INTERAÇÃO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

ADILSON LONGEN
LUCIANA TENUTA DE FREITAS
(COORD.)

VOLUME 1

MATEMÁTICA
APRENDENDO E RESOLVENDO PROBLEMAS

MANUAL DO PROFESSOR

ENSINO MÉDIO – 1º ANO
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – MATEMÁTICA

Editora do Brasil

INTER AÇÃO

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

MATEMÁTICA ▸ APRENDENDO E RESOLVENDO PROBLEMAS

ADILSON LONGEN

- Doutor em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Mestre em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Professor do Ensino Médio

LUCIANA TENUTA DE FREITAS (COORD.)

- Mestre em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-Minas)
- Bacharel e licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
- Assessora pedagógica da Educação Básica, com atuação na formação de professores

VOLUME
1

ENSINO MÉDIO – 1º ANO
MATEMÁTICA E SUAS
TECNOLOGIAS – MATEMÁTICA

1ª edição
São Paulo, 2024

Editora do Brasil

“Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada”

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Longen, Adilson
Matemática : aprendendo e resolvendo problemas : 1º ano / Adilson Longen ; Luciana Tenuta de Freitas (coord.). -- 1. ed. -- São Paulo : Editora do Brasil, 2024. -- (Interação matemática e suas tecnologias)

ISBN 978-85-10-10256-8 (aluno)
ISBN 978-85-10-10254-4 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Freitas, Luciana Tenuta de. II. Título. III. Série.

24-225138 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Direção-geral: Paulo Serino de Souza

Diretoria editorial: Felipe Ramos Poletti
Gerência editorial de conteúdo didático: Erika Caldin
Gerência editorial de produção e design: Ulisses Pires
Supervisão de design: Catherine Saori Ishihara
Supervisão de arte: Abdonildo José de Lima Santos
Supervisão de revisão: Elaine Silva
Supervisão de iconografia: Léo Burgos
Supervisão de digital: Priscila Hernandez
Supervisão de controle e planejamento editorial: Roseli Said
Supervisão de direitos autorais: Luciana Sposito

Supervisão editorial: Everton José Luciano
Leitura crítica: Michele Andréia Borges
Edição: Adriana Netto, Daniel Vitor Casertelli Santos, Fernando Savoia Gonzalez, Katia Queiroz, Marcos Gasparetto, Paulo Roberto de Jesus e Rodrigo Cosmo dos Santos
Assistência editorial: Felipe Gabriel, Isabella Cosenza Ferreira e Paola Polizeli
Revisão: Alexander Siqueira, Amanda Carvalho, Andréia Andrade, Beatriz Dorini, Bianca Oliveira, Gabriel Ornelas, Giovana Sanches, Jéssie Panegassi, Jonathan Busato, Júlia Castello Branco, Maisa Akazawa, Mariana Faria, Martin Gonçalves, Rita de Cássia Costa, Rosani Andreani, Sandra Fernandes, Vitor Silva e Yasmin Fonseca
Pesquisa iconográfica: Luiza Camargo
Tratamento de imagens: Robson Mereu
Projeto gráfico: Talita Lima, Diego Lima e Rafael Gentile
Capa: Gláucia Koller
Imagem de capa: JP Phillippe/Shutterstock.com
Edição de arte: Beatriz Sato, Bruna Souza e Julia Nakano
Ilustrações: Acervo editora, Aline Rivolta, Danillo Souza, Fábio Nienow, Filipe Rocha, Mauro Salgado, Reinaldo Vignati, Tarcísio Garbellini e TDPStudio
Produção cartográfica: Alessandro da Costa
Editoração eletrônica: Typegraphic
Licenciamentos de textos: Cinthya Utiyama, Renata Garbellini e Solange Rodrigues
Controle e planejamento editorial: Ana Fernandes, Bianca Gomes, Juliana Gonçalves, Maria Trofino, Renata Vieira, Terezinha Oliveira e Valéria Alves

1ª edição, 2024

Editora do Brasil

Avenida das Nações Unidas, 12901
Torre Oeste, 20º andar
São Paulo, SP – CEP: 04578-910
Fone: +55 11 3226-0211
www.editoradobrasil.com.br

COMEÇO DE CONVERSA

Caro estudante,

A etapa do Ensino Médio é um desafio na vida de todo jovem. Neste momento que estamos vivendo, com as mudanças trazidas pelo Novo Ensino Médio, os desafios se acentuam e se tornam mais complexos.

No centro de todas essas mudanças, está a ideia de que as aprendizagens escolares podem capacitá-lo para que, ao final desta etapa, você esteja apto a atuar, com competência e responsabilidade, na sociedade em que vive. Para isso, é importante que você se aproprie da Matemática como uma das diversas formas de leitura da realidade e a utilize como ferramenta para que possa, de forma consciente e responsável, intervir nessa realidade.

Esta coleção foi escrita com o objetivo de levar você a ter experiências que promovam o desenvolvimento de um pensamento matemático consistente, estabelecendo o maior número possível de relações, ao mesmo tempo que aplica esse conhecimento em outras disciplinas e situações do mundo real. Esse processo, que visa uma aprendizagem consistente dos conceitos matemáticos, também o prepara para avaliações de acesso às universidades, se essa for sua opção de vida.

Por meio de atividades em grupo e discussões com os colegas, usando ou não a tecnologia, você terá a oportunidade de levantar hipóteses, argumentar, defender suas ideias, mudar de ideia com base na argumentação do colega e, assim, desenvolver a empatia e o respeito pelo outro, além de contribuir para sua formação integral.

Apresentamos também uma grande quantidade de atividades resolvidas, além de exercícios, questões de Enem e testes de vestibulares para que você possa consolidar as aprendizagens e se preparar para os exames de acesso à universidade.

Você está sendo chamado a ser protagonista de todo o processo de aprendizagem da Matemática ao longo do Ensino Médio. Esperamos que você aproveite esta oportunidade.

Os autores

Marish/Shutterstock.com

CONHEÇA SEU LIVRO

Lista de capítulos que compõem o volume

Capítulo 1
Teoria dos conjuntos

Capítulo 2
Estatística e pensamento computacional

Capítulo 3
Grandezas e medidas

Capítulo 4
Função afim

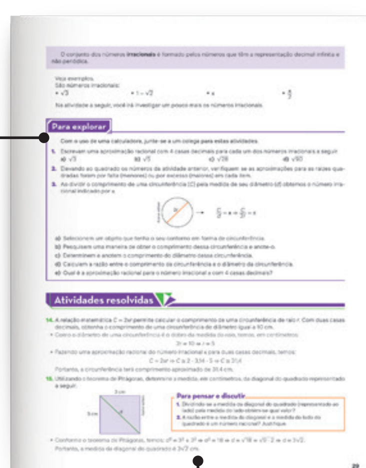
Capítulo 5
Função quadrática

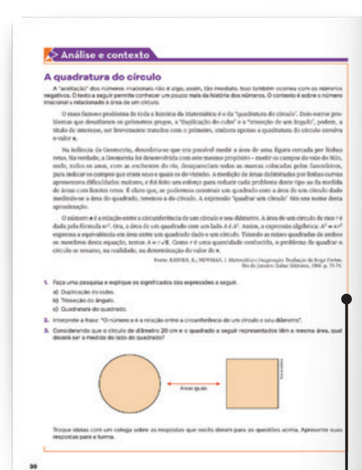
Capítulo 6
Geometria Plana

Abertura de capítulo
Uma imagem representativa do tema e um texto introdutório favorecem a reflexão sobre o assunto que será estudado.

Questões disparadoras sobre a temática escolhida para a abertura de capítulo.

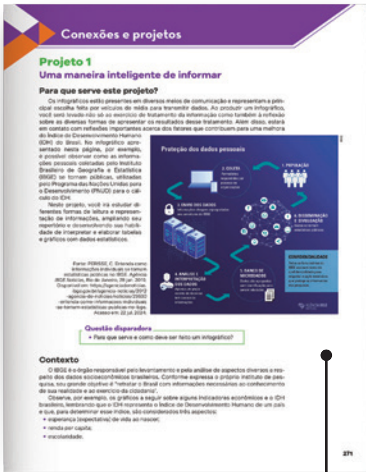
Para explorar
Atividades exploratórias relacionadas ao conteúdo trabalhado, que envolvem a observação, elaboração de hipóteses, discussão de ideias, argumentação e explicitação do pensamento matemático.





Análise e contexto
Apresenta textos sobre a história da Matemática ou sobre temas do cotidiano, aprofundando a discussão do conteúdo abordado no capítulo.

Atividades resolvidas
Seleção de atividades resolvidas que, por meio da reflexão sobre a resolução, auxiliam na compreensão da linguagem matemática e na resolução dos problemas que serão propostos.

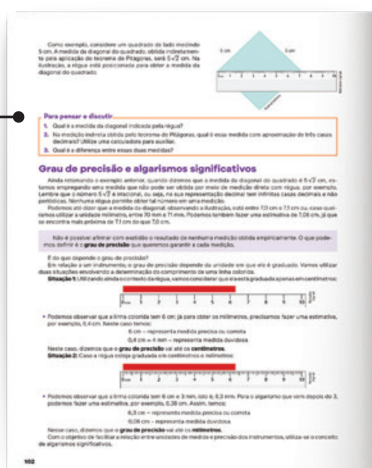


Conexões e projetos

Apresentam propostas de projetos que visam colocar em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas nos capítulos deste volume.

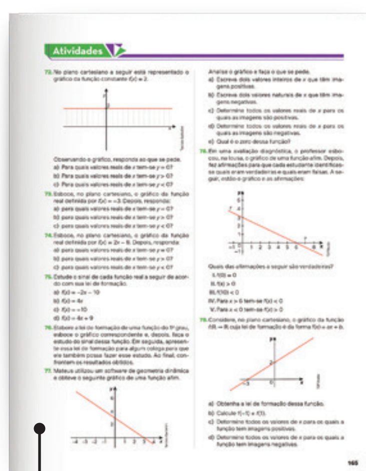
Infográfico

Sempre acompanhado de questões para discussão, o infográfico apresenta uma síntese de assuntos relacionados ao capítulo.



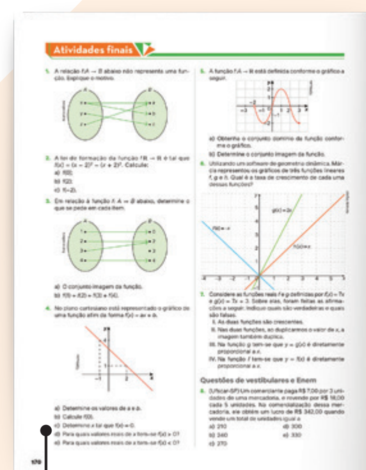
Para pensar e discutir

Questões que auxiliam os estudantes na capacidade de fazer inferências por meio da investigação de propriedades e elaboração de novos problemas, conclusões ou sínteses.



Atividades

Conjunto de atividades relacionadas ao conteúdo das últimas seções.



Atividades finais

Conjunto de atividades para retomar os conteúdos matemáticos de cada capítulo. A seção, que contém questões de vestibulares e do Enem, finaliza com uma proposta de autoavaliação.

Carrossel de imagens

Podcast

Infográfico clicável

Vídeo

Mapa clicável

Objetos digitais

Ao longo dos capítulos, você encontrará os ícones de remissão para o conteúdo digital: *podcast*, vídeo, infográfico clicável, mapa clicável e carrossel de imagens. Eles aprofundam o conteúdo do livro e ajudam você a compreender melhor os assuntos discutidos.
Acesse os objetos digitais por meio do livro digital, clicando nos ícones.

SUMÁRIO

Filipe Rocha

Neste capítulo, você vai:

- compreender e fazer uso da linguagem dos conjuntos;
- apropriar-se do conceito de conjuntos, suas propriedades e operações;
- compreender a relação de inclusão entre dois conjuntos;
- resolver problemas com a utilização da teoria dos conjuntos;
- compreender as sucessivas ampliações do campo numérico;
- interpretar e representar os intervalos dos números reais efetuando operações entre eles;
- resolver problemas relacionados ao conjunto dos números reais.

CAPÍTULO 1

Teoria dos conjuntos

A imagem de abertura deste capítulo apresenta diversas etnias que compõem a população do nosso país. Reconhecê-las como subconjuntos de um conjunto maior constituído pela população brasileira permite reconhecer e valorizar a diversidade sociocultural do nosso país, bem como reconhecer e elaborar políticas públicas que atendam às necessidades e demandas socioeconômicas específicas de cada grupo.

Estudaremos a teoria dos conjuntos, o que possibilitará o domínio de conceitos que serão úteis tanto para a compreensão da diversidade étnico-cultural aqui destacada como para a compreensão de temas matemáticos, como as funções, além de auxiliar na resolução de problemas ligados a diversas áreas.

1. **Quantas etnias você imagina que compõem a população do nosso país? Faça uma pesquisa sobre isso e apresente aos colegas.** 1. Resposta pessoal.

2. **Em relação ao seu estado, como foi a formação da população? Qual é a contribuição dos imigrantes na cultura do seu estado? Faça um levantamento e apresente aos colegas.** 2. Resposta pessoal.

1 Noções de teoria dos conjuntos

Ao longo de nossas vidas, participamos de vários grupos de acordo com características, objetivos, atividades ou interesses comuns, como o grupo familiar, o grupo do time esportivo, o grupo dos colegas de trabalho, o grupo de amigos, entre vários outros. Observe a imagem indicada.


SeventyFour/Shutterstock.com

Jovens reunidos para realização de atividade em grupo.

Com base na imagem, podemos dizer que cada pessoa representa um elemento do conjunto de pessoas reunidas para a realização da atividade.

Para pensar e discutir

1. O que significa “elemento de um conjunto”? 1. Resposta pessoal.

2. Qual é o significado da palavra **conjunto**? 2. Resposta pessoal.

3. Você pertence ao conjunto de pessoas que está na imagem? 3. Não.

Neste capítulo, estudaremos a chamada **linguagem dos conjuntos**. Embora essa linguagem matemática seja considerada abstrata, existem situações que são mais facilmente resolvidas com o seu emprego.

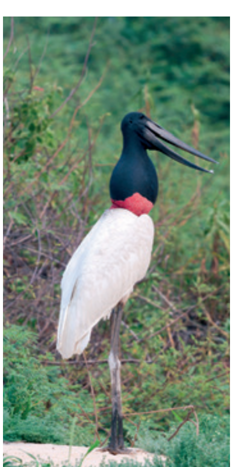
Conceitos iniciais

Podemos dizer que um conjunto é um agrupamento de objetos que possuem características ou propriedades comuns. A noção de coleção, por exemplo, se liga à ideia de conjuntos, uma vez que uma coleção nada mais é do que um conjunto de objetos que se agrupam por características comuns. Cada um desses objetos representa um elemento de um conjunto.

Observe as nove aves que estão entre as espécies ameaçadas de extinção no Pantanal.


Marcos Amend/Pulsar Imagens

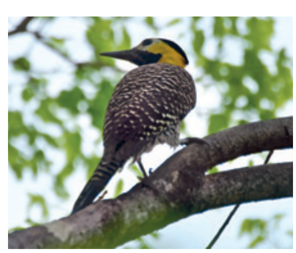
Udu-de-coroa-azul.


Marcos Amend/Pulsar Imagens

Tuiuiú.


Agami Photo Agency/Shutterstock.com

Soldadinho-do-araripe.


Du Zuppani/Pulsar Imagens

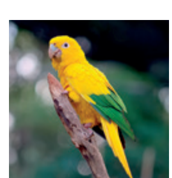
Pica-pau-de-cabeça-amarela.


Marcos Amend/Pulsar Imagens

Mutum-do-nordeste.


Bildagentur Zoonar GmbH/Shutterstock.com

Jacu-de-barriga-castanha.


ebone/Shutterstock.com

Ararajuba.


Andre Dib/Pulsar Imagens

Saíra-militar.


J.A. Dunbar/Shutterstock.com

Arara-azul.

COSTA, A. 9 tipos de aves ameaçadas de extinção no Pantanal. *Pássaro Org, [s. l.],* 27 out. 2022. Disponível em: https://www.passaro.org/aves-ameacadas-de-extincao-no-pantanal/. Acesso em: 15 jul. 2024.

Com base nas imagens, temos os exemplos de:

- conjunto – aves em extinção no Pantanal;
- elemento – ararajuba é um elemento desse conjunto.

Desse modo, entre as representações na ilustração, dizemos que o tuiuiú pertence ao conjunto de aves em extinção no Pantanal. Se uma ave não estiver nesse grupo, dizemos que ela não pertence a esse conjunto.

Por convenção, é usual nomear um conjunto com uma letra maiúscula. Veja como podemos representar o conjunto das nove aves em extinção no Pantanal. Chamaremos esse conjunto de *P*.

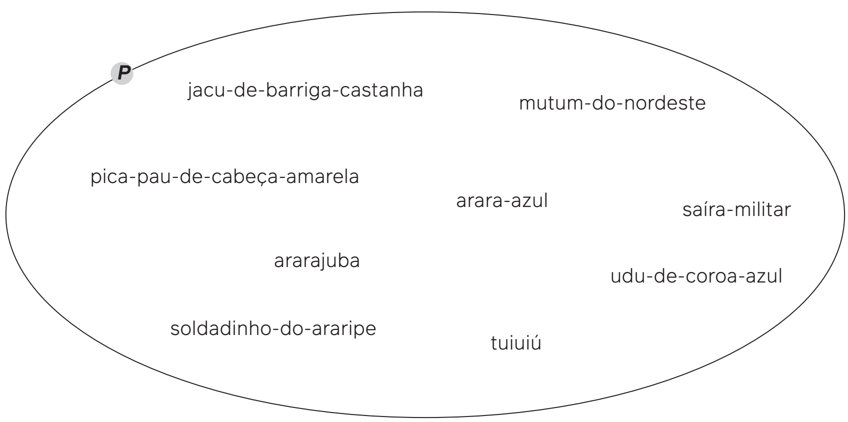
> *P* = {jacu-de-barriga-castanha, pica-pau-de-cabeça-amarela, mutum-do-nordeste, arara-azul, saíra-militar, soldadinho-do-araripe, ararajuba, udu-de-coroa-azul, tuiuiú}

Observe que os elementos do conjunto foram colocados entre chaves e separados por vírgulas. Eles também podem ser separados por ponto e vírgula. A disposição dos elementos não precisa seguir qualquer tipo de ordem, porém em conjuntos numéricos, é usual, mas não obrigatório, serem dispostos em ordem crescente.

Há outras formas de representação. Observe.

> *P* = {*x* / *x* é uma das nove aves em extinção no Pantanal}

Nessa forma, os elementos foram indicados por meio de características ou propriedades comuns. O símbolo "/" lê-se "tal que".



Acervo editora

Nessa outra forma, o conjunto foi representado por meio do diagrama de Venn (homenagem ao matemático John Venn), que consiste em uma linha fechada simples com indicação do nome do conjunto e, em seu interior, os elementos que a ele pertencem.

Utilizamos os símbolos $\in$ (pertence) e $\notin$ (não pertence) para representar se um elemento pertence ou não a um conjunto. Observe.

> Ararajuba $\in P \rightarrow$ lemos: ararajuba pertence a *P*.
>
> Pardal $\notin P \rightarrow$ lemos: pardal não pertence a *P*.

Um conjunto pode ser classificado quanto ao número de seus elementos. Um conjunto é classificado como **finito** quando podemos contar todos os seus elementos e **infinito** quando não é possível finalizar a contagem.

Exemplo:

- $A = \{a, b, c, d, e, f\} \rightarrow$ conjunto finito com 6 elementos;
- $B = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\} \rightarrow$ conjunto infinito (as reticências são utilizadas para indicar aqui que existem infinitos outros números após o 8).

Observações:

1. O número de elementos de um conjunto *A* qualquer é representado por n(*A*).
2. Quando um conjunto tem apenas um elemento ele é chamado de conjunto unitário.
3. Quando um conjunto não possui elementos ele é chamado de vazio e pode ser representado por $\varnothing$ ou { }.
4. O conjunto *B* faz parte do conjunto de números naturais. Nesse caso, dizemos que o conjunto dos números naturais representa o conjunto universo, representado por *U*.

Atividades resolvidas

1. Como representar, por meio de uma propriedade, o conjunto infinito $P = \{1, 3, 5, 7, ...\}$?

- Os quatro primeiros elementos indicam que o conjunto é formado por números naturais ímpares e consecutivos. Assim, temos:

$$P = \{x \;/\; x \text{ é um número natural ímpar}\}$$

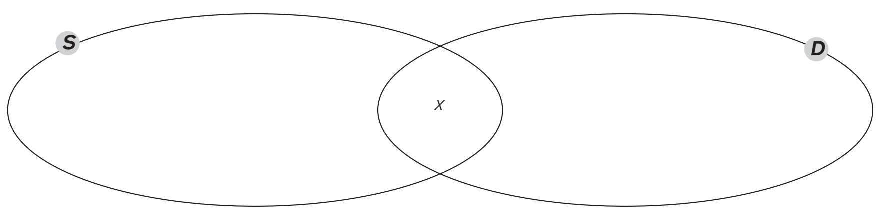
2. Uma entrevista foi feita entre os 200 estudantes do Ensino Médio de uma escola para verificar quem assistiu à TV no sábado ou no domingo. O resultado obtido foi representado no quadro a seguir.

Dia em que assistiu à TV	Quantidade de estudantes
Sábado	120
Domingo	100
Sábado e Domingo	x
Nenhum	10

Fonte: Dados obtidos pela coordenação da escola (dados fictícios).

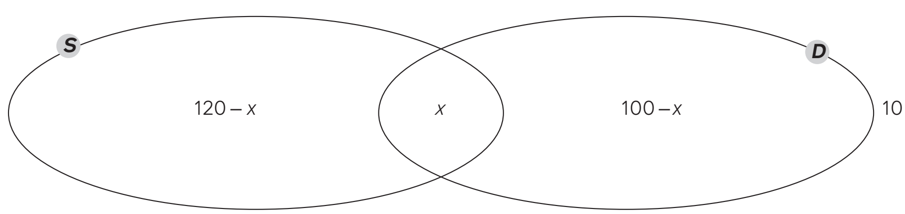
Determine a quantidade x, utilizando o diagrama de Venn, e as quantidades representadas no quadro.

- Vamos representar a quantidade de estudantes no diagrama, sendo o conjunto S as pessoas que assistiram à TV no sábado; e o conjunto D as pessoas que assistiram à TV no domingo. Iniciamos indicando aquelas que assistiram à TV nos dois dias (a região comum).



Acervo editora

- As pessoas representadas por x são as pessoas que assistiram à TV tanto no sábado quanto no domingo. Vamos representar também aquelas que assistiram somente no sábado e somente no domingo. Indicaremos fora do diagrama aquelas que não assistiram em nenhum dos dois dias.



Acervo editora

- Como o total de estudantes consultados é 200, podemos relacionar as quantidades indicadas no diagrama pela igualdade a seguir:

$$(120 - x) + x + (100 - x) + 10 = 200$$
$$120 - x + x + 100 - x + 10 = 200$$
$$-x + 230 = 200$$
$$-x = 200 - 230$$
$$-x = -30 \Rightarrow x = 30$$

Portanto, 30 estudantes assistiram à TV nos dois dias.

Para pensar e discutir

1. Compare o conjunto P da **atividade resolvida 1** com o conjunto:
$Q = \{2x - 1 \;/\; x \text{ é um número natural maior ou igual a } 1\}$.
O que eles têm em comum? 1. Eles são iguais.

2. Como você resolveria a **atividade resolvida 2** sem utilizar o diagrama de Venn? 2. Resposta pessoal.

Atividades

1. Descreva todos os elementos dos conjuntos descritos abaixo.

a) O conjunto C representado pelos números naturais ímpares e menores que 16. 1. a) $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

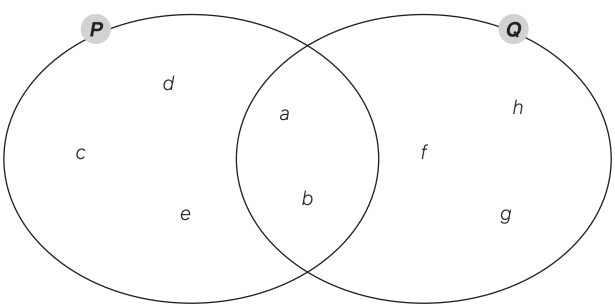
b) O conjunto X representado pelos números naturais que são quadrados perfeitos e menores que 101. 1. b) $X = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

c) $R = \{x \mid x$ é consoante da palavra "dicionário"$\}$. 1. c) $R = \{d, c, n, r\}$

d) $S = \{x \mid x$ é número primo e par$\}$. 1. d) $S = \{2\}$

e) O conjunto T representado pelos nomes dos meses do ano que tem 32 dias. 1. e) $T = \{\ \}$ ou $T = \varnothing$

2. No diagrama a seguir, estão indicados os elementos dos conjuntos P e Q.



Acervo editora

Indique **V** (verdadeira) ou **F** (falsa) para cada afirmação a seguir.

