°$
   c) Utilizando proporções, temos:
   $x \cdot \pi \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \text{rad} \cdot 180°$
   $x = \frac{5\pi \cdot 180°}{6\pi} = 5 \cdot 30° = 150°$
   d) Utilizando proporções, temos:
   $x \cdot \pi \text{ rad} = \frac{3\pi}{2} \text{rad} \cdot 180°$
   $x = \frac{3\pi \cdot 180°}{2\pi} = 3 \cdot 90° = 270°$
   e) Utilizando proporções, temos:
   $x \cdot \pi \text{ rad} = \frac{5\pi}{3} \text{rad} \cdot 180°$
   $x = \frac{5\pi \cdot 180°}{3\pi} = 5 \cdot 60° = 300°$
   f) Utilizando proporções, temos:
   $x \cdot \pi \text{ rad} = \frac{11\pi}{6} \text{rad} \cdot 180°$
   $x = \frac{11\pi \cdot 180°}{6\pi} = 11 \cdot 30° = 330°$
5.
   a) Utilizando proporções, temos:
   $90° \cdot \pi \text{ rad} = x \cdot 180°$
   $x = \frac{90° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} = \frac{\pi}{2} \text{rad}$
   b) Utilizando proporções, temos:
   $240° \cdot \pi \text{ rad} = x \cdot 180°$
   $x = \frac{240° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} = \frac{4\pi}{3} \text{rad}$
   c) Utilizando proporções, temos:
   $225° \cdot \pi \text{ rad} = x \cdot 180°$
   $x = \frac{225° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} = \frac{5\pi}{4} \text{rad}$
   d) Utilizando proporções, temos:
   $75° \cdot \pi \text{ rad} = x \cdot 180°$
   $x = \frac{75° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} = \frac{5\pi}{12} \text{rad}$
   e) Utilizando proporções, temos:
   $315° \cdot \pi \text{ rad} = x \cdot 180°$
   $x = \frac{315° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} = \frac{7\pi}{4} \text{rad}$
   f) Utilizando proporções, temos:
   $1° \cdot \pi \text{ rad} = x \cdot 180°$
   $x = \frac{1° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} = \frac{\pi}{180°} \text{rad}$
6.



Seja r a medida do raio do paralelo 30° N, veja na figura acima. Pelo triângulo ABC, temos que:
$\text{sen } 60° = \frac{r}{6\,300} \Rightarrow r = 3\,150 \cdot \sqrt{3}$

No paralelo 30° N, como sabemos que as longitudes de P e Q são, respectivamente, 45° L e 15° O, o arco PQ mede 60° (45°–(– 15°)). Portanto, temos que o comprimento desse arco, em km, é:
$2 \cdot \pi \cdot 3\,150 \cdot 60 \cdot \sqrt{3} = C \cdot 360°$
$C = 1\,050\pi \cdot \sqrt{3}$
Alternativa **c**.

Essa é uma oportunidade de trabalhar com a disciplina de Geografia para que os estudantes compreendam melhor as coordenadas geográficas.

7. As respostas dependem das situações elaboradas. A atividade é uma oportunidade para trabalhar a interdisciplinaridade.
8. Como a câmera está apontada para o sentido oeste, ou seja, 180°, temos que:
   - na 1ª mudança em 135° no sentido anti-horário, a câmera passa a ficar apontada, exatamente, para SE, ou seja, 315°;
   - na 2ª mudança em 60° no sentido horário, a câmera passa a apontar para o ponto entre as coordenadas SO e S, ou seja, 255°;
   - na 3ª mudança em 45° no sentido anti-horário, a câmera passa a apontar um ponto entre as coordenadas S e SE, ou seja, 300°.

   Após a 3ª mudança, o controlador é orientado a reposicionar a câmera, com a menor amplitude possível, no sentido noroeste (NO) em razão do movimento suspeito de um cliente.

   Para isso, ele precisa mover a câmera 165° no sentido horário, pois no sentido anti-horário é necessário mover 195°.

   Alternativa **e**.
9. O comprimento dessa mesa é dado por $62{,}8 \cdot 8 = 502{,}4 \Rightarrow 502{,}4$ cm

   O comprimento da circunferência é dado por $C = 2\pi r$.

   $502{,}4 = 2\pi r \Rightarrow r = \dfrac{502{,}4}{2\pi} \cong 80$

   Assim, o raio dessa circunferência é aproximadamente 80 centímetros; e o quadrado, a partir do qual essa mesa será cortada, deverá ter no mínimo o lado equivalente a duas vezes o raio da circunferência, ou seja, 160 centímetros.

   Alternativa **d**.
10. Seja r o raio da circunferência da terra. Assim, as circunferências definidas no equador pela sola do pé do viajante e pelo topo da sua cabeça são dadas por:

    $C_1 = 2\pi r$

    $C_2 = 2\pi \cdot (r + 2) = 2\pi r + 4\pi$

    $C_2 - C_1 = 4\pi \cong 12{,}6$ m

    Alternativa **b**.

Para pensar e discutir

1. $A(1, 0)$, $A'(-1, 0)$, $B\ (0, 1)$; $B'(0, -1)$ e $O(0, 0)$.
2. O maior valor possível é 1 e o menor valor possível é -1.
3. O maior valor possível é 1 e o menor valor possível é -1.
4. Estaria no ponto A'; estaria no ponto B'.

Página 206

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Um ângulo de $-4\,550°$ corresponde a 12 voltas completas no sentido horário (negativo) e um ângulo final de $-230°$, ou 130° se representado como um ângulo positivo.

Página 207

Para pensar e discutir

1. Interpretação esperada: São 7 voltas completas na circunferência e mais um arco de $\frac{7\pi}{5}$ rad no sentido anti-horário. A extremidade desse arco está no 3º quadrante, pois:

   $\frac{7\pi}{5}\text{rad} = \frac{7}{5} \cdot 180° = 252°$
2. Nesse caso a interpretação esperada é: São 7 voltas completas na circunferência e mais um arco de $\frac{7\pi}{5}$ rad no sentido horário.

   Fazemos $2\pi - \frac{7}{5}\pi = \frac{3\pi}{5}$ para descobrir o arco correspondente no sentido anti-horário.

   Como $\frac{3\pi}{5}\text{rad} = \frac{3}{5} \cdot 180° = 108°$ então, o arco terá extremidade final no 2º quadrante.

Página 208

Para pensar e discutir

1. Os números inteiros da forma $5 \cdot k$ são múltiplos de 5.
2. Os arcos possuem medidas que são múltiplas de 2π, ou seja, são arcos de medidas que correspondem a voltas inteiras.
3. Sejam $x_1 = \frac{2\pi}{3} + k_1 \cdot 2\pi$ e $x_2 = \frac{2\pi}{3} + k_2 \cdot 2\pi$ em que k_1 e k_2 são inteiros quaisquer. Então, sua diferença é:

   $\left(\frac{2\pi}{3} + k_1 \cdot 2\pi\right) - \left(\frac{2\pi}{3} + k_2 \cdot 2\pi\right) =$

   $= k_1 \cdot 2\pi - k_2 \cdot 2\pi = 2\pi \cdot (k_1 - k_2)$

   Portanto, a diferença entre esses dois arcos é um múltiplo de 2π.

Para explorar

As respostas dependem dos arcos elaborados pelos estudantes. É fundamental que eles apresentem para os demais as duas tabelas elaboradas.

Página 209

Atividades

Sugerimos que as atividades a seguir sejam resolvidas em sala de aula. Uma estratégia é verificar, por exemplo, a resolução em grupo para facilitar a troca de ideias e dos procedimentos de resolução. Ao final, a discussão coletiva das respostas possibilitará a você, professor, verificar se a aprendizagem foi satisfatória. Se ainda houver dúvidas, dê alguns exemplos relacionados a arcos com mais de uma volta, dados em graus e/ou radianos, e proponha novas atividades para serem resolvidas em duplas, propiciando a discussão.

11.

a) $8\,000° = 22 \cdot 360° + 80°$

Assim, o arco de 8 000° está no 1º quadrante.

b) O arco de 3 600° é o equivalente a 0°; portanto, não está em nenhum quadrante.

c) $\frac{15\pi}{4} = 2\pi + \frac{7\pi}{4}$

Assim, o arco $\frac{15\pi}{4}$ rad está no 4º quadrante.

d) $\frac{77\pi}{3} = 12 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{3}$

Assim, o arco $\frac{77\pi}{3}$ rad está no 4º quadrante.

12.

a) $x = k \cdot 360° + 220°$

$x = 10 \cdot 360° + 220° = 3\,820°$

b) Como k é um número inteiro, todos os arcos x estão na marca de 220° na circunferência, ou seja, no 3º quadrante.

c) $x = k \cdot 360° + 220°$

$x = 0 \cdot 360° + 220° = 220°$

13.

a) Seja k um inteiro positivo. Os arcos correspondentes aos ângulos 0°, 90°, 180°, 270° e 360° são:

$x = k \cdot 360°$ $\quad$ $x = k \cdot 180°$

$x = k \cdot 90°$ $\quad$ $x = k \cdot 270°$

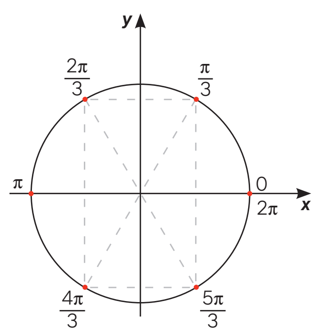
b) A expressão $x = k \cdot 90°$ indica todos os arcos que terminam na intersecção da circunferência com um dos eixos coordenados.

14.

a)

k	$x = \frac{k \cdot \pi}{3}$	Arcos
0	$x = \frac{0 \cdot \pi}{3} = 0$	0
1	$x = \frac{1 \cdot \pi}{3} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
2	$x = \frac{2 \cdot \pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
3	$x = \frac{3 \cdot \pi}{3} = \pi$	π
4	$x = \frac{4 \cdot \pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$
5	$x = \frac{5 \cdot \pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
6	$x = \frac{6 \cdot \pi}{3} = 2\pi$	2π

Veja o gráfico a seguir.



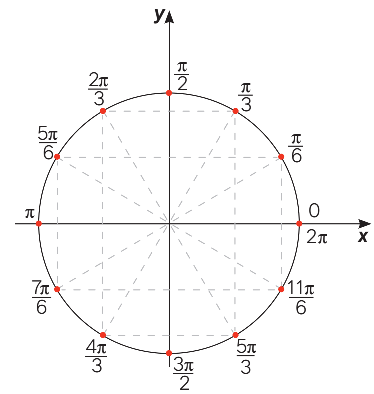
Reinaldo Vignati

Atenção: Verifique se os estudantes compreenderam que atribuindo valores a *k* podemos continuar obtendo outros arcos, inclusive no sentido horário (para *k* inteiro e negativo).

b)

k	$x = \frac{k \cdot \pi}{6}$	Arcos
0	$x = \frac{0 \cdot \pi}{6} = 0$	0
1	$x = \frac{1 \cdot \pi}{6} = \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
2	$x = \frac{2 \cdot \pi}{6} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
3	$x = \frac{3 \cdot \pi}{6} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
4	$x = \frac{4 \cdot \pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
5	$x = \frac{5 \cdot \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
6	$x = \frac{6 \cdot \pi}{6} = \pi$	π
7	$x = \frac{7 \cdot \pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$
8	$x = \frac{8 \cdot \pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$
9	$x = \frac{9 \cdot \pi}{6} = \frac{3\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$
10	$x = \frac{10 \cdot \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$
11	$x = \frac{11 \cdot \pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$
12	$x = \frac{12 \cdot \pi}{6} = 2\pi$	2π

Veja o gráfico a seguir.

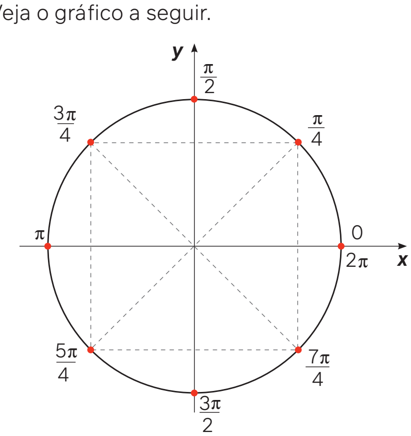


Reinaldo Vignati

c)

k	$x = \frac{k \cdot \pi}{4}$	Arcos
0	$x = \frac{0 \cdot \pi}{4} = 0$	0
1	$x = \frac{1 \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
2	$x = \frac{2 \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
3	$x = \frac{3 \cdot \pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
4	$x = \frac{4 \cdot \pi}{4} = \pi$	π
5	$x = \frac{5 \cdot \pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$
6	$x = \frac{6 \cdot \pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
7	$x = \frac{7 \cdot \pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
8	$x = \frac{8 \cdot \pi}{4} = 2\pi$	2π

Veja o gráfico a seguir.



Reinaldo Vignati

15.

a) Para $k = -1$, temos $x = -\frac{3\pi}{4}$: arco com extremidade no 3º quadrante.

b) Para $k = 1$, temos $x = \frac{5\pi}{4}$: arco com extremidade no 3º quadrante.

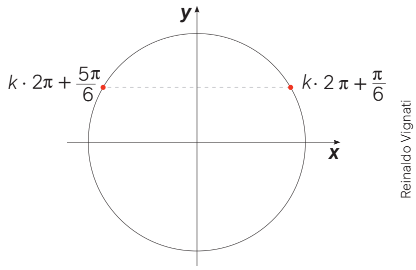
c) Para $k = 2$, temos $x = \frac{9\pi}{4}$: arco com extremidade no 1º quadrante

d) Para $k = -2$, temos $x = -\frac{7\pi}{4}$: arco com extremidade no 1º quadrante.

16.

a) $x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

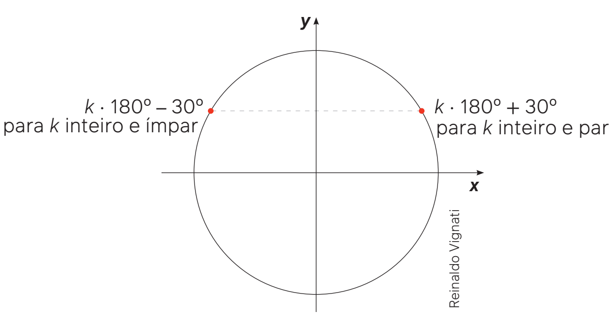
Veja os pontos no gráfico abaixo.



b)

k	$x = k \cdot 180° + (-1)^k \cdot 30°$	Arco de 1ª volta
0	$x = 0 \cdot 180° + (-1)^0 \cdot 30° = 30°$	30°
1	$x = 1 \cdot 180° + (-1)^1 \cdot 30° = 150°$	150°
2	$x = 2 \cdot 180° + (-1)^2 \cdot 30° = 390°$	30°
3	$x = 3 \cdot 180° + (-1)^2 \cdot 30° = 510°$	150°
4	$x = 4 \cdot 180° + (-1)^4 \cdot 30° = 750°$	30°

Veja os pontos no gráfico abaixo.



17.

a) Em 5 voltas, o deslocamento angular é de:

$5 \cdot 2\pi$ rad $= 10\pi$ rad

b) A velocidade angular é:

$\omega = \frac{10\pi}{1} \frac{\text{rad}}{s} = 10\pi$ rad/s

18. Aqui é fundamental que as duplas verifiquem as respostas e os procedimentos adotados na resolução.

19.

a) Como queremos a velocidade angular do ponteiro das horas em rad por segundos, temos de transformar as horas em segundos. Para isso, definimos:

- 1 hora tem 60 minutos;
- 1 minuto tem 60 segundos;
- 60 minutos tem $60 \cdot 60 = 3\,600$ segundos;
- 1 hora tem 3 600 segundos;
- 12 horas tem $12 \cdot 3\,600 = 43\,200$ segundos.

Logo, a velocidade angular é:

$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{43\,200 s} = \frac{\pi}{21\,600}$ rad/s

b) Como queremos a velocidade angular do ponteiro dos minutos em rad por segundos, temos que transformar os minutos em segundos. Para isso, definimos:

- 1 hora tem 60 minutos;
- 1 minuto tem 60 segundos;
- 60 minutos tem $60 \cdot 60 = 3\,600$ segundos;
- 1 hora tem 3 600 segundos;

Logo, a velocidade angular é:

$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{3\,600 s} = \frac{\pi}{1\,800}$ rad/s

c) Como queremos a velocidade angular do ponteiro dos segundos em rad por segundos, temos que:

- 1 hora tem 60 minutos;

Logo, a velocidade angular é:

$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{60 s} = \frac{\pi}{30}$ rad/s

Página 211

Para pensar e discutir

1. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos que:

$(\text{sen}\ \theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1^2 \Rightarrow \text{sen}^2\ \theta + \cos^2\ \theta = 1$

Essa é a **relação fundamental da trigonometria**.

2. O maior valor é 1 e ocorre, na primeira volta positiva, para $\theta = 0$ rad ou 0°.

3. O menor valor é –1 e ocorre, na primeira volta positiva, para $\theta = \pi$ rad $= 180°$.

4. O maior valor é 1 e ocorre, na primeira volta positiva, para $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$.

5. O menor valor é –1 e ocorre, na primeira volta positiva, para $\theta = \frac{3\pi}{2}$ rad $= 270°$.

Página 213

Para pensar e discutir

1. O seno é positivo no 1º e no 2º quadrantes. Já no 3º e no 4º quadrantes, ele é negativo.

2. O cosseno é positivo no 1º e no 4º quadrantes. Já no 2º e no 3º quadrantes, ele é negativo.

3. Para que o produto $\text{sen}\ x \cdot \cos x < 0$, os sinais do seno e do cosseno devem ser diferentes, o que ocorre no 2º e no 4º quadrantes.