I. $n(P) = 3$ 2. I. F

II. $n(Q) = 5$ 2. II. V

III. São ao todo 3 elementos que pertencem ao conjunto P e não pertencem ao conjunto Q. 2. III. V

IV. $a \in P$ e $a \notin Q$ 2. IV. F

V. $f \notin P$ e $f \in Q$ 2. V. V

3. Dê um exemplo de cada conjunto a seguir, por meio de propriedades de seus elementos.

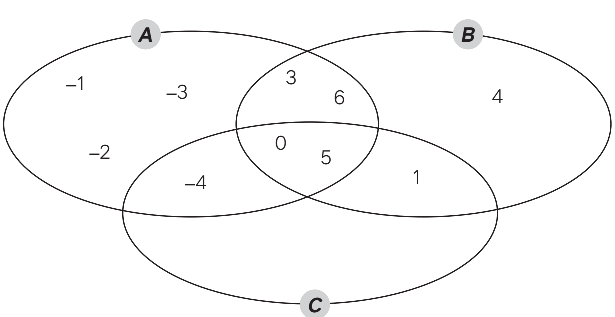
a) Conjunto unitário. 3. a) Resposta pessoal.

b) Conjunto vazio. 3. b) Resposta pessoal.

c) Conjunto com exatamente 5 elementos. 3. c) Resposta pessoal.

d) Conjunto infinito. 3. d) Resposta pessoal.

4. No diagrama a seguir, estão representados todos os elementos dos conjuntos A, B e C.



Acervo editora

a) Discrimine todos os elementos de cada um dos conjuntos A, B e C. 4. a) $A = \{-1, -2, -3, -4, 0, 3, 5, 6\}$; $B = \{0, 1, 3, 4, 5, 6\}$; $C = \{-4, 0, 1, 5\}$

b) Escreva o conjunto formado por todos os elementos que pertencem aos conjuntos A e B simultaneamente. 4. b) $\{0, 3, 5, 6\}$

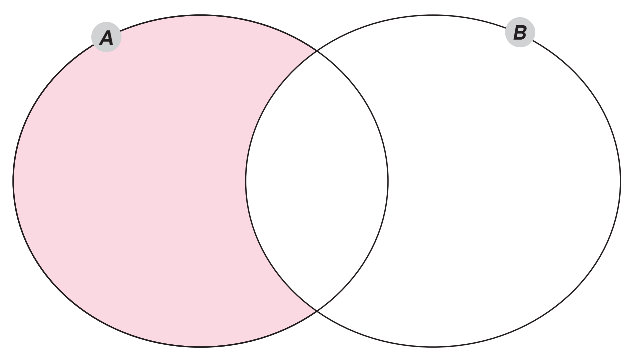
c) Escreva o conjunto formado por todos os elementos que pertencem aos conjuntos A e C simultaneamente. 4. c) $\{-4, 0, 5\}$

d) Escreva o conjunto formado por todos os elementos que pertencem aos conjuntos B e C simultaneamente. 4. d) $\{0, 1, 5\}$

e) Escreva o conjunto formado pelos elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos A, B e C. 4. e) $\{0, 5\}$

f) Escreva o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto C, mas não pertencem nem ao conjunto A e nem ao conjunto B. 4. f) $\varnothing$

5. O diagrama a seguir representa os conjuntos A e B. O conjunto A tem ao todo 10 elementos, enquanto o conjunto B tem ao todo 30 elementos. Considerando que eles têm em comum 3 elementos, quantos elementos de A estão na região destacada? Justifique. 5. 7; resposta pessoal.



Acervo editora

6. Os conjuntos A e B são tais que:

$A = \{x \mid x$ é um número natural positivo múltiplo de 4$\}$

$B = \{x \mid x$ é um número natural par e $4 \leq x < 16\}$

Determine o conjunto formado por todos os elementos que pertencem aos dois conjuntos simultaneamente. 6. $\{4, 8, 12\}$

7. Em uma escola há 600 estudantes matriculados. Desses estudantes, 300 gostam de Matemática, 200 gostam de Língua Portuguesa e 150 não gostam de nenhuma dessas duas disciplinas. Determine a quantidade de estudantes que gostam das duas disciplinas (Matemática e Língua Portuguesa). Justifique sua resposta por meio do diagrama de Venn. 7. 50; resposta pessoal.

8. Elabore um problema que possa ser resolvido por meio de diagrama de Venn. Apresente esse problema para um colega resolver e resolva o que ele elaborou. 8. Resposta pessoal.

Subconjuntos

Em uma representação gráfica do Brasil foi destacado o estado do Acre, que se situa na região Norte do Brasil. Sua capital é Rio Branco. A pessoa que nasce no Acre é conhecida como acreana.

Representação gráfica do Brasil, com destaque para o estado do Acre.

Para pensar e discutir

1. Todo acreano é brasileiro? 1. Sim.
2. A recíproca é verdadeira, isto é, todo brasileiro é acreano? 2. Não.
3. Qual é a relação entre o conjunto formado por todos os acreanos e o conjunto formado por todos os brasileiros? 3. Resposta no Manual do Professor.

O conjunto formado por todas as pessoas que nasceram no estado do Acre "está dentro" do conjunto formado por todas as pessoas que nasceram no Brasil. Na teoria dos conjuntos, temos, então, a ideia de inclusão, isto é, de subconjunto.

Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B quando qualquer elemento de A também é elemento de B. Essa relação de inclusão pode ser representada por $A \subset B$.

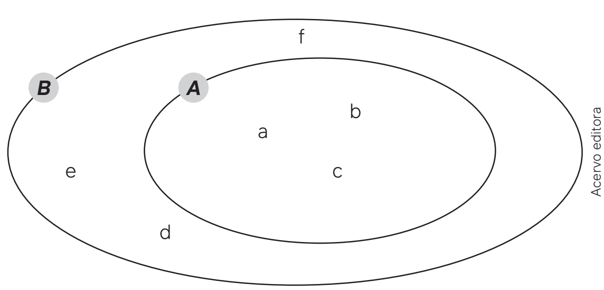
Lemos: o conjunto A está contido no conjunto B.

A relação de inclusão $A \subset B$ também pode ser escrita como $B \supset A$ (lemos: B contém A).

Exemplo:

Sejam os conjuntos: $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, b, c, d, e, f\}$.

Como todo elemento de A é elemento de B, temos: $A \subset B$.



Observações:

1. A relação entre um elemento e um conjunto é denominada **relação de pertinência**.
2. A relação entre dois conjuntos é denominada **relação de inclusão**.
3. Se existir pelo menos um elemento de A que não pertença a B, dizemos que A não está contido em B e representamos por $A \not\subset B$.

Propriedades da relação de inclusão

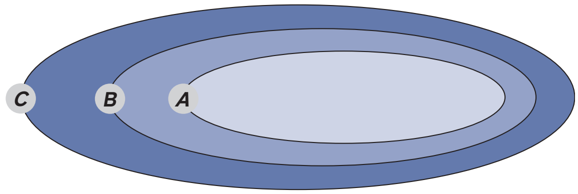
Existem algumas propriedades da relação de inclusão cujas demonstrações não faremos aqui. Excetuando a propriedade do conjunto vazio, as demais podem ser observadas por meio de exemplos.

Considerando que A, B e C são três conjuntos arbitrários e valem as seguintes propriedades:
1ª propriedade: $\varnothing \subset A$;
2ª propriedade: $A \subset A$ (reflexiva);
3ª propriedade: se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$ (antissimétrica);
4ª propriedade: se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$ (transitiva).

Observações:

1. Os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, a, c\}$ são iguais, pois a ordem dos elementos não diferencia os dois conjuntos.
2. O conjunto formado pelas letras da palavra "arara" é {a, r}, isto é, em um conjunto não repetimos elementos.
3. O diagrama de Venn representado a seguir permite, por exemplo, observar melhor a propriedade transitiva entre três conjuntos A, B e C:

Acervo editora



Notação: $(A \subset B \text{ e } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$
O símbolo "$\Rightarrow$" lê-se "implica".

Assim como utilizamos o diagrama de Venn para ilustrar a propriedade transitiva, é possível também utilizar esse recurso para demonstrar outras propriedades.

Para pensar e discutir

1. Se todo elemento de um conjunto A é elemento de um conjunto B e todo elemento do conjunto B é elemento do conjunto A, qual é a relação entre os conjuntos A e B? 1. Os conjuntos A e B são iguais.
2. Qual é a condição para que dois conjuntos A e B sejam diferentes?
2. Basta que exista um elemento de um dos dois conjuntos que não seja elemento do outro.
3. Se F é o conjunto das pessoas que nasceram em Florianópolis, S o conjunto das pessoas que nasceram em Santa Catarina e B o conjunto das pessoas que nasceram no Brasil, qual relação você pode escrever sobre esses três conjuntos? 3. A relação de inclusão $F \subset S \subset B$.

No Ensino Fundamental, você trabalhou com os seguintes conjuntos numéricos: os naturais, os inteiros, os racionais, os irracionais e os reais. Com base nesses conjuntos, podemos obter algumas relações de inclusões. Retomaremos esses conjuntos numéricos ainda neste capítulo.

Atividades resolvidas

3. Justifique a afirmativa "um conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto".
   - Existe uma maneira de provar uma afirmação matemática conhecida como "prova por redução ao absurdo", que consiste em negar a afirmação que queremos provar e, com base nessa negação, conduzimos a uma afirmação que é absurda.
   - Queremos provar que:

$$\varnothing \subset A$$

- Vamos negar a afirmação:

$$\varnothing \not\subset A$$

Então, existe pelo menos um elemento que pertence ao conjunto $\varnothing$ e não pertence ao conjunto A. Essa conclusão é absurda, pois o conjunto $\varnothing$ não tem elementos.

Portanto, por redução ao absurdo concluímos que:

$$\varnothing \subset A$$

4. Quantos subconjuntos admite o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$?

- Vamos obter todos os subconjuntos de A:

Com 0 elemento: $\varnothing$

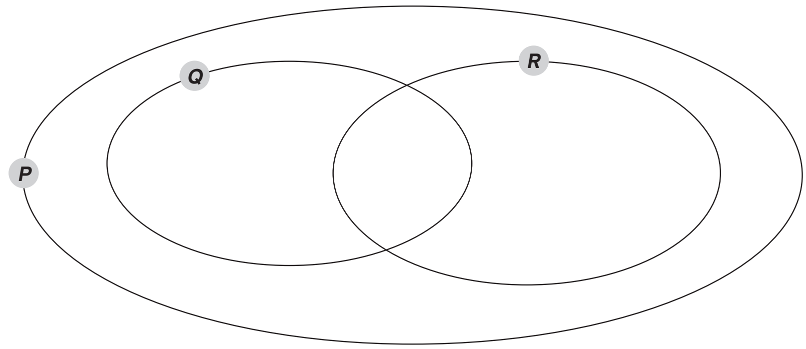
Com 1 elemento: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

Com 2 elementos: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$

Com 3 elementos: $\{1, 2, 3\}$

Portanto, o conjunto A admite 8 subconjuntos.

5. Considere os conjuntos P, Q e R representados no diagrama a seguir, sendo que em cada uma das regiões existe pelo menos um elemento.



Acervo editora

Verifique e justifique a veracidade ou não de cada afirmação a seguir:

I. $P \not\subset Q$

II. $Q \subset R$

III. $R \subset P$

- Analisando cada afirmação e considerando que em todas as regiões do diagrama existe pelo menos um elemento, temos:

I. Verdadeira. Existem elementos que pertencem a P e não pertencem a Q.

II. Falsa. Existem elementos que pertencem a Q e que não pertencem a R.

III. Verdadeira. Todos os elementos pertencentes a R pertencem também a P.

Para explorar

Junte-se a dois colegas e façam o que se pede a seguir.

1. Se n(A) representa o número de elementos de um conjunto A, obtenha o total de subconjuntos que admite o conjunto A em cada caso:

a) $n(A) = 0$ 1. a) 1

b) $n(A) = 1$ 1. b) 2

c) $n(A) = 2$ 1. c) 4

d) $n(A) = 3$ 1. d) 8

e) $n(A) = 4$ 1. e) 16

2. Observando o padrão numérico entre n(A) e o total de subconjuntos que admite, responda:

a) Quantos subconjuntos ao todo admite um conjunto A sabendo que $n(A) = 10$? 2. a) 1024

b) E se $n(A) = 12$? 2. b) 4096

c) E se $n(A) = x$? 2. c) 2^x

Atividades

9. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Descreva os subconjuntos de A formados:

a) pelos números maiores que 4 e menores que 11; 9. a) $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

b) pelos números ímpares; 9. b) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

c) pelos números quadrados perfeitos; 9. c) $\{1, 4, 9\}$

d) pelos números primos. 9. d) $\{2, 3, 5, 7, 11\}$

10. Baseado no conjunto $A = \{2, 5, 7, 8\}$, obtenha todos os subconjuntos formados por:

a) 2 elementos; 10. a) $\{2, 5\}$; $\{2, 7\}$; $\{2, 8\}$; $\{5, 7\}$; $\{5, 8\}$; $\{7, 8\}$

b) 3 elementos; 10. b) $\{2, 5, 7\}$; $\{2, 5, 8\}$; $\{2, 7, 8\}$; $\{5, 7, 8\}$

c) 4 elementos. 10. c) $\{2, 5, 7, 8\}$

11. Os conjuntos A, B e C são definidos da seguinte maneira:

$A = \{x \,/\, x$ é um número natural ímpar compreendido entre 2 e 14$\}$

$B = \{x \,/\, x$ é um número natural menor que 13$\}$

$C = \{x \,/\, x$ é um número natural ímpar diferente de 1$\}$

Relacione os conjuntos utilizando os símbolos $\subset$ ou $\not\subset$.

a) A e B. 11. a) $A \not\subset B$ **b)** A e C. 11. b) $A \subset C$ **c)** B e C. 11. c) $B \not\subset C$

12. Analise as seguintes definições dos elementos de dois conjuntos A e B:

- A: conjunto formado por todos os quadriláteros que têm quatro ângulos retos;
- B: conjunto formado por todos os quadriláteros que têm quatro ângulos retos e quatro lados de mesma medida.

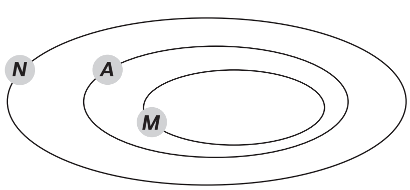
a) Descreva quais são os elementos do conjunto A. 12. a) Todos os retângulos.

b) Descreva quais são os elementos do conjunto B. 12. b) Todos os quadrados.

c) Qual é a relação entre os conjuntos A e B? Justifique. 12. c) $B \subset A$; resposta pessoal.

13. No diagrama abaixo está representada uma relação entre os seguintes conjuntos:

- $M \rightarrow$ conjunto formado por todas as pessoas que nasceram na cidade de Manaus;
- $A \rightarrow$ conjunto formado por todas as pessoas que nasceram no estado do Amazonas;
- $N \rightarrow$ conjunto formado por todas as pessoas que nasceram na região Norte do Brasil.



Acervo editora

Indique a veracidade de cada afirmação. Utilize a teoria dos conjuntos para justificar.

I. Existem pessoas que nasceram na região Norte e que não nasceram no estado do Amazonas. 13. I. Verdadeira.

II. Toda pessoa nascida na cidade de Manaus nasceu na região Norte. 13. II. Verdadeira.

III. Nem toda pessoa nascida no estado do Amazonas nasceu na cidade de Manaus. 13. III. Verdadeira.

14. Determine os valores de x e y considerando a validade da seguinte igualdade:

$$\{0, x, y, 8\} = \{6, 0, 12, 8\}$$

14. Existem duas possibilidades: $x = 6$ e $y = 12$, $x = 12$ e $y = 6$.

15. Observe as definições de dois quadriláteros.

- Losango: quadrilátero em que os 4 lados têm a mesma medida.
- Quadrado: quadrilátero em que os 4 ângulos são retos e os 4 lados têm a mesma medida.

Representando por L o conjunto de todos os losangos e por Q o conjunto de todos os quadrados, escreva uma relação entre L e Q e explique seu significado. 15. $Q \subset L$ ou $L \supset Q$; significa que todo quadrado é um losango.

16. Considere a relação $\{2; 3\} \subset B \subset \{2; 3; 4. 5\}$, obtenha todos os conjuntos B que verificam essa relação.
16. $B = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$

17. Obtenha todos os subconjuntos do conjunto P considerando que:

$P = \{x \,/\, x$ é um número natural divisor de 9$\}$ 17. $\varnothing$; $\{1\}$; $\{3\}$; $\{9\}$; $\{1, 3\}$; $\{1, 9\}$; $\{3, 9\}$; $\{1, 3, 9\}$

Operações entre conjuntos

As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão entre números são consideradas operações aritméticas. Diante de conjuntos, podemos também efetuar “operações” entre as quais temos: união de conjuntos, intersecção de conjuntos e diferença entre conjuntos. Elas podem ser realizadas para a resolução de situações como a representada a seguir.

(UFRN) Num grupo de amigos, quatorze pessoas estudam espanhol e oito estudam inglês, sendo que três dessas pessoas estudam ambas as línguas. Sabendo que todos do grupo estudam pelo menos uma dessas línguas, o total de pessoas do grupo é:

a) 17
b) 19
c) 22
d) 25

Para pensar e discutir

1. Representando por E o conjunto dos amigos que estudam Espanhol, por I o conjunto dos amigos que estudam Inglês, quais os valores de n(E) e de n(I)? 1. n(E) = 14, n(I) = 8

2. O valor de n(E) + n(I) fornece o total de pessoas do grupo? Explique. 2. Não; resposta pessoal.

3. Como você resolveria a situação apresentada? 3. Resposta pessoal.

Mesmo que você resolva a situação, existe uma possibilidade de resolução envolvendo o número de elementos da união de dois conjuntos. A seguir, vamos conceituar e exemplificar as operações entre conjuntos e, na sequência, retomaremos a situação proposta.

União de conjuntos

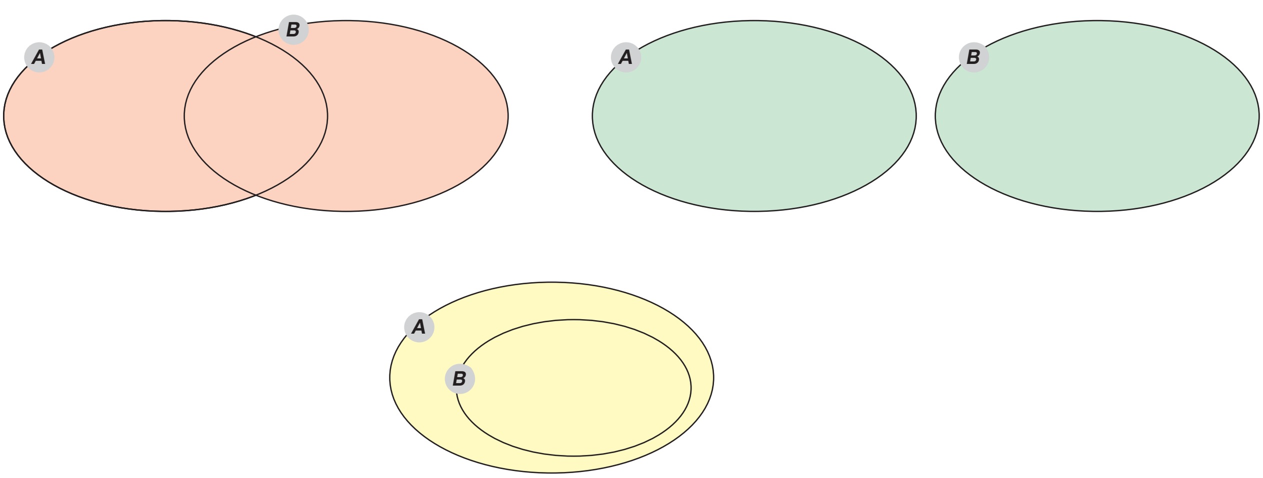
A união de dois conjuntos A e B, que indicamos por $A \cup B$, é o conjunto formado pela reunião dos elementos que pertencem ao conjunto A com os elementos que pertencem ao conjunto B.

Notação:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Observações:

1. Leitura de $A \cup B$: A união B ou A reunião B.
2. Interpretação de $A \cup B$: qualquer que seja o elemento de $A \cup B$, ele pertence ao conjunto A, ou ao conjunto B, ou a ambos.
3. A parte colorida em cada um dos diagramas abaixo representa três situações para $A \cup B$.



Imagens: Acervo editora

Exemplo:
$A = \{-2, 3, 4, -9\}$
$B = \{-2, 5, 6, -9, 10\}$
$A \cup B = \{-2, 3, 4, -9\} \cup \{-2, 5, 6, -9, 10\} = \{-2, 5, 6, -9, 10, 3, 4\}$

Intersecção de conjuntos

A intersecção de dois conjuntos A e B, que indicamos por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e pertencem ao conjunto B.

Notação:

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \in B\}$$

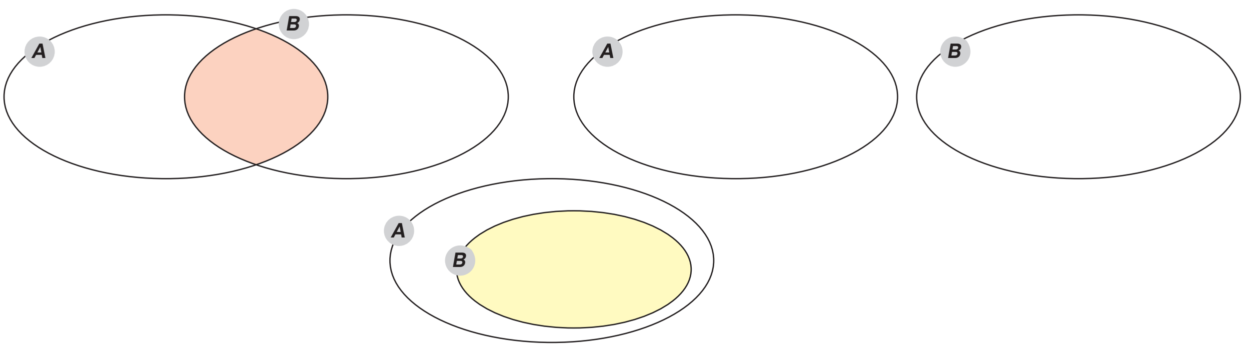
Observações:

1. Leitura de $A \cap B$: A intersecção B.

2. Interpretação de $A \cap B$: qualquer que seja o elemento de $A \cap B$: ele pertence simultaneamente aos conjuntos A e B.

3. A parte colorida em cada um dos diagramas a seguir representa três situações para $A \cap B$.

4. Quando os conjuntos A e B não possuem elementos comuns, isto é, $A \cap B = \varnothing$, dizemos que A e B são conjuntos disjuntos.



Imagens: Acervo editora

Exemplo:

$A = \{-2, 3, 4, -9\}$

$B = \{-2, 5, 6, -9, 10\}$

$A \cap B = \{-2, 3, 4, -9\} \cap \{-2, 5, 6, -9, 10\} = \{-2, -9\}$

Diferença de conjuntos

A diferença de dois conjuntos A e B, que indicamos por $A - B$, nessa ordem, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e que não pertencem ao conjunto B.

Notação:

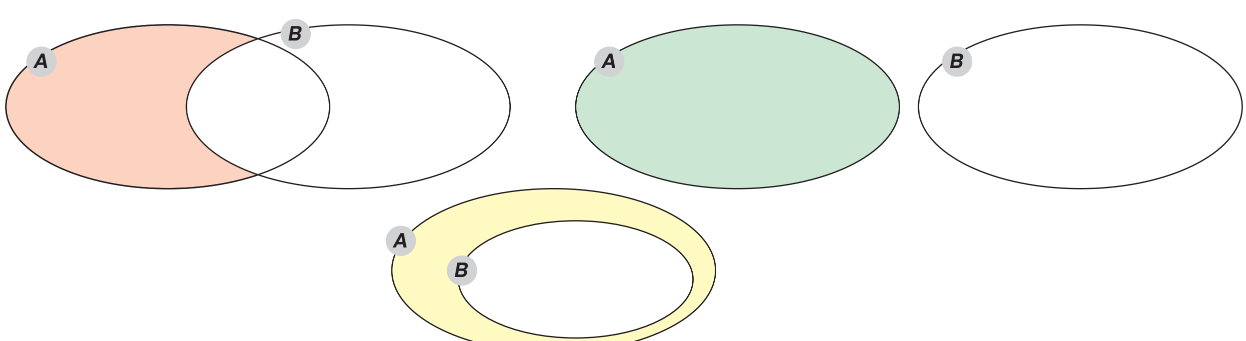
$$A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Observações:

1. Leitura de $A - B$: A menos B.

2. Interpretação de $A - B$: qualquer que seja o elemento de $A - B$, ele pertence a A e não pertence a B.

3. A parte colorida em cada um dos diagramas a seguir representa três situações para $A - B$:



Acervo editora

Exemplo:

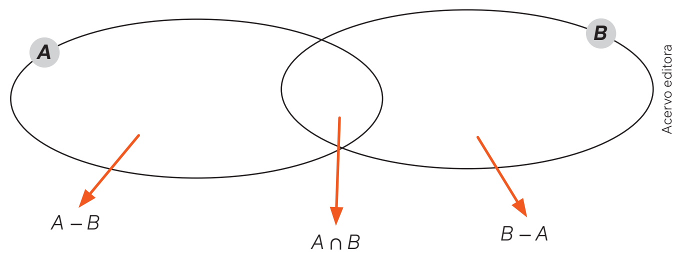
$A = \{-2, 3, 4, -9\}$

$B = \{-2, 5, 6, -9, 10\}$

$A - B = \{-2, 3, 4, -9\} - \{-2, 5, 6, -9, 10\} = \{3, 4\}$

$B - A = \{-2, 5, 6, -9, 10\} - \{-2, 3, 4, -9\} = \{5, 6, 10\}$

Com base nos conceitos de união, de intersecção e de diferença entre conjuntos existem propriedades que podem ser enunciadas, bem como algumas relações que podem ser trabalhadas envolvendo conjuntos. No diagrama a seguir, temos dois conjuntos A e B e nele estão indicadas três regiões e os conjuntos correspondentes.



Para pensar e discutir

1. Se você efetuar a união dos conjuntos $(A - B)$, $(A \cap B)$ e $(B - A)$, qual conjunto obtém? 1. $A \cup B$

2. Conhecendo $n(A)$ e $n(A \cap B)$, como podemos determinar $n(A - B)$? 2. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

3. Conhecendo $n(B)$ e $n(A \cap B)$, como podemos determinar $n(B - A)$? 3. $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$

Baseados no diagrama anterior, vamos determinar o número de elementos da união de A com B, quando se conhece o número de elementos de A, o número de elementos de B e o número de elementos da intersecção de A e B, isto é:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Sendo A e B dois conjuntos finitos, a quantidade de elementos do conjunto $A \cup B$, que indicamos por $n(A \cup B)$, é dada pela seguinte relação:

$$\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

Atividades resolvidas

Vamos retomar a situação a seguir, apresentada anteriormente no início desse assunto.

6. (UFRN) Num grupo de amigos, quatorze pessoas estudam espanhol e oito estudam inglês, sendo que três dessas pessoas estudam ambas as línguas. Sabendo que todos do grupo estudam pelo menos uma dessas línguas, o total de pessoas do grupo é:

a) 17
b) 19
c) 22
d) 25

- Considerando $n(E)$, $n(I)$ e $n(E \cap I)$ as quantidades de amigos que estudam Espanhol, Inglês e ambas as línguas, respectivamente, temos pelo enunciado que:

$$n(E) = 14$$
$$n(I) = 8$$
$$\text{e } n(E \cap I) = 3$$

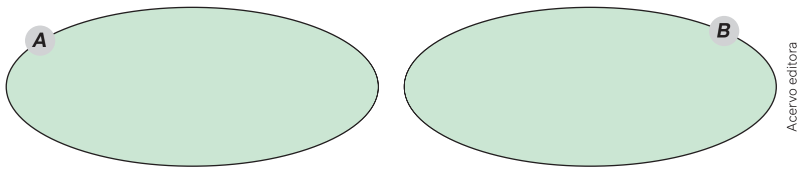
- Utilizando a relação para a união de conjuntos, vem:

$$n(E \cup I) = n(E) + n(I) - (E \cap I)$$
$$n(E \cup I) = 14 + 8 - 3$$
$$n(E \cup I) = 19$$

Como todos do grupo estudam pelo menos uma língua, o total de pessoas é 19.

7. Obtenha a expressão para n($A \cup B$) considerando que os conjuntos A e B são disjuntos.

- Como os conjuntos são disjuntos, a intersecção é o conjunto vazio. Assim, o diagrama a seguir ilustra a situação:



- Conforme relação para o número de elementos da união desses dois conjuntos:

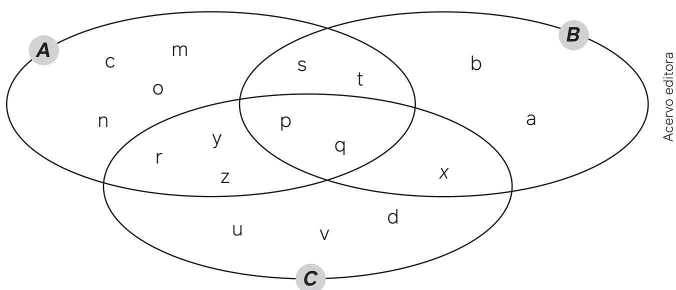
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\to A \cap B = \varnothing \Rightarrow n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - 0$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

8. No diagrama a seguir estão representados os elementos de três conjuntos A, B e C.



Para pensar e discutir

1. Quais elementos fazem parte dos conjuntos $A \cap B$ e $A \cap C$? 1. {s, t, p, q} e {r, y, z, p, q}
2. Qual é a quantidade total de elementos do conjunto $A \cup B \cup C$? 2. 17
3. Quais elementos fazem parte do conjunto $B - (A \cap B \cap C)$? 3. {a, b, s, t, x}

Obtenha os elementos dos conjuntos: A, B, C e de $A \cap B \cap C$.

- Pela observação do diagrama temos:

$$A = \{n, m, c, o, s, t, p, q, r, y, z\}$$

$$B = \{a, b, s, t, p, q, x\}$$

$$C = \{u, v, d, x, p, q, r, y, z\}$$

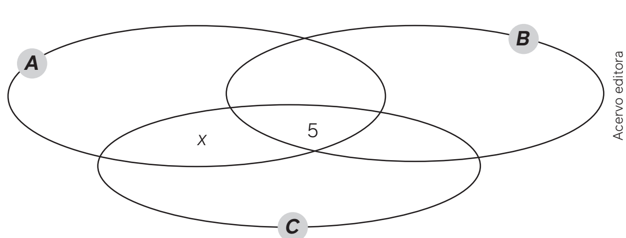
$$A \cap B \cap C = \{p, q\}$$

Lembrete: as operações entre parênteses devem ser realizadas antes das demais.

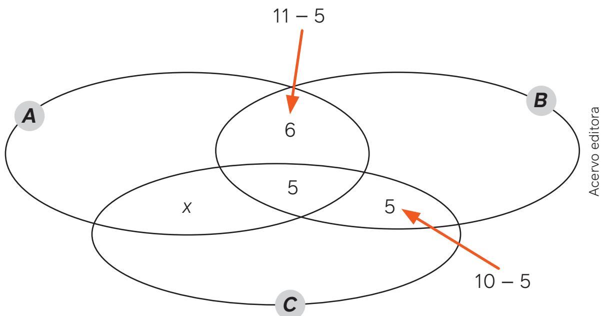
9. (EAM) Uma pesquisa de mercado sobre o consumo de três marcas de café A, B e C apresentou os seguintes resultados:
60% consomem o produto A;
51% consomem o produto B;
15% consomem o produto C;
5% consomem os três produtos;
11% consomem os produtos A e B; e
10% consomem os produtos B e C.
Qual é o percentual relativo à quantidade de pessoas que consomem, simultaneamente, os produtos A e C sem consumir o B?

a) 3% **b)** 5% **c)** 7% **d)** 9% **e)** 11%

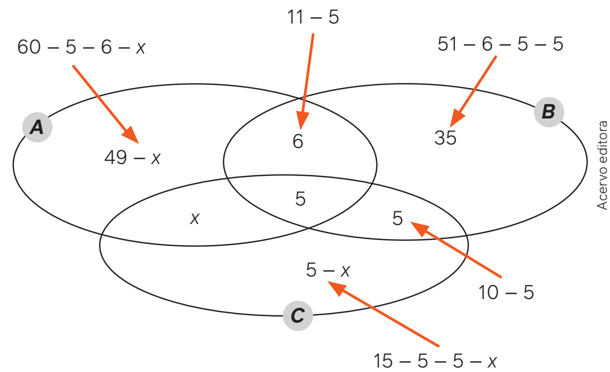
- No diagrama de Venn a seguir, iniciamos colocando o percentual correspondente àqueles que consomem os três produtos (intersecção) e indicamos por x o percentual perguntado no enunciado:



- Indicamos a seguir os percentuais das pessoas que consomem os produtos *A* e *B* sem consumir *C*, e as pessoas que consomem os produtos *B* e *C* sem consumir *A*.



- Indicamos a seguir os percentuais de pessoas que consomem apenas *A*, apenas *B* e apenas *C*.



- Adicionando-se esses percentuais, temos 100 (100%):

$$(49 - x) + 35 + (5 - x) + x + 5 + 5 + 6 = 100$$

$$105 - x = 100 \Rightarrow x = 5$$

Portanto, 5% das pessoas consomem os produtos *A* e *C* sem consumir o produto *B*. Alternativa **b**.

Atividades

18. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ determine:

a) $A \cap B$ 18. a) {1, 2}

b) $A \cap C$ 18. b) {3, 4}

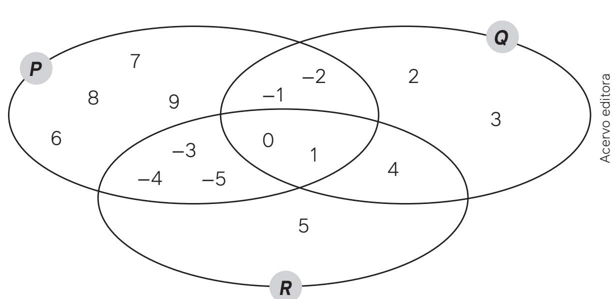
c) $A \cup C$ 18. c) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

d) $B \cup C$ 18. d) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

e) $A - B$ 18. e) {0, 3, 4}

f) $B - C$ 18. f) {1, 2}

19. No diagrama a seguir estão indicados os elementos dos conjuntos *P*, *Q* e *R*.



Determine os seguintes conjuntos:

a) $P \cap Q \cap R$ 19. a) {0, 1}

b) $P \cup Q \cup R$ 19. b) {–5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

c) $P - Q$ 19. c) {–5, –4, –3, 6, 7, 8, 9}

d) $P - (Q \cap R)$ 19. d) {–5, –4, –3, –2, –1, 6, 7, 8, 9}

e) $(P \cup Q) - (Q \cap R)$ 19. e) {–5, –4, –3, –2, –1, 2, 3, 6, 7, 8, 9}

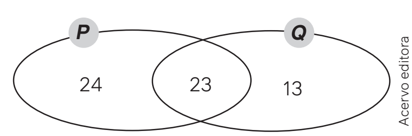
f) $(P \cap Q) \cup (Q \cap R)$ 19. f) {–2, –1, 0, 1, 4}

20. Em relação aos conjuntos da atividade anterior, verifique a veracidade de cada afirmação a seguir.

I. $P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$ 20. I. Verdadeira.

II. $P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$ 20. II. Verdadeira.

21. Para resolver uma situação envolvendo quantidades de elementos dos conjuntos *P* e *Q*, o professor colocou na lousa o seguinte diagrama conforme as quantidades de elementos dados da situação.



Se n(*A*) representa número de elementos do conjunto *A*, determine o que se pede.

a) $n(P)$ 21. a) 47

b) $n(Q)$ 21. b) 36

c) $n(P \cap Q)$ 21. c) 23

d) $n(P \cup Q)$ 21. d) 60

e) $n(P - Q)$ 21. e) 24

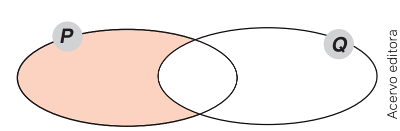
f) $n(Q - P)$ 21. f) 13

22. Em relação à situação anterior, responda às questões a seguir e justifique as respostas.

a) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q)$? 22. a) Não; resposta pessoal.

b) $n(P \cup Q) \neq n(P - Q) + n(Q - P)$? 22. b) Sim; resposta pessoal.

23. No diagrama a seguir estão representados dois conjuntos *P* e *Q* e parte desse diagrama está destacada.



Analise a veracidade ou não de cada afirmação sobre os conjuntos P e Q representados. 23. I. Falsa.

I. A região destacada é formada por todos os elementos que pertencem apenas ao conjunto Q.

II. Elementos que pertencem ao conjunto P e não pertencem ao conjunto Q estão na região destacada. 23. II. Verdadeira.

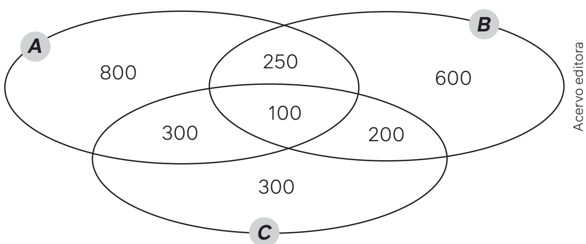
III. A parte destacada representa o conjunto $P - Q$. 23. III. Verdadeira.

IV. A parte não destacada representa o conjunto B. 23. IV. Verdadeira.

V. O conjunto $(P \cup Q) - Q$ representa a parte destacada. 23. V. Verdadeira.

IV. O conjunto $P - (P \cap Q)$ representa a parte destacada. 23. VI. Verdadeira.

24. Na resolução de uma situação, Paula representou em um diagrama de Venn as quantidades de elementos referentes aos conjuntos A, B e C.



24. d) 1 350, 1 050 e 800

Determine o que se pede a seguir.

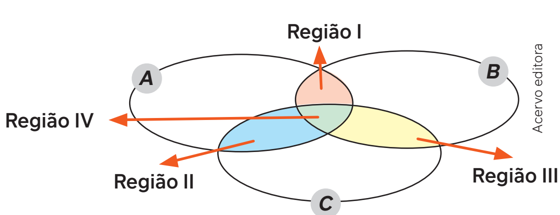
a) $n(A)$, $n(B)$ e $n(C)$ 24. a) 1 450, 1 150 e 900

b) $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$ e $n(B \cap C)$ 24. b) 350, 400 e 300

c) $n(A \cap B \cap C)$ e $n(A \cup B \cup C)$ 24. c) 100 e 2 550

d) $n[A - (B \cap C)]$, $n[B - (A \cap C)]$ e $n[C - (A \cap B)]$

25. No diagrama de Venn a seguir, foram coloridas quatro regiões distintas para ilustrar operações relacionadas aos conjuntos A, B e C.



a) Utilizando símbolos da teoria dos conjuntos, represente cada uma das quatro regiões (cada região tem apenas uma cor). 25. a) Resposta no Manual do Professor.

b) O que nesse diagrama corresponde à união entre as regiões I e IV? E as regiões II e IV? E as regiões III e IV? 25. b) $A \cap B$; $A \cap C$; $B \cap C$

26. Dados dois conjuntos A e B, e representando o conjunto vazio por $\varnothing$, assinale **V** para as afirmações verdadeiras e **F** para as afirmações falsas.

I. $A \cup \varnothing = A$ 26. I. V

II. $A \cap \varnothing = A$ 26. II. F

III. $B - \varnothing = B$ 26. III. V

IV. $\varnothing - B = B$ 26. IV. F

V. $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$ 26. V. V

27. Um professor de História sugeriu para as suas duas turmas do Ensino Médio que assistissem a dois filmes: um sobre a Primeira Guerra Mundial e outro sobre a Segunda Guerra Mundial. Passados alguns dias, o professor verificou que entre os estudantes:

- 40 assistiram ao filme da Primeira Guerra Mundial;
- 30 assistiram só ao filme da Segunda Guerra Mundial;
- 20 assistiram aos dois filmes;
- 30 não assistiram a nenhum deles.

a) Quantos estudantes assistiram ao filme da Primeira Guerra Mundial? 27. a) 40

b) Quantos estudantes assistiram ao filme da Segunda Guerra Mundial? 27. b) 50

c) Qual é o número total de estudantes dessas duas turmas juntas? 27. c) 100

28. Em uma turma do Ensino Médio foi proposto aos estudantes que lessem os livros A e B durante o primeiro semestre daquele ano. Ao final do prazo, verificou-se que:

- 80% dos estudantes leram o livro A;
- 60% dos estudantes leram o livro B.

Considerando que todo estudante dessa turma leu pelo menos um dos livros, determine o percentual de estudantes que leram os dois livros. 28. 40%

29. O dono de um supermercado encomendou um levantamento sobre a preferência de seus clientes em relação a três marcas diferentes A, B e C de um mesmo produto. Ao final do levantamento organizou o quadro a seguir contendo as quantidades de pessoas que compraram esses produtos.

Produtos	Número de pessoas que compraram
A	210
B	210
C	250
A, *B* e *C*	20
Nenhum	100
A e *B*	60
A e *C*	70
B e *C*	50

Fonte: Dados obtidos pela equipe de pesquisa (dados fictícios).

Quantos clientes participaram desse levantamento? 29. 610

30. Elabore uma situação envolvendo quantidades de elementos de dois conjuntos. Dê para um colega de sua turma resolver e resolva a situação elaborada por ele. 30. Resposta pessoal.

2 Conjuntos numéricos

Leia o trecho da matéria a seguir.

População mundial deve chegar a 9,7 bilhões de pessoas em 2050, diz relatório da ONU

A população mundial deve crescer em 2 bilhões de pessoas nos próximos 30 anos, passando dos atuais 7,7 bilhões de indivíduos para 9,7 bilhões em 2050, de acordo com um novo relatório das Nações Unidas lançado nesta segunda-feira (17).

POPULAÇÃO mundial deve chegar a 9,7 bilhões de pessoas em 2050, diz relatório da ONU. Nações Unidas Brasil, [*s. l.*], 17 jun. 2019. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/83427-popula%C3%A7%C3%A3o-mundial-deve-chegar-97-bilh%C3%B5es-de-pessoas-em-2050-diz-relat%C3%B3rio-da-onu. Acesso em: 10 jan. 2024.

Triff/Shutterstock.com

Temos cada vez mais a responsabilidade de cuidar do nosso planeta.

Para pensar e discutir

1. Qual é o número, escrito em algarismos, correspondente à população mundial estimada para o ano de 2050? 1. 9 700 000 000
2. Com base na matéria, qual será o percentual aproximado de crescimento estimado nos próximos 30 anos? 2. 26%

Utilizamos números em vários contextos. Nos Anos Finais do Ensino Fundamental, foram realizadas ampliações do campo numérico. Nessas ampliações, foram abordados o conjunto dos números naturais, dos números inteiros, dos números racionais, dos números irracionais e o dos números reais.

Retomaremos, a seguir, o estudo desses conjuntos numéricos, porém partiremos dos números racionais.

Ampliações do campo numérico

As diversas ampliações do campo numérico, ao longo da história, podem ser justificadas pelas necessidades que foram surgindo. Utilizando o que foi estudado na teoria dos conjuntos anteriormente, podemos utilizar o diagrama de Venn para representar os conjuntos numéricos que aqui serão retomados.

Números racionais

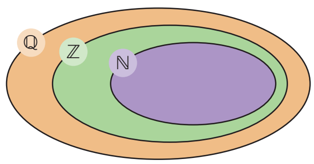
Quando adicionamos, subtraímos ou multiplicamos dois números inteiros quaisquer, o resultado é também um número inteiro. Dizemos que o conjunto dos números inteiros é fechado em relação a essas três operações. Entretanto, isso não ocorre com a divisão. Uma nova ampliação, agora do campo numérico, é feita com o conjunto dos números racionais.

O **conjunto dos números racionais**, representado pelo **símbolo** $\mathbb{Q}$, é o conjunto formado pelos números que podem ser expressos na forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b inteiros e $b \neq 0$. Indicamos por:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \ / \ x = \frac{a}{b}, \text{ com } a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}$$

O conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros são subconjuntos do conjunto dos números racionais. O diagrama de Venn a seguir ilustra essas relações de inclusão.

Acervo editora



Notação: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Números naturais: $\mathbb{N}$
↓ Ampliação
Números inteiros: $\mathbb{Z}$
↓ Ampliação
Números racionais: $\mathbb{Q}$

Vídeo
Conjuntos

Observações:

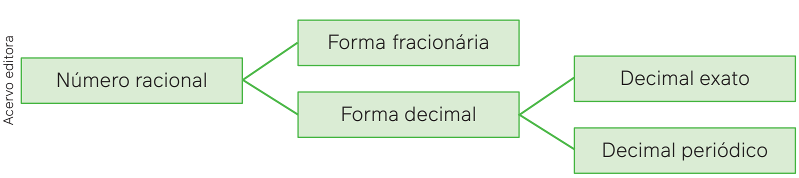
1. Um número racional pode ser representado na forma fracionária (razão ou quociente de dois números inteiros, sendo o divisor diferente de zero) e na forma decimal (dividindo o numerador pelo denominador indicados na forma fracionária).
2. A cada número racional podemos associar um ponto na reta numérica.

Para pensar e discutir

1. Entre quais inteiros, na reta numérica, está representado o número racional 0,7? 1. Entre 0 e 1.
2. Qual é a forma fracionária do número racional –7,2? 2. $-\frac{72}{10}$
3. Qual forma decimal do número racional corresponde à divisão do inteiro 4 pelo inteiro 3? 3. 1,333...
4. Em qual situação um número racional, quando escrito na forma decimal, pode ter infinitos algarismos após a vírgula? 4. Quando for uma dízima periódica.

Vimos que um número racional pode ser representado de duas maneiras: na forma fracionária e na forma decimal. Ao representar um número racional na forma decimal, ele pode ter um número finito de casas decimais (decimal exato) ou um número infinito de casas decimais (decimal periódico). O esquema abaixo auxilia nessa compreensão.

Acervo editora



Exemplos:

- –4 → decimal exato (número finito de casas decimais: zero);
- 1,007 → decimal exato (número finito de casas decimais: três);
- 0,414141... → decimal periódico (número infinito de casas decimais);
- –3,251251251... → decimal periódico (número infinito de casas decimais).

A seguir, apresentaremos procedimentos que auxiliam na compreensão de como obter a forma decimal de números racionais escritos na forma fracionária e, reciprocamente, como, a partir da forma decimal, podemos chegar à forma fracionária.

Atividades resolvidas

10. Utilizando a operação de divisão de dois números inteiros, escreva a forma decimal do número racional $\frac{35}{9}$.

- O racional dado na forma fracionária corresponde à divisão de 35 por 9:

$$
\begin{array}{r|l}
35 & 9 \\ \cline{2-2}
-27 & 3{,}888... \\ \cline{1-1}
80 & \\
-72 & \\ \cline{1-1}
80 & \\
-72 & \\ \cline{1-1}
8 & \\
\vdots &
\end{array}
$$

Portanto, a forma decimal do número racional é 3,888..., que também pode ser representada por $3{,}\overline{8}$, sendo que o traço está sobre o chamado **período da dízima periódica**.

11. A forma fracionária de uma dízima periódica é chamada de fração geratriz. Obtenha a fração geratriz do número racional $0{,}444 = 0{,}\overline{4}$.

- Uma maneira de obter a fração geratriz é a utilização de conhecimentos algébricos. Vamos representar esse número racional por x, isto é:

$$x = 0{,}444\ldots \text{ (I)}$$

- Como o período da dízima periódica tem 1 algarismo, multiplicamos a igualdade anterior por 10, obtendo:

$$10x = 4{,}444\ldots \text{ (II)}$$

- Fazendo (II) menos (I) membro a membro, temos:

$$10x - x = 4{,}444\ldots - 0{,}444\ldots$$
$$9x = 4$$
$$x = \frac{4}{9}$$

Logo, $\frac{4}{9}$ é a geratriz (forma fracionária) da dízima periódica 0,444...

> Quando multiplicamos x por 10, obtemos $10x$. Note que tanto x quanto $10x$ têm a mesma parte decimal.