Para explorar

1.

a) $\text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$, $\text{sen}\ 150° = \frac{1}{2}$,

$\text{sen}\ 210° = -\frac{1}{2}$ e $\text{sen}\ 330° = -\frac{1}{2}$

b) $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2.

a) $\text{sen}\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{sen}\ 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\text{sen}\ 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{sen}\ 315° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos 315° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3.

a) sen $60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, sen $120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

sen $240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e sen $300° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) cos $60° = \frac{1}{2}$, cos $120° = -\frac{1}{2}$,

cos $240° = -\frac{1}{2}$ e cos $300° = \frac{1}{2}$

Página 214

Para pensar e discutir

1. Os valores respectivamente:
sen 155° = 0,42   sen 205° = –0,42   sen 335° = –0,42

Páginas 215-216

Atividades

20.

a) Verificando a simetria dos arcos, temos:

B: 180° – 60° = 120°

C: 180° + 60° = 240°

D: 360 – 60° = 300°

Assim, os arcos *B, C* e *D* possuem arcos de medida 120°, 240° e 300°, respectivamente.

b) sen *A* + sen *B* + sen *C* + sen *D* =

= sen (60°) + sen (120°) + sen (240°) + sen (300°) =

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

c) cos *A* + cos *B* + cos *C* + cos *D* =

= cos (60°) + cos (120°) + cos (240°) + cos (300°) =

$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0$

21. Seja cos $x = -0{,}6$. Sabemos que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Então:
$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x + (-0{,}6)^2 = 1$
$\text{sen}^2 x + 0{,}36 = 1$
sen $x = \pm 0{,}8$
Como o arco x está no segundo quadrante, sen $x = 0{,}8$.

22. I. Verdadeira.
sen *A* = sen 0° = 0 e sen *C* = sen 180° = 0

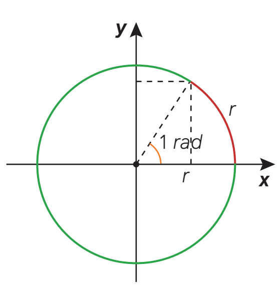
II. Verdadeira.
cos *B* = cos 90° = 0 e cos *D* = cos 270° = 0

III. Falsa. Considere o arco *C*, que corresponde a 180°. Temos que: sen 180° = 0 e cos 180° = –1

IV. Verdadeira. O cosseno de um arco vale 1 apenas quando ele corresponde ao ângulo 0°, em que o seno vale 0.

23. Dado que $\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} > 0$, temos que o sinal de sen θ e cos θ é o mesmo. Portanto, o arco θ está no 1º ou no 3º quadrante.

24.



Reinaldo Vignati

Temos que o sen (1 rad) > cos (1 rad). Uma justificativa possível é observar a definição de seno e cosseno na circunferência trigonométrica. Se o arco fosse 45° ($\frac{\pi}{4}$, que é menor que 1) estaria situado na bissetriz do 1º quadrante e teríamos seno e cosseno iguais. Como o arco é maior que 45°, a ordenada do ponto correspondente à extremidade do arco (valor de seno) é maior que a abscissa do ponto (valor do cosseno).

25. Oriente os estudantes para que comparem suas respostas com a dos colegas, que deverão ser as mesmas. Comente com eles que em arcos complementares o seno de um é igual ao cosseno do outro. Já para arcos suplementares os senos são iguais e os cossenos são opostos. Isso pode ser verificado diretamente fazendo a representação na circunferência trigonométrica.

26.

a) A circunferência foi dividida em 12 partes iguais, de 30° cada. Assim, a medida de cada um dos arcos é:

0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330°.

b) O seno é crescente no 1º e no 4º quadrantes.

c) O cosseno é crescente no 3º e no 4º quadrantes.

27.

a) Terá medida 59°, pois como os arcos *AB* e *CD*, em que *D* é o ponto simétrico de *A* pelas ordenadas, são congruentes, como representado na figura, basta fazer 180° – 121° que chegaremos ao resultado esperado.

b) Terá medida 152°, pois como os arcos *AB* e *CD* são congruentes, como representado na figura, e os arcos *AC* e *CD* têm medidas suplementares, logo basta fazer 180° – 28° e chegaremos ao resultado esperado.

c) Eles são arcos suplementares, já que *AB* e *CD* são congruentes.

d) Observando a simetria na circunferência trigonométrica, temos que sen 60° = sen 120°. Portanto, o arco do segundo quadrante é 120°.

28.

a) Seja *P* o primeiro ponto, ou seja, $\frac{\pi}{4}$, para o ponto *A* é somado $\frac{\pi}{2}$ e assim por diante. Logo, os arcos são:

$A = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$B = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$

$C = \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$

b) Observando os arcos na circunferência e considerando a definição de seno, temos:

sen A = sen $\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

sen B = –sen $\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

sen C = –sen $\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Observando os arcos na circunferência e considerando a definição de cosseno, temos:

cos A = –cos $\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

cos B = –cos $\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

cos C = cos $\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

É importante que os próprios estudantes se apoiem na circunferência trigonométrica para observar que para cada arco do 1º quadrante existe um arco no 2º quadrante, um arco no 3º quadrante e um arco no 4º quadrante que têm o mesmo seno e o mesmo cosseno em módulo. Assim, o que muda, dependendo do quadrante, é o sinal.

29. O objetivo dessa atividade é levar os estudantes a assimilar as razões trigonométricas seno e cosseno dos arcos em uma circunferência trigonométrica. Incentive-os a fazer a atividade e, ao final, convide alguns deles para apresentar os resultados.

30.

a) A igualdade $\text{sen}\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ocorre quando $x = \frac{5\pi}{4}$ ou quando $x = \frac{7\pi}{4}$.

b) Agora, queremos a situação anterior, mas para todos os casos em que ela ocorra. Para isso, generalizamos da seguinte forma: quando $x = 2\pi k + \frac{5\pi}{4}$ ou $x = 2\pi k + \frac{7\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) A igualdade $\cos\ x = -\frac{1}{2}$ ocorre quando $x = \frac{2\pi}{3}$ ou quando $x = \frac{4\pi}{3}$.

d) Agora, queremos também para os casos nos quais ocorra tal situação: quando $x = 2\pi k - \frac{4\pi}{3}$ ou $x = 2\pi k + \frac{4\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Importante: Trabalhamos o assunto **equações trigonométricas** neste momento apenas para ampliar o conhecimento dos estudantes a respeito de seno e cosseno de arcos na circunferência trigonométrica. Embora haja expressões diferentes para generalizar infinitas soluções de uma equação, aqui apresentamos apenas a ideia correspondente a expressões gerais de arcos côngruos.

31. Parte 1

a) A partir do conceito de seno na circunferência trigonométrica, temos:
$x = 0$, $x = \pi$ ou $x = 2\pi$.

b) Para k um número inteiro qualquer, temos $x = k\pi$.

c) A partir da definição de cosseno na circunferência trigonométrica, temos:
$x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

d) Sendo k um número inteiro qualquer, generalizando, temos:
$x = k \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ ou $x = k \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}$
Comente com os estudantes que existem outras maneiras de generalizar. Apresente a expressão $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ e faça-os verificar que também representa as infinitas soluções.

e) A partir da definição de seno da circunferência trigonométrica, temos:
$x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

f) Sendo k um número inteiro qualquer, temos que:
$x = k \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ ou $x = k \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}$
Aqui, comente com os estudantes que seria possível também representar por $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

g) Considerando a definição de cosseno na circunferência trigonométrica, temos:
$x = 0$, $x = \pi$ ou $x = 2\pi$

h) Considerando a definição de cosseno na circunferência trigonométrica, temos:
$x = 0$, $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
Sendo k um número inteiro, temos:
$x = k\pi$

Parte 2

a) Quando $\text{sen}\ x = 0$, podemos afirmar que $\cos x = 1$ ou $\cos x = -1$.

b) Quando $\cos x = 0$, podemos afirmar que $\text{sen}\ x = 1$ ou $\text{sen}\ x = -1$.

c) Quando $\text{sen}\ x = \pm 1$, podemos afirmar que $\cos x = 0$.

d) Quando $\cos x = \pm 1$, podemos afirmar que $\text{sen}\ x = 0$.

2. As funções seno e cosseno

Página 220

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: O fluxo de elétrons percorre um único sentido.
2. Sugestão de resposta: O fluxo de elétrons varia em intervalo de tempos definidos.

Página 221

Análise e contexto

1. Enquanto o período pode ser definido como o tempo que uma onda leva para finalizar um ciclo completo, a frequência é o número de ciclos completos que uma onda realiza em um segundo. Portanto, a frequência 60 Hz significa que a onda faz 60 ciclos completos por segundo. O período é calculado como o inverso da frequência.
$\frac{1}{60} \cong 0{,}0167$
2. A resposta pode ser pesquisada pelos estudantes. Esse valor depende de vários fatores como idade e nível de atividade física. Considera-se que em adultos, por exemplo, o valor normal esperado varie aproximadamente de 60 a 100 batimentos por minuto quando a pessoa está em repouso. Essa é uma boa oportunidade de discussão com os professores de Biologia e de Educação Física. Que tal uma roda de conversa com o tema “As batidas do coração das pessoas”? Você pode até convidar um médico especialista no assunto.

Página 222

Para pensar e discutir

1. Como até π temos duas marcações, sendo a última π, então a medida desses dois espaços que estão repartidos igualmente é:
$\pi = 2x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
Logo, a distância entre os pontos é, aproximadamente 1,57.

2. Como o valor de π é aproximadamente 3,14, o arco de medida 2 rad está entre $\frac{\pi}{2}$ rad e π rad. E podemos concluir que o arco de medida – 2 rad está entre $-\frac{\pi}{2}$ rad e $-\pi$ rad.

3. O arco de medida $\frac{7\pi}{4}$ rad está entre $\frac{3\pi}{2}$ rad e 2π rad. Podemos concluir também que o arco de medida $-\frac{7\pi}{4}$ rad está entre $-\frac{3\pi}{2}$ rad e -2π rad.

Página 223

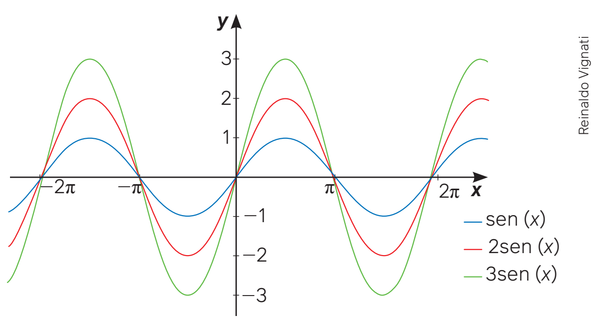
Para pensar e discutir

1. Domínio da função é o conjunto dos números reais, isto é: $\mathbb{R}$.
2. O conjunto imagem dessa função é o intervalo real $[-1, 1]$.
3. Sim. O período dessa função é 2π radianos.
4. Valores opostos de x na função seno têm imagens opostas. Isso pode ser resumido por $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x$

Página 224

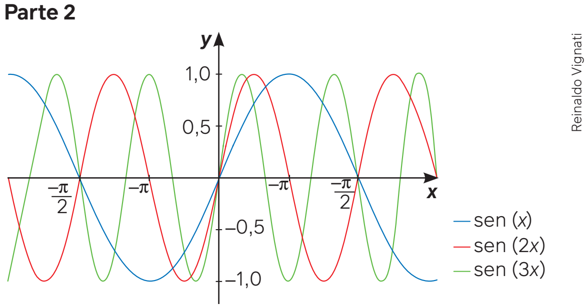
Para explorar

Parte 1



Espera-se que os estudantes compreendam que o valor de A altera a amplitude do gráfico e que quanto maior seu valor, maior a amplitude.

Parte 2



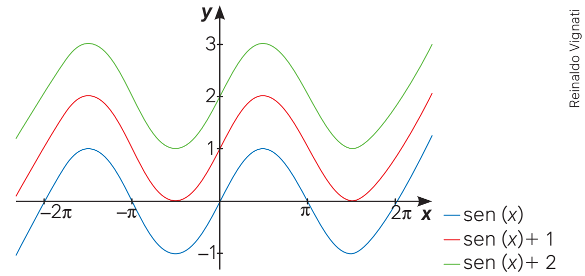
Espera-se que os estudantes compreendam que o valor de B altera o período da função, ou seja, quanto maior o valor de B, menor é o período e, quanto mais próximo de zero, maior o período.

Parte 3

Uma sugestão é que os estudantes construam, por exemplo, os seguintes gráficos: $f(x) = \text{sen}\, x$, $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ etc.

Espera-se que os estudantes compreendam que o valor de C desloca o gráfico da função na horizontal, sendo que para valores positivos de C, o gráfico é deslocado para a esquerda, enquanto para valores negativos de C, o gráfico é deslocado para a direita.

Parte 4



Espera-se que os estudantes compreendam que o valor de D desloca o gráfico da função na vertical, e que para valores positivos de D, o deslocamento é para cima, enquanto para valores negativos de D, o deslocamento é para baixo.

Parte 5

Respostas pessoais. Entretanto, é esperado que os estudantes, com base nas construções feitas em cada uma das etapas, identifiquem os significados dos valores de A, B, C e D em funções da forma $y = f(x) = A \cdot \text{sen}\,(Bx + C) + D$. Cada grupo de estudantes deverá apresentar aos demais suas conclusões. Talvez seja até possível resumir essas conclusões em uma só, com a ajuda dos estudantes,para que todos anotem no caderno.

Página 225

Para pensar e discutir

1. O conjunto imagem seria o intervalo real $[A + D, -A + D]$.
2. O conjunto imagem é o intervalo real $[8, 12]$.

Para pensar e discutir

1. Como o período P tem de ser positivo, calculamos $P = \frac{2\pi}{|B|}$.
2. O período $P = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Páginas 226-227

Atividades

32.

a) O valor máximo assumido pela função $f(x) = \text{sen}\, x$ é 1.

b) O valor mínimo assumido pela função $f(x) = \text{sen}\, x$ é – 1.

c) O intervalo é dado por $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

d) O conjunto dos zeros da função é dado por $S = \{0, \pi, 2\pi\}$.

33.

a) Como as funções f, g e h são funções senos multiplicadas por um coeficiente, para descobrir o valor desse coeficiente basta observar os valores em $x = \frac{\pi}{2}$. Assim, temos que:
$a = 2$; $b = 1$; $c = 0,5$

b) O conjunto imagem de cada função é:
$Im(f) = [-2, 2]$
$Im(g) = [-1, 1]$
$Im(h) = [-0,5; 0,5]$

c) As funções possuem o mesmo período, 2π rad.

34.

a) As linhas vermelhas sobre o eixo y, partindo do centro da circunferência, representam respectivamente, o $\text{sen}\, \theta$ e o $\text{sen}\,(-\theta)$.

b) Eles são opostos, isto é, $\text{sen}\,(-\theta) = -\text{sen}\,(\theta)$.

35. I. Falsa. O período da função $f(x) = \text{sen } x$ é 2π, enquanto o da função $g(x) = 2\text{sen } (2x)$ é π.

II. Verdadeira. Ambas as funções possuem domínio nos reais, isto é, o conjunto $\mathbb{R}$.

III. Falsa. O conjunto imagem de cada função é diferente, sendo:

$Im(f) = [-1,\ 1]$.

$Im(g) = [-2,\ 2]$.

IV. Verdadeira. Seja x um número real tal que $f(x) = \text{sen } x$. Então, $x = k\pi$, onde k é um número inteiro. Substituindo na função g temos:

$g(k\pi) = 2\text{sen } (2 \cdot k\pi) = 2\text{sen } (2k \cdot \pi)$

Como $2k$ é um número inteiro, $\text{sen } (2k \cdot \pi) = 0$.

Portanto, x é um zero da função g.

V. Falsa. Como vimos na afirmação **I**, o período da função g é a metade do período da função f.

36.

a) Temos que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 3 \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2} = 3 \cdot 1 = 3$

b) A área do retângulo $ABCD$ é igual $3 \cdot \left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) =$

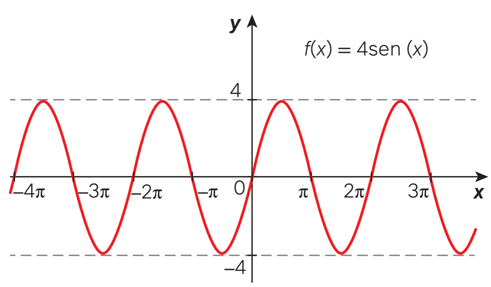
$= 3 \cdot (2\pi) = 6\pi$; 6π u.a.

37. Imagem mínima: –4, –5, –5, 0, –3;

Imagem máxima: 4, –3, 5, 14, 3.