12. Obtenha a fração geratriz do número 3,454545...

- Representando o número dado por x, temos:

$$x = 3{,}454545\ldots \text{ (I)}$$

- Como o período da dízima periódica tem 2 algarismos, multiplicamos a igualdade anterior por 100, obtendo:

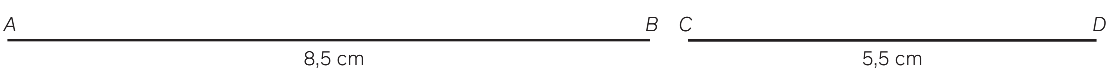
$$100x = 345{,}4545\ldots \text{ (II)}$$

- Subtraindo (I) de (II), membro a membro, temos:

$$100x - x = 345{,}454545\ldots - 3{,}454545\ldots$$
$$99x = 342$$
$$x = \frac{342}{99}$$

Logo, $\frac{342}{99}$ é a geratriz da dízima periódica 3,454545...

13. Qual é a razão entre as medidas dos segmentos AB e CD, nessa ordem, que estão representados a seguir? Esse quociente representa um número racional?



Acervo editora

- A razão entre as medidas dos segmentos AB e CD, nessa ordem, é:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{8{,}5}{5{,}5} = \frac{85}{55} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = 1{,}545454\ldots$$

- A razão (quociente) é representada por um número racional.

Para explorar

Junte-se a 2 ou 3 colegas para estas atividades.

1. Em uma folha, representem uma reta numérica. Nessa reta, marquem dois pontos separados por 10 cm. No ponto da esquerda, representem o número 1 e, no ponto da direita, o número 2. Após, indiquem a localização de cada número racional a seguir.

a) Número que representa a média aritmética entre 1 e 2. 1. a) 1,5

b) Número que representa a média aritmética entre 1 e o número obtido no item **a**. 1. b) 1,25

c) Número que representa a média aritmética entre 1 e o número obtido no item **b**. 1. c) 1,125

d) Repitam esse procedimento mais algumas vezes. 1. d) Resposta pessoal.

2. Respondam às questões a seguir, justificando suas respostas com base no que vocês observaram na atividade anterior.

a) Na reta numérica, quantos números inteiros existem entre dois números inteiros consecutivos? 2. a) Nenhum.

b) Na reta numérica, quantos números racionais existem entre dois números racionais distintos? 2. b) Infinitos.

c) Na reta numérica, os números racionais são suficientes para preencher todos os pontos entre dois números racionais distintos? 2. c) Não.

3. Utilizem uma calculadora para obter a forma decimal dos seguintes números racionais dados na forma fracionária cujas representações decimais são dízimas periódicas:

a) $\frac{89}{90}$ 3. a) 0,9888...

b) $\frac{2}{7}$ 3. b) 0,285714285714285714...

c) $-\frac{132}{999}$ 3. c) −0,132132132...

4. Como a calculadora utilizada na atividade anterior representou as infinitas casas decimais das dízimas periódicas? 4. Resposta pessoal.

Atividades

31. Responda:

a) Qual é o oposto do número 0,45? 31. a) −0,45

b) Qual é o inverso do número 0,45 na forma decimal? 31. b) 2,222...

c) Quais são os valores racionais de *x* na equação $|x| = \frac{7}{5}$? 31. c $-\frac{7}{5}$ ou $\frac{7}{5}$

32. Obtenha, sem o auxílio da calculadora, as frações que geram as dízimas periódicas a seguir.

a) 0,777... 32. a) $\frac{7}{9}$

b) −0,555... 32. b) $-\frac{5}{9}$

c) 0,232323... 32. c) $\frac{23}{99}$

d) −0,474747... 32. d) $-\frac{47}{99}$

e) 1,234234234... 32. e) $\frac{1\,233}{999}$

33. A sequência a seguir foi formada, da esquerda para direita, de acordo com um padrão numérico.

Acervo editora

$\boxed{1} \rightarrow \boxed{0{,}5} \rightarrow \boxed{0{,}25} \rightarrow \boxed{0{,}125} \rightarrow \ldots$

a) Escreva os 4 próximos números dessa sequência. 33. a) 0,0625; 0,03125; 0,015625 e 0,0078125

b) Esses 4 números que você obteve são decimais exatos? 33. b) Sim.

c) Explique o padrão numérico utilizado para formar a sequência. 33. c) Cada número a partir do segundo é o imediatamente anterior dividido por dois.

34. Considere os números racionais *a*, *b* e *c* abaixo indicados:

$$a = -2{,}45$$

$$b = -\frac{7}{3}$$

$$c = -2{,}555\ldots$$

a) Qual deles é maior? 34. a) *b*

b) Qual deles é menor? 34. b) *c*

c) Qual deles tem o maior módulo? 34. c) *c*

d) Qual deles tem o menor módulo? 34. d) *b*

35. Seja um quadrado cujos lados medem 2,6 cm.

a) A medida do perímetro, em centímetros, desse quadrado é representado por um número racional? Qual número? 35. a) Sim; 10,4.

b) A medida da área, em centímetros quadrados, desse quadrado é representada por um número racional? Qual número? 35. b) Sim; 6,76.

36. Multiplicando o inverso de um número racional diferente de zero pelo próprio número racional, o resultado é igual a 1.

a) Determine o inverso do número racional 0,25. 36. a) 4

b) Qual é o inverso do número 0,242424...? 36. b) $\frac{99}{24}$ ou 4,125

37. Responda:

a) A soma de dois números racionais é também um número racional? 37. a) Sim.

b) A diferença de dois números racionais é também um número racional? 37. b) Sim.

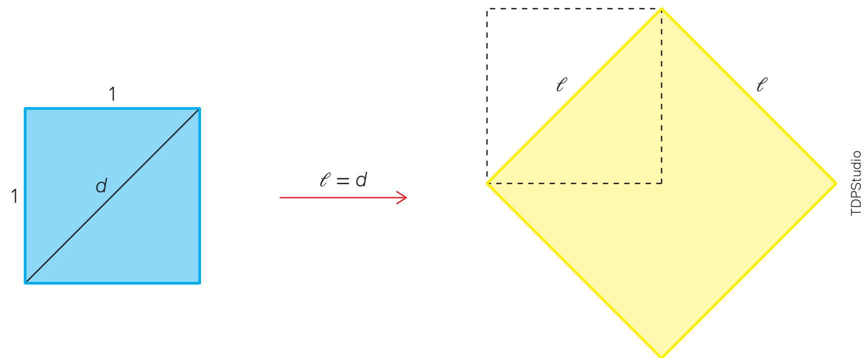
c) O produto de dois números racionais é também um número racional? 37. c) Sim.

d) O quociente de dois números racionais, sendo o divisor diferente de zero, é um número racional? 37. d) Sim.

e) Qual é o número que deve ser multiplicado pelo número $\frac{3}{5}$ para resultar 1? 37. e) $\frac{5}{3}$

Números irracionais

Vamos considerar um quadrado de lado medindo 1 unidade de comprimento (podemos representar por 1 u.c.). Desse quadrado, construímos um outro quadrado em que a medida do lado é igual à medida da diagonal do quadrado de lado 1 u.c., como ilustrado a seguir.



Para pensar e discutir

1. Qual é a medida da diagonal d do quadrado menor? Explique como calculou. 1. $d = \sqrt{2}$. u. c.; resposta pessoal.
2. Em unidades de área, qual é a medida da área do quadrado menor? E a do quadrado maior? 2. Menor: 1 u.a.; maior: 2 u.a.
3. Qual é a relação entre as áreas dos dois quadrados? 3. A área do quadrado maior é o dobro da área do quadrado menor.
4. A razão entre as medidas dos lados do quadrado maior e do quadrado menor, nessa ordem, é representada por um número racional? 4. Não.

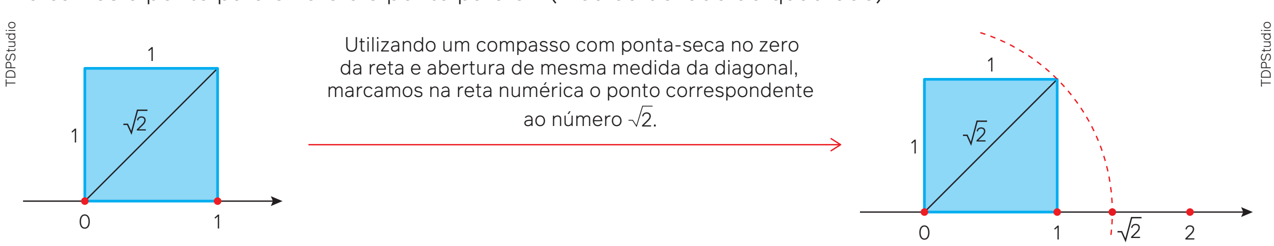
Ao determinar a medida da diagonal do quadrado de lado 1 u.c. chegamos, conforme a situação acima, no número $\sqrt{2}$. Se utilizarmos uma calculadora científica para determinar a forma decimal de representação desse número obtemos:

$$\sqrt{2} = \underbrace{1{,}4142125623730950488016887244209...}_{\text{Infinitas casas decimais e não periódicas.}}$$

Para pensar e discutir

1. $\sqrt{2}$ é número racional? Por quê?
1. Não; resposta pessoal.

Utilizando a situação anterior relacionada ao quadrado, vimos que a medida da diagonal do quadrado menor ou a medida do lado do quadrado maior é representada pelo número $\sqrt{2}$. Utilizando-se de construção geométrica, podemos localizar, na reta numérica, o ponto correspondente a esse número. Observe a figura a seguir, em que indicamos o ponto para o zero e o ponto para o 1 (medida do lado do quadrado).



Sabemos que esse número está entre os inteiros 1 e 2. Por meio de aproximações de números racionais e utilizando uma calculadora vamos obter $\sqrt{2}$:

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

- 1ª aproximação (por tentativa): $1{,}4^2 = 1{,}96$ e $1{,}5^2 = 2{,}25$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
- 2ª aproximação (por tentativa): $1{,}41^2 = 1{,}9881$ e $1{,}42^2 = 2{,}0164$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
- 3ª aproximação (por tentativa): $1{,}414^2 = 1{,}999396$ e $1{,}415^2 = 2{,}002225$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$

Se prosseguirmos com esse procedimento, podemos obter aproximações cada vez melhores para o número $\sqrt{2}$, entretanto, não chegaríamos ao valor que elevado ao quadrado tivesse como resultado 2. Teríamos aproximações. A representação decimal de $\sqrt{2}$ tem uma infinidade de casas decimais não periódicas. É possível demonstrar que esse número não pode ser obtido como quociente (razão) de dois números inteiros, portanto não é um número racional. Ele é denominado **irracional**.

O conjunto dos números **irracionais** é formado pelos números que têm a representação decimal infinita e não periódica.

Veja exemplos.
São números irracionais:

- $\sqrt{3}$
- $1 - \sqrt{2}$
- π
- $\frac{\pi}{2}$

Na atividade a seguir, você irá investigar um pouco mais os números irracionais.

Para explorar

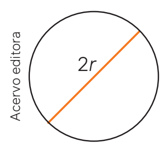
Com o uso de uma calculadora, junte-se a um colega para estas atividades.

1. Escrevam uma aproximação racional com 4 casas decimais para cada um dos números irracionais a seguir.

a) $\sqrt{3}$ 1. a) 1,7320 **b)** $\sqrt{5}$ 1. b) 2,2361 **c)** $\sqrt{28}$ 1. c) 5,2915 **d)** $\sqrt{90}$ 1. d) 9,4868

2. Elevando ao quadrado os números da atividade anterior, verifiquem se as aproximações para as raízes quadradas foram por falta (menores) ou por excesso (maiores) em cada item. 2. a) Falta. b) Excesso. c) Falta. d) Falta.

3. Ao dividir o comprimento de uma circunferência (C) pela medida de seu diâmetro (d) obtemos o número irracional indicado por π.



$$\longrightarrow \quad \frac{C}{d} = \pi \Rightarrow \frac{C}{2r} = \pi$$

a) Selecionem um objeto que tenha o seu contorno em forma de circunferência. 3. a) Resposta pessoal.

b) Pesquisem uma maneira de obter o comprimento dessa circunferência e anote-o. 3. b) Resposta pessoal.

c) Determinem e anotem o comprimento do diâmetro dessa circunferência. 3. c) Resposta pessoal.

d) Calculem a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro da circunferência. 3. d) Resposta pessoal.

e) Qual é a aproximação racional para o número irracional π com 4 casas decimais? 3. e) Resposta pessoal.

Atividades resolvidas

14. A relação matemática $C = 2\pi r$ permite calcular o comprimento de uma circunferência de raio r. Com duas casas decimais, obtenha o comprimento de uma circunferência de diâmetro igual a 10 cm.

- Como o diâmetro de uma circunferência é o dobro da medida do raio, temos, em centímetros:

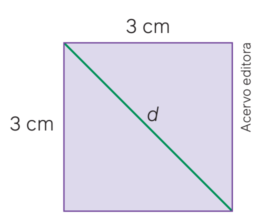
$$2r = 10 \Rightarrow r = 5$$

- Fazendo uma aproximação racional do número irracional π para duas casas decimais, temos:

$$C = 2\pi r \Rightarrow C \cong 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \Rightarrow C \cong 31{,}4$$

Portanto, a circunferência terá comprimento aproximado de 31,4 cm.

15. Utilizando o teorema de Pitágoras, determine a medida, em centímetros, da diagonal do quadrado representado a seguir.



Para pensar e discutir

1. Dividindo-se a medida da diagonal do quadrado (representado ao lado) pela medida do lado obtém-se qual valor? 1. $\sqrt{2}$

2. A razão entre a medida da diagonal e a medida do lado do quadrado é um número racional? Justifique. 2. Não; resposta pessoal.

- Conforme o teorema de Pitágoras, temos: $d^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow d^2 = 18 \Rightarrow d = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} \Rightarrow d = 3\sqrt{2}$.

Portanto, a medida da diagonal do quadrado é $3\sqrt{2}$ cm.

Análise e contexto

A quadratura do círculo

A “aceitação” dos números irracionais não é algo, assim, tão imediato. Isso também ocorreu com os números negativos. O texto a seguir permite conhecer um pouco mais da história dos números. O contexto é sobre o número irracional π relacionado à área de um círculo.

O mais famoso problema de toda a história da Matemática é o da “quadratura do círculo”. Dois outros problemas que desafiaram os geômetras gregos, a “duplicação do cubo” e a “trisseção de um ângulo”, podem, a título de interesse, ser brevemente tratados com o primeiro, embora apenas a quadratura do círculo envolva o valor π.

Na infância da Geometria, descobriu-se que era possível medir a área de uma figura cercada por linhas retas. Na verdade, a Geometria foi desenvolvida com este mesmo propósito – medir os campos do vale do Nilo, onde, todos os anos, com as enchentes do rio, desapareciam todas as marcas colocadas pelos fazendeiros, para indicar os campos que eram seus e quais os do vizinho. A medição de áreas delimitadas por linhas curvas apresentava dificuldades maiores, e foi feito um esforço para reduzir cada problema deste tipo ao da medida de áreas com limites retos. É claro que, se pudermos construir um quadrado com a área de um círculo dado medindo-se a área do quadrado, teremos a do círculo. A expressão “quadrar um círculo” tira seu nome desta aproximação.

O número π é a relação entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro. A área de um círculo de raio r é dada pela fórmula πr^2. Ora, a área de um quadrado com um lado A é A^2. Assim, a expressão algébrica: $A^2 = \pi r^2$ expressa a equivalência em área entre um quadrado dado e um círculo. Tirando as raízes quadradas de ambos os membros desta equação, temos $A = r\sqrt{\pi}$. Como r é uma quantidade conhecida, o problema de quadrar o círculo se resume, na realidade, na determinação do valor de π.

Fonte: KASNER, E.; NEWMAN, J. *Matemática e Imaginação*. Tradução de Jorge Fortes. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1968. p. 73-74.

1. Faça uma pesquisa e explique os significados das expressões a seguir.

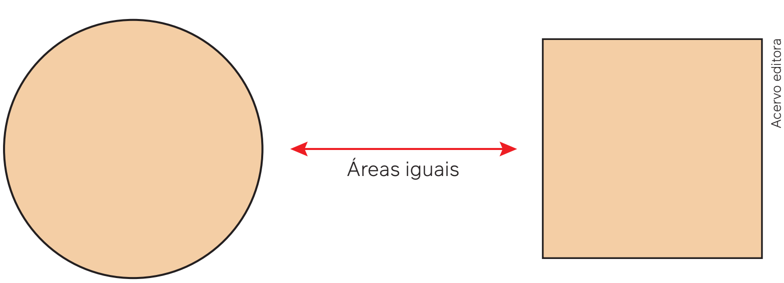
a) Duplicação do cubo. 1. a) Resposta pessoal.

b) Trisseção do ângulo. 1. b) Resposta pessoal.

c) Quadratura do quadrado. 1. c) Resposta pessoal.

2. Interprete a frase: “O número π é a relação entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro”. 2. Resposta pessoal.

3. Considerando que o círculo de diâmetro 20 cm e o quadrado a seguir representados têm a mesma área, qual deverá ser a medida do lado do quadrado? 3. $10\sqrt{\pi}$ cm

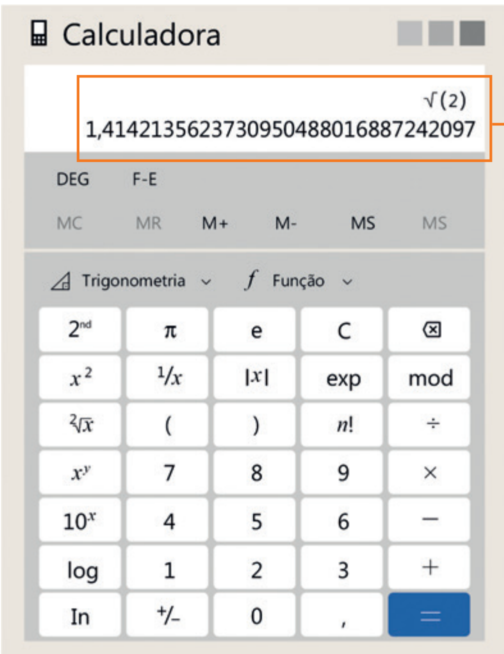


Troque ideias com um colega sobre as respostas que vocês deram para as questões acima. Apresente suas respostas para a turma.

Números reais

Mesmo com a utilização de calculadora, os números irracionais apresentam não apenas uma dificuldade de aceitação mas também de manipulação. Para trabalhar com esses números, muitas vezes são utilizadas aproximações. Assim, por exemplo, é muito comum utilizar 3,14 como aproximação para π. Outras aproximações racionais para números irracionais são feitas. Por exemplo, 1,41 como aproximação racional para o número irracional $\sqrt{2}$.

Reinaldo Vignati



A calculadora científica representada faz parte de aplicativos de programas de computador. Para chegar ao número que aparece no visor:

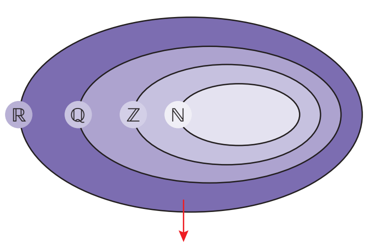
- digite 2;
- aperte a tecla $\sqrt[2]{2}$.

No visor aparecerá o número: 1,4142135623730950488016887242097.

Esse número é também uma aproximação racional para o número irracional $\sqrt{2}$.

Com o surgimento dos números irracionais, houve uma nova ampliação no campo numérico, criando-se, por meio da união dos números irracionais com os números racionais, o conjunto dos números reais. O diagrama a seguir representa essas ideias de forma resumida. O diagrama não está relacionado aos “tamanhos” desses conjuntos numéricos.

Acervo editora



Irracionais: $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Números naturais: $\mathbb{N}$

↓ Ampliação

Números inteiros: $\mathbb{Z}$

↓ Ampliação

Números racionais: $\mathbb{Q}$

↓ Ampliação com os irracionais

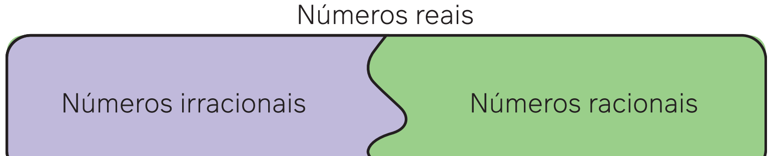
Números reais: $\mathbb{R}$

Observações:

1. Na representação, o conjunto formado pelos números irracionais corresponde à diferença dos conjuntos dos reais e dos racionais, isto é: $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
2. Se utilizarmos a letra I para representar os números irracionais, temos: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.
3. Um número real pode ser racional ou irracional, mas não os dois simultaneamente. O esquema a seguir permite observar melhor essa relação entre esses conjuntos.

Números reais

Acervo editora



Para pensar e discutir

1. Conforme diagrama dos conjuntos numéricos apresentados, é correto dizer que:

a) todo número natural é também número inteiro? 1. a) Sim.

b) todo número inteiro é número racional? 1. b) Sim.

c) todo número racional é número real? 1. c) Sim.

d) todo número real é racional? 1. d) Não.

e) todo número irracional é real? 1. e) Sim.

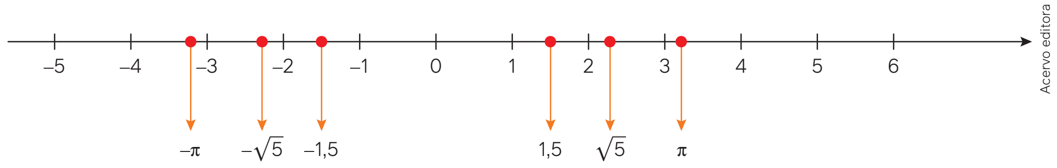
f) todo número real é irracional? 1. f) Não.

2. Utilizando o símbolo $\subset$ (está contido), qual é a relação de inclusão entre os conjuntos representados por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$? 2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

3. Todo número inteiro é natural? Todo número racional é inteiro? Todo número real é racional?
3. Não para todas as perguntas.

4. Utilizando o que foi estudado na teoria dos conjuntos, como representar o conjunto dos números irracionais com base nos números reais e nos números racionais? 4. $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Em nosso estudo, utilizamos a reta numérica para representar os números. À medida que as ampliações dos campos numéricos foram feitas (dos naturais até os racionais), mencionamos que tais números não eram suficientes para "preencher" totalmente a reta. Agora, com os irracionais, pode-se demonstrar que a reta ficará completamente preenchida. Essa reta totalmente preenchida com os números reais (os racionais e também os irracionais) é denominada **reta real**.



A cada ponto da reta real pode ser associado um único número real, e a cada número real pode ser associado um único ponto da reta real. Essa correspondência entre os números reais e a reta dos reais é biunívoca.

Observações:

1. Em relação aos números reais, temos:

- a soma de dois números reais é um número real;
- a diferença de dois números reais é um número real;
- o produto de dois números reais é um número real;
- o quociente de dois números reais, sendo o divisor diferente de zero, é um número real.

2. Dado um número real, seu oposto é tal que, na reta numérica, equidistam do ponto que representa o zero.

3. Todo número real diferente de zero tem um inverso.

4. Existe, ainda, o conjunto dos números complexos que representa uma ampliação do campo numérico em relação ao conjunto dos números reais. Entretanto, esse conjunto não é aqui estudado.

Para as competências e habilidades que necessitam do conhecimento numérico em nosso estudo, o conjunto dos números reais se mostra suficiente. Ele será a referência para os assuntos não apenas numéricos, mas também geométricos e algébricos. Podemos até dizer que o conjunto dos números reais representa o conjunto universo, ou seja, o nosso contexto de campo numérico.

Atividades resolvidas

16. Racionalize os denominadores dos seguintes números reais:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

- Eliminamos o radical ou os radicais que existem nos denominadores. Assim, no item **a**, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo fator de racionalização que é o próprio denominador:

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{25}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

- Utilizamos no item **b** o produto notável $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ para eliminar os radicais do denominador:

São casos de produtos notáveis:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{1}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

17. Verifique se o número x dado por $x=\left(2-\sqrt{3}\right)^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$ é racional ou irracional.

- Utilizando os três casos de produtos notáveis, temos:

$$x=\left(2-\sqrt{3}\right)^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$$

$$x=4-4\sqrt{3}+3+4+4\sqrt{3}+3-(4-3)$$

$$x=4-4\sqrt{3}+3+4+4\sqrt{3}+3-1\Rightarrow x=13$$

Portanto, x é um número racional.

18. Prove, por redução ao absurdo, que o número $\sqrt{2}$ é um número irracional.

- Vamos supor que $\sqrt{2}$ é um número racional, isto é, negamos que é irracional. Assim, sendo racional, significa que existem dois números inteiros, a e b, que permitem escrever $\sqrt{2}$ na forma fracionária (consideramos que a fração é irredutível).

$$\frac{a}{b}=\sqrt{2}$$

$\big\downarrow$ Elevando os dois membros ao quadrado.

$$\frac{a^2}{b^2}=2$$

$$a^2=2b^2\ (\text{I})$$

- Como a^2 é o dobro de b^2, temos que a^2 é um número par. Mas se a^2 é número par, temos que a também é número par. Logo, existe um inteiro m tal que $a=2m$ que substituímos em (I):

$$a^2=b^2$$

$\big\downarrow$ $a=2m$

$$(2m)^2=2b^2$$

$$4m^2=2b^2$$

$$2m^2=b^2\ (\text{II})$$

- Como b^2 é o dobro de m^2, temos que b^2 é um número par. Mas se b^2 é número par, temos que b também é número par. Se a e b, por (I) e (II), são ambos números pares, significa que a fração não é irredutível, isto é, contraria a suposição inicial (o que representa um absurdo). Portanto, $\sqrt{2}$ não pode ser obtida como razão de dois inteiros, ou seja, não é racional. A conclusão é que é um número irracional.

Atividades

38. Para cada número real abaixo representado escreva o seu oposto.

a) $2 - \sqrt{2}$ 38. a) $-2 + \sqrt{2}$

b) $4\pi - 10$ 38. b) $-4\pi + 10$

c) $9\sqrt{3}$ 38. c) $-9\sqrt{3}$

39. Responda:

a) Todo número irracional tem número oposto? 39. a) Sim.

b) Qual é o resultado da multiplicação de um número racional, diferente de zero, pelo seu inverso? 39. b) 1

c) Qual é o resultado da multiplicação de um número irracional pelo seu inverso? 39. c) 1

40. Escreva cinco números reais tais que:

a) sejam maiores que 1,12 e menores que 1,13; 40. a) Resposta pessoal.

b) estejam compreendidos entre os números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. 40. b) Resposta pessoal.

41. O módulo de um número real x, representado por $|x|$, pode ser assim definido:

- $|x| = x$, se $x \geq 0$ ou $|x| = -x$, se $x < 0$.

O módulo de um número real, ao ser representado na reta numérica, pode ser interpretado como a distância do ponto que o representa ao ponto que representa o zero na reta.

Calcule o módulo do número real x se:

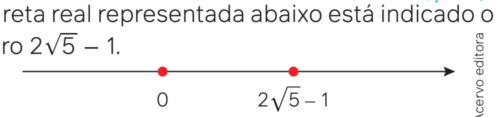
a) $x = 10$ 41. a) 10

b) $x = -10$ 41. b) 10

c) $x = 3 + \sqrt{7}$ 41. c) $3 + \sqrt{7}$

d) $x = 1 - \sqrt{10}$ 41. d) $-1 + \sqrt{10}$

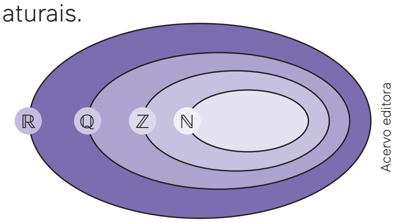
42. Na reta real representada abaixo está indicado o número $2\sqrt{5} - 1$.



a) Qual é a distância do ponto que representa esse número e o ponto correspondente ao zero? 42. a) $2\sqrt{5} - 1$ u.c.

b) Existe outro número que pode ser representado na reta numérica com a mesma distância da origem? Qual é esse número? 42. b) Sim; $-2\sqrt{5} + 1$.

43. No diagrama a seguir estão representados os conjuntos dos números reais, dos racionais, dos inteiros e dos naturais.



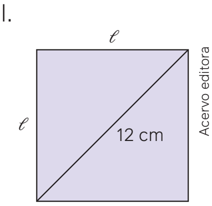
a) Quais números estão no conjunto $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$? 43. a) Inteiros negativos.

b) Quais números estão no conjunto $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$? 43. b) Racionais não inteiros.

c) Utilizando apenas a diferença entre dois dos conjuntos citados, represente o conjunto dos números irracionais. 43. c) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

44. Dois quadrados deverão ser construídos em uma folha. O menor quadrado tem lado 6 cm. Qual deverá ser a medida do lado do segundo quadrado, considerando que sua área é o dobro da área do quadrado menor? 44. $6\sqrt{2}$ cm

45. Abaixo está representado um quadrado e a medida de sua diagonal.



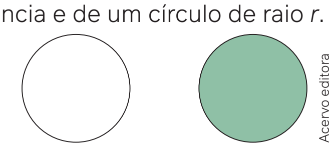
45. a) $6\sqrt{2}$ cm

a) Determine a medida do lado desse quadrado.

b) A razão entre as medidas da diagonal e a do lado do quadrado, nessa ordem, é um número racional? 45. b) Não.

46. O lado de um quadrado mede 7 cm. Para que sua área seja duplicada, qual deverá ser a medida do novo quadrado? 46. $7\sqrt{2}$cm

47. Um círculo é uma região limitada por uma circunferência. Nas relações $C = 2\pi r$ e $A = \pi r^2$, calculamos o comprimento e a área, respectivamente, de uma circunferência e de um círculo de raio r.



Circunferência Círculo

a) Duplicando a medida do raio r, o que ocorre com o comprimento da circunferência? 47. a) Duplica.

b) E com a área do círculo? 47. b) Quadruplica.

c) Triplicando a medida do raio r, o que ocorre com o comprimento da circunferência? 47. c) Triplica.

d) E com a área do círculo? 47. d) Fica multiplicada por nove.

48. Considere que o número x possa ser obtido pelas operações indicadas a seguir.

$$x = (5 - \sqrt{2})^2 + (5 + \sqrt{2})^2 - (5 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{2})$$

a) Determine x. 48. a) 31

b) Verifique se x é racional ou irracional. 48. b) É racional.

c) Escreva o inverso de x. 48. c) $\frac{1}{31}$

d) Escreva o oposto de x. 48. d) -31

49. Racionalize os denominadores das seguintes frações:

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 49. a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{10}{\sqrt{10}}$ 49. b) $\sqrt{10}$

c) $\frac{1}{\sqrt{12} - \sqrt{10}}$ 49. c) $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{10}}{2}$

d) $\frac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{6}}$ 49. d) $3(\sqrt{7} + \sqrt{6})$ ou $3\sqrt{7} + 3\sqrt{6}$

50. Indique **V** para as afirmações verdadeiras ou **F** para as falsas.

I. Se um número real é negativo, então o dobro desse número também é negativo. 50. I. V

II. O triplo de qualquer número real é sempre positivo. 50. II. F

III. A raiz quadrada de qualquer número natural sempre resulta em um número irracional. 50. III. F

IV. O quadrado de qualquer número real é sempre positivo. 50. IV. F

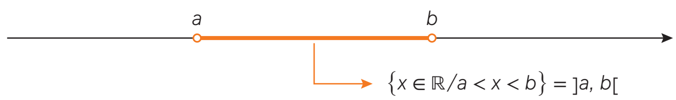
V. Se $|x| = \sqrt{3}$, então $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$. 50. V. V

Intervalos reais

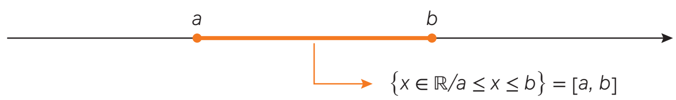
Entre dois números reais distintos quaisquer, existem infinitos outros números reais que pertencem a subconjuntos dos números reais. Para identificar tais subconjuntos, utilizamos algumas notações e representações especiais. Tais subconjuntos são os intervalos reais.

Vamos considerar as representações a seguir, em que a e b representam dois números reais, sendo $a < b$.

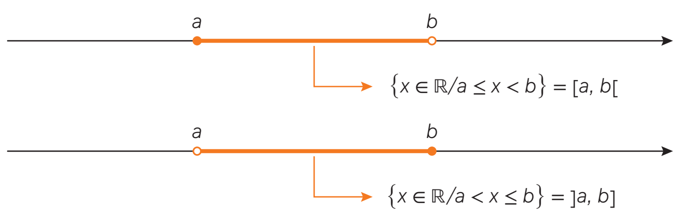
- Intervalo aberto



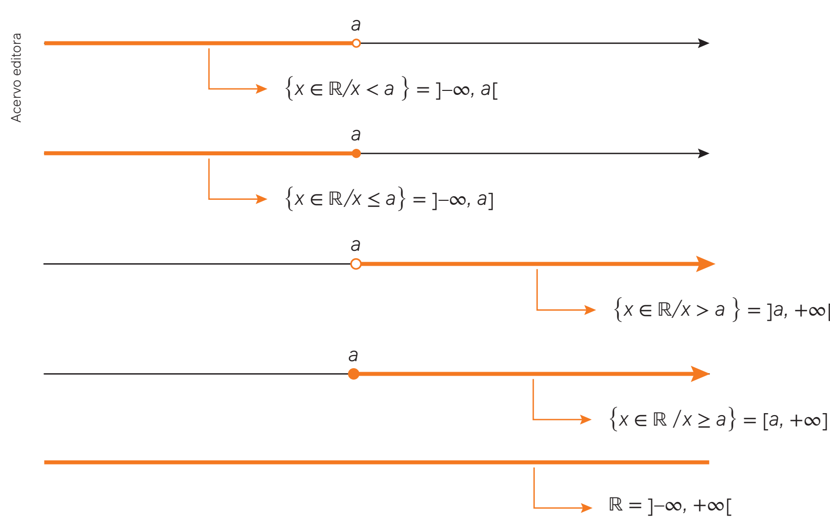
- Intervalo fechado



- Intervalos semiabertos



- Intervalos ilimitados



Observações:

1. Os símbolos $-\infty$ e $+\infty$ (lemos "menos infinito" e "mais infinito", respectivamente) não são números reais, são apenas símbolos utilizados na notação de intervalos ilimitados.
2. Para representar intervalos abertos, podemos empregar parênteses:
   $]a, b[= (a, b)$; $]a, b] = (a, b]$ e $[a, b[= [a, b)$.

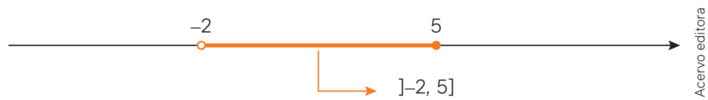
Para pensar e discutir

1. Qual é a interpretação da "bolinha vazia" utilizada no extremo de um intervalo real? 1. Resposta pessoal.
2. E da "bolinha cheia"? 2. Resposta pessoal.
3. Qual é a quantidade de números reais pertencentes ao intervalo $]-2, 12]$? 3. Infinitos.
4. E qual é a quantidade de números inteiros pertencentes ao intervalo $]-2, 12]$? 4. 14

Atividades resolvidas

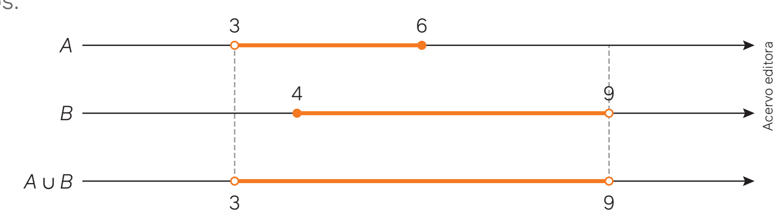
19. Represente na reta numérica todos os números reais do conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -2 < x \leq 5\}$.

- Na reta numérica, marcamos os pontos correspondentes aos números –2 e 5, excluindo o –2 e incluindo o 5. Além disso, incluímos todos os números entre –2 e 5, isto é:



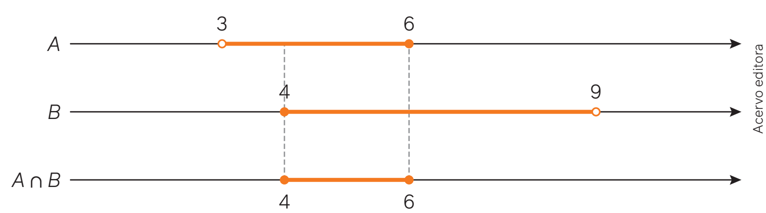
20. Dados os subconjuntos dos reais $A =]3, 6]$ e $B = [4, 9[$, determine os conjuntos $A \cup B$ e $A \cap B$.

- Para determinar a união entre os dois conjuntos na forma de intervalo, representamos cada um deles em uma reta numérica e, em outra reta numérica, interpretamos a união analogamente ao que já fizemos com outros conjuntos numéricos.



Logo, $A \cup B =]3, 9[$.

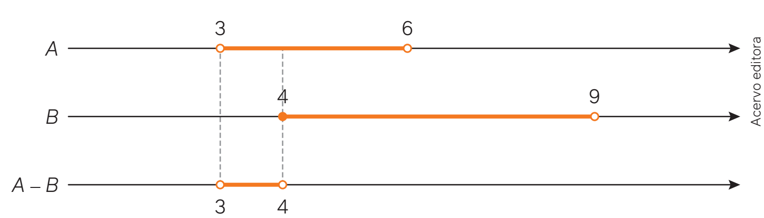
- Para a intersecção entre os dois conjuntos na forma de intervalos, representamos cada um deles em uma reta numérica e, em outra reta numérica, interpretamos a intersecção analogamente ao que já fizemos com outros conjuntos numéricos.



Logo, $A \cap B = [4, 6]$.

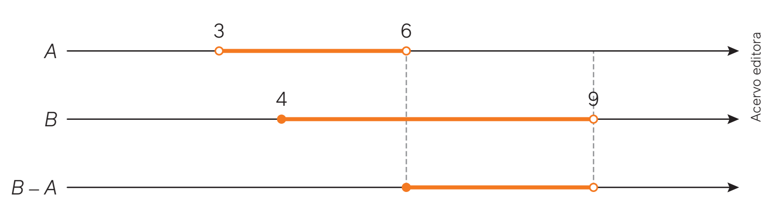
21. Dados os subconjuntos dos reais $A =]3, 6[$ e $B = [4, 9[$, determine os conjuntos $A - B$ e $B - A$.

- Para a diferença entre os dois conjuntos na forma de intervalos, representamos cada um deles em uma reta numérica e, em outra reta numérica, interpretamos a diferença (pertencem a A e não a B) analogamente ao que já fizemos com outros conjuntos numéricos.



Logo, $A - B =]3, 4[$.

- A diferença $B - A$ é obtida analogamente, observando os elementos que pertencem a B e não pertencem a A:



Logo, $B - A = [6, 9[$.

Para pensar e discutir

1. Na **atividade resolvida 19**, quais números inteiros pertencem ao intervalo? 1. –1, 0, 1, 2, 3, 4 e 5
2. Na **atividade resolvida 21**, qual é o motivo de o número real 4 não pertencer ao conjunto $A - B$? 2. Resposta pessoal.
3. E qual é o motivo de o número real 6 pertencer ao conjunto $B - A$? 3. Resposta pessoal.

Atividades

51. Represente na reta numérica cada um dos seguintes intervalos reais:

a) $[-2, 7)$ 51. a) Resposta no Manual do Professor.

b) $(-4, 10[$ 51. b) Resposta no Manual do Professor.

c) $]3, 5[$ 51. c) Resposta no Manual do Professor.

d) $[-3, 9]$ 51. d) Resposta no Manual do Professor.

52. Na reta numérica a seguir está representado um subconjunto A dos números reais.

a) Quais números naturais pertencem a A? 52. a) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}

b) É correto afirmar que $-3 \in A$? 52. b) Não.

c) Qual é a representação na forma de conjunto de todos os elementos x que pertencem a A? 52. c) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -3 < x \leq 15\}$.

53. Represente na reta numérica os conjuntos a seguir.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -7 < x \leq 7\}$ 53. a) Resposta no Manual do Professor.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -\pi < x \leq 2\pi\}$ 53. b) Resposta no Manual do Professor.

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 9 < x < 10\}$ 53. c) Resposta no Manual do Professor.

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < x \leq 8\}$ 53. d) Resposta no Manual do Professor.

54. Dados os subconjuntos dos reais $A = [-2, 5]$, $B = [-1, 7)$ e $C = (-\infty, -1]$, obtenha:

a) $A \cup B$ 54. a) $[-2, 7)$

b) $A \cap B$ 54. b) $[-1, 5]$

c) $A - C$ 54. c) $]-1, 5]$

d) $C - B$ 54. d) $]-\infty, -1[$

e) $A \cup B \cup C$ 54. e) $]-\infty, 7[$

f) $A \cap B \cap C$ 54. f) $\{-1\}$

55. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 < x < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \leq x \leq 6\}$. Obtenha:

a) $A \cap B$ 55. a) $[2, 5[$

b) $A - B$ 55. b) $]1, 2[$

c) $A \cup B$ 55. c) $]1, 6]$

d) $B - A$ 55. d) $[5, 6]$

56. Indique a quantidade de elementos de $A \cap B$ considerando que: 56. 7

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 0 \text{ ou } x > 4\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 0 < x < 12\}$$

57. Calcule a soma de todos os elementos pertencentes ao conjunto $(A \cap B) - C$, considerando que:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, 1 < x \leq 17\},\ B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, \text{é ímpar}\} \text{ e } C = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 9 \leq x \leq 18\}.$$ 57. 15

Atividades finais

1. Dê um exemplo de cada um dos seguintes conjuntos:

a) conjunto unitário; 1. a) Resposta pessoal.

b) conjunto vazio. 1. b) Resposta pessoal.

2. Responda:

a) Qual é o símbolo utilizado para representar que um elemento pertence a um conjunto? 2. a) $\in$

b) E para representar que um elemento não pertence a um conjunto? 2. b) $\notin$

c) Qual é o símbolo utilizado para representar que um conjunto é subconjunto de outro conjunto? 2. c) $\subset$

d) E para representar que um conjunto não é subconjunto de outro conjunto? 2. d) $\not\subset$

3. Dados os conjuntos A e B tem-se que $n(A) = 10$, $n(B) = 5$ e $n(A \cap B) = 2$. Obtenha:

a) $n(A \cup B)$ 3. a) 13

b) $n(A - B)$ 3. b) 8

c) $n(B - A)$ 3. c) 3

4. Dados dois conjuntos não vazios A e B, responda aos itens a seguir.

a) Qual relação matemática fornece o número de elementos da união desses dois conjuntos? 4. a) $n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

b) Qual é a condição para que $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$? 4. b) Que os conjuntos sejam disjuntos.

5. Em relação aos conjuntos A e B, tem-se que:

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\},\ A - B = \{1, 2, 10\} \text{ e } A \cap B = \{6, 8, 14\}$$

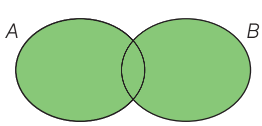
Nessas condições, determine:

a) o conjunto A; 5. a) $A = \{1, 2, 6, 8, 10, 14\}$

b) o conjunto B. 5. b) $B = \{4, 6, 8, 12, 14\}$

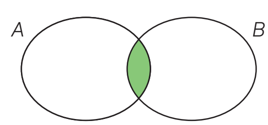
6. Sendo A um conjunto e B outro conjunto, descreva, utilizando a notação de conjuntos, o que representa a parte colorida de cada diagrama a seguir.

a)



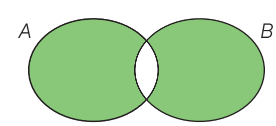
6. a) $A \cup B$

b)



6. b) $A \cap B$

c)



6. c) $(A \cup B) - (A \cap B)$

Imagens: Acervo editora

7. Considere verdadeira a igualdade entre os conjuntos abaixo.

$$\{1, 2, 4\} = \{1, x, 4\}$$

Qual é o valor de x? 7. 2

8. Dados os conjuntos $A = \{0, 2, 4, 6\}$ e $B = \{2, 4, 7, 8, 9, 10\}$, analise as afirmações sobre suas operações e indique quais afirmações são verdadeiras e quais são falsas.

I. $A - B = \{0, 2, 6, -7, -8, -9, -10\}$ 8. I. Falsa.

II. $B - A = \{-6, 0, 7, 8, 9, 10\}$ 8. II. Falsa.

III. $A - B = \{0, 6\}$ 8. III. Verdadeira.

IV. $B - A = \{7, 8, 9, 10\}$ 8. IV. Verdadeira.

9. Indique em um só diagrama todos os elementos dos conjuntos A, B e C, considerando que: $A = \{1, 2, 4, 7, 8\}$; $B = \{1, 2, 5, 6, 8\}$ e $C = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$. 9. Resposta no Manual do Professor.

10. Em relação aos conjuntos numéricos dos naturais, dos inteiros, dos racionais, dos irracionais e dos reais, analise cada afirmação a seguir e indique se são verdadeiras ou falsas.

I. Existem números inteiros que não são naturais. 10. I. Verdadeira.

II. Existem números racionais que não são reais. 10. II. Falsa.

III. Todo número que é irracional é também racional. 10. III. Falsa.

IV. Existem números reais que não são irracionais. 10. IV. Verdadeira.

V. Se um número é real, então ele é racional ou irracional. 10. V. Verdadeira.

11. Dados os conjuntos numéricos:

- $\mathbb{N} \rightarrow$ naturais;
- $\mathbb{Z} \rightarrow$ inteiros;
- $\mathbb{Q} \rightarrow$ racionais;
- $\mathbb{R} - \mathbb{Q} \rightarrow$ irracionais;
- $\mathbb{R} \rightarrow$ reais.

Dê um exemplo de valor de x tal que:

a) $x \in (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$; 11. a) Resposta pessoal.

b) $x \in (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$; 11. b) Resposta pessoal.

c) $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. 11. c) Resposta pessoal.

12. Ainda considerando os conjuntos numéricos mencionados na atividade anterior, obtenha:

a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$; 12. a) $\mathbb{N}$

b) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$; 12. b) $\mathbb{Z}$

c) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}$; 12. c) $\mathbb{Q}$

d) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$; 12. d) $\mathbb{Z}$

e) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z}$; 12. e) $\mathbb{Q}$

f) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R}$. 12. f) $\mathbb{R}$

13. Represente, na reta dos números reais, cada um dos seguintes subconjuntos dos números reais a seguir.

a) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 2 \text{ ou } x > 4\}$ 13. a) Resposta no Manual do Professor.

b) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4\}$ 13. b) Resposta no Manual do Professor.

c) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, -4 \leq x \leq -2\}$ 13. c) Resposta no Manual do Professor.

d) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 \leq x < 3\}$ 13. d) Resposta no Manual do Professor.

14. Dados A e B dois subconjuntos de números reais tais que $A = [-3, 10)$ e $B = (0, 7]$, determine:

a) $A \cup B$; 14. a) $[-3, 10)$

b) $A \cap B$; 14. b) $(0, 7]$

c) $A - B$; 14. c) $[-3, 0] \cup (7, 10)$

d) $B - A$. 14. d) { }

Questões de vestibulares e Enem

15. (Fuvest-SP) Se x e y são dois números inteiros, estritamente positivos e consecutivos, qual dos números abaixo é necessariamente um inteiro ímpar? 15. Alternativa **c**.

a) $2x + 3y$

b) $3x + 2y$

c) $xy + 1$

d) $2xy + 2$

e) $x + y + 1$

f) $c < a < b$

16. (Unifor-CE) Como parte do trabalho de conclusão de curso, um aluno do curso de Comunicação Social entrevistou 100 pessoas no campus onde estuda. As pessoas foram perguntadas se usavam a rede social A, a rede social B ou nenhuma delas. As respostas colhidas foram dispostas na seguinte tabela.

	Total de pessoas
Usa rede social A	87
Usa a rede social B	73
Nenhuma delas	12

A porcentagem das pessoas entrevistadas que usam ambas as redes sociais A e B é de 16. Alternativa **e**.

a) 25%

b) 43%

c) 57%

d) 65%

e) 72%

17. (FMC-SP) Considere $a = \frac{2}{7}$, $b = \frac{1}{5}$, $c = \frac{11}{30}$. Comparando os valores de a, b e c, conclui-se que 17. Alternativa **b**.

a) $a < b < c$

b) $b < a < c$

c) $c < b < a$

d) $b < c < a$

e) $c < a < b$

18. (UFRGS) Em uma escola, sabe-se que $\frac{4}{5}$ dos estudantes gostam de praticar somente o esporte A, $\frac{1}{3}$ dos estudantes gostam de praticar somente o esporte B, e $\frac{1}{6}$ dos estudantes gostam de praticar os esportes A e B. A fração que representa a quantidade de estudantes dessa escola que não praticam o esporte A e não praticam o esporte B é 18. Alternativa **a**.

a) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{2}{7}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{9}{10}$

19. (UEG-GO) Em uma pesquisa sobre turismo, foi feito o levantamento sobre viagens realizadas em 2021, por motivo de lazer, para cidades do Brasil e do exterior. A tabela a seguir mostra o resultado.