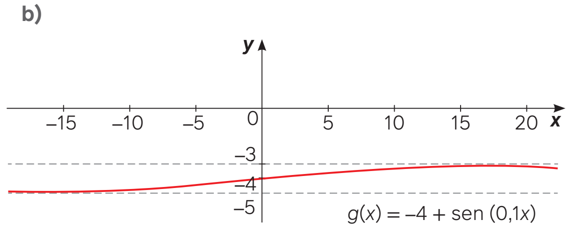
38.

a)



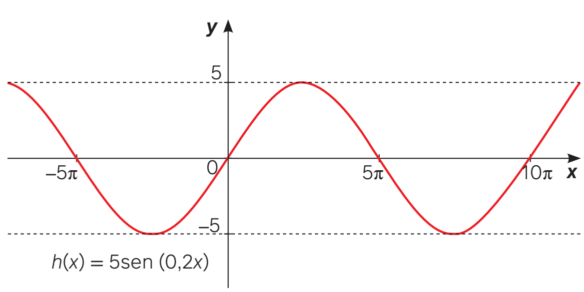
Tarcísio Garbellini

b)



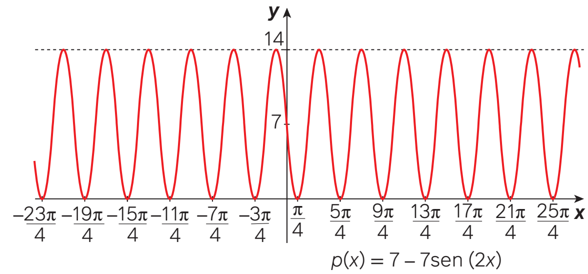
Tarcísio Garbellini

c)



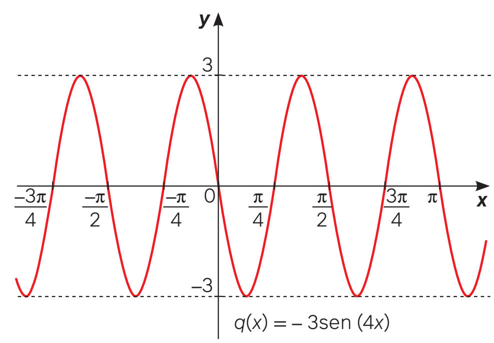
Tarcísio Garbellini

d)



Tarcísio Garbellini

e)



Tarcísio Garbellini

39. A função sen (θ) tem imagem de [– 1, 1].

a) A imagem mínima da função $f(x) = 3 - 5 \text{ sen } (2x + 4)$ é –2

b) A imagem máxima da função $f(x) = 3 - 5 \text{ sen } (2x + 4)$ é 8

c) O período é igual a π, ou seja, ela se repete a cada período de π.

40. A função $g(x) = 2 + \text{sen } x$, obtém-se da função f com o deslocamento de 2 unidades para cima no plano cartesiano do gráfico de f.

A função $h(x) = 4 + \text{sen } x$, obtém-se da função f com o deslocamento de 4 unidades para cima no plano cartesiano do gráfico de f.

Importante: Incentive os estudantes a construir esses gráficos usando recursos digitais para comprovar as respostas.

41.

a) As três funções têm a mesma amplitude, isto é, para as três funções temos $B = 1$.

b) As três funções têm o mesmo conjunto imagem, isto é, [– 1, 1].

c) Os períodos são distintos:

Gráfico 1: 4π, Gráfico 2: 2π, Gráfico 3: π.

42.

a) As funções são $g(x) = 2\text{sen } x$ e $h(x) = 4\text{sen } x$.

b) A função g é obtida da função f, multiplicando-a por 2. A função h é obtida da função f, multiplicando-a por 4. Assim, altera-se a amplitude do gráfico da função f para se obter o gráfico das funções g e h. Os estudantes podem fazer tais construções utilizando recursos digitais.

c) Elas têm em comum o período.

d) Eles diferem no conjunto imagem devido à alteração da amplitude.

Página 228

Para pensar e discutir

1. Essa função existe para todo x real, isto é, para qualquer arco real existe cosseno. Dizemos, então, que o domínio da função é o conjunto dos números reais, isto é: $\mathbb{R}$.
2. O conjunto imagem dessa função é o intervalo real $[-1, 1]$.
3. Sim. O período dessa função é 2π radianos.

Página 229

Para explorar

Parte 1

1. Domínio e imagem são iguais e descrevem a mesma curva, mas com deslocamento.
2. Indicam arcos em radianos..
3. Deslocando o gráfico da função cosseno em $\frac{\pi}{2}$ para a direita, ou seja, $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
4. Deslocando o gráfico da função seno em $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda, ou seja, $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
5. 2 pontos em comum, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Partes 2 e 3

A análise gráfica é análoga à da função seno.

Página 230

Para pensar e discutir

1. O gráfico iria refletir em relação ao eixo das abscissas ou, de forma equivalente, o gráfico giraria 180° em torno do eixo das abscissas.
2. Muda o período da função, nesse caso, duplicando-se o valor de m o período é dividido por dois.

Para pensar e discutir

1. Arcos opostos têm o mesmo valor de cosseno.
2. Arcos opostos têm valores opostos de seno.
3. O conjunto solução é $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

Páginas 231-232

Atividades

43.

a) $f(0) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos(3 \cdot 0) + \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) =$
$= \cos(0) + \cos(\pi) = 1 + (-1) = 0$

b) A função $\cos x$ tem período de 2π. Assim, a função $f(x) = \cos(3x)$ possui período P igual a: $P = \frac{2\pi}{3}$.

c) $Im(f) = [-1, 1]$.

44.

a) É possível notar que a função pontilhada $g(x)$ é a função $f(x) = \cos(x)$ acrescida de 2 unidades, para todo valor de x. Assim: $g(x) = \cos(x) + 2$

b) $Im(g) = [1, 3]$.

c) As duas funções possuem o mesmo período, que é 2π.

45. Observando o gráfico da função, os pontos A e B são os zeros mais próximos da origem do plano cartesiano onde o gráfico foi construído. Como estamos lidando com a função $f(x) = \cos(x)$, temos que os valores das abscissas de A e B são $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, respectivamente.

46. I. Verdadeira. O período da função dada no enunciado é $\frac{2\pi}{9}$.

II. Verdadeira. A amplitude do gráfico é dada pela diferença do ponto mais alto do gráfico com o ponto mais baixo dividido por dois, ou seja: $\frac{1{,}5 - (-0{,}5)}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

III. Falsa. Pelo gráfico, vemos que a função assume o valor 0 em diversos "pontos".

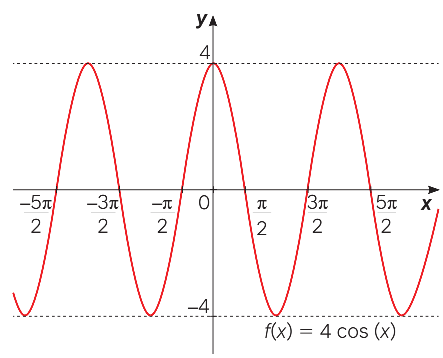
IV. Verdadeira. Observando o gráfico, vemos que a função está espelhada no eixo y.

47. Imagem mínima: –4, –5, –5, 0, –3

Imagem máxima: 4, –3, 5, 14, 3

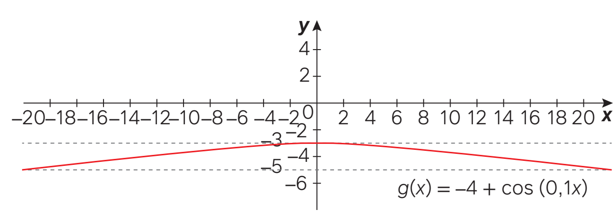
48.

a)



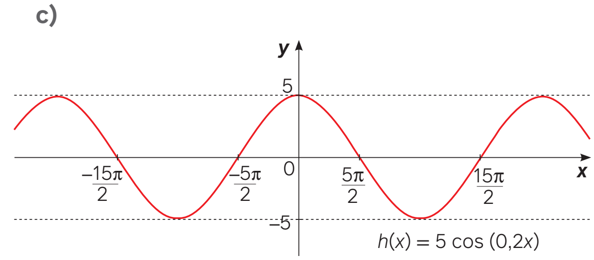
Tarcísio Garbellini

b)



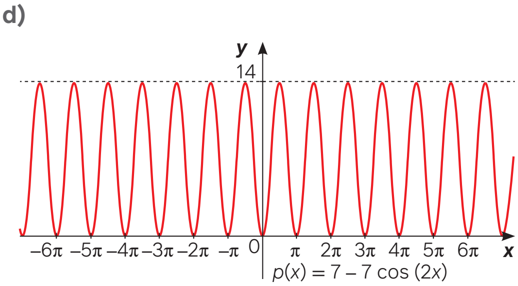
TDPStudio

c)



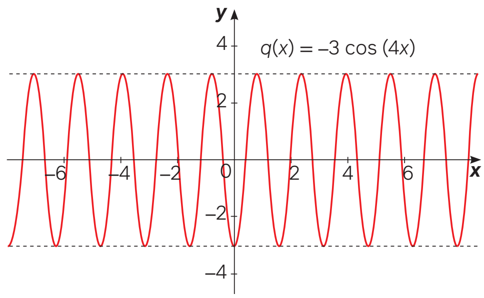
Tarcísio Garbellini

d)



Tarcísio Garbellini

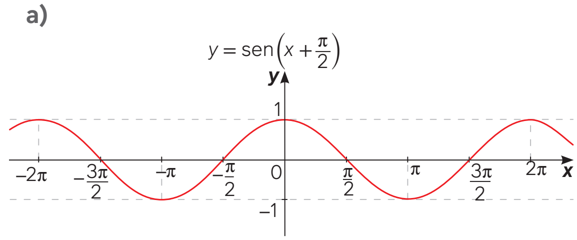
e)



Tarcísio Garbellini

49.

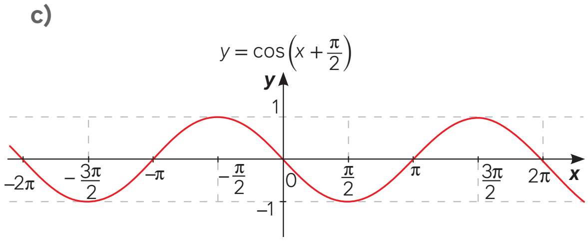
a)



Reinaldo Vignati

b) Os gráficos são coincidentes, de acordo com os gráficos que os estudantes podem construir. Outra maneira, sem a construção do gráfico, é observar que ao acrescentar $\frac{\pi}{2}$ à x na função, o deslocamento do gráfico é de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda no eixo das abscissas, coincidindo então com o gráfico da função $f(x) = \cos x$.

c)



Reinaldo Vignati

d) Os gráficos não são coincidentes, de acordo com os gráficos que os estudantes podem construir. Outra maneira, sem a construção do gráfico, é observar que ao acrescentar $\frac{\pi}{2}$ à x na função, o deslocamento do gráfico é de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda no eixo das abscissas, coincidindo então com o gráfico da função $f(x) = -\text{sen}\, x$. Nesse caso, dizemos que resultou o gráfico da função seno, rebatendo-a simetricamente em relação ao eixo das abscissas.

50. Para a imagem mínima podemos pensar qual é o menor valor possível da função $f(x) = 6 - 3\cos(2x + 4)$. Como a função $\cos(x)$ tem imagem de $[-1, 1]$, logo:

a) a imagem mínima da função $f(x) = 6 - 3\cos(2x + 4)$ é 3;

b) a imagem máxima da função $f(x) = 6 - 3\cos(2x + 4)$ é 9;

c) o período é igual a π, ou seja, ela se repete a cada período de π.

51. É possível observar alguns pontos do plano cartesiano que pertencem ao gráfico. Assim, temos os seguintes pontos, por exemplo: $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$, ...

Além disso, constata-se pelo gráfico que o período da função é π.

Alternativa **d**.

52. $f(x) = k \cdot \text{sen}\,(30°) = k \cdot \frac{1}{2}$, ou 50%

Então, quando a luminosidade é reduzida para 30°, sua intensidade é diminuída pela metade.

Alternativa **b**.

53. Pela função $f(x) = b \cdot \cos x + a$ e pelo esboço do gráfico apresentado, temos para $x = 0$:

$-1 = a + b \Rightarrow a = -1 - b$ (I)

E quando $x = \pi$,

$5 = a + b \cdot \cos(\pi) = a - b \Rightarrow b = a - 5$ (II)

Substituindo (I) em (II),

$b = -1 - b - 5 \Rightarrow 2b = -6 \Rightarrow b = -3$

$-3 = a - 5 \Rightarrow a = 2$

$5a + 2b = 10 - 6 = 4$

Alternativa **a**.

Infográfico – Respiração, uma função trigonométrica

Professor, apresente o infográfico "Respiração, uma função trigonométrica" para os estudantes. Esse recurso didático relaciona a função trigonométrica ao ciclo respiratório, destacando como o fluxo de ar nos pulmões pode ser descrito matematicamente. O infográfico permite aos estudantes que explorem conceitos, como amplitude, período e a representação gráfica da função seno, aplicados ao processo de inspiração e expiração.

Página 234

Para pensar e discutir

1. Fazendo $t = 0$, temos $x(0) = A \cdot \cos(\varphi) = 0$.
   Para que isso ocorra, temos $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
2. O raio dessa circunferência é A.
3. Deve ser 1 e – 1, respectivamente.

Página 235

Para pensar e discutir

1. Utilizando a relação $T = \frac{2\pi}{B}$
   Onde B representa o coeficiente da variável T:
   $$T = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{3}} = \frac{6\pi}{8\pi} = \frac{3}{4} \Rightarrow T = 0,75$$
   Portanto, o período da função é 0,75 s
2. Como o cosseno de um arco varia de – 1 até 1, temos:
   $P_{máx} = 100 - 20 \cdot (-1) = 120$; 120 mmHg
   $P_{mín} = 100 - 20 \cdot (+1) = 80$; 80 mmHg

Para pensar e discutir

1. Sim. O diâmetro da roda-gigante é a diferença entre os valores máximo e mínimo, isto é:
   $2R = 23,5\text{ m} - 1,5\text{ m} = 22\text{ m}$
2. Precisamos impor a condição que $\text{sen}\left[\frac{\pi}{18} \cdot (t - 26)\right] = 1$. O primeiro arco na circunferência que torna o seno igual a 1 é $\frac{\pi}{2}$. Assim, temos:

$\frac{\pi}{18} \cdot (t - 26) = \frac{\pi}{2}$

$(t - 26) = 9 \Rightarrow t = 35$; 35 s

Página 236

Infográfico

a) A função seno possui como valor máximo 1. Assim, a altura máxima de uma pessoa na roda-gigante é dada quando sen $(C \cdot t + D)$ é igual a 1. Então:

$H(t) = A + B \cdot \text{sen}\,(C \cdot t + D)$

$H(t) = A + B$

Para descobrir a altura máxima basta conhecer as variáveis A e B e para a altura

$H = A + B$.

b) A função seno possui período de 2π. Assim, para obter o tempo que a roda-gigante precisa para dar uma volta, é preciso encontrar t_1 e t_2 tais que:

$(C \cdot t_2 + D) - (C \cdot t_1 + D) = 2\pi$

$C \cdot t_2 - C \cdot t_1 = 2\pi$

$C \cdot (t_2 - t_1) = 2\pi$

Portanto, basta conhecer a constante C para descobrir o tempo que a roda-gigante leva para dar uma volta.

Página 237

Atividades

54. A ideia é fazer os estudantes investigar aplicações na Física relacionadas a funções trigonométricas em modelagem de fenômenos periódicos. Para isso, eles podem pesquisar em livros de Física.

55.

a) Como a amplitude do gráfico é 2, o valor de a é igual a -2, pois para t um pouco à direita de 0, temos a imagem negativa.

b) Como o período dessa função é 4, conforme o gráfico, podemos determinar o valor de ω:

$P = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow 4 = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2}$

56. Basta que o seno seja igual a 1 para máximo e igual a -1 para mínimo, ou seja: $L(d)$ máx $= 12 + 2{,}8 = 14{,}8$

$L(d)$ mín $= 12 - 2{,}8 = 9{,}2$

Alternativa **b**.

57. $Q(3) = 150 + 30 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 3\right) =$

$= 150 + 30 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 150$

$Q(6) = 150 + 30 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) =$

$= 150 + 30 \cdot \cos(\pi) = 120$

Porcentagem de diferença na ocupação dos quartos:

$\frac{120 - 150}{150} = \frac{-30}{150} = -0{,}2 = -20\%$

Alternativa **a**.

58. Considerando a função

$V(t) = 180 + 65 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$

I. Falso. O valor mínimo da fatura se dá quando o sen $\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$ é igual a -1. Então:

$V(t) = 180 + 65 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) =$

$= 180 + 65 \cdot (-1) = 115$; R\$ 115,00

Portanto, o valor mínimo é de R\$ 115,00 e não de R\$ 65,00.

II. Verdadeira. O valor máximo da fatura se dá quando o sen $\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$ é igual a 1. Então:

$V(t) = 180 + 65 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) =$

$= 180 + 65 \cdot (1) = 245$; R\$ 245,00

III. Verdadeira. Substituindo t por 7 na função V temos:

$V(7) = 180 + 65 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 7\right)$

$V(7) = 180 + 65 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$V(7) = 180 + 65 \cdot (-1)$

$V(7) = 115$; R\$ 115,00

Alternativa **c**.

59.

a) No enunciado é dito que a chapa não teve perda de material. Assim, a sua largura não foi alterada ao mudar de formato.

Dado que a área da chapa é de 8,132 m^2 e o comprimento da chapa é de 4 m, a largura é dada por:

$\frac{8{,}132}{4} = 2{,}033$; 2,033 m

b) Observando o gráfico dado, temos que o senoide completa 6 ciclos em 195 cm. Portanto, partindo da origem, cada ciclo se completa a cada 32,5 cm. Além disso, pelo que foi descrito, o senoide possui altura de 2 cm. Portanto, seja f a função que modela esse gráfico.

Como a função é um senoide, tem período 2π. Então:

$x \cdot 32{,}5 = 2\pi$

$x = \frac{2\pi}{32{,}5} = \frac{4\pi}{65}$

$f(x) = 2 \cdot \text{sen}\left(x \cdot \frac{4\pi}{65}\right)$

O domínio é dado pelo comprimento da chapa, isto é, [0, 195].

E a imagem de f é [– 2, 2].

Páginas 238-241

Atividades finais

1.

a) Arco de uma circunferência cujo comprimento é igual ao raio dessa circunferência.

b)

Graus (°)	Radianos (rad)
180	π
x	1

$180 \cdot 1 = x \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{180}{\pi}$

Considerando $\pi \cong 3{,}14$, então, $x \cong 57$.

Ou seja, um arco de um radiano mede aproximadamente 57°.

2. Obtém-se a medida do arco (ângulo central) em radianos.

3.

a) A origem dos arcos.

b) $A = (1, 0)$

c) Sentido anti-horário.

d) Sentido horário.

4.

a)
$$\begin{array}{r|l} 5\,000 & 360 \\ \hline -360 & 13 \\ \hline 1\,400 & \\ -1\,080 & \\ \hline 320 & \end{array}$$

Como 5 000° corresponde a 13 voltas completas com resto igual a 320, significa que a extremidade do arco está em 320° e, portanto, está no 4º quadrante.

b) 320°

5.

a) 1º e 3º quadrantes.

b) 2º e 4º quadrantes.

6.

a)

Função	Imagem
sen x	$[-1, 1]$
sen $3x$	$[-1, 1]$
$-2 \cdot$ sen $3x$	$[-2, 2]$
$15 - 2$ sen $3x$	$[13, 17]$

Logo, o máximo da função é 17.

b) O valor mínimo da função é 13.

c) $f(0) = 15 \cdot 2 \cdot \text{sen}\,(3 \cdot 0)$

$f(0) = 15 \cdot 2 \cdot 0 = 15$

d) A função seno possui período 2π. Então, para descobrir o período de f basta igualar $3x$ a 2π:

$3x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

O período da função é $\frac{2\pi}{3}$.

7. **I.** Falsa. A função cosseno possui máximo de 1.

$f(x) = 2 + 7 \cdot \cos\,(3x - \pi)$ tem máximo quando $7 \cdot \cos\,(3x - \pi) = 7$. Assim, o máximo de f é $2 + 7 = 9$.

II. Verdadeira. O valor mínimo da função se dá quando o cosseno vale -1.

$f(x) = 2 + 7 \cdot \cos\,(3x - \pi)$ tem mínimo quando $7 \cdot \cos\,(3x - \pi) = -7$. Assim, o mínimo de f é $2 - 7 = -5$.

III. Verdadeira.

$f(0) = 2 + 7 \cdot \cos\,(3 \cdot 0 - \pi)$

$f(0) = 2 + 7 \cdot (-1) = 2 - 7 = -5$

IV. Verdadeira.

$f(3\pi) = 2 + 7 \cdot \cos\,(3\pi - \pi)$

$f(3\pi) = 2 + 7 \cdot \cos\,(2\pi)$

$f(3\pi) = 2 + 7 \cdot (1) = 2 + 7 = 9$

Questões de vestibulares e Enem

8. Uma vez que estamos na Linha do Equador, podemos fazer a seguinte relação:

Graus (°)	Distância (km)
1°	111,322
360°	x

$x = 360 \cdot 111{,}322 \cong 40\,076$; 40 076 km

Alternativa **d**.

9. Pelo enunciado temos que:

$L(t) = a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}t\right) + b$

Analisando a função acima, devemos achar as constantes a e b. Vamos tomar os dados do enunciado, ou seja, quando

$t = 4 \cong L(t) = 50\,000$ e quando

$t = 6 \cong L(t) = 30\,000$.

Sendo assim, temos:

$50\,000 = a\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right) + b$

$50\,000 = a \cdot 0{,}5 + b$ (I)

$30\,000 = a\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \cdot 6\right) + b$

$30\,000 = a \cdot (-\,0{,}5) + b$

$b = 30\,000 + a \cdot 0{,}5$ (II)

Substituindo as parcelas (I) em (II), temos que:

$50\,000 = a \cdot 0{,}5 + 30\,000 + 0{,}5 \cdot a$

$20\,000 = a$

Assim, $b = 40\,000$.

Portanto, sabendo a e b, podemos definir o lucro de dezembro, ou seja, quando $t = 12$:

$L(t) = 20\,000 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \cdot 12\right) +$

$+\, 40\,000 = 50\,000$; R$ 50.000,00

Alternativa **d**.

10. Os valores em que $g(x) = \cos\,(x)$ e $f(x) = \text{sen}\,(x)$ se interceptam, quando $\text{sen}\,(x) = \cos\,(x)$. Dividindo ambos os lados por $\cos\,(x)$ temos:

$\frac{\text{sen}\,(x)}{\cos\,(x)} = 1 \Rightarrow \text{tg}\,(x) = 1$

Para isso, basta vermos os valores em que tg (x) é igual a 1 e, assim, temos que $x = 45°$ e $x = 225°$, ou, em radianos: $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$.

Alternativa **c**.

11. Seja a função $x = A \cdot \cos\,(\varphi)$, quando a amplitude é 4 cm e o ângulo de fase é $\frac{2\pi}{3}$, temos que:

$x = 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = -2$

Logo, a posição da partícula é -2 cm.

Alternativa **b**.

12. Temos que $2\pi - \alpha$ corresponde a $-\alpha$.

$\text{sen}\,(2\pi - \alpha) = \text{sen}\,(-\,\alpha) = -\,\text{sen}\,(\alpha)$

Se $\cos\,(\alpha)$ é igual a $\frac{4}{5}$ temos:

$\cos^2(\alpha) + \text{sen}^2(\alpha) = 1$

$\text{sen}^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$\text{sen}^2(\alpha) = \frac{9}{25} = \frac{3}{5}$

Portanto:

$\text{sen}\,(2\pi - \alpha) = -\,\text{sen}\,(\alpha) = -\frac{3}{5}$

Alternativa **c**.

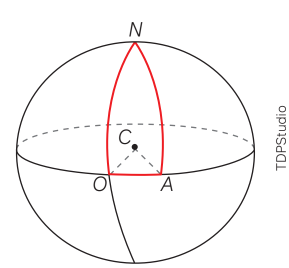
13. Os cossenos b e e estão no 1º e no 4º quadrantes, respectivamente. Assim, ambos são maiores do que zero. Além disso, como o ponto E está mais próximo de A do que o ponto B está de A, temos que $0 < b < e$.

Os cossenos c e d estão no 2º e no 3º quadrantes, respectivamente. Assim, ambos são menores do que zero. Além disso, o ponto C está mais próximo de π do que o ponto D está de π, então temos que $c < d < 0$.

Assim, $c < d < b < e$.

Alternativa **a**.

14. O caminho percorrido na esfera descrito pelo enunciado é o mesmo que percorrer $\frac{1}{4}$ de uma circunferência (saindo do ponto N até o ponto O), em seguida, caminhar 45° em direção a leste, que corresponde a $\frac{\pi}{4}$, que é o mesmo que percorrer $\frac{1}{8}$ de uma circunferência (saindo do ponto O até o ponto A) e, por fim, voltar ao ponto N percorrendo novamente $\frac{1}{4}$ da circunferência.



Assim, considerando que a Terra seja uma esfera perfeita e sua circunferência tenha medida de 40 000 km, temos que a distância percorrida é:

$\frac{1}{4} \cdot 40\,000 + \frac{1}{8} \cdot 40\,000 +$

$+ \frac{1}{4} \cdot 40\,000 = 25\,000$

Alternativa **c**.

15. As manobras descritas no enunciado fazem giros de 540° e 900°. Então:

540° = 360° + 180°; 1 volta e meia

900 = 720° + 180° = 2 · 360° + 180°; 2 voltas e meia.

Alternativa **a**.

16. O valor mais alto que a função $T(t)$ assume é quando o seno de $\left(\frac{\pi t}{28}\right)$ é igual a 1. Então:

$\frac{\pi t}{28} = \frac{\pi}{2}$

$28\,\pi = 2\pi t$

$t = \frac{28}{2} = 14$; 14 horas.

Alternativa **b**.

17. Do enunciado, temos que o ponto (0, 2) faz parte do gráfico da função $f(x) = a + \cos x$. Então:

$f(0) = a + \cos 0$

$2 = a + 1 \Rightarrow a = 1$

Assim, $f(2\pi)$ é:

$f(2\pi) = 1 + \cos 2\pi = 1 + 1 = 2$

Alternativa **c**.

18. O ponto P é o primeiro ponto negativo da função sen x + 1 que intersecta a reta $y = -\frac{1}{2}$. Então:

$-\frac{1}{2} = \text{sen}(x + 1) \Rightarrow x + 1 = -\frac{\pi}{6}$

$x = -\frac{\pi}{6} - 1$

Analogamente, Q é o primeiro ponto positivo da função sen x + 1 que intersecta a reta $y = -\frac{1}{2}$.

Então: $-\frac{1}{2} = \text{sen}\, x + 1 \Rightarrow x + 1 = \frac{7\pi}{6}$

$x = \frac{7\pi}{6} - 1$

Portanto, o segmento PQ tem comprimento dado por:

$\frac{7\pi}{6} - 1 - \left(-\frac{\pi}{6} - 1\right) = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$

Alternativa **e**.

19. Essa questão utiliza uma relação importante na Física e na Química sobre pressão, volume e temperatura de gases que é: $\frac{P \cdot V}{T}$ é constante. Como no enunciado é dito que a temperatura é constante, a pressão máxima do gás ocorre quando o seu volume é mínimo, ou seja, quando sen (πt) é igual a –1. Então:

$\text{sen}\,(\pi t) = -1$

$\pi \cdot t = \frac{3\pi}{2}$

$t = \frac{3}{2}$; 1,5 horas

Alternativa **d**.

20. Da tabela dada, temos que ocorrem 90 batimentos por minuto. Assim, o período de cada batimento é:

$\frac{60}{90} = \frac{2}{3}$ de segundo

Além disso, a amplitude da pressão dos batimentos é de $\frac{120 - 78}{2} =$ $= \frac{42}{2} = 21$ e a pressão média é de 99. Assim:

$P(t) = 99 + 21 \cdot \cos\,(3\pi \cdot t)$

Alternativa **a**.

21. Queremos que a altura h seja 6 para 3 valores $t < 4$; logo, temos que $h(t) = 6$

$6 = 4 + 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$

$\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Assim, a terceira vez irá ocorrer quando

$\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{13\pi}{6} \Rightarrow \frac{\beta t}{2} = \frac{16\pi}{6}$

Usando $\pi = 3$, temos que

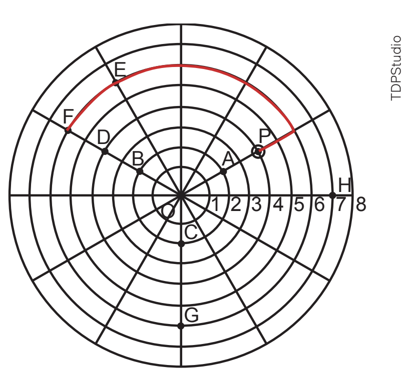
$\beta \cdot t = 16$

Como $t < 4$, então $\beta > 4$.

Logo, o menor valor inteiro de β é 5.

Alternativa **d**.

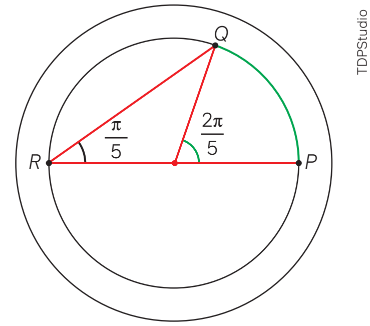
22.



A trajetória descrita no enunciado conduz a bolinha do ponto P até o ponto F.

Alternativa **d**.

23.



Dado que o ângulo formado por $P\hat{R}Q$ é $\frac{\pi}{5}$, o triângulo formado pelo centro O da circunferência e pelos pontos P e Q tem ângulo $Q\hat{O}P$ com medida $\frac{2\pi}{5}$. Assim, o arco $\widehat{PQ}$ tem comprimento x igual a:

Ângulo (rad)	Comprimento do arco (km)
2π	$2\pi \cdot 0{,}3$
$\frac{2\pi}{5}$	x

$2\pi \cdot x = \frac{2\pi}{5} \cdot 2\pi \cdot 0{,}3$

$x = \frac{2\pi}{5} \cdot 0{,}3 = 0{,}12\pi$

Alternativa **d**.

24. A temperatura na estufa atinge seu mínimo quando o sen $\left(\pi \cdot \frac{x}{4}\right)$ é igual a 1, o que ocorre quando:

$\pi \cdot \frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$x = 4 \cdot \left(2k + \frac{1}{2}\right)$

$x = 2 + 8k$, onde k é um inteiro positivo.

Assim, como x está entre 0 e 24, os valores nos quais a temperatura da estufa atinge seu valor mínimo são: $S = \{2, 10, 18\}$.

Ela atinge o valor mínimo 3 vezes.

Alternativa **b**.

25. Observando o gráfico dado, temos que o gráfico no zero é não nulo e tem valor de –3. Assim, temos um cosseno. Além disso, a amplitude dele varia de –3 a 3. Portanto, o coeficiente que acompanha o cosseno é –3. Pode-se observar também que a função se repete cada vez que t alcança um múltiplo de π. Logo podemos concluir que a função que está representada por esse gráfico é $-3\cos\,(2t)$.

Alternativa **a**.

CAPÍTULO 6

Sólidos geométricos

Objetivos

- Desenvolver noções sobre o método axiomático.
- Ler e interpretar textos referentes ao conhecimento matemático e à história da Matemática.
- Resolver e elaborar problemas relacionados aos cálculos de medidas de comprimento associados aos elementos de alguns sólidos geométricos.
- Resolver problemas envolvendo planificações de sólidos geométricos.
- Resolver e elaborar problemas que envolvam elementos de poliedros.
- Diferenciar poliedros regulares de poliedros não regulares e poliedros convexos de poliedros não convexos.
- Investigar e compreender diferentes projeções cartográficas.

Justificativa

O trabalho com os sólidos geométricos envolvendo a retomada de suas planificações, o reconhecimento de alguns elementos e cálculos com medidas de comprimento favorece o trabalho com áreas totais e volumes, que será feito posteriormente, para modelar e resolver problemas em contextos variados. O trabalho com as noções básicas de cartografia ajuda o estudante a selecionar a transformação mais adequada para atender às necessidades de uma representação cartográfica.

Competências gerais da BNCC

Competência geral 1: O estudo da Geometria, em todo o capítulo, retoma e explora os conhecimentos historicamente construídos. Por exemplo, nas páginas de 244 e 245 o método axiomático é apresentado aos estudantes por meio de textos que abordam a História da Matemática.

Competência geral 2: Os estudantes exercitam a curiosidade intelectual e recorrem à reflexão, à análise crítica, à imaginação e à criatividade, por exemplo, na seção **Para explorar** da página 252 em que analisam 8 poliedros e registram em uma tabela o número de vértices, o número de faces e o número de arestas de cada sólido. Em seguida, calculam a soma do número de seus vértices com o número de faces e subtraem o número de arestas para concluir sobre a relação de Euler. Investigam também sobre a relação entre o número total de lados dos polígonos das faces e o número total de arestas.

Competência geral 3: Os estudantes têm a oportunidade de valorizar manifestações artísticas e culturais ao analisarem a obra de Escher, apresentada na abertura do capítulo.

Competências gerais 4, 5 e 9: Na seção **Para explorar** proposta na página 248 os estudantes trabalham em grupos para desenvolver um trabalho com determinado sólido geométrico e apresentar para a turma. Eles conceituam o sólido, utilizam um *software* de geometria dinâmica para construí-lo, descrevem como é formado e montam, a partir de sua planificação, o sólido abordado. Desenvolvem assim a **competência 4**, uma vez que utilizam diferentes linguagens, tais como a verbal, a visual e a digital. Mobilizam também a **competência 5** ao utilizarem ferramentas digitais de forma significativa para se comunicar, disseminar informações, produzir conhecimentos e exercer protagonismo ao apresentarem suas produções para os colegas. Além disso, como trabalham em grupos, desenvolvem também a **competência 9** ao exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 5

EM13MAT509: A partir da página 267 os estudantes investigam a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica, além da azimutal).

Conexões com outras áreas do conhecimento

Na abertura do capítulo há a possibilidade de uma conexão com a área de **Linguagens e suas Tecnologias**, por meio da obra de Escher, que pode ser trabalhada juntamente com o professor de Arte. Na atividade 14 da página 254 há uma conexão com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, na referência à molécula de carbono. O tópico Geometria dos mapas: projeções cartográficas, a partir da página 267, pode ser trabalhado em parceria com o professor de Geografia. No início desse tópico, na página 267, há uma referência ao cientista Isaac Newton, ao abordar a forma aproximadamente esférica da Terra, que pode ser explorada com o professor de Física.

Resoluções e comentários

Página 243

Abertura

1. Os estudantes podem identificar os répteis desenhados na folha de papel entre as figuras bidimensionais. Entre as tridimensionais estão o livro, o copo, a garrafa, o vaso de planta, os répteis subindo no livro, entre outras.

2. Incentive os estudantes a discutir as características de cada desenho, apresentando argumentos relativos, por exemplo, à forma de representar a profundidade em um cubo.

   Pode ser feita uma parceria com Arte para levar os estudantes a analisar, em outras obras, características nas formas de representar objetos em três dimensões.

1. O método matemático

Página 244

Para pensar e discutir

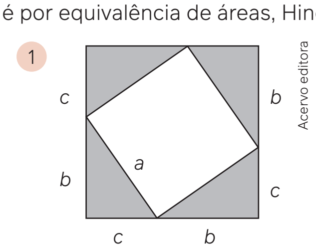
1. Esfera pode se referir a qualquer objeto que tenha uma forma aproximadamente esférica, como uma bola.
2. Um plano pode ser definido dado 3 pontos distintos; a reta é um conjunto infinito de pontos enfileirados; e o ponto é uma unidade sem dimensões.
3. Exemplos de resposta: por que o céu é azul? Por que o céu muda de cor ao entardecer? Como os pássaros conseguem voar?

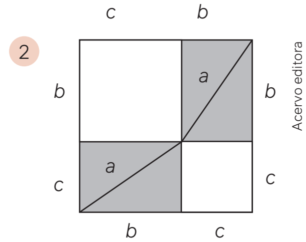
Página 245

Análise e contexto

1. Exemplo de resposta: A Terra como centro do Universo.
2. De maneira simplificada, sendo x, y, z números naturais maiores que zero, a igualdade $x^n + y^n = z^n$ não tem solução se n for um número inteiro maior que 2 ($n > 2$).
3. Conclusão: você é racional.
4. O teorema de Pitágoras. Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos dois catetos.