Tipo de viagem	Total de pessoas
Brasil	589
Exterior	260
Brasil e Exterior	57
Não viajaram	14

Quantas pessoas foram entrevistadas nessa pesquisa? 19. Alternativa **b**.

a) 778

b) 806

c) 849

d) 863

e) 920

20. (Uesb-BA) Sejam $C = A \cup B$ o conjunto das dez primeiras letras de nosso alfabeto e $D = A \cap B$ o conjunto das vogais pertencentes ao conjunto C. Sabendo-se que $B - A = \{b, c, d, f\}$, assinale a alternativa correta. 20. Alternativa **e**.

a) A tem 7 elementos.

b) B tem 6 elementos.

c) $A - B$ tem mais elementos do que $B - A$.

d) $A - B$ e $B - A$ têm o mesmo número de elementos.

e) $A - B = \{g, h, j\}$

21. (UERR) A Serra Tepequém tem várias cachoeiras como um de seus atrativos, entre elas se destacam as cachoeiras do Funil e do Barata. De entrevistas realizadas com vários turistas na porta de entrada da Serra, a Vila Tepequém, observou-se que, dentre os turistas entrevistados, 380 visitaram a cachoeira do Funil, 200 não visitaram a cachoeira do Barata e 290 visitaram as duas cachoeiras.
Na situação hipotética apresentada, o número de turistas entrevistados que não visitaram nenhuma das duas cachoeiras foi 21. Alternativa **e**.

a) inferior a 78.

b) superior a 79 e inferior a 87.

c) superior a 88 e inferior a 96.

d) superior a 97 e inferior a 105.

e) superior a 105.

22. (FMC-SP) Em uma clínica, foram atendidas, em uma segunda-feira, 150 pessoas com a mesma doença. Cada uma delas apresentou pelo menos um dos sintomas: febre, tosse, dor de garganta. Após a análise da situação clínica dos pacientes atendidos, foi elaborada a tabela:

SINTOMAS	NÚMERO de pessoas com sintomas
Febre	100
Tosse	100
Dor de garganta	100
Febre e tosse	60
Febre e dor de garganta	70
Tosse e dor de garganta	65

Analisando os dados da tabela, conclui-se que o número de pessoas que apresentaram todos os três sintomas (febre, tosse e dor de garganta) simultaneamente é: 22. Alternativa **c**.

a) 35

b) 40

c) 45

d) 50

e) 55

23. (Uece) Em uma pesquisa que envolveu 120 alunas de uma academia de dança, foram obtidos os seguintes dados: 80 delas querem ser atrizes, 70 querem ser cantoras e 50 querem ser atrizes e cantoras. Considerando estes dados, é correto concluir que o número de alunas que não querem ser cantoras nem atrizes é 23. Alternativa **b**.

a) 30

b) 20

c) 50

d) 40

24. (UFJF-MG) Considere os seguintes intervalos: $A =]-5, 4]$, $B = [1, 6]$ e $C = [2, 3]$. O conjunto formado por todos os números inteiros pertencentes a $(A \cap B) - C$ é: 24. Alternativa **a**.

a) {1, 4}

b) {2, 3}

c) {1, 2, 3}

d) {1, 2, 3, 4}

e) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

25. (UFMS) Em uma classe de 32 alunos, 16 estudam inglês, 12 estudam francês e 7 alunos não estudam inglês e nem francês. Qual é a proporção de alunos que estudam francês e inglês em relação aos que não estudam nenhum dos dois? 25. Alternativa **a**.

a) $\frac{3}{7}$

b) $\frac{9}{7}$

c) $\frac{12}{7}$

d) $\frac{13}{7}$

e) $\frac{16}{7}$

26. (Uece) Sejam os conjuntos

$K = \{x \in \mathbb{N}$ tais que $0 < x < 100\}$,
$X = \{x \in K$ e x é múltiplo de $2\}$,
$Y = \{x \in K$ e x é múltiplo de $3\}$,
$Z = \{x \in K$ e x é múltiplo de $5\}$.

Se $V = X \cap Y \cap Z$, então o número de subconjuntos de V é 26. Alternativa **a**.

a) 8

b) 16

c) 12

d) 20

27. (EAM-AM) Uma pesquisa de mercado, sobre o consumo de três marcas de café A, B e C, apresentou os seguintes resultados:

- 60% consomem o produto A;
- 51% consomem o produto B;
- 15% consomem o produto C;
- 5% consomem os três produtos;
- 11% consomem os produtos A e B; e
- 10% consomem os produtos B e C.

Qual é o percentual relativo à quantidade de pessoas que consomem, simultaneamente, os produtos A e C sem consumir o B? 27. Alternativa **b**.

a) 3%

b) 5%

c) 7%

d) 9%

e) 11%

28. (Cefet-MG) Sejam os conjuntos formados por elementos distintos tais que $A = \{x, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{y, 2, 4\}$, onde $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$. Se $A - B = \{3, 5\}$, então a diferença $x - y$ vale 28. Alternativa **a**.

a) -4

b) -2

c) 2

d) 4

29. (FMP-SP) Dados dois conjuntos A e B, o conjunto diferença $A - B$ é definido por:

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Sejam $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números reais e o conjunto dos números racionais, respectivamente. Um número que pertence ao conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é 29. Alternativa **d**.

a) 0

b) -1

c) $-\frac{2}{7}$

d) $\sqrt{2}$

e) $\sqrt{9}$

30. (UFRGS) Dados a e b números reais positivos, considere as afirmações abaixo.

I. Se $a > b$, então $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

II. Para quaisquer a e b, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é um número irracional.

III. Para quaisquer a e b, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$

Quais estão corretas? 30. Alternativa **a**.

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas III.

d) Apenas II e III.

e) I, II e III.

31. (Cefet-MG) Sejam $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, respectivamente, os conjuntos dos números inteiros e racionais, o número que não pertence ao conjunto $(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) - (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q})$ é 31. Alternativa **d**.

a) 3,14

b) 1,333...

c) $-\frac{7}{5}$

d) -1

32. (Unicamp-SP) Considere três números inteiros cuja soma é um número ímpar. Entre esses três números, a quantidade de números ímpares é igual a 32. Alternativa **d**.

a) 0 ou 1.

b) 1 ou 2.

c) 2 ou 3.

d) 1 ou 3.

33. (IFPE) Chamamos uma fração de unitária se o numerador for igual a um e o denominador for um inteiro positivo, por exemplo: $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{2}$. Os antigos egípcios costumavam trabalhar com frações que poderiam ser obtidas como soma de frações unitárias diferentes, por exemplo: $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

Por esse motivo, esse tipo de fração, que pode ser obtido por soma de frações unitárias distintas, é conhecido por "frações egípcias". O uso das frações egípcias facilitava as contas e comparações, especialmente num mundo onde não havia calculadoras.

Encontre uma fração, F, equivalente à soma

33. Alternativa **c**.

$$F = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

a) $\frac{77}{84}$

b) $\frac{51}{56}$

c) $\frac{25}{28}$

d) $\frac{73}{84}$

e) $\frac{49}{56}$

34. (Enem) No dia 17 de maio passado, houve uma campanha de doação de sangue em uma universidade. Sabemos que o sangue das pessoas pode ser classificado em quatro tipos quanto a antígenos. Uma pesquisa feita com um grupo de 100 alunos da universidade constatou que 42 deles têm o antígeno A, 36 têm o antígeno B e 12 o antígeno AB. Sendo assim, podemos afirmar que o número de alunos cujo sangue tem o antígeno O é:

34. Alternativa **c**.

a) 20 alunos

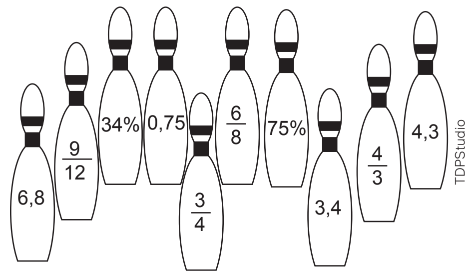
b) 26 alunos

c) 34 alunos

d) 35 alunos

e) 36 alunos

35. (Enem) O boliche é um esporte cujo objetivo é derrubar, com uma bola, uma série de pinos alinhados em uma pista. A professora de matemática organizou um jogo de boliche em que os pinos são garrafas que possuem rótulos com números, conforme mostra o esquema.



O aluno marca pontos de acordo com a soma das quantidades expressas nos rótulos das garrafas que são derrubadas. Se dois ou mais rótulos apresentam a mesma quantidade, apenas um deles entra na contagem dos pontos. Um aluno marcou 7,55 pontos em uma jogada. Uma das garrafas que ele derrubou tinha o rótulo 6,8.
A quantidade máxima de garrafas que ele derrubou para obter essa pontuação é igual a 35. Alternativa **e**.

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

36. (Enem) A classificação de um país no quadro de medalhas olímpicas deve-se primeiro ao número de medalhas de ouro que o país conquistou. Em caso de empate no número de medalhas de ouro, passa a ser considerado o número de medalhas de prata e, por fim, o de medalhas de bronze. O quadro de medalhas a seguir apresenta os países classificados do 9º ao 11º lugar nas Olimpíadas de Londres, realizadas em 2012.

	Ouro	Prata	Bronze
9º Hungria	8	4	5
10º Austrália	7	16	12
11º Japão	7	14	17

Nessa olimpíada, o Brasil obteve 3 medalhas de ouro, 5 de prata e 9 de bronze, classificando-se em 22º lugar no quadro geral de medalhas.
Supondo que o número de medalhas dos demais países permaneça inalterado, qual o número mínimo de medalhas que o Brasil deveria ter ganhado a mais nas Olimpíadas de Londres a fim de ficar exatamente na 10ª posição?

a) 22 **b)** 19 **c)** 17 **d)** 16 **e)** 14 36. Alternativa **d**.

37. (Enem) O gerente de uma loja de roupas resolveu avaliar o desempenho dos seus vendedores, registrando o total de vendas em reais V que cada um deles realizou em um mês. De acordo com o valor V, o desempenho do vendedor recebeu uma classificação, conforme a seguir:

- N1: se V for maior que 20 000;
- N2: se $V \in]10\,000; 20\,000]$;
- N3: se $V \in]7\,000; 10\,000]$;
- N4: se $V \in]4\,000; 7\,000]$;
- N5: se $V \in]0; 4\,000]$.

No último mês, a funcionária Valéria vendeu R$ 10.000,00 em roupas, enquanto Bianca vendeu 35% a menos que sua colega. As classificações que Valéria e Bianca receberam foram, respectivamente, 37. Alternativa **d**.

a) N2 e N3.
b) N2 e N4.
c) N2 e N5.
d) N3 e N4.
e) N3 e N5.

38. (Enem) Os diretores de uma escola precisam construir um laboratório para uso dos alunos. Há duas possibilidades:

I. um laboratório do tipo A, com capacidade para 100 usuários, a um custo de 180 mil reais e gastos de 60 mil reais por ano para manutenção;

II. um laboratório do tipo B, com capacidade para 80 usuários, a um custo de 120 mil reais e gastos com manutenção de 16 mil reais por ano.

Considera-se que, em qualquer caso, o laboratório implantado será utilizado na totalidade de sua capacidade.
A economia da escola, na utilização de um laboratório tipo B, em vez de um laboratório tipo A, num período de 4 anos, por usuário, será de 38. Alternativa **b**.

a) 1,31 mil reais. **b)** 1,90 mil reais. **c)** 2,30 mil reais. **d)** 2,36 mil reais. **e)** 2,95 mil reais.

39. (Enem) O quadro apresenta a ordem de colocação dos seis primeiros países em um dia de disputa nas Olimpíadas. A ordenação é feita de acordo com as quantidades de medalhas de ouro, prata e bronze, respectivamente.

País	Ouro	Prata	Bronze	Total
1º China	9	5	3	17
2º EUA	5	7	4	16
3º França	3	1	3	7
4º Argentina	3	2	2	7
5º Itália	2	6	2	10
6º Brasil	2	5	3	10

Se as medalhas obtidas por Brasil e Argentina fossem reunidas para formar um único país hipotético, qual a posição ocupada por esse país? 39. Alternativa **b**.

a) 1ª
b) 2ª
c) 3ª
d) 4ª
e) 5ª

40. (Enem) Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C_1, C_2 e C_3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C_1 e C_2 terão 10 páginas em comum; C_1 e C_3 terão 6 páginas em comum; C_2 e C_3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C_1.

Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a: 40. Alternativa **c**.

a) 135
b) 126
c) 118
d) 114
e) 110

41. (Enem) Antes de uma eleição para prefeito, certo instituto realizou uma pesquisa em que foi consultado um número significativo de eleitores, dos quais 36% responderam que iriam votar no candidato X; 33%, no candidato Y e 31%, no candidato Z. A margem de erro estimada para cada um desses valores é de 3% para mais ou para menos. Os técnicos do instituto concluíram que, se confirmado o resultado da pesquisa, 41. Alternativa **d**.

a) apenas o candidato X poderia vencer e, nesse caso, teria 39% do total de votos.
b) apenas os candidatos X e Y teriam chances de vencer.
c) o candidato Y poderia vencer com uma diferença de até 5% sobre X.
d) o candidato Z poderia vencer com uma diferença de, no máximo, 1% sobre X.
e) o candidato Z poderia vencer com uma diferença de até 5% sobre o candidato Y.

Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão em relação aos assuntos e objetivos trabalhados ao longo do presente capítulo.

Objetivos de aprendizagem	Sim	É necessário retomar
Compreendo e faço uso da linguagem dos conjuntos, representando e comunicando por meio dessa linguagem.		
Identifico e compreendo os conceitos de conjuntos, suas propriedades e operações.		
Resolvo problemas utilizando a teoria dos conjuntos.		
Compreendo as sucessivas ampliações do campo numérico.		
Interpreto e represento os intervalos dos números reais efetuando operações entre eles.		
Resolvo problemas relacionados ao conjunto dos números reais.		

marvent/Shutterstock.com

Neste capítulo, você vai:

- identificar, construir e analisar gráficos estatísticos;
- interpretar criticamente situações socioeconômicas com base em índices;
- reconhecer diferenças entre frequência absoluta e frequência relativa de uma distribuição de dados;
- analisar e construir diagramas de ramo e folhas associado a uma distribuição de dados;
- compreender noções básicas referentes à linguagem computacional;
- utilizar algoritmos e fluxogramas a fim de descrever procedimentos para a execução de uma atividade.

CAPÍTULO

2

Estatística e pensamento computacional

O método científico é um conjunto de etapas e normas que devem ser cumpridas para que um estudo técnico possa ser validado cientificamente. Esse estudo, em geral, tem início com a identificação de um problema que deve ser separado em partes para que possa ser resolvido. A partir desse momento, são realizadas pesquisas cujos resultados contribuem para a elaboração de modelos que levam à resolução de problemas semelhantes.

Neste capítulo, além de estudar o pensamento computacional, que está ligado às etapas utilizadas na resolução de um problema, você vai estudar também como a estatística pode contribuir para o método científico.

A estatística e o pensamento computacional são fundamentais para a análise e interpretação de dados em diversas áreas do conhecimento científico e tecnológico.

1. **Você realizou alguma pesquisa estatística no Ensino Fundamental? Comente com seus colegas quais foram as etapas realizadas.** 1. Resposta pessoal.
2. **Procure na internet os resultados de uma pesquisa da área de Ciências da Natureza. Anote o problema pesquisado, os resultados encontrados e as formas como esses resultados foram apresentados. Foram utilizados gráficos? Em caso positivo, de qual tipo?** 2. Resposta pessoal.

1 Tabelas e gráficos estatísticos

As imagens a seguir são de dois locais bem conhecidos no Brasil: a Avenida Paulista, na cidade de São Paulo, e a Praia de Copacabana, na cidade do Rio de Janeiro. Elas foram registradas em abril e maio de 2020 e têm em comum o fato de que não há praticamente ninguém nas ruas. Eram os primeiros dias da pandemia da covid-19, que causou muitas mortes no Brasil e no mundo inteiro.

Bruno Fernandes/Fotoarena

Avenida Paulista, São Paulo (SP), 17 de maio de 2020.

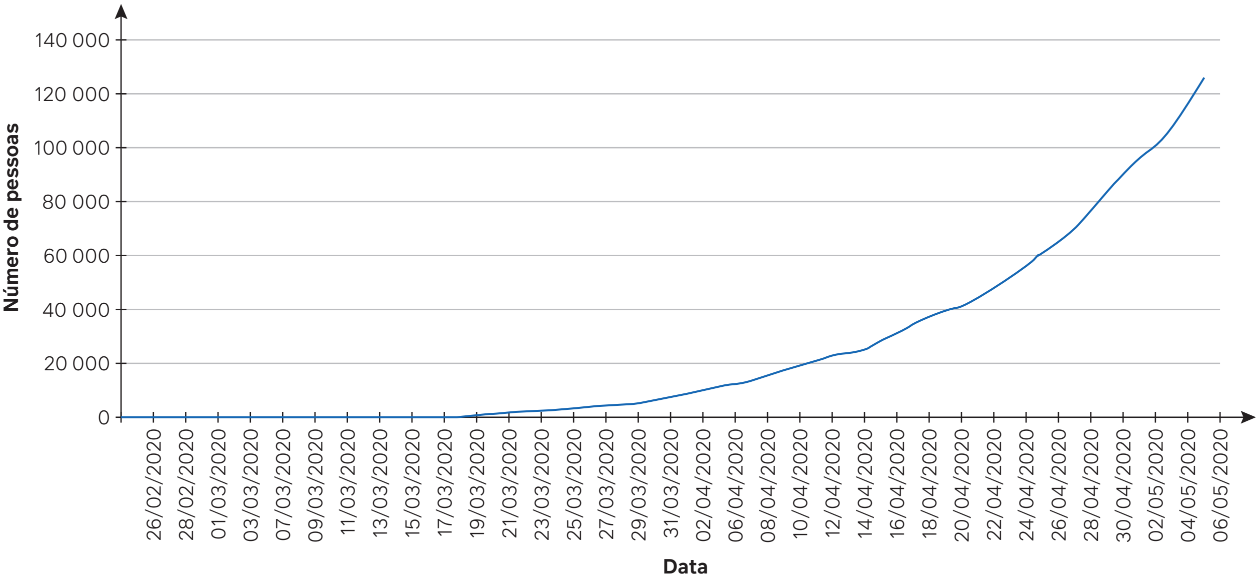
Luciana Whitaker/Pulsar Imagens

Praia de Copacabana, Rio de Janeiro (RJ), 4 de abril de 2020.

O Ministério da Saúde, na época, determinou que as pessoas não saíssem de casa para que fosse possível controlar a disseminação da doença. O gráfico a seguir foi produzido com o número de pessoas infectadas no país até 6 de maio de 2020.

Acumulado de casos de covid-19 por data de confirmação

TDPStudio



Fonte: BRASIL. Ministério da Saúde. Painel Coronavírus. *In*: CORONAVÍRUS BRASIL. Brasília, DF: Ministério da Saúde, 2020. Disponível em: https://covid.saude.gov.br/. Acesso em: 28 ago. 2024.

Para pensar e discutir

1. Comente o que mais chama sua atenção na evolução do número de casos conforme os dados apresentados no gráfico. 1. Resposta pessoal.
2. De acordo com o gráfico, é correto afirmar que o número de casos mais que duplicou no período de 16/04 a 26/04? Explique. 2. Sim; resposta pessoal.
3. Qual foi a variação observada no período de 16/04 a 2/05? Justifique com base nos dados do gráfico. 3. Mais que triplicou; resposta pessoal.

Hoje, alguns anos após a pandemia, poderíamos obter informações mais completas sobre o acontecimento. Para isso, teríamos, por exemplo, de realizar uma pesquisa utilizando alguma ferramenta de busca. Pesquisa e análise de informações fazem parte do estudo da **Estatística**.

Entre as mais diversas áreas do conhecimento, o estudo da Estatística tornou-se um importante aliado na tomada de decisões. Retomaremos alguns tipos de gráfico estudados no Ensino Fundamental e também analisaremos informações da atualidade.

Análise e construção de tabelas e gráficos

Os principais gráficos estatísticos que você provavelmente conhece são: gráfico de colunas, gráfico de barras, gráfico de setores, gráfico de linhas, gráfico pictórico e histograma. Entretanto, em *sites* de notícias e na mídia de modo geral, também podem ser encontrados outros tipos, sendo que a maioria são variações desses principais.

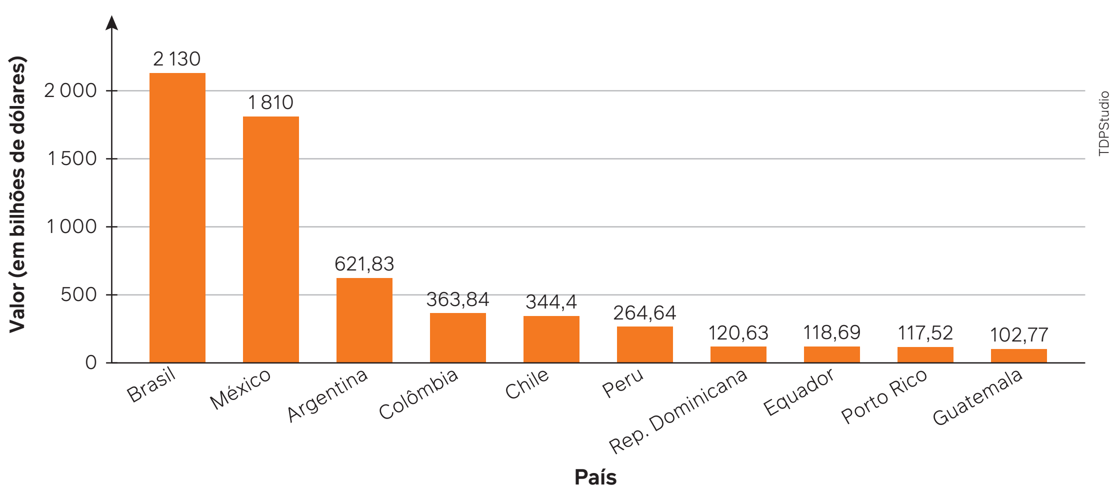
Vamos retomar os tipos de gráficos observando seu uso em publicações recentes da mídia. Além de observá-los, é importante aprender a interpretar e analisar as informações que eles apresentam.

Análise de um gráfico de colunas

Os gráficos de colunas, geralmente, apresentam alterações de dados em um período ou de valores correspondentes a uma informação separada em categorias.

Conforme as projeções feitas pelo Fundo Monetário Internacional (FMI) para o Produto Interno Bruto (PIB), o Brasil, o México e a Argentina são as maiores economias da América Latina. Observe o gráfico de colunas que apresenta as 10 maiores economias da América Latina em 2023.

As 10 maiores economias da América Latina – PIB em 2023



Fonte: QUAIS são as 20 maiores economias da América Latina? Veja a posição do Brasil. *Estado de S. Paulo*, São Paulo, 17 fev. 2024. Disponível em: https://www.estadao.com.br/economia/brasil-america-latina-ranking-20-maiores-economias-2023-fmi-nprei/. Acesso em: 28 ago. 2024.

Para pensar e discutir

1. Em sua opinião, qual é a informação que mais chama a atenção no gráfico? 1. Resposta pessoal.

2. Qual é a variável representada em cada coluna? 2. O valor do PIB em bilhões de dólares.

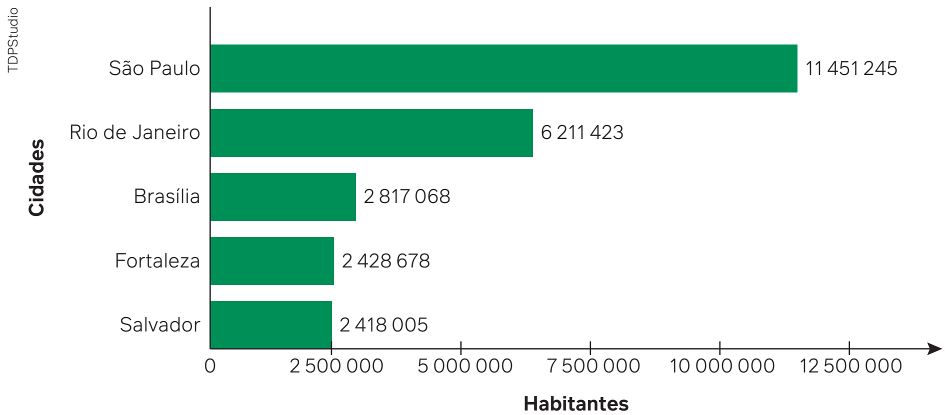
3. Como você escreveria uma comparação entre o PIB do México e o da Argentina? 3. Resposta pessoal.