   Uma das demonstrações possíveis é por equivalência de áreas, Hindu.





Área da figura 1:

$(b + c)^2 = 4 \cdot \dfrac{bc}{2} + a^2$

Área da figura 2:

$(b + c)^2 = 4 \cdot \dfrac{bc}{2} + b^2 + c^2$

Comparando as duas figuras, teremos: $a^2 = b^2 + c^2$

2. Figuras geométricas espaciais

Página 246

Para pensar e discutir

1. Esfera, cilindro, pirâmide, cone, cubo e bloco retangular (paralelepípedo).
2. É esperado que os estudantes tenham dificuldade de definir. A ideia é incentivá-los a pensar em uma possível definição.
3. A sala de aula deve ter a forma de um bloco retangular, por exemplo.

Página 248

Para explorar

Grupo 1 – Estudo dos prismas

1. Prisma apresenta duas bases paralelas e congruentes e faces laterais que são paralelogramos. No prisma reto, as arestas laterais são perpendiculares às bases; no prisma oblíquo, não são.
2. Prisma triangular reto é formado por duas bases triangulares equiláteras e três faces retangulares; prisma quadrangular reto é formado por duas bases quadradas e quatro faces retangulares; prisma pentagonal reto é formado por duas bases pentagonais regulares e cinco faces retangulares; prisma hexagonal reto é formado por duas bases hexagonais regulares e seis faces retangulares; prisma octogonal reto é formado por duas bases octogonais regulares e oito faces retangulares.
3. Sim, o cubo e o bloco retangular são prismas retos com bases quadradas ou retangulares respectivamente e todas as faces laterais também são quadradas ou retangulares respectivamente.
4. Desenhe um retângulo grande para as quatro faces laterais conectadas e dois quadrados para as bases. Recorte o desenho, dobre ao longo das linhas que separam as faces laterais e as bases e cole as arestas.
5. Exemplo de resposta: um arranha-céu é um exemplo de prisma quadrangular com base retangular e faces laterais retangulares.

Grupo 2 – Estudo das pirâmides

1. Uma pirâmide é um sólido geométrico com uma base poligonal e faces laterais que são triângulos que se encontram em um ponto chamado vértice. Pirâmide reta: é uma pirâmide em que a linha que liga o vértice ao centro da base é perpendicular à base. Pirâmide oblíqua: é uma pirâmide em que a linha que liga o vértice ao centro da base não é perpendicular à base.
2. Uma pirâmide triangular reta é formada por uma base triangular equilátera e três faces triangulares isósceles. Uma pirâmide quadrangular reta é formada por uma base quadrada e quatro faces triangulares isósceles. Uma pirâmide pentagonal reta é formada por uma base pentagonal regular e cinco faces triangulares isósceles. Uma pirâmide hexagonal reta é formada por uma base hexagonal regular e seis faces triangulares isósceles. Uma pirâmide octogonal reta é formada por uma base octogonal regular e oito faces triangulares isósceles.
3. Sim, uma pirâmide reta pode ter uma base retangular. Nesse caso, as faces laterais são triângulos que se encontram em um vértice comum acima do centro da base.
4. Desenhe a planificação com um quadrado para a base e quatro triângulos isósceles conectados às arestas do quadrado. Recorte o desenho, dobre ao longo das linhas que separam os triângulos da base e cole as arestas.
5. Exemplo de resposta: pirâmides de Gizé, no Egito. Essas estruturas são pirâmides quadrangulares.

Grupo 3 – Estudo dos cilindros, dos cones e das esferas

1. Um cilindro apresenta duas bases circulares paralelas e uma superfície lateral curva. O cone apresenta uma base circular e uma superfície lateral curva que se afunila para um vértice. Já a esfera é um sólido geométrico perfeitamente redondo.
2. Um cilindro reto é formado por duas bases circulares e uma superfície lateral curva perpendicular às bases. Um cone reto é formado por uma base circular e uma superfície lateral curva dada pela rotação de um triângulo. Uma esfera é formada

pela revolução de um círculo ao redor de um diâmetro.

3. Um cilindro pode ser obtido como a revolução de um retângulo ao redor de um de seus lados. Um cone pode ser obtido como a revolução de um triângulo retângulo ao redor de um de seus catetos. Uma esfera pode ser obtida como a revolução de um círculo ao redor de um de seus diâmetros.
4. Desenhe a planificação com duas bases circulares e um retângulo para a superfície lateral. Recorte o desenho, dobre e cole as bordas. Para montar um cone, desenhe a planificação com um setor circular para a superfície lateral e um círculo para a base. Recorte o desenho, dobre o setor circular em forma de cone e cole as bordas. Em seguida, cole a base circular na extremidade do cone.
5. Um exemplo de cilindro é uma lata de refrigerante, e um exemplo de esfera é uma bola de futebol, que é uma superfície perfeitamente redonda.

É recomendado aos estudantes que utilizem recursos tecnológicos para comparar, classificar e observar elementos de alguns grupos desses sólidos. Por meio da pesquisa, é importante que o primeiro item destinado a cada grupo seja bem discutido coletivamente.

Página 249

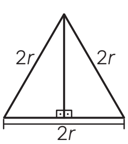
Podcast – Sólidos geométricos

Apresente o *podcast* para os estudantes. Esse recurso didático discute as propriedades e aplicações dos sólidos geométricos, como cubos, esferas, cilindros e pirâmides. O *podcast* explora como essas formas são utilizadas em diversas áreas, desde a arquitetura até a modelagem de jogos e filmes, destacando a importância dos sólidos geométricos no entendimento do espaço tridimensional.

Atividades

1. Apenas na 4 não é possível montar um cubo, pois dois quadrados ficariam sobrepostos.
2.
   a) Possibilidades: *CD*, *EF* e *GH*.
   b) Possibilidades: *AE*, *AD*, *BF* e *BC*.
   c) Possibilidades: *AE*, *AD*, *BF*, *BC*, *DH*, *CG*, *EH* e *FG*.
   d) Resposta esperada: retas perpendiculares são retas que se interceptam sob um ângulo reto. Retas ortogonais formam ângulo reto, sem necessariamente se interceptarem.
3. Os estudantes devem representar, na planificação, um retângulo e dois círculos cujo diâmetro seja igual à altura do retângulo. A base do retângulo deve corresponder a, aproximadamente, três vezes a sua altura.
4. Resposta esperada: a planificação é formada por cinco triângulos isósceles, que compõem a superfície lateral, e um pentágono regular, que forma a base da pirâmide.
5. Espera-se o desenho de dois pentágonos regulares e cinco quadrados com medidas de lados iguais às medidas dos lados do pentágono.
6.
   a) Um círculo e um setor circular.
   b) Um cone.
7.
   a) Os estudantes é que determinam as medidas do cone.

   Entretanto, na seção meridiana deverá aparecer um triângulo equilátero.



   b) A seção meridiana de um cilindro equilátero é um quadrado.
8.
   a) Um círculo.
   b) Exemplo de resposta: pode ser uma esfera, um cone, um tronco de cone ou um cilindro.

Página 250

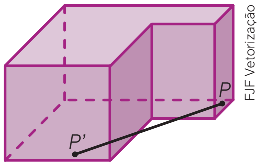
Para pensar e discutir

1. No edifício é possível identificar a presença de diversos triângulos, pentágonos e quadriláteros.
2. É possível identificar a influência dos sólidos geométricos em construções; muitos edifícios e muitas estruturas utilizam formas geométricas para criar *design* e funcionalidade. O edifício Copan, localizado no centro de São Paulo, é um exemplo clássico do uso de cilindros na arquitetura. A forma ondulada do edifício lembra um "S" e é uma interpretação moderna do uso de formas geométricas, proporcionando um visual único e diferenciado no horizonte da cidade; o Museu de Arte de São Paulo (Masp), por exemplo, utiliza a forma retangular para criar um efeito visual de leveza e espaço aberto. O uso do paralelepípedo é evidente na estrutura principal, que parece flutuar sobre pilares de concreto.

Página 251

Para pensar e discutir

1. Não.
2. O poliedro *D*.
3. Não. Nesse caso é interessante que os estudantes indiquem, na figura, a formação de um segmento que não esteja completamente contido no poliedro. Exemplo:



4. Isso também ocorre no poliedro *C*. Já nos poliedros *B* e *D*, dois pontos quaisquer de suas superfícies quando ligados estão completamente contidos no poliedro.

Página 252

Para explorar

1.
   a) Sim.
   b) Apenas nos poliedros *B*, *C* e *G*.
   c) Nos poliedros *A*, *B*, *C*, *D*, *F* e *G* cada vértice é o ponto de encontro de três arestas. Isso não ocorre para todos os vértices dos poliedros *E* e *H*.
2.

Poliedro	Número de vértices	Número de arestas	Número de faces
A	12	18	8
B	4	6	4
C	8	12	6
D	6	9	5
E	7	12	7
F	10	15	7
G	6	12	8
H	20	37	19

3. Poliedro A: $12 - 18 + 8 = 2$
Poliedro B: $4 - 6 + 4 = 2$
Poliedro C: $8 - 12 + 6 = 2$
Poliedro D: $6 - 9 + 5 = 2$
Poliedro E: $7 - 12 + 7 = 2$
Poliedro F: $10 - 15 + 7 = 2$
Poliedro G: $6 - 12 + 8 = 2$
Poliedro H: $20 - 37 + 19 = 2$
Espera-se que os estudantes concluam que, para esses poliedros, o resultado é igual a 2. Assim, observarão um padrão que, na teoria, chamaremos de relação de Euler.

4.

Poliedro	Número total de lados do polígono	Número total de arestas do poliedro
A	36	18
B	12	6
C	24	12
D	18	9
E	24	12
F	30	15
G	24	12
H	74	37

Conclusão: Para cada poliedro, o número total de lados dos polígonos das faces é o dobro do número total de arestas do poliedro.

Página 253

Para pensar e discutir

1. Em cada poliedro percebemos que há faces com a mesma forma e que o número de arestas por vértice é o mesmo.
2. Octaedro: $F = 8$, $V = 6$ e $A = 12$
$V - A + F = 6 - 12 + 8 = 2$
Tetraedro: $F = 4$, $V = 4$, $A = 6$
$V - A + F = 4 - 6 + 4 = 2$
Hexaedro: $F = 6$, $V = 8$, $A = 12$
$V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$
Dodecaedro: $F = 12$, $V = 20$, $A = 30$
$V - A + F = 20 - 30 + 12 = 2$
Icosaedro: $F = 20$, $V = 12$, $A = 30$
$V - A + F = 12 - 30 + 20 = 2$
Portanto, em todos esses poliedros é verificada a relação de Euler.

Página 254

Atividades

9.
a) 7 vértices. **b)** 15 arestas. **c)** 10 faces.

10.
a) Sim, pois: $V - A + F = 7 - 15 + 10 = 2$
b) Sim, pois, conforme o enunciado, todas as faces são triângulos equiláteros.
c) Não. Existem 2 vértices em que concorrem 5 arestas em cada um, e existem 5 vértices em que concorrem 4 arestas em cada um.
d) O poliedro não é regular. Apesar de todas as faces serem congruentes, nos vértices não concorre o mesmo número de arestas.

11.
a) 22 vértices, 33 arestas, 13 faces.
b) Sim, pois: $V - A + F = 22 - 33 + 13 = 2$
c) Em cada vértice concorrem 3 arestas.
d) O poliedro não é regular. Apesar de para cada vértice convergir o mesmo número de arestas, as faces não são todas o mesmo polígono regular.

12. Em caso de respostas discrepantes, oriente os estudantes para que examinem juntos se os dados ou as resoluções estão corretas.

13. Sugestão de resposta:
Sólido A: 13 vértices; 27 arestas; 16 faces; verifica-se a relação de Euler; em 1 vértice concorrem 5 arestas, em 12 vértices concorrem 4 arestas em cada; não é um poliedro regular porque, além de as faces não serem todas congruentes, não concorre o mesmo número de arestas em cada vértice.
Sólido B: 20 vértices; 37 arestas; 19 faces; verifica-se a relação de Euler; em 6 vértices concorrem 3 arestas, em 14 vértices concorrem 4 arestas em cada; não é um poliedro regular porque, além de as faces não serem todas congruentes, não concorre o mesmo número de arestas em cada vértice.

14. Número de faces: $F = F_5 + F_6 = 12 + 20 = 32$
Número de arestas:
$5 \cdot F_5 + 6 \cdot F_6 = 2 \cdot A$
$60 + 120 = 2 \cdot A \Rightarrow 180 = 2 \cdot A$
$A = 90$
Número de vértices:
$V + F - A = 2 \Rightarrow V - 90 + 32 = 2 \Rightarrow V = 60$
a) Portanto, são 60 átomos de carbono, que representam os vértices do poliedro.
b) Portanto, são 90 ligações entre os átomos, que representam as arestas do poliedro.

15. Como a pirâmide tem 11 faces triangulares, a base é um polígono de 11 lados. Então, temos $V = 12$ e $F = 12$. Usando a relação de Euler, vamos determinar o valor de A:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 12 - A + 12 = 2 \Rightarrow A = 22$
Portanto, podemos afirmar que essa pirâmide tem 12 vértices e 22 arestas.
Alternativa **e**.

16. Do enunciado, temos que o sólido tem faces triangulares. Sabemos que o dobro de arestas é igual ao produto do número de lados de cada face pela quantidade de faces. Isto é:
$2 \cdot A = 3 \cdot F \Rightarrow A = \dfrac{3 \cdot F}{2}$
Substituindo o valor A na relação de Euler, obtemos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow V - \dfrac{3 \cdot F}{2} + F = 2$
$2V - F = 4$
Alternativa **c**.

3. Relações métricas em sólidos geométricos

Página 256

Para pensar e discutir

1. A medida x representa a medida da diagonal de um quadrado de lado a.
2. Usando o teorema de Pitágoras, obtemos:
   $x^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow x^2 = 2a^2$
   $x = a\sqrt{2}$
3. Usando o teorema de Pitágoras, obtemos:
   $d^2 = x^2 + a^2$
   Do exercício anterior, temos que: $x = a\sqrt{2}$
   $d^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2$
   $d^2 = 2a^2 + a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{3}$

Página 257

Para explorar

É importante que todos os grupos façam as medidas do mesmo ambiente para que seja possível confrontar os resultados.

Página 258

Atividades

Algumas dessas atividades, conforme a opção do professor, podem ser encaminhadas para resolução individual.

17.

a) $x^1_2 = 4^2 + 6^2$
$x_1^2 = 16 + 36 \Rightarrow x_1 = \sqrt{52}$
$x_2^2 = 4^2 + 10^2 \Rightarrow x_2^2 = 16 + 100$
$x_2 = \sqrt{116}$
$x_3^2 = 10^2 + 6^2 \Rightarrow x_3^2 = 100 + 36$
$x_3 = \sqrt{136}$
Portanto, as medidas das diagonais são $\sqrt{52}$ cm, $\sqrt{116}$ cm e $\sqrt{136}$ cm.

b) $d^2 = 4^2 + \left(\sqrt{136}\right)^2$
$d^2 = 16 + 136$
$d = \sqrt{152}$; $\sqrt{152}$ cm

18. As respostas podem variar de acordo com a caixa (embalagem) que cada estudante escolher. No último item, os estudantes devem fazer a medição da diagonal de maneira direta para comparar com a obtida com os cálculos. É interessante observar qual é a diferença (se houver) entre essas medidas.

19.

a) Vamos determinar a distância de A até B, ou seja, a diagonal do cubo:
$AB = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2}$
$AB = \sqrt{3 \cdot 4^2}$
$AB = 4\sqrt{3}$
$AB \cong 6{,}93$; 6,93 cm

b) Primeiramente, supondo o ponto C na extremidade da diagonal da face indicada em verde, temos:
$AC^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow AC = \sqrt{32}$
$AC \cong 5{,}66$
Agora, determinamos a soma das distâncias em verde:
$AC + CB = 5{,}66 + 4 = 9{,}66$; 9,66 cm

c) $\dfrac{\text{distância em verde}}{\text{ditância em vermelho}} =$
$= \dfrac{9{,}66}{6{,}93} \cong 1{,}39$
Portanto, a razão da distância em verde para a distância em vermelho é aproximadamente 1,39.

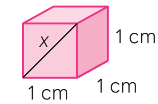
20.

a) Seja d a medida da diagonal de um bloco retangular cujas medidas das arestas são a, b e c.
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Portanto, temos:
$D = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2}$
$D = \sqrt{4a^2 + 4b^2 + 4c^2}$
$D = 2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
$D = 2 \cdot d$
Dessa forma, se todas as medidas das arestas de um bloco retangular são duplicadas, a medida da diagonal também duplica.

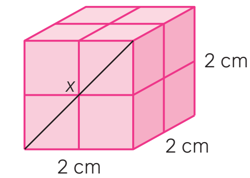
b) Seja d a medida da diagonal de um cubo cujas medidas das arestas são a.
$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \Rightarrow d = \sqrt{3a^2}$
$d = a\sqrt{3}$
Portanto, temos:
$D = 3a \cdot \sqrt{3} \Rightarrow D = 3 \cdot (a\sqrt{3})$
$D = 3 \cdot d$
Desta forma, se todas as medidas das arestas de um cubo são triplicadas, a medida da diagonal também triplica.

21.

a)

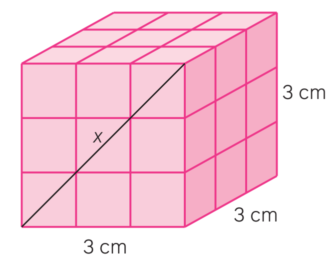


$x = 1\sqrt{2}$ cm



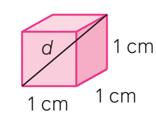
FJF Vetorização

$x = 2\sqrt{2}$ cm

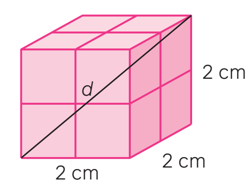


$x = 3\sqrt{2}$ cm

b)

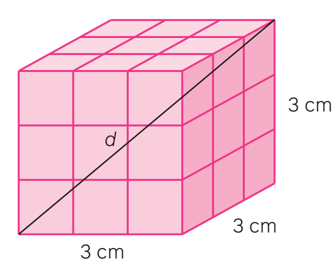


$d = 1\sqrt{3}$ cm



FJF Vetorização

$d = 2\sqrt{3}$ cm



$d = 3\sqrt{3}$ cm

22. $d = \sqrt{144^2 + 64^2 + 81^2}$
$d = \sqrt{20\,736 + 4\,096 + 6\,561}$
$d = \sqrt{31\,393}$
$d \cong 177{,}18$; 177,18 cm

23.

a) Temos que $d = 2\sqrt{29}$ cm.
Assim:

$d = \sqrt{(4k)^2 + (3k)^2 + (2k)^2}$

$2\sqrt{29} = \sqrt{(4k)^2 + (3k)^2 + (2k)^2}$

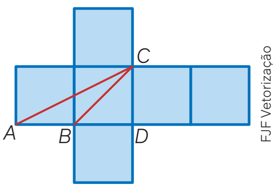
Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, obtemos:

$4 \cdot 29 = 16k^2 + 9k^2 + 4k^2$

$k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$

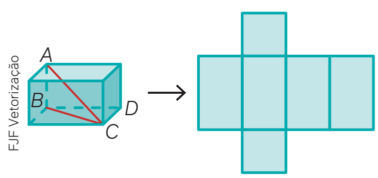
b) Temos que as arestas medem $4k$, $2k$ e $3k$ e, pelo item anterior, que $k = 2$. Então, as medidas das arestas são 8 cm, 4 cm e 6 cm.

24. Resposta possível para os itens **a** e **b**:

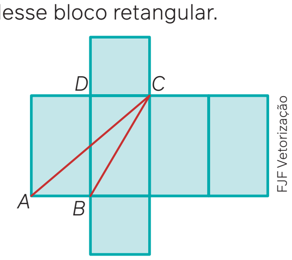


Representamos uma diagonal do cubo, mas existem outras.

25. Exemplo de resposta: a diagonal do bloco retangular está representada na figura a seguir pela linha vermelha de A até C, e a diagonal de uma das faces é a linha vermelha de B até C.



A figura a seguir é uma planificação desse bloco retangular.



Página 259

Para pensar e discutir

1. $a_p^2 = h^2 + r^2$

2. $a_\ell^2 = h^2 + R^2$

3. $a_\ell^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a_p^2$

4. $R^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Essas relações não precisam ser memorizadas, mas obtidas algebricamente utilizando o teorema de Pitágoras. Solicite que os estudantes desenhem uma pirâmide de base quadrada (é mais simples de desenhar) e nela representem os quatro triângulos retângulos com os quais as relações podem ser obtidas.

Página 260

Para pensar e discutir

1. É possível obter a medida do raio da circunferência circunscrita à base da pirâmide.

2. É possível determinar a medida do raio da circunferência inscrita à base da pirâmide.

3. É possível obter as medidas da aresta lateral, do raio da circunferência inscrita à base da pirâmide e do raio da circunferência circunscrita à base.

Página 261

Para pensar e discutir

1. Têm a mesma medida.

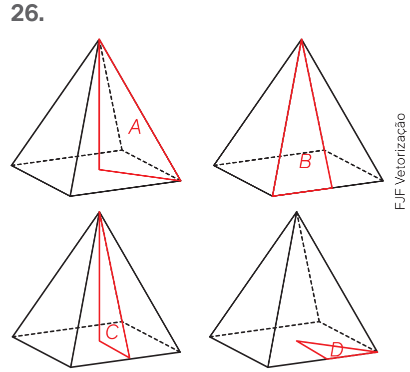
2. A medida da altura h é dada por $h = r\sqrt{3}$, sendo r a medida do raio da base do cone.

Páginas 262-263

Atividades

Nas **atividades 29** e **33**, sugerimos, no próprio Livro do Estudante, a formação de duplas para encontrar a solução delas. São duas atividades que exigirão um pouco mais dos estudantes.

26.



Os quatro triângulos devem ser representados. Esse tipo de atividade favorece tanto a visualização dos elementos quanto a internalização das relações pela compreensão, e não pela memorização.

27.

a) Primeiramente, vamos determinar a medida do raio R da circunferência circunscrita à base da pirâmide, sabendo que o raio da circunferência inscrita mede $r = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow R^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$R = \sqrt{8} \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$

Agora, vamos determinar a medida da altura h.

$a_L{}^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow h^2 = a_L{}^2 - R^2$

$h^2 = 4^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{8}$

$h = 2\sqrt{2}$

Logo, a altura da pirâmide mede $2\sqrt{2}$ cm.

b) A medida da aresta lateral dada é: $a_L = 4$ cm.

c) $a_p^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow a_p^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2^2$

$a_p^2 = 12 \Rightarrow a_p = \sqrt{12}$

$a_p = 2\sqrt{3}$

O apótema da pirâmide mede $2\sqrt{3}$ cm.

d) O raio da circunferência inscrita mede $r = 2$ cm.

e) Como calculado no item **a**, o raio da circunferência circunscrita mede $2\sqrt{2}$ cm.

28.

a) O raio da base mede $r = \frac{5}{2}$ cm.

b) $h = r\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

$h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$; $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

c) A geratriz do cone corresponde ao lado do triângulo equilátero, ou seja, mede 5 cm.

29.

a) O raio da circunferência inscrita ao triângulo equilátero (base da pirâmide) corresponde a $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo equilátero.

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

b) $R^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$R^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$R^2 = \frac{4a^2}{12} \Rightarrow R^2 = \frac{a^2}{3}$

$R = \sqrt{\frac{a^2}{3}} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

c) $a_\ell^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a_p^2$

$a_p^2 = a_\ell^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$a_p^2 = a_\ell^2 - \frac{a^2}{4}$

$a_p^2 = \frac{3a^2}{4}$

$a_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

d) $a_\ell^2 = h^2 + R^2$

$h^2 = a_\ell^2 - R^2$

$h^2 = a_\ell^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$h^2 = a_\ell^2 - \frac{3a^2}{9} \Rightarrow h^2 = \frac{6a^2}{9}$

$h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

30.

a) $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 16^2 + 4^2$

$g = \sqrt{272} \Rightarrow g \cong 16,5$; 16,5 cm

b) Seja x a medida do diâmetro do círculo correspondente à superfície da água.

$\frac{16}{8} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \frac{80}{16} \Rightarrow x = 5$

Logo, a medida do raio é:

$r = \frac{x}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$; $r = 2,5$ cm

c) $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 10^2 + 2,5^2$

$g^2 = 100 + 6,25 \Rightarrow g^2 = 106,25$

$g \cong 10,31$; 10,31 cm

31.

a) $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 3^2 + 4^2$

$g^2 = 25 \Rightarrow g = 5$; 5 cm

b) $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 10^2 = h^2 + 5^2$

$h^2 = 100 - 25$

$h^2 = 75 \Rightarrow h = 5\sqrt{3} \Rightarrow h \cong 8,66$; 8,66 cm

32. $a_\ell^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a_p^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a_\ell^2 - a_p^2$

$\frac{a^2}{4} = 100 - 36$

$a^2 = 256 \Rightarrow a = 16$; 16 cm

33.

a) $\frac{2\pi r}{2\pi 10} = \frac{216°}{360°}$

$\frac{r}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow r = 6$; 6 cm

Espera-se que os estudantes identifiquem esse comprimento como o da circunferência da base do cone, que é $2\pi r$, sendo r a medida do raio da base do cone.

b) Já sabemos que $r = 6$ cm e $g = 10$ cm. Assim:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h^2 = g^2 - r^2$

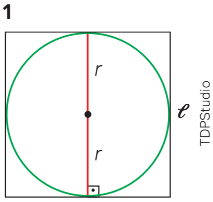
$h^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow h^2 = 100 - 36$

$h = \sqrt{64} = 8$; 8 cm

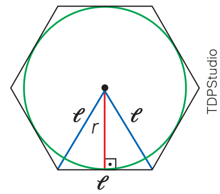
Portanto, $r = 6$ cm, $h = 8$ cm e $g = 10$ cm.

Para explorar

Parte 1

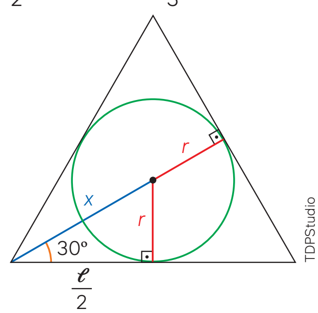


No caso do quadrado, é fácil observar que $\ell = r + r = 2r$



Ao conectar dois vértices consecutivos de um hexágono à origem da circunferência inscrita, forma-se um triângulo equilátero com lados iguais a ℓ. A altura de um triângulo equilátero é dada por $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Por outro lado, $h = r$. Assim:

$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = r \Rightarrow \ell = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$



No caso da circunferência inscrita no triângulo equilátero, temos que a altura h do triângulo é dada por $h = x + r$. Para descobrir o valor de x, temos:

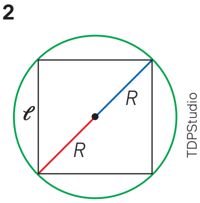
$\text{sen } 30° = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

$\frac{1}{2} = \frac{r}{x} \Rightarrow x = 2r$

Portanto, a altura do triângulo é dada por $h = 3r$. Por outro lado, no triângulo equilátero, a altura é igual a $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

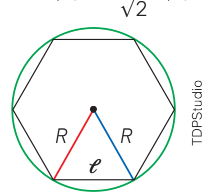
$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 3r \Rightarrow \ell = 2r\sqrt{3}$

Parte 2

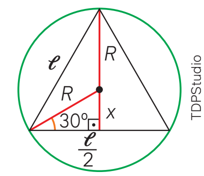


A diagonal do quadrado é dada por $\ell\sqrt{2}$. Por outro lado, o quadrado inscrito na circunferência tem diagonal igual a $2R$.

$\ell\sqrt{2} = 2R \Rightarrow \ell = \frac{2R}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ell = R\sqrt{2}$



No caso do hexágono inscrito na circunferência, ao ligar dois vértices consecutivos ao centro da circunferência circunscrita, a aresta que liga os vértices e os dois segmentos de reta traçados formam um triângulo equilátero, o que nos permite concluir que $\ell = R$.



No caso do triângulo equilátero inscrito na circunferência, temos que sua altura é dada por $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Mas, pela figura montada, também temos que $h = x + R$. Podemos determinar x utilizando a seguinte relação:

$\text{sen } 30° = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

$\frac{1}{2} = \frac{x}{R} \Rightarrow x = \frac{R}{2}$

Assim, $h = \frac{3R}{2}$ e $\frac{3R}{2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$\ell = R\sqrt{3}$

Página 264

Para pensar e discutir

1. Como na relação, o raio R da esfera é constante; aumentando d, o valor de r diminui. Da mesma forma, podemos dizer que, diminuindo d, o valor de r aumenta.

2. $R^2 = d^2 + r^2 \Rightarrow R^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + r^2$

$r^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

A relação é $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Página 265

Atividades

34.

a) $R^2 = d^2 + r^2 \Rightarrow 10^2 = d^2 + r^2$

$d^2 + r^2 = 100$

b) Para $d = 5$:

$5^2 + r^2 = 100 \Rightarrow r^2 = 100 - 25$

$r = \sqrt{75}$; $\sqrt{75}$ cm

c) Para $d = 8$:

$8^2 + r^2 = 100 \Rightarrow r^2 = 100 - 64$

$r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$; 6 cm

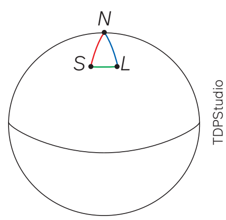
d) Para $r = 6$:

$d^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow d^2 = 100 - 36$

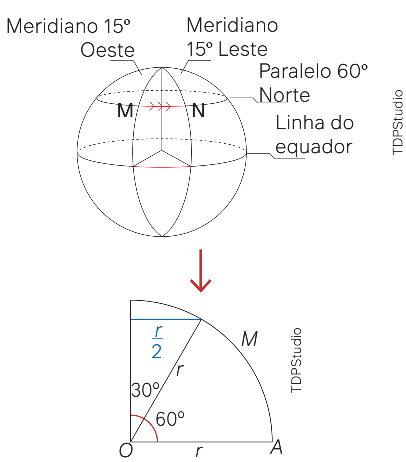
$d = 8$; 8 cm

35. Basta observar que a semicircunferência APB é um arco capaz sobre o seu diâmetro AB, o que mostra que o triângulo ABP é retângulo em P.

36. Uma expedição percorre 200 km ao sul de N a S, depois 200 km a leste até L, e finalmente 200 km ao norte, retornando ao ponto N. Com isso, o terceiro acampamento será montado exatamente no Polo Norte.



37. Considerando a Terra como uma esfera perfeita, podemos esboçar um corte no plano que contém o triângulo OAM:



A circunferência que passa por M e N tem raio de 3 200 km sendo r = 6 400 km. A distância entre os meridianos de M e N é 30°, e com $\pi = 3$, temos:

$$\frac{2\pi \cdot 3\,200}{x} = \frac{360°}{30°}$$

$$x = \frac{2\pi \cdot 3\,200 \cdot 30°}{360°}$$

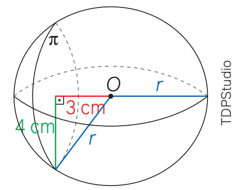
$$x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3\,200}{12}$$

$$x = 1\,600$$

Portanto, a distância percorrida ao se deslocar do ponto M ao ponto N ao longo da esfera é de 1 600 km.

Alternativa **b**.

38. De acordo com o enunciado, o plano π secciona a esfera segundo uma circunferência de 4 cm e distando 3 cm do centro. Dessa forma, podemos montar a seguinte figura:



Assim, para encontrar r, basta calcular a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm:

$r^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow r^2 = 9 + 16 \Rightarrow r^2 = 25$

$r = 5$; 5 cm

Após a resolução completa do exercício, faça um breve comentário sobre a existência do triangulo pitagórico. Ele apresenta um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 e, assim, seus múltiplos também obedecem à mesma proporção entre as medidas de seus lados.

Página 266

Análise e contexto

A ideia é que os estudantes se interessem por textos explicativos sobre conhecimentos matemáticos e aspectos da história da Matemática. Os estudantes devem estabelecer relações entre ideias convergentes em textos de diferentes autores e de diferentes épocas.

4. Geometria dos mapas: projeções cartográficas

Página 268

Para pensar e discutir

1. O vértice do cone.

2. No segmento que representa a altura do cone.

3. Aquelas superfícies mais afastadas do paralelo que estão em contato com o cone. Comente com os estudantes que, na projeção cônica, a parte do globo que tangencia o cone é o Equador.

Para pensar e discutir

1. Não, pois serão linhas retas paralelas entre si.

2. As superfícies polares. Isso ocorre porque os meridianos nesse tipo de representação não convergem para um ponto, pois são linhas retas paralelas.

Página 269

Para pensar e discutir

1. Os meridianos são representados por linhas retas.

2. Os paralelos são representados por circunferências concêntricas.

Para explorar

Essa atividade exploratória precisa ser conduzida efetivamente em parceria com a disciplina de Geografia, pois, com base em um texto de uma revista de circulação nacional, os alunos deverão analisar com cuidado e senso crítico os aspectos positivos e negativos das projeções apresentadas. Caso encontrem pontos de que discordem, novas pesquisas podem ser encaminhadas nesse sentido. Uma revista, por melhor que seja a intenção de seus editores, não está isenta de equívocos. Daí a necessidade de leitura crítica com o auxílio do professor de Geografia.

Página 270

Análise e contexto

1. O princípio a que ele se refere é a semelhança entre triângulos, em que os ângulos correspondentes dois a dois são iguais.

2. Dividindo 360° por 7,2° (7° 12′), obtemos 50 como resultado. Assim, esse ângulo corresponde a $\frac{1}{50}$ do ângulo de uma volta. Logo, o arco correspondente tem comprimento igual a $\frac{1}{50}$ do comprimento da circunferência da Terra.

Páginas 271-274

Atividades finais

Nas quatro primeiras atividades, apresentamos, na forma de perguntas mais diretas, um resumo das ideias relacionadas aos conteúdos estudados ao longo do tópico. Sugerimos que os próprios estudantes ampliem tais questões acrescentando outras que os auxiliem em seu estudo. As demais atividades são exemplos de questões de exames para acesso a cursos de graduação em diversas universidades brasileiras. Elas devem ser conduzidas para desafiar e, ao mesmo tempo, ampliar a autonomia dos estudantes.

1. **I.** Verdadeira.

O cubo é um paralelepípedo reto com as medidas das arestas iguais.

II. Falsa.

Tome um cubo qualquer e uma de suas arestas. Ao dobrar a medida dessa aresta e de todas as arestas paralelas à que escolhemos, temos um paralelepípedo retangular reto que não é um cubo.

III. Verdadeira.

De acordo com a definição de poliedro, o cubo possui todas as suas faces formadas por polígonos planos (quadrados).

IV. Verdadeira.

Um bloco retangular possui como faces retângulos e quadrados, que são polígonos planos. Portanto, ele é um poliedro.

2.

a) Um cilindro. **b)** Um cone.

3.

a) Um cubo possui 6 faces.

b) Um cubo possui 8 vértices.

c) Um cubo possui 12 arestas.