Análise de um gráfico de barras

Os gráficos de barras que apresentarem barras verticais são também chamados de gráficos de colunas, como vimos anteriormente. Entretanto, temos gráficos em que as barras são horizontais.

O gráfico de barras é muito utilizado para comparar quantidades e, algumas vezes, acompanhar sua evolução ao longo de um período. No gráfico a seguir, podemos fazer a comparação das cinco cidades mais populosas do Brasil, conforme o Censo 2022, quando a população brasileira total era de 203 062 512 habitantes.

Cidades mais populosas do Brasil



Fonte: CABRAL, U. De 2010 a 2022, população brasileira cresce 6,5% e chega a 203,1 milhões. *Agência IBGE Notícias*, [Rio de Janeiro], 28 jun. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/37237-de-2010-a-2022-populacao-brasileira-cresce-6-5-e-chega-a-203-1-milhoes. Acesso em: 28 ago. 2024.

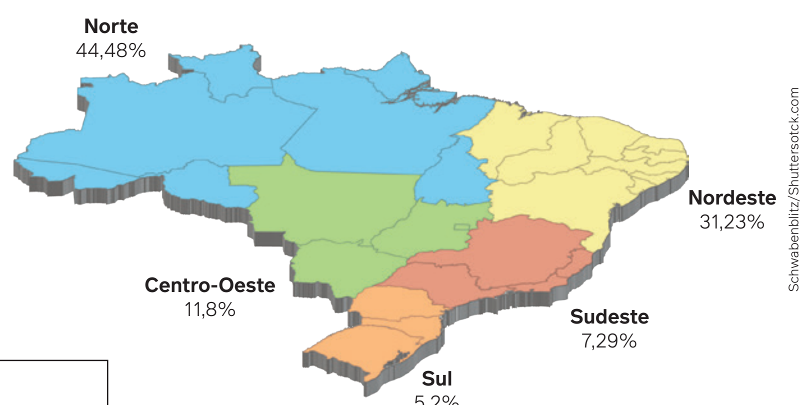
Para pensar e discutir

1. É correto afirmar que essas cinco cidades concentram mais de 10% da população brasileira? Justifique. 1. Sim; resposta pessoal.
2. Faça uma comparação entre a população da cidade de São Paulo e a população brasileira, conforme dados do Censo 2022. Qual é a sua conclusão? 2. Resposta pessoal.

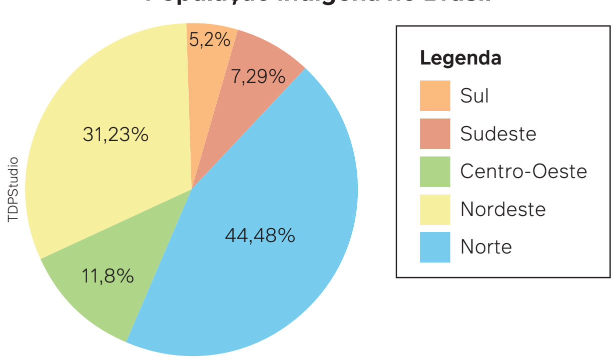
Análise de um gráfico de setores

Observe a imagem da representação gráfica do Brasil e os percentuais da distribuição da população indígena entre as cinco regiões brasileiras de acordo com os dados extraídos do Censo 2022.

População indígena no Brasil



População indígena no Brasil



O gráfico de setores também apresenta a distribuição da população indígena entre as cinco regiões brasileiras. Ao colocar as mesmas informações do mapa em um gráfico de setores, a comparação é visualmente mais evidente.

Fonte: BRASIL. Ministério dos Povos Indígenas. Fundação Nacional dos Povos Indígenas. Dados do Censo 2022 revelam que o Brasil tem 1,7 milhão de indígenas. Brasília, DF: Ministério dos Povos Indígenas, 7 ago. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/funai/pt-br/assuntos/noticias/2023/dados-do-censo-2022-revelam-que-o-brasil-tem-1-7-milhao-de-indigenas. Acesso em: 28 ago. 2024.

Os gráficos de setores também são conhecidos como gráficos de *pizza*. Seu uso é indicado para expressar uma relação de proporcionalidade entre um dado e o total, já que os dados somados compõem o todo (100%).

Atividades resolvidas

1. Elabore um texto contendo informações sobre a distribuição da população brasileira indígena por região.

A análise das informações pode variar. Porém, inicialmente, pode-se observar algumas ideias, como:

- no gráfico, o círculo completo (o todo) representa o total da distribuição da população indígena. Na comparação visual entre os setores, imediatamente verifica-se que na região Norte concentra-se a maior quantidade dessa população e, na região Sul, a menor quantidade.
- outra análise um pouco mais detalhada dessas informações seria pesquisar como é a distribuição da população brasileira nas regiões, conforme o mesmo Censo 2022, e confrontá-las com a distribuição da população indígena na página anterior (ver tabela na próxima atividade resolvida.).

2. A tabela a seguir apresenta informações sobre a distribuição da população brasileira conforme o Censo 2022. Com base nessas informações, faça um gráfico de setores utilizando uma planilha eletrônica.

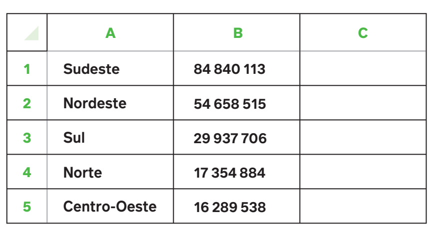
Distribuição da população brasileira por região

Região	População
Sudeste	84 840 113
Nordeste	54 658 515
Sul	29 937 706
Norte	17 354 884
Centro-Oeste	16 289 538
Total	203 080 756

Fonte: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). Panorama. Censo 2022. Brasília, DF: IBGE, [20--]. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/mapas.html?localidade=&recorte=N2. Acesso em: 28 ago. 2024.

I. Inicialmente, copiam-se os dados da tabela na planilha eletrônica da seguinte maneira: em uma coluna, inserimos as regiões brasileiras e, na coluna ao lado, os valores correspondentes ao número de habitantes.

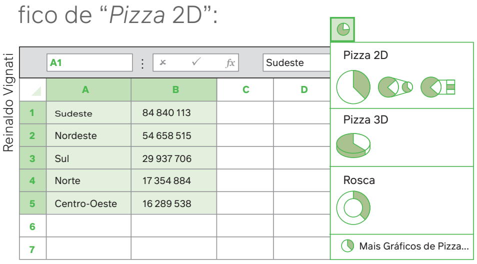
Acervo editora



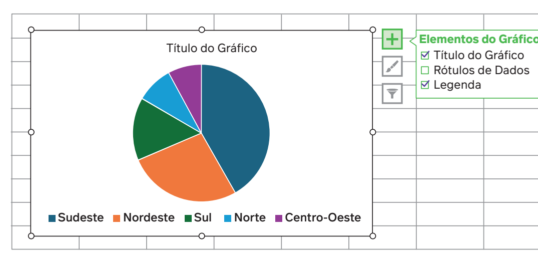
	A	B	C
1	Sudeste	84 840 113	
2	Nordeste	54 658 515	
3	Sul	29 937 706	
4	Norte	17 354 884	
5	Centro-Oeste	16 289 538	

II. Selecionam-se os dados das duas colunas e, na ferramenta "Inserir gráfico", selecionamos o gráfico de "*Pizza* 2D":

Reinaldo Vignati

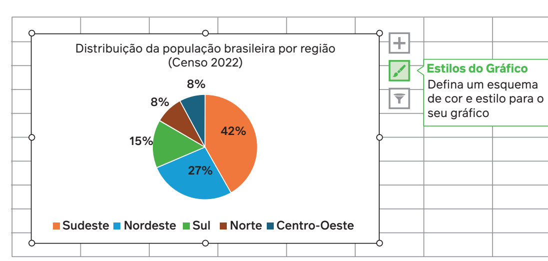


III. O gráfico aparecerá. Em seguida, preenchemos as informações que faltam: "Título do gráfico" e, em "Rótulo de dados/Mais opções...", selecionamos a opção de colocar os dados em porcentagem.



Reinaldo Vignati

IV. Podemos, também, ajustar a posição dos rótulos e as cores dos setores.



Reinaldo Vignati

Fonte: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). Panorama. Censo 2022. Brasília, DF: IBGE, [20--]. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/mapas.html?localidade=&recorte=N2. Acesso em: 28 ago. 2024.

Para pensar e discutir

1. Com a turma, comparem os dois gráficos de setores: o que apresenta a distribuição por região da população brasileira com o que indica a distribuição da população indígena por região. Em seguida, individualmente, escreva uma frase com suas conclusões. 1. Resposta pessoal.

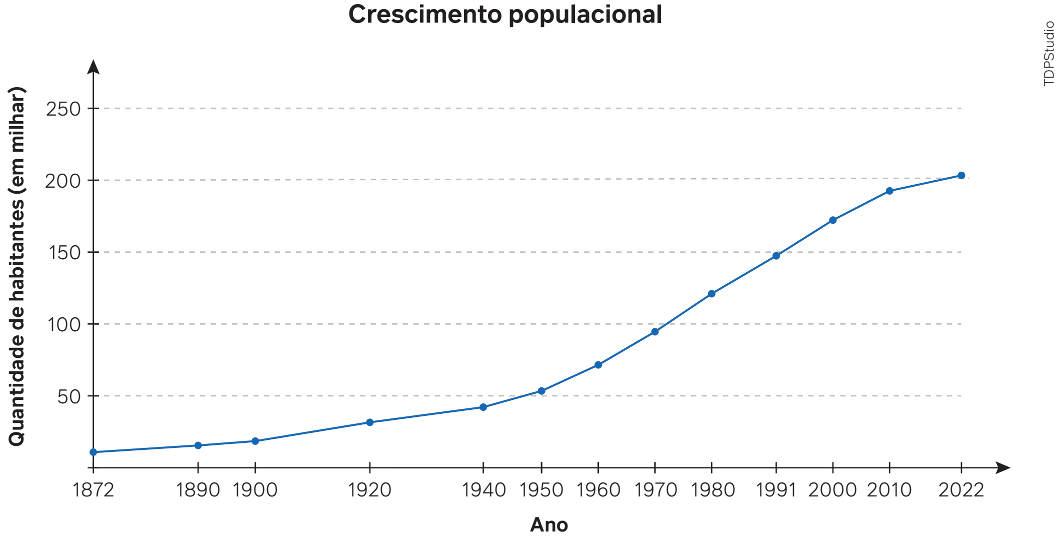
2. Faça uma pesquisa sobre três etnias dos indígenas brasileiros. Anote algumas características, como região em que vivem, língua que falam, modo de vida, religião, fabricação de utensílios, pinturas corporais, entre outras. Em seguida, apresente aos colegas e, juntos, montem um painel sobre as etnias pesquisadas.
2. Respostas pessoais.

Análise de um gráfico de linhas

Os gráficos de linhas geralmente são utilizados para mostrar o comportamento de certo dado ao longo do tempo. Os dados das categorias devem ser distribuídos uniformemente ao longo do eixo horizontal, e os valores correspondentes, no eixo vertical.

O gráfico a seguir apresenta o crescimento da população brasileira no período de 1872 a 2022, conforme dados do Censo 2022 do IBGE.

Crescimento populacional



Fonte: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). Censo 2022. Brasília, DF: IBGE, [20--]. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/. Acesso em: 28 ago. 2024.

Para pensar e discutir

1. No período de 2010 a 2022, a população brasileira cresceu ou diminuiu? Justifique. 1. Cresceu; resposta pessoal.

2. O que mais chama a atenção nesse gráfico? Elabore uma frase para explicar. 2. Resposta pessoal.

Análise de um histograma

O uso do histograma é muito comum nos casos em que a variável a ser apresentada consiste em valores indicados por classes, isto é, por intervalos.

Vamos considerar a situação a seguir.

Em uma escola, os 80 estudantes do Ensino Médio têm alturas assim distribuídas:

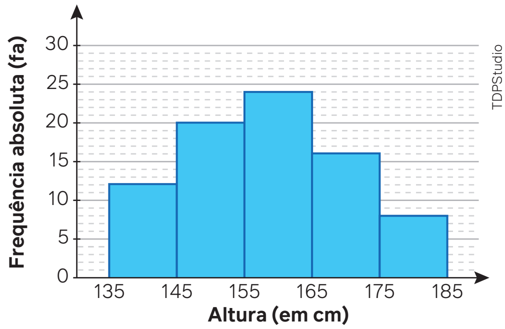
Altura (em cm)	135 ⊢ 145	145 ⊢ 155	155 ⊢ 165	165 ⊢ 175	175 ⊢ 185
Quantidade de estudantes	12	20	24	16	8

Fonte: Dados fornecidos pela coordenação da escola (dados fictícios).

Utilizamos a notação 135 ⊢ 145, por exemplo, para representar alturas que vão de 135 cm até 145 cm, mas excluindo o valor 145 cm. Se considerássemos a altura de uma pessoa como um número real, poderíamos também indicar que pertencem ao intervalo [135; 145[, isto é, fechado em 135 e aberto em 145. O histograma a seguir representa a situação, sendo que ***fa*** indica a **frequência absoluta**, isto é, o número de pessoas do exemplo.

Ao analisar esse histograma, podemos interpretar que há maior concentração de pessoas com altura entre 145 cm e 175 cm. De forma análoga, podemos afirmar que há poucos alunos com altura maior que 175 cm e, também, há poucos alunos com altura menor que 145 cm. Você concorda com essa análise?

Distribuição da frequência da altura dos estudantes do Ensino Médio



Fonte: Dados fornecidos pela coordenação da escola (dados fictícios).

Vamos agora fazer um estudo da altura dos alunos da turma!

Para explorar

Estas atividades devem ser feitas coletivamente utilizando planilha eletrônica.

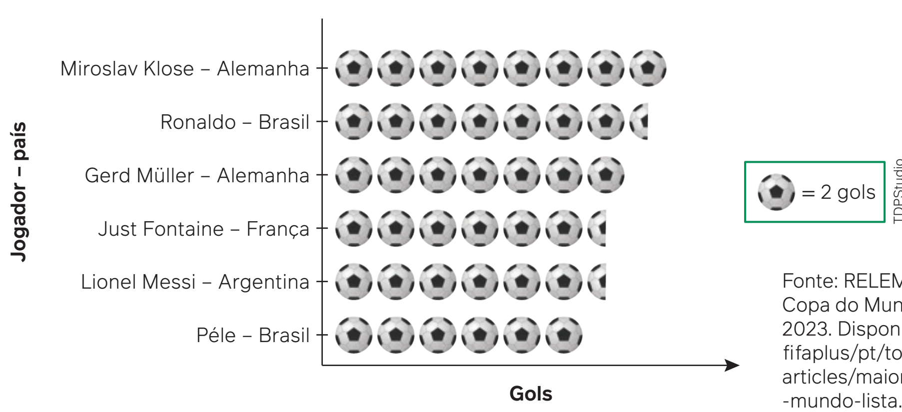
1. Obtenham a medida da altura de todos os estudantes da turma. 1. Resposta pessoal.
2. Organizem as medidas em classes. 2. Resposta pessoal.
3. Elaborem uma tabela contendo essas classes e a quantidade de estudantes correspondente. 3. Resposta pessoal.
4. Elaborem um histograma com as informações. 4. Resposta pessoal.

Análise de um gráfico pictórico

O gráfico pictórico utiliza figuras ou um conjunto de figuras relacionadas ao tema do gráfico para representar os dados correspondentes. As figuras podem ser dispostas em colunas ou em linhas para enfatizar os dados ou as categorias.

A seguir, apresentamos um gráfico sobre os seis maiores artilheiros da Copa do Mundo de futebol masculino até 2022. Observe atentamente como essas informações estão sendo representadas no gráfico.

Os seis maiores artilheiros da Copa do Mundo até 2022



Fonte: RELEMBRE os maiores artilheiros da Copa do Mundo da FIFA. FIFA, [*s. l.*], 9 nov. 2023. Disponível em: https://www.fifa.com/fifaplus/pt/tournaments/mens/worldcup/articles/maiores-artilheiros-copa-do-mundo-lista. Acesso em: 28 ago. 2024.

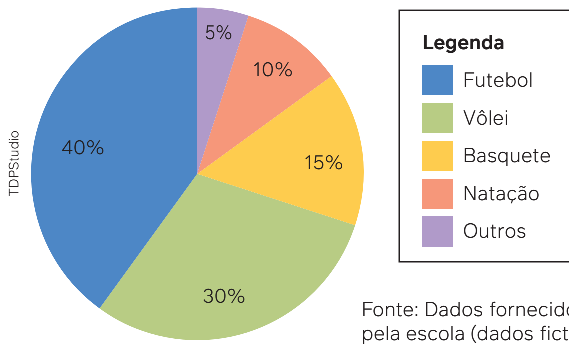
Para pensar e discutir

1. O que representa, no gráfico, o símbolo ◖? Quantos gols fez Ronaldo? 1. 1 gol; 15
2. Os valores numéricos estão organizados como no gráfico de barras. Como eles estão representados? 2. Por bolas.
3. Como você faria um gráfico pictórico sobre os países e o número de copas que cada um ganhou? Que tal pesquisar e fazer esse gráfico? 3. Resposta pessoal.

Atividades

1. Considere que um levantamento foi realizado para determinar o esporte preferido de uma turma do Ensino Médio. O resultado foi apresentado no gráfico a seguir, contendo os percentuais correspondentes.

Esporte preferido



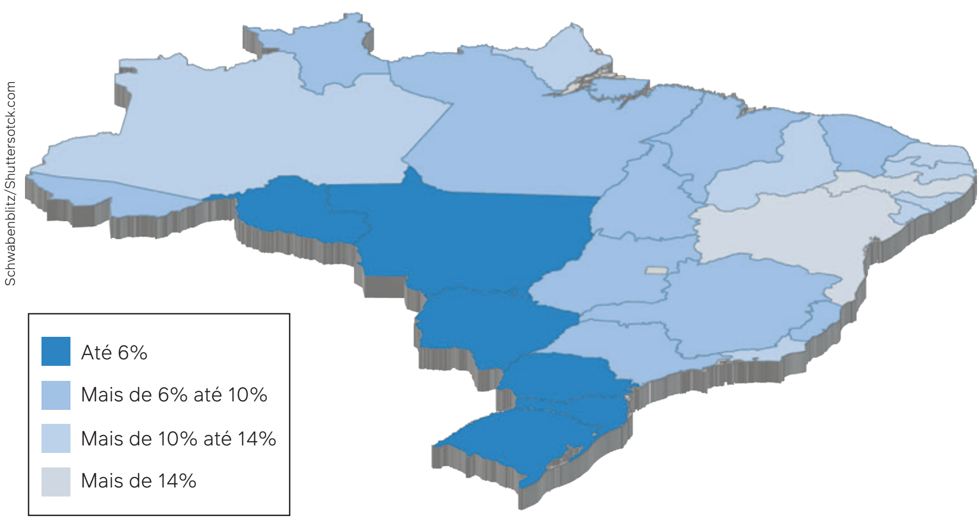
Fonte: Dados fornecidos pela escola (dados fictícios).

1. Futebol: 144°; Vôlei: 108°; Basquete: 54°; Natação: 36°; Outros: 18°.

Cada setor ocupa uma parte do círculo. Determine o ângulo central correspondente a cada setor.

2. Observe a representação gráfica do Brasil a seguir, que indica as taxas de desocupação dos brasileiros no 1º trimestre de 2023, conforme dados divulgados pelo IBGE.

Taxa de desocupação por Unidades da Federação (1º trimestre de 2023)



Fonte: BRASIL. Secretaria de Comunicação Social. IBGE: desemprego recua em oito das 27 UFs no segundo trimestre. Brasília, DF: Secom, 15 ago. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/secom/pt-br/assuntos/noticias/2023/08/ibge-desemprego-recua-em-oito-das-27-ufs-no-segundo-trimestre-de-2023-e-se-mantem-estavel-nas-demais. Acesso em: 28 ago. 2024.

2. a) Sim.

a) Pesquise a definição de uma taxa de desocupação. Quanto maior a taxa de desocupação, maior o desemprego?

b) Em qual(is) Unidade(s) da Federação observa-se a maior taxa de desocupação no 1º trimestre de 2023? E qual(is) apresenta(m) a menor taxa de desocupação? Quais foram as respectivas taxas? 2. b) Maior taxa: Bahia e Pernambuco, mais de 14%; Menor taxa: Rio Grande do Sul, Santa Catarina, Paraná, Mato Grosso do Sul, Rondônia e Mato Grosso até 6%.

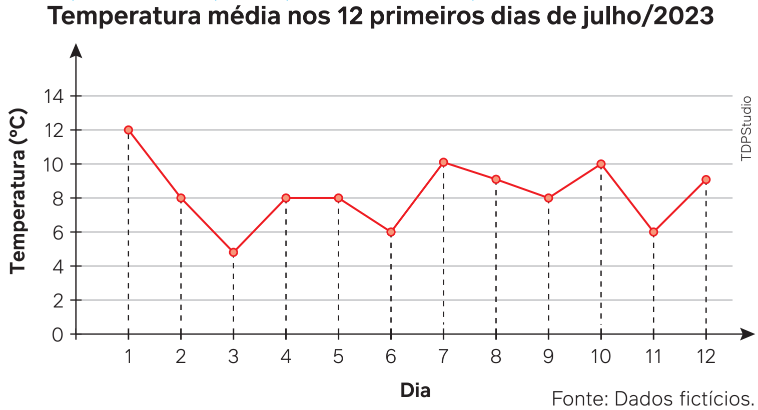
3. O gráfico de linhas contém informações sobre a média das temperaturas de uma cidade nos 12 primeiros dias do mês de julho de 2023.

a) Qual é a maior temperatura registrada no período? 3. a) 12 °C

b) Nesse período, em quantos dias a temperatura ficou abaixo de 7 °C? 3. b) 3

c) E em quantos dias a temperatura média foi igual a 8 °C? 3. c) 4

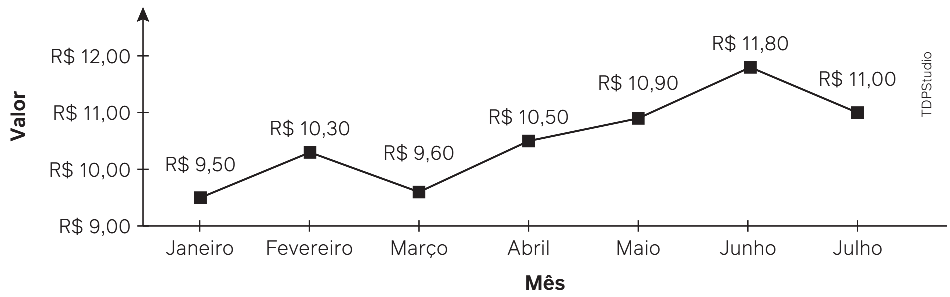
Temperatura média nos 12 primeiros dias de julho/2023



Fonte: Dados fictícios.

4. Considere que os preços das ações de uma determinada empresa variaram ao longo de 7 meses de acordo com os dados apresentados no gráfico a seguir.

Preço das ações da empresa



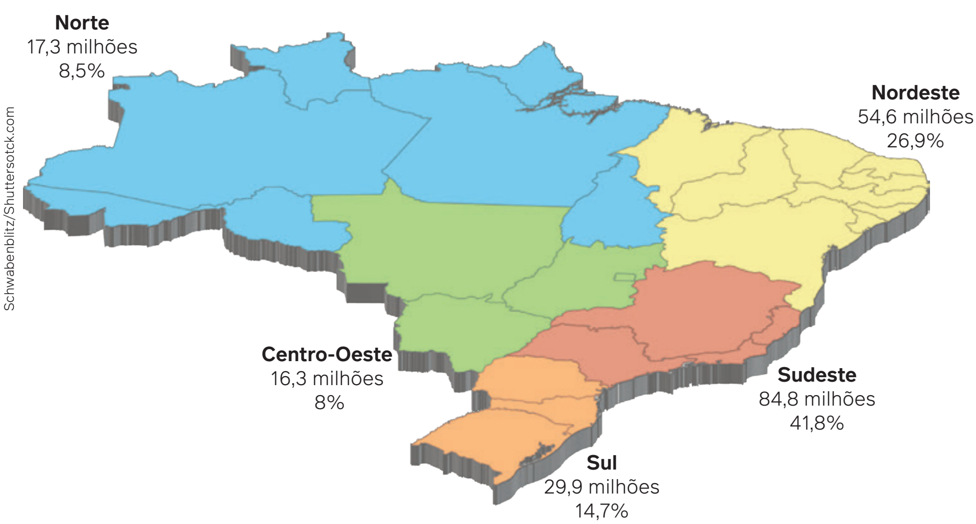
Fonte: Dados fictícios.

a) Em qual(is) período(s) de um mês houve o maior aumento em reais? 4. a) Março-abril e maio-junho.

b) Em qual período de um mês houve o maior aumento percentual? 4. b) Março-abril.