4.

a) $V + F - A = 2$

b) $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

c) $d = a\sqrt{3}$

Questões de vestibulares e Enem

5. Sejam F_1 e F_2 o número de faces hexagonal e triangular, respectivamente. Na figura dada, temos 4 hexágonos e 4 triângulos. Então, o número de faces da figura é dado por: $F = F_1 + F_2 = 4 + 4 = 8$.

Assim, a figura tem 8 faces.

Agora, vamos determinar o número de arestas A da figura, sendo a_1 e a_2 o número de arestas das faces hexagonais e triangulares, respectivamente:

$a_1 \cdot F_1 + a_2 \cdot F_2 = 2 \cdot A$

$6 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 2 \cdot A$

$24 + 12 = 2A$

$36 = 2A \Rightarrow A = 18$

Assim, a figura tem 18 arestas.

Usando a relação de Euler, vamos determinar o número de vértices da figura:

$V + F - A = 2 \Rightarrow V = 2 - F + A$

$V = 2 - 8 + 18 \Rightarrow V = 12$

Portanto, a figura tem 12 vértices.

Alternativa **a**.

6. Temos um poliedro convexo com $V = 32$ e apenas faces triangulares.

$3 \cdot F = 2 \cdot A \Rightarrow F = \dfrac{2A}{3}$

Usando a relação de Euler, obtemos o número de arestas desse poliedro:

$V + F - A = 2 \Rightarrow 32 + \dfrac{2A}{3} - A = 2$

$\dfrac{A}{3} = 30 \Rightarrow A = 90$

Portanto, o número de arestas do poliedro é 90.

Alternativa **c**.

7. Cada dodecaedro tem $F = 12$. Vamos determinar o número de arestas A do dodecaedro, sendo a o número de arestas da face do pentágono:

$a \cdot F = 2 \cdot A \Rightarrow 5 \cdot 12 = 2 \cdot A$

$60 = 2A \Rightarrow A = 30$

Usando a relação de Euler, vamos determinar o número de vértices do dodecaedro:

$V + F - A = 2 \Rightarrow V = 2 - F + A$

$V = 2 - 12 + 30 \Rightarrow V = 20$

Agora, observando o poliedro côncavo, ele tem 2 faces a menos do que os dois dodecaedros juntos, 5 arestas e 5 vértices a menos. Então:

$V + F + A = (20 + 20 - 5) +$

$+ (12 + 12 - 2) + (30 + 30 - 5)$

$V + F + A = 35 + 22 + 55 = 112$

Alternativa **d**.

8. Sabemos que o dodecaedro regular tem 12 faces pentagonais ($F = 12$).

Agora, vamos determinar o número de arestas A da figura, sendo a o número de arestas da face do pentágono:

$a \cdot F = 2 \cdot A \Rightarrow 5 \cdot 12 = 2 \cdot A$

$60 = 2A \Rightarrow A = 30$

Assim, o instrumento tem 30 arestas. Podemos ver, na imagem, apenas 20 das 30 arestas do instrumento, ou seja, 10 arestas não estão visíveis.

Alternativa **a**.

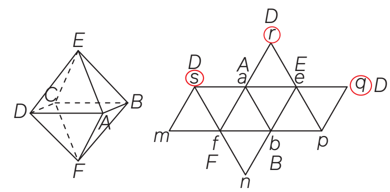
9. No prisma hexagonal, temos $V = 12$, $A = 18$ e $F = 8$. No poliedro obtido, podemos observar que, a cada corte, temos 2 novos vértices, 3 novas arestas e 1 nova face. Como são 12 cortes, temos 24 novos vértices, 36 novas arestas e 12 novas faces. Assim, do poliedro obtido, temos:

$F = 8 + 12 = 20$

Portanto, 20 é a quantidade de faces do poliedro obtida depois do corte.

Alternativa **b**.

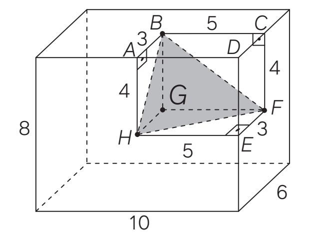
10.



Por meio da planificação, podemos notar que o vértice D do octaedro corresponde aos pontos q, r e s.

Alternativa **d**.

11.



De acordo com a figura acima, temos a representação de um bloco retangular no qual os lados do triângulo ilustrado são hipotenusas de triângulos retângulos. Logo, o perímetro P é dado por

$P = BH + HF + FB$, em que BH, GB e HF são hipotenusas dos triângulos ABH, BFC e HEF, respectivamente. Assim:

$P = \sqrt{AB^2 + AH^2} + \sqrt{CB^2 + CF^2} +$

$+ \sqrt{HE^2 + EF^2}$

$P = \sqrt{3^2 + 4^2} + \sqrt{5^2 + 4^2} +$

$+ \sqrt{5^2 + 3^2}$

$P = \sqrt{25} + \sqrt{41} + \sqrt{34}$

$P = 5 + \sqrt{41} + \sqrt{34}$

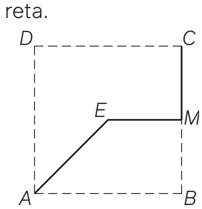
Como $6 < \sqrt{41} < 7$ e $5 < \sqrt{34} < 6$, temos:

$5 + 6 + 5 < P < 5 + 7 + 6$

$16 \text{ cm} < P < 18 \text{ cm}$

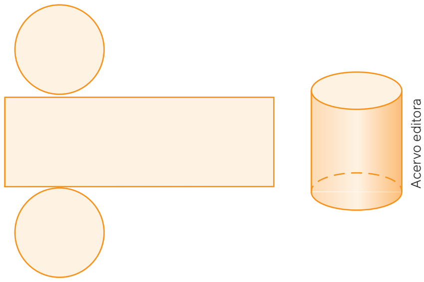
Alternativa **c**.

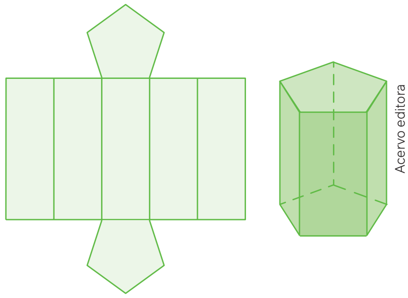
12. A projeção do trajeto descrito por João vai do vértice A até a projeção do ponto E (centro da base), passando pelo ponto M da base e seguindo até o vértice C, sempre em linha reta.

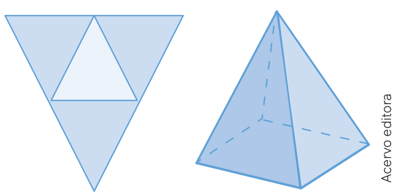


Alternativa **c**.

13.







Portanto, por meio dessas planificações, Maria obterá um cilindro, um prisma de base pentagonal e uma pirâmide.

Alternativa **a**.

14. Observando a figura, vemos que

$V = 16$, $F = 11$ e $A = 24$, então

$V + F = A + 3$.

Alternativa **e**.

15. Temos que $V = 20$ e $A = 30$. Usando a relação de Euler, vamos determinar o valor de F:

$V + F - A = 2 \Rightarrow F = 2 - V + A$

$F = 2 - 20 + 30 \Rightarrow F = 12$

Portanto, 12 é a quantidade de faces utilizadas na montagem do modelo ilustrativo desse cristal. Alternativa **b**.

16. Do tetraedro regular, temos: $V = 4$, $A = 6$ e $F = 4$.

No tetraedro truncado podemos observar que, a cada corte, temos 2 novos vértices, 3 novas arestas e 1 nova face. Como são 4 cortes, temos 8 novos vértices, 12 novas arestas e 4 novas faces.

Sabemos, também, que cada vértice do tetraedro virou um triângulo equilátero, e que cada face do tetraedro virou um hexágono regular. O número de faces hexagonais é igual ao número de faces do tetraedro regular, isto é, 4; e o número de faces triangulares é igual ao número de vértices do tetraedro, também 4.

Portanto, as faces da luminária serão 4 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

Alternativa **a**.

17. Pela figura, temos as medidas do televisor descritas a seguir.

Comprimento: 67,5 + 5 = 72,5; 72,5 cm

Altura: 49,5 + 5 = 54,5; 54,5 cm

Largura: 18 cm + 5 cm = 23; 23 cm

Sabemos, também, que o papelão utilizado na confecção das caixas tem espessura de 0,5 cm, ou seja, será adicionado 1 cm em cada dimensão, conforme mostram as informações a seguir.

Comprimento: 72,5 + 1 = 73,5; 73,5 cm

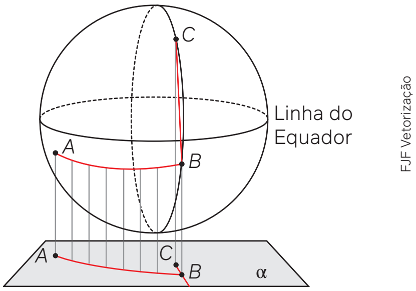
Altura: 54,5 + 1 = 55,5; 55,5 cm

Largura: 23 + 1 = 24; 24 cm

Portanto, a caixa que atende às medidas das dimensões especificadas é a caixa 5.

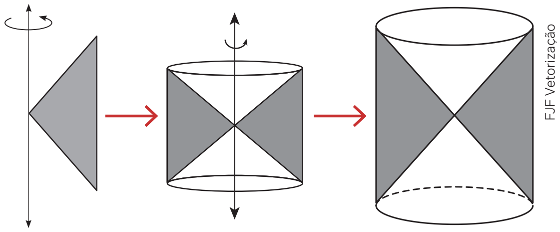
Alternativa **e**.

18. Observe a figura abaixo.



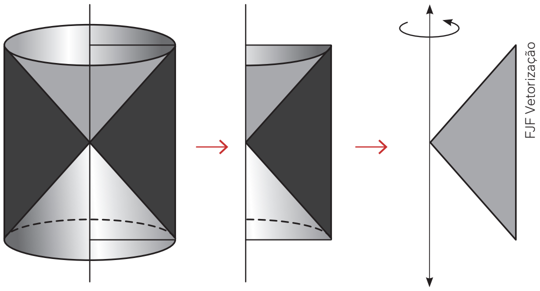
Pela figura podemos ver que o arco AB da superfície da Terra pertence a um plano paralelo a α; logo, sua projeção ortogonal em α também será um arco. Notemos que os pontos B e C não são simétricos em relação à linha do equador, e o arco BC pertence a um plano perpendicular a α; logo, sua projeção ortogonal sobre α será um segmento de reta. Portanto, o caminho traçado no globo pode ser representado pela alternativa **e**.

19. A anticlepsidra pode ser obtida pela rotação da figura a seguir.



Podemos fazer o caminho inverso.

Traçamos um eixo e dois raios imaginários na anticlepsidra, conforme o esquema a seguir.



Alternativa **b**.

Conexões e projetos

Projeto	Competências gerais	Competências específicas	Habilidades
Projeto 1 Relatórios estatísticos	2, 4, 5, 7 e 9	1 e 4	EM13MAT101 EM13MAT104 EM13MAT407
Projeto 2 Do muralismo à *street art*	2, 3, 4, 6, 7, 9 e 10	1, 2 e 3	EM13MAT105 EM13MAT201 EM13MAT307 EM13MAT308
Projeto 3 Mapas que fazem a diferença	1, 3, 4, 5, 6, 7, 9 e 10	1 e 5	EM13MAT105 EM13MAT509

Projeto 1 – Relatórios estatísticos

Orientações: Ao propor o projeto, que pode ser desenvolvido ao longo do Capítulo 3, quando for feito o estudo da Estatística Descritiva, faça a leitura coletiva de cada etapa: Contexto, Desenvolvimento, Procedimento, Produto final, Apresentação e Relatório conclusivo. Propicie um debate cerca de cada item, principalmente a leitura e análise dos gráficos, na etapa Contexto, de modo a identificar possíveis dificuldades, o que pode ajudar você a planejar as atividades de acordo com as necessidades dos estudantes. Volte então à questão disparadora, explicando que, ao final, eles deverão responder a ela: *O que podemos afirmar e o que podemos inferir com base na análise das medidas estatísticas de uma população ou de uma amostra?*.

Em seguida, solicite aos jovens que se organizem em grupos para o desenvolvimento do projeto e combine um cronograma para a realização de cada etapa, incluindo os momentos e critérios de avaliação. Esses critérios devem se basear nos itens indicados nas etapas: Produto final, Apresentação e Relatório conclusivo. Os estudantes podem ser envolvidos na elaboração desses critérios, o que propiciará maior empenho na realização de cada um.

Para dar início aos trabalhos, proponha uma aula em que seja possível acessar a internet, de modo que os grupos possam explorar o *Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil,* em http://www.atlasbrasil.org.br/ (acesso em: 13 set. 2024). Incentive os estudantes a seguir os passos indicados na etapa Procedimento. Eles também podem explorar as outras fontes sugeridas ao final do projeto. A partir de então, darão prosseguimento ao trabalho realizando cada item proposto na etapa Produto final. Esteja atento às necessidades de cada grupo e, se possível, proponha encontros em separado com os grupos que necessitarem de mais ajuda. Você pode programar apresentações parciais, ao final de cada etapa, para que os grupos apresentem seu trabalho para a turma. Aproveite esses momentos para fazer comentários sobre o trabalho de cada equipe, contribuindo assim para o desenvolvimento dos projetos e para a aprendizagem de todos que estiverem assistindo. Programe com os estudantes as formas de apresentação final e esclareça os itens que devem constar do Relatório conclusivo, que pode ser elaborado com a contribuição do professor de Língua Portuguesa.

Projeto 2 - Do muralismo à *street art*

Orientações: Os professores da área de Linguagens e suas Tecnologias, mais especificamente Arte, podem ser convidados a participar do projeto desde o início. Nesse caso, é interessante que vocês façam o planejamento em conjunto.

Uma vez formados os grupos, faça o levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes sobre *street art*, discutindo os conceitos de pichação, grafite e muralismo. Verifique se conhecem ou praticam essas expressões artísticas, aproveitando o debate para discutir a legalidade e a ilegalidade de parte dessas intervenções urbanas. Proponha, em seguida, a questão disparadora para verificar as primeiras impressões dos estudantes sobre o tema: *Como podemos usar geometria para produzir arte?*. Após essa conversa inicial, explique que, entre muitas opções, esse projeto propõe o uso de métodos de ampliação por transformação homotética, para reproduzir imagens em folha de papel A4 para grandes murais. Combine com a turma um cronograma para a realização do projeto e as formas de avaliação de cada etapa.

Para a pesquisa inicial é importante que os grupos não só encontrem informações históricas sobre o muralismo, como também identifiquem seu caráter político, presente de forma mais marcante a partir do muralismo mexicano. Além disso, devem estabelecer cruzamentos entre essa modalidade artística e outros movimentos de *street art* em que o cunho social e político é marcante, como as figuras em estêncil de Banksy ou os grandes murais do brasileiro Kobra. Essas informações serão essenciais para munir os estudantes da bagagem que possibilitará que façam melhores escolhas quanto aos murais a serem elaborados.

Após o levantamento das informações prévias, os estudantes precisarão determinar o local onde o mural será pintado, para que possam estabelecer a escala a ser utilizada no desenho. Muitos caminhos podem ser seguidos, e todos demandarão forte mediação da sua parte: os estudantes podem pintar muros internos ou externos da escola ou muros em locais públicos, buscando, para isso, autorização dos responsáveis pelas edificações. Esteja atento à segurança dos estudantes, orientando-os em relação aos locais escolhidos, de forma que não se coloquem em risco. Uma terceira opção seria criar grandes painéis em madeira, que podem ficar expostos por tempo determinado. Uma vez escolhido o local onde cada grupo executará seu painel, será preciso obter as medidas lineares da superfície a ser pintada.

O passo seguinte é o desenho da malha quadriculada na folha de papel A4. Para isso, os estudantes precisarão, primeiro, criar na folha um retângulo que seja proporcional à área do mural e, em seguida, determinar o número de linhas e colunas que formarão a malha quadriculada desse desenho. Eles podem determinar isso com base nas medidas que desejam para os quadrados, mas a escolha deve ser feita de forma a simplificar a ampliação posterior: os quadrados não podem ser nem tão pequenos, a ponto de não ser possível observar com clareza as linhas traçadas dentro deles, nem tão grandes, a ponto de abarcar partes muito grandes do desenho que serão passadas para o mural de forma imprecisa. Feita a malha quadriculada, será preciso criar o desenho. Os estudantes podem criá-lo livremente, elaborar colagens de imagens ou ainda propor releituras de obras conhecidas.

Concluído o desenho em escala, é hora de reproduzi-lo no mural. Essa etapa demandará o seu acompanhamento para verificar se os conceitos geométricos de escala e homotetia estão sendo bem utilizados. Caso o projeto seja feito em parceria com o professor de Arte, vale propor uma avaliação conjunta, para verificar se todas as técnicas estão sendo respeitadas. Além do mural, os estudantes deverão entregar os desenhos, a pesquisa inicial e o relatório final – e todos esses elementos devem compor a avaliação. Uma exposição conjunta dos murais e dos desenhos na folha de papel A4 pode auxiliar os estudantes também na autoavaliação.

Projeto 3 – Mapas que fazem a diferença

Orientações: Perceber a Matemática como ferramenta capaz de impactar a promoção dos direitos humanos pode ser de grande importância para que os estudantes reconheçam que existem intersecções entre todas as áreas do conhecimento. Ao extrapolar os limites dos componentes curriculares, estamos promovendo uma educação mais integral e formando cidadãos capazes de abordar e compreender assuntos sob diversos pontos de vista. Assim, ao propor o primeiro contato dos estudantes com o projeto, convém fazer uma roda de conversa sobre o que eles já sabem acerca da ONU e dos Direitos Humanos. Explique também que precisarão mobilizar habilidades cartográficas. Desse modo, o projeto pode ser realizado em paralelo com o estudo desse assunto no Capítulo 6. Pode contar também, desde o início, com a participação do professor de Geografia. Vocês podem, inclusive, planejar juntos todo o desenvolvimento do projeto fazendo as adequações necessárias, de acordo com sua realidade, a proposta curricular e o Projeto Político Pedagógico da escola.

Após a conversa inicial, apresente a questão disparadora: *Como a projeção cartográfica pode ser utilizada para comunicar uma ideia?*. Organize a turma em grupos e combine um cronograma para a realização do projeto. Isso pode ser feito por meio de uma leitura coletiva da descrição do projeto: Contexto, Desenvolvimento, Produto final, Apresentação e Relatório conclusivo. É importante que nesse primeiro momento sejam estabelecidas todas as etapas de avaliação, os instrumentos e critérios que serão utilizados. Os estudantes podem ser envolvidos, dando sugestões.

O desenvolvimento do projeto está dividido em três etapas. Na primeira, além de discutir o emblema da ONU, comparando-o com os mapas-múndi tradicionais (projeção de Mercator), os estudantes precisarão debater também sobre o desenho América Invertida, de Joaquín Torres García, apresentado no início do projeto. Esse processo investigativo visa levá-los a perceber que as representações do mundo são provenientes do ponto de vista de quem as cria. Assim, ao propor novas representações, eles terão a oportunidade de defender novos pontos de vista. A segunda etapa do estudo se baseia na investigação e compreensão dos direitos humanos, a partir da leitura da Declaração Universal dos Direitos Humanos. Pode ser importante propor um debate sobre esses direitos: onde são garantidos e onde não são, a quem são negados, quais países têm mais ações em defesa desses direitos etc. Depois de terem compreendido os direitos, os estudantes deverão aprofundar os estudos, verificando qual é a relação entre o emblema da ONU e a defesa desses direitos, ou entre tais direitos e o protesto que pode ser subentendido pelo quadro América invertida. Na terceira etapa, caberá a cada grupo escolher qual direito será abordado. Eles podem escolher com quais direitos querem trabalhar e em seguida definir os países que estarão envolvidos no projeto ou vice-versa: escolher os países e depois os direitos. Auxilie-os para que as escolhas estejam relacionadas, ou seja, os países selecionados devem ser aqueles onde tais direitos não estão garantidos para toda a população. Instrua-os quanto à possibilidade de abordar nichos da população, considerando que em alguns países existem direitos que são garantidos para alguns nichos, mas não para outros. Feitas essas escolhas, eles poderão iniciar a criação da ONG fictícia. Para a criação do produto final, os estudantes deverão estudar diferentes formas de projeção da esfera no plano e escolher uma delas para criar uma representação do mapa-múndi que esteja alinhada com os ideais de sua ONG fictícia. Oriente-os nessas escolhas. Ao desenhar o logotipo, eles podem utilizar mapas já existentes e fazer alterações, desde que saibam explicar e justificar as intervenções propostas. A apresentação final pode ser feita, por exemplo, como um seminário, em que cada grupo apresenta e justifica sua instituição e o respectivo emblema.

Sugestões de leitura

Seguem sugestões de leitura para enriquecer sua prática, que abordam alguns temas trabalhados neste volume.

CARVALHO, H. C. de. *Geometria Fractal & atividades*. Belém: RFB Editora, 2020. Disponível em: https://d545c17b-f3d5-41c9-bf28-a48acf4c19a8.filesusr.com/ugd/baca0d_8f483f14c1334826938cb7caf8302162.pdf?fbclid=IwAR3yuqWrtlwrrkryJXfFWCSSer0habVhNqPcLlXinKBStl-zlvOo2dVyZLQ. Acesso em: 13 set. 2024.

Neste livro, o autor apresenta as principais características que descrevem um fractal e um breve histórico do tema. Em seguida, são apresentadas atividades de diversos conteúdos para serem desenvolvidas com os estudantes tendo os fractais como tema transversal.

MACHADO, E. J. C.; BORTOLOSSI, H. J.; ALMEIDA JUNIOR, R. V. de. *Explorando geometria 2D e 3D* [...]. *In*: SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, 3., 2018, Rio de Janeiro. *Anais* [...]. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2019. Disponível em: https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2019/06/geometria-2d-e-3d-corrigido.pdf. Acesso em: 13 set. 2024.
Visando romper com uma abordagem estática do ensino de Geometria, essa obra apresenta um conjunto de atividades interativas com o uso do GeoGebra, um *software* gratuito de geometria dinâmica para *smartphones* e *tablets*.

Sugestões de atividades individuais e em grupos

Atividade 1 - Em grupos

1ª parte: Entrevistem algumas pessoas que já cursaram o Ensino Médio e outras que trabalhem em alguma área de Ciências Exatas, como engenheiros, físicos, químicos, entre outros.

Façam as seguintes perguntas:

- O que você sabe sobre logaritmos?
- O que você se lembra da época em que estudou esse assunto no Ensino Médio?
- Você usa logaritmos hoje? Se sim, como?

2ª parte: Pesquisem na internet textos sobre a história dos logaritmos para responder às perguntas a seguir.

- Em que época surgiram os logaritmos e com que finalidade?
- Como eram utilizados?
- Com os dados coletados, escrevam um texto que inclua a abordagem das questões históricas e o relato das entrevistas. Façam comparações entre a utilidade dos logaritmos atualmente e na época em que surgiram.

Comentários: Esta atividade pode ser proposta antes do início do trabalho com logaritmos, no Capítulo 1, usando a ideia de sala de aula invertida, em que os estudantes fazem um estudo prévio sobre o assunto que será abordado. Recomendamos a integração com Língua Portuguesa para a produção dos textos.

Atividade 2 – Individual

1ª parte: Faça uma pesquisa na internet para descobrir como os fractais se relacionam à Matemática. Depois, descubra como eles são usados na arte e selecione algumas imagens que mais chamarem sua atenção. Escreva um pequeno parágrafo descrevendo como esse tipo de obra é produzida e compartilhe-o com os colegas.

2ª parte: Crie uma composição com base em um elemento usando ou não recursos digitais. Você pode selecionar um elemento da natureza ou de sua cultura para criar a obra.

Comentários: Esta atividade pode ser proposta antes de iniciar o Capítulo 2, para que os estudantes possam ir se apropriando de um assunto que será abordado nele. Recomenda-se que seja desenvolvida junto com o professor de Arte. Você pode sugerir aos estudantes que conheçam a obra de Aloisio Magalhães, disponível em: https://www.itaucultural.org.br/ocupacao/aloisio-magalhaes/cartemas/. Acesso em: 13 set. 2024.

Referências

ANDRADE, J. P. *Aprendizagens visíveis*: experiências teórico-práticas em sala de aula. São Paulo: Panda Educação, 2021.
A obra reúne relatos de práticas pedagógicas realizadas por professores-pesquisadores de escolas públicas e particulares da Educação Básica.

BENDER, W. N. *Aprendizagem baseada em projetos*: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.
Explora as formas como os professores podem aplicar a Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP) em uma sala de aula real.

BLANCO, R. *et al*. *Ensaios pedagógicos*: construindo escolas inclusivas. Brasília, DF: MEC: SEESP, 2005. Disponível em: https://pt.slideshare.net/slideshow/ensaios-pedagogicos-construindo-escolas-inclusivas/14028697#122. Acesso em: 13 set. 2024.
Essa publicação, do Ministério da Educação, contém depoimentos, relatos de experiências e pesquisas acerca da educação inclusiva no Brasil.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2003.
Os autores apresentam os conceitos de modelo e modelagem matemática e propõem a modelagem como método de ensino de matemática.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.
Nesse livro, os autores apresentam quatro fases da implementação das tecnologias digitais em Educação Matemática.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.
Esse é um clássico da história da Matemática que tem sido texto de referência há mais de 20 anos para aqueles que estudam o assunto.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 16 ago. 2024.
A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece conhecimentos, competências e habilidades que devem ser desenvolvidos em cada etapa da Educação Básica.

BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo das situações didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.
O livro aborda a teoria das situações didáticas, um conceito criado pelo autor há quatro décadas e constantemente aperfeiçoado.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 2000.
Esse livro é referência para o estudo da Matemática e está organizado em três partes: Números, Funções e Continuidade.

CHICA, C. Explorando problemas no painel de soluções. *In*: MATHEMA. São Paulo, 20 set. 2019. Disponível em: https://mathema.com.br/jogos-e-atividades/explorando-problemas-no-painel-de-solucoes/. Acesso em: 16 ago. 2024.
Nesse artigo, por meio de exemplos, a autora apresenta como trabalhar com painel de soluções nas aulas de Matemática.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso Editora, 2017.

Apresenta os referenciais teóricos e a pesquisa que dão suporte ao trabalho em grupo e descreve passos importantes para sua concretização na sala de aula.

CORREA, L. M.; ALVES, M. Z.; MAIA, C. L. (org.). *Cadernos temáticos*: juventude brasileira e Ensino Médio. Belo Horizonte: Editora da UFMG, 2014. Disponível em: https://observatoriodajuventude.ufmg.br/wp-content/uploads/2021/07/Caderno-12-Estrategias-Metodologicas-de-Trabalho-com-Jovens-1.pdf. Acesso em: 16 ago. 2024.

Esse caderno oferece aos professores referenciais teóricos, metodológicos, didáticos e pedagógicos que lhes possibilitem dialogar com a diversidade juvenil.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é Matemática?* Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2000.

Esse livro aborda a matemática de forma construtiva e orgânica, como base para o pensar e agir científicos.

DAVID, M. M. M. S.; TOMAZ, V. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

O livro apresenta e discute situações em sala de aula que evidenciam abordagens interdisciplinares.

FRADE, I. C. A. da S.; VAL, M. da G. C.; BREGUNCI, M. das G. de C. (org.). *Glossário Ceale*: termos de alfabetização, leitura e escrita para educadores. Belo Horizonte: UFMG: Faculdade de Educação, 2014.

A obra inclui aproximadamente 200 verbetes escritos por colaboradores de diferentes instituições na área de especialização de cada um.

HERNÁNDEZ, F. *Transgressão e mudança na educação*: os projetos de trabalho. Porto Alegre: Artmed, 2007.

A obra apresenta os pressupostos teóricos sobre o trabalho com projetos, com base em uma visão histórica.

INSTITUTO AYRTON SENNA. *Os benefícios da programação computacional em práticas pedagógicas*. São Paulo: IAA, 2022. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/app/uploads/2022/11/instituto-ayrton-senna-os-beneficios-da-programacao-computacional-em-praticas-pedagogicas.pdf. Acesso em: 13 set. 2024.

Nesse *e-book*, são encontradas as bases da programação computacional em práticas pedagógicas.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. São Paulo: Cortez, 2014.

O livro apresenta um conjunto de artigos publicados pelo autor ao longo de anos de trabalho sobre o tema.

MOVIMENTO DOWN. *Desenho universal para livros didáticos*. Rio de Janeiro: MD, 2015. Disponível em: https://www.movimentodown.org.br/wp-content/uploads/2015/08/Manual-FINAL-bibliografia.pdf. Acesso em: 18 ago. 2024.

Material que apresenta um conjunto de possibilidades buscando atingir as necessidades de aprendizagem do maior número possível de estudantes.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na educação matemática*. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

Nesse livro, estão reunidos ensaios, narrativas, relatos e argumentos que discutem possibilidades de leitura e escrita em educação matemática.

OLIVEIRA, A. R. de P. e; MUNSTER, M. de A. van; GONÇALVES, A. G. Desenho universal para aprendizagem e educação inclusiva: uma revisão sistemática da literatura internacional. *Revista Brasileira de Educação Especial*, [Rio de Janeiro], v. 25, n. 4, p. 675-690, out./dez. 2019. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbee/a/rGFXP54LSxdkfNmXsD9537M/. Acesso em: 13 set. 2024.

Artigo que apresenta um mapeamento e uma análise das pesquisas empíricas internacionais envolvendo a interface DUA e a inclusão.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. v. 2.

O autor apresenta a resolução de problemas em quatro etapas: compreensão do problema; construção de uma estratégia de resolução; execução da estratégia e revisão da solução.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

Os autores analisam como as práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser levadas para a sala de aula e contribuir para a educação matemática.

RICO, L. Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. *In*: CORE. [*S. l.*], 1995. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/12341117.pdf. Acesso em: 13 set. 2024.

O autor analisa o papel do erro na aprendizagem da matemática.

SEBASTIÁN-HEREDERO, E. Diretrizes para o desenho universal para a aprendizagem (DUA). *Revista Brasileira de Educação Especial*, [Rio de Janeiro], v. 26, n. 4, p. 733-768, out./dez. 2020. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbee/a/F5g6rWB3wTZwyBN4LpLgv5C/. Acesso em: 13 set. 2024.

Artigo que define as práticas educativas inclusivas e o currículo inclusivo, de acordo com o DUA.

SMOLE, K.; DINIZ, M. I. *Ler e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

A obra é referência no ensino de matemática e tem como eixo condutor a resolução de problemas nas aulas.

WIGGINS, G.; MCTIGHE, J. *Planejamento para a compreensão*: alinhando currículo, avaliação e ensino por meio da prática do planejamento reverso. Porto Alegre: Penso Editora, 2019.

Esse livro propõe uma reflexão sobre planejamento, avaliação e ensino com o objetivo de contribuir para a promoção de uma aprendizagem mais engajadora e eficaz.

Referências suplementares

BACICH, L.; HOLANDA, L. *STEAM em sala de aula*: a aprendizagem baseada em projetos integrando conhecimentos na Educação Básica. Porto Alegre: Penso Editora, 2020.

O livro apresenta a proposta STEAM, sigla em inglês para Ciência, Tecnologia, Engenharia, Arte e Matemática, por meio da qual os estudantes se envolvem no desenvolvimento de projetos em diversas áreas.

BACICH, L.; MORAN, J. *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

O livro apresenta as metodologias ativas apoiadas em tecnologias, que visam favorecer a participação ativa do estudante nos processos de aprendizagem.

BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. de M. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.

O livro apresenta uma abordagem pedagógica que visa colocar o estudante no centro do processo de aprendizagem, envolvendo as tecnologias digitais.

BNCC comentada para o Ensino Médio. *In*: INSTITUTO REÚNA. São Paulo, [2020]. Disponível em: https://o.institutoreuna.org.br/projeto/base-comentada-para-o-ensino-medio/?gad_source=1&gclid=CjwKCAjw8fu1BhBsEiwAwDrsjFYp2W22E73_AtGBIGXzP8FArWID8JhbEb7iC6-cKPfJrOC32-mN1hoC6icQAvD_BwE. Acesso em: 13 set. 2024.

Essa é uma ferramenta que traduz, comenta e explica as competências específicas e as habilidades de cada área de conhecimento no Ensino Médio.

BOALER, J. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

A autora apresenta a possibilidade de ensinar a Matemática como uma disciplina criativa e visual.

PAIS, L. C. *Didática da Matemática*: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

A obra apresenta um modo próprio de ver a educação centrada no ensino da Matemática.

SEMIS, L. O que são as competências gerais da BNCC e o que eu preciso saber sobre elas? *Nova Escola*, São Paulo, 27 fev. 2020. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/18902/o-que-sao-as-competencias-gerais-da-bncc-e-o-que-eu-preciso-saber-sobre-elas?utm_source=facebook&utm_medium=post-. Acesso em: 13 set. 2024.

Nesse artigo, são apresentadas as dez competências gerais propostas na BNCC e sua articulação com as práticas pedagógicas.

Sites

COMPETÊNCIAS gerais da BNCC. *In*: MOVIMENTO PELA BASE. [*S. l.*], 15 set. 2020. Disponível em: http://movimentopelabase.org.br/acontece/competencias-gerais-de-bncc/. Acesso em: 13 set. 2024.

A página esclarece o que são as competências gerais. Inclui um vídeo em que Anna Penido exemplifica como essas competências podem ser desenvolvidas em cada área de conhecimento.

EDUMATEC. Softwares *de geometria*. Porto Alegre: UFRGS, c2008. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/*softwares*/soft_geometria.php. Acesso em: 13 set. 2024.

No *site*, são encontradas várias indicações de aplicativos e *softwares* para desenvolver atividades nas aulas de Matemática.

INSTITUTO AYRTON SENNA. *Estante do educador*. São Paulo: IAA, c2024. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/para-voce/professor/estante-do-educador/. Acesso em: 13 set. 2024.

Disponibiliza diversos *e-books* para auxiliar o professor a desenvolver uma prática que promova a educação integral dos estudantes.

INSTITUTO REÚNA. São Paulo: IR, c2024. Disponível em: https://institutoreuna.org.br/. Acesso em: 13 set. 2024.

O *site* disponibiliza ferramentas e conteúdos práticos alinhados à BNCC e apresenta soluções para inovar em sala de aula.

MÃO na massa. *In*: PORVIR. São Paulo, [201-]. Disponível em: https://porvir.org/mao-na-massa/. Acesso em: 13 set. 2024.

Nesse *site*, são apresentadas ferramentas e sugestões para colocar em prática as inovações e levar o estudante a ser protagonista do processo de aprendizagem.

MOVIMENTO PELA BASE. [*S. l.*]: [s. *n*.], c2024. Disponível em: https://movimentopelabase.org.br/. Acesso em: 13 set. 2024.

Guias, vídeos e outros materiais que ajudam a entender a BNCC na prática.

OBSERVATÓRIO DA JUVENTUDE. Belo Horizonte: UFMG, [20--]. Disponível em: https://observatoriodajuventude.ufmg.br/observatorio-da-juventude-2/. Acesso em: 13 set. 2024.

O *site*, vinculado às ações de extensão, ensino e pesquisa da Faculdade de Educação da UFMG, oferece amplo material de apoio ao trabalho com as juventudes.