5. Conforme o Censo 2022, a população brasileira por região está distribuída de acordo com a representação gráfica do Brasil a seguir, considerando valores aproximados em milhões de habitantes.

População das regiões brasileiras

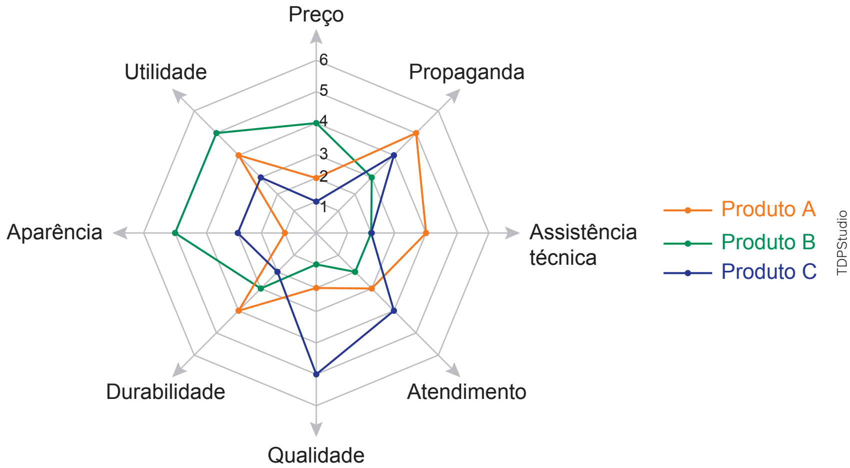


Fonte: CABRAL, U. De 2010 a 2022, população brasileira cresce 6,5% e chega a 203,1 milhões. *Agência IBGE Notícias*, [Rio de Janeiro], 28 jun. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/37237-de-2010-a-2022-populacao-brasileira-cresce-6-5-e-chega-a-203-1-milhoes. Acesso em: 28 ago. 2024.

5. Resposta no Manual do Professor.

Elabore uma tabela contendo todas as informações presentes na representação acima.

6. (Obmep) Os produtos A, B e C foram avaliados pelos consumidores em relação a oito itens. Em cada item os produtos receberam notas de 1 a 6, conforme a figura. De acordo com essas notas, qual é a alternativa correta? 6. Alternativa **e**.



a) O produto B obteve a maior nota no item propaganda.

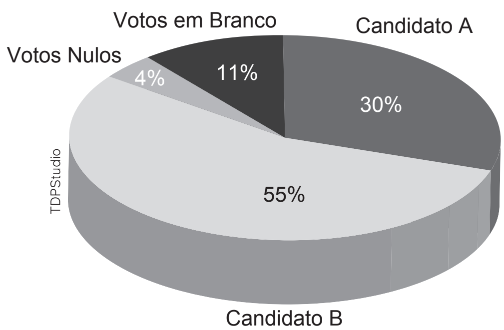
b) O produto de maior utilidade é o menos durável.

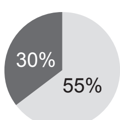
c) O produto C obteve a maior pontuação em quatro itens.

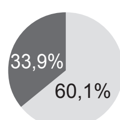
d) O produto de melhor qualidade é o de melhor assistência técnica.

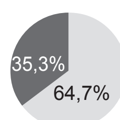
e) O produto com a melhor avaliação em propaganda é o de pior aparência.

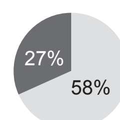
7. (CMRJ) O gráfico abaixo mostra o resultado da apuração dos votos do segundo turno de uma eleição entre os candidatos A e B. Sabendo que votos válidos são os votos dados a cada candidato, não sendo computados os votos brancos e nulos, qual alternativa melhor representa a situação dos candidatos A e B?
7. Alternativa **c**.

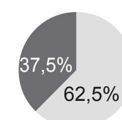


a)


b)


c)


d)


e)


8. (IFSP) O gráfico abaixo apresenta informações sobre a participação dos três únicos vendedores de uma pequena corretora no valor total de vendas de seguros, no segundo quadrimestre de 2015. 8. Alternativa **d**.
Com base nas informações apresentadas, assinale a alternativa que contém uma afirmação correta.

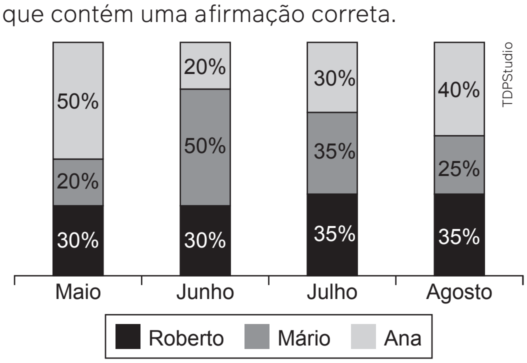
a) Não houve mês em que dois vendedores tiveram o mesmo valor de venda.

b) O valor das vendas de Roberto, em junho, e o valor das vendas de Ana, em julho, foram necessariamente iguais.

c) O valor das vendas de Mário, em agosto, foi necessariamente menor que o valor das vendas de Ana, em julho.

d) No mês de maio, o valor das vendas de Ana necessariamente correspondeu a 250% do valor das vendas de Mário.

e) Em todos os quatro meses do segundo trimestre de 2015, os valores em vendas da corretora foram iguais.



9. (Enem) Uma empresa registrou seu desempenho em determinado ano por meio do gráfico, com dados mensais no total de vendas e despesas. 9. Alternativa **a**.
O lucro mensal é obtido pela subtração entre o total de vendas e despesas, nesta ordem. Quais os três meses do ano em que foram registrados os maiores lucros?

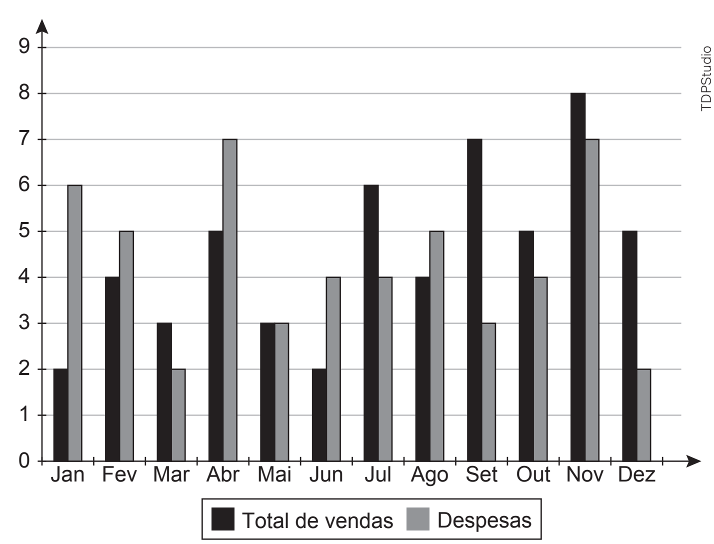
a) Julho, setembro e dezembro.

b) Julho, setembro e novembro.

c) Abril, setembro e novembro.

d) Janeiro, setembro e dezembro.

e) Janeiro, abril e junho.



Cuidados com as informações nos gráficos

Vimos que os gráficos estatísticos são uma maneira de organizar e apresentar dados de um fato, de uma pesquisa ou de um desempenho, por exemplo. O gráfico é um recurso muito utilizado pela mídia para tornar a leitura e a interpretação das informações mais diretas e atraentes. A análise crítica das informações apresentadas em tabelas ou gráficos deve considerar diversos aspectos, entre eles os destacados a seguir.

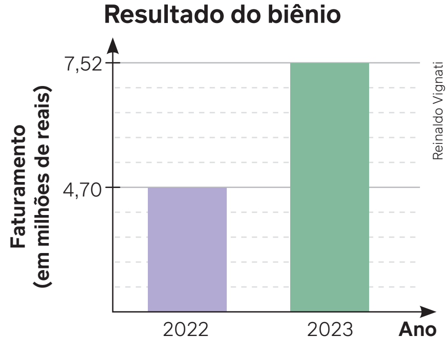
- Verificação da fonte dos dados.
- Observação do título para conferir se o conteúdo faz sentido.
- Identificação das variáveis apresentadas nos eixos do gráfico.
- Verificação dos eixos (por exemplo, verificar se iniciam no zero, caso indiquem valores).

A leitura cuidadosa e crítica ajuda a compreender melhor o contexto das informações do gráfico. O leitor pode fazer reflexões e até estabelecer conclusões e conjecturas. Entretanto, podemos nos deparar com gráficos elaborados deliberadamente para esconder informações ou direcionar o leitor a conclusões que nem sempre são as corretas.

A seguir, exemplificaremos algumas dessas situações utilizando gráficos fictícios. A ideia é alertá-lo e incentivá-lo a analisar gráficos de modo mais criterioso e cuidadoso. Os exemplos e as atividades resolvidas a seguir foram elaborados com base na leitura do livro *Como mentir com Estatística*, do autor norte-americano Darrel Huff.

Exemplo:

O gráfico abaixo contém o faturamento de uma mesma empresa em dois anos consecutivos: 2022 e 2023. O presidente que estava na empresa saiu em 2022 e, em 2023, um novo presidente assumiu, apresentando este gráfico.



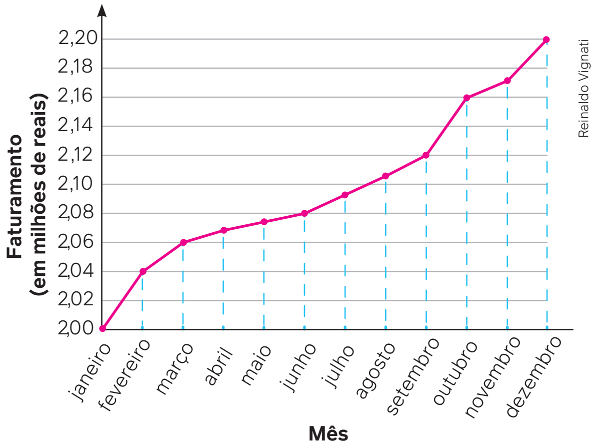
Fonte: Dados fornecidos pela empresa (dados fictícios).

Para pensar e discutir

1. Em sua opinião, o aumento no faturamento de 2022 para 2023 se deve a qual fator? 1. Resposta pessoal.
2. Observando os faturamentos em milhões de reais, qual foi o aumento percentual de 2022 para 2023? 2. 60%
3. O que há de errado no gráfico? Escreva uma frase explicativa e, se for o caso, refaça o gráfico com as informações dadas. 3. Resposta pessoal.

Atividades resolvidas

3. O gráfico a seguir apresenta informações sobre o faturamento de uma indústria ao longo de um ano. Analise se o gráfico ou as informações contêm erros ou induzem a interpretações equivocadas.



Fonte: Dados fornecidos pela gerência da empresa (dados fictícios).

- Observe que o faturamento aumentou ao longo dos meses daquele ano. Essa interpretação é correta; porém, de janeiro a dezembro, houve um crescimento de 10%:

$$\frac{2{,}20 - 2{,}00}{2{,}00} = \frac{0{,}20}{2{,}00} = \frac{2}{20} = 0{,}10 = 10\%$$

- Da maneira que foi construído o gráfico de linha, parece que o crescimento foi multiplicado por 10, pois o eixo vertical apresenta 10 linhas para o intervalo de 2,00 até 2,20 milhões.

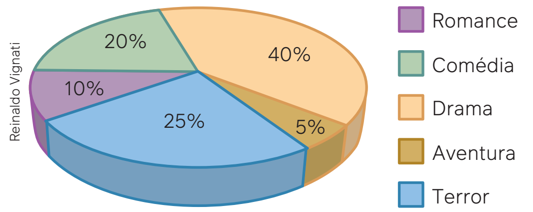
Portanto, apesar de não conter erro, esse gráfico induz à percepção de um crescimento muito mais acentuado do que, de fato, ocorreu.

4. Observe o gráfico de setores 3D, com o resultado, em porcentagem, que representa os dados de uma pesquisa sobre a preferência de tipos de filme de um grupo de pessoas. Analise as informações e verifique se existe algo errado ou que poderia induzir a interpretações equivocadas.

- Não há erro na representação dos dados do gráfico; a soma dos percentuais resulta em 100%. Entretanto, a perspectiva em 3D pode causar uma percepção equivocada da proporção dos percentuais. Observe que:
  - I. o setor que indica 25% está mais à frente e dá a ideia de que é praticamente do mesmo tamanho do setor que indica 40%;
  - II. o setor que indica 5%, nessa perspectiva, transmite a ideia de que é muito próximo do tamanho do setor que indica 10%.
- Agora, observe esses dados representados no mesmo tipo de gráfico, mas em 2D.

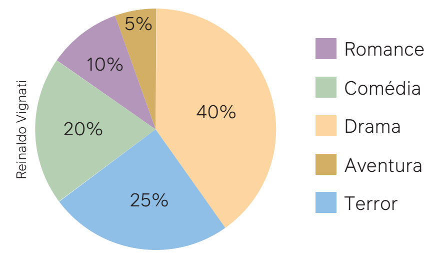
Comparando com o gráfico anterior, é possível perceber com mais clareza a distorção visual a que o primeiro gráfico induz.

Preferência de filmes



Fonte: Dados fornecidos pelo grupo (dados fictícios).

Preferência de filmes

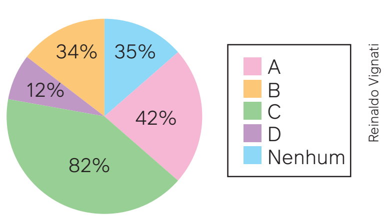


Fonte: Dados fornecidos pelo grupo (dados fictícios).

Atividades

10. Uma pesquisa entre os alunos do Ensino Médio sobre os canais A, B, C e D de TV que habitualmente assistem gerou o gráfico de setores a seguir.
10. Resposta no Manual do Professor.

Canais de TV

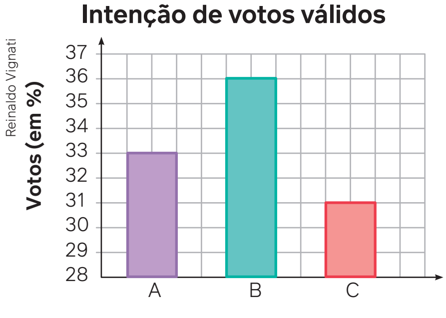


Fonte: Estudantes do Ensino Médio (dados fictícios).

Analise atentamente o gráfico, verifique se ele está correto ou não e justifique sua resposta.

11. Três candidatos participaram de uma campanha para a eleição do representante da Comunidade Vila Vida. Em plena campanha, um dos candidatos divulgou o resultado de uma pesquisa de intenção dos votos válidos usando o gráfico a seguir.
11. Respostas no Manual do Professor.

Intenção de votos válidos



Fonte: Dados fornecidos pela comunidade Vila Vida (dados fictícios).

Analise as informações e responda às perguntas.

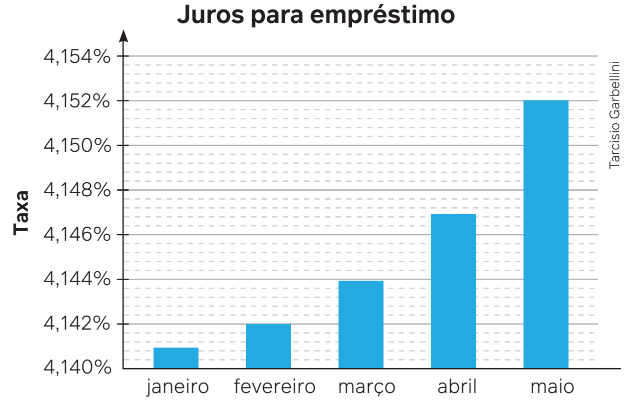
a) Considerando os votos válidos, a distribuição dos percentuais é coerente? Justifique.

b) Esse tipo de gráfico apresenta visualmente uma tendência muito acentuada da preferência do candidato B. Qual é o motivo para isso?

c) Como você corrigiria a "distorção" indicada no item **b**?

12. Lúcia fez um levantamento da taxa mensal de juros que um banco cobrava dos clientes ao adquirir um empréstimo. O levantamento foi feito ao longo de cinco meses, e o resultado foi o seguinte:

Juros para empréstimo



Fonte: Dados levantados por Lúcia (dados fictícios).

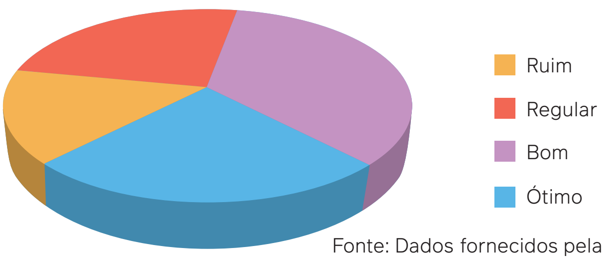
Note que Lúcia iniciou o eixo vertical não no zero, mas em 4,140%. Ao usar essa forma, o que é acentuado no gráfico? 12. Resposta pessoal.

13. Marcos representou, por meio de um gráfico de setores, o desempenho da turma em relação à disciplina de Matemática a partir das informações a seguir.

- 15%: rendimento ruim;
- 25%: rendimento regular;
- 35%: rendimento bom;
- 25%: rendimento ótimo.

Utilizando o recurso da planilha eletrônica de rotacionar e tirando os percentuais, Marcos obteve o seguinte gráfico.

Desempenho em Matemática



Reinaldo Vignati

Fonte: Dados fornecidos pela escola de Marcos (dados fictícios).

Observe e compare os setores correspondentes ao desempenho “Regular” e “Ótimo” e emita uma opinião sobre uma possível distorção. 13. Resposta pessoal.

14. Junte-se a um colega e pesquisem, em *sites* de busca, gráficos estatísticos que tenham “erros” ou induzam a erros. Depois, apresentem os gráficos selecionados aos colegas e comentem onde, no gráfico, percebe-se algo que pode levar o leitor a fazer interpretações equivocadas ou ter falsa percepção das informações.
14. Resposta pessoal.

Os índices socioeconômicos

Você já deve ter escutado ou lido em algum lugar a frase “Uma imagem fala mais que mil palavras”. O problema é saber quais são essas palavras e o contexto em que são ditas ou escritas. São apenas opiniões ou revelam fatos? Experimente fazer um exercício de análise observando atentamente a imagem a seguir.

Tales Azzi/Pulsar Imagens

Vista de Paraisópolis e edifícios de luxo na Avenida Giovanni Gronchi, São Paulo (SP), 2019.

Para pensar e discutir

1. Quais palavras você emitiria sobre a ilustração? 1. Resposta pessoal.
2. Suas palavras são iguais às dos colegas? Discutam o assunto. 2. Resposta pessoal.

Há vários índices socioeconômicos a respeito de diversos aspectos relacionados ao modo de vida das pessoas, como moradias e fontes de renda. Esses índices também permitem identificar e comparar aspectos da educação de um estado em relação ao país, e do país em relação a outros países.

Há índices específicos que se referem ao poder aquisitivo das pessoas. Outros índices divulgados pela mídia procuram verificar como está a construção civil: em expansão ou retraída. Especificamente nesse caso, há indicadores do valor da construção, por metro quadrado, em determinada região. Esses valores impulsionam ou não o mercado imobiliário e incentivam ou desestimulam a oferta de empregos.

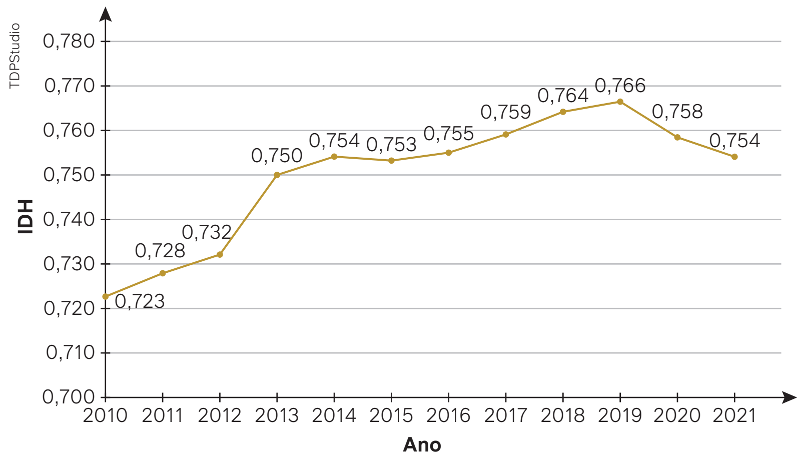
Os índices fundamentais para um país são os que medem o desenvolvimento, regem o preço dos produtos básicos usados na alimentação, determinam o reajuste do salário de profissionais nas diversas categorias, indicam desigualdade social, entre outros.

Vamos abordar alguns desses índices.

Índice de Desenvolvimento Humano (IDH)

O gráfico a seguir apresenta a evolução do IDH no Brasil no período de 2010 a 2021.

Evolução do IDH do Brasil 2010-2021



Fonte: RIO GRANDE DO SUL. Evolução do IDH [...]. *In*: RIO GRANDE DO SUL. *Atlas socioeconômico Rio Grande do Sul*. Porto Alegre: Secretaria de Planejamento, Governança e Gestão, 2022. Disponível em: https://atlassocioeconomico.rs.gov.br/midia/imagem/graf-2010-2021-evolucao-idh-br. Acesso em: 28 ago. 2024.

Com uma rápida olhada, mesmo que não se saiba exatamente o que representa o IDH, constatamos que houve crescimento de 2010 até 2019 e, a partir daí, uma queda nos dois últimos anos. O que isso significa? Precisamos compará-lo com outras nações. Observe, na tabela a seguir, a lista dos 10 países com melhor IDH.

10 países com melhor IDH em 2022

País	Suíça	Noruega	Islândia	Hong Kong	Dinamarca	Suécia	Alemanha	Irlanda	Singapura	Austrália
IDH	0,967	0,966	0,959	0,956	0,952	0,952	0,950	0,950	0,949	0,946

Fonte: SUÍÇA e Noruega têm os melhores índices de Desenvolvimento Humano do mundo [...]. *G1*, [São Paulo], 13 mar. 2024. Mundo. Disponível em: https://g1.globo.com/mundo/noticia/2024/03/13/suica-e-noruega-tem-os-melhores-indices-de-desenvolvimento-humano-do-mundo-somalia-e-sudao-do-sul-os-piores-veja-ranking.ghtml. Acesso em: 16 jul. 2024.

Diante dessas informações, podemos dizer que o IDH brasileiro não está em uma posição confortável quando comparado ao IDH de outros países. Mesmo assim, essa análise é apenas comparativa e não explica seu significado. Precisamos saber mais!

O **IDH** avalia os países em uma escala de 0 a 1. O índice 1 não foi alcançado por nenhum país do mundo, pois significaria que o país teria uma realidade perfeita – ou seja, quanto mais próximo de 1 for o IDH de um país, melhor a qualidade de vida da população. O índice 1 corresponde a 100%.

Podemos dizer que, quanto maior o IDH, maior será o desenvolvimento humano constatado (medido) em determinada região. É importante saber que os dados referentes ao IDH são disponibilizados pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD). Veja três importantes critérios apontados pelo IDH relacionados à qualidade de vida das pessoas.

Saúde (expectativa de vida): Leva em consideração a qualidade de vida, particularmente a “esperança de vida” de uma criança ao nascer. É fundamental avaliar a porcentagem da população com acesso a medicamentos, vacinas, tratamentos de saúde etc. São avaliados, também, a taxa de natalidade, o índice de violência e a taxa de mortalidade.

Educação: É considerado o grau de instrução da população e são analisadas a taxa de alfabetização e a escolarização (Educação Básica e Ensino Superior). Observa-se, por exemplo, a média de anos escolares de um adulto, as taxas de evasão escolar, de repetência, o número de vagas para crianças consideradas aptas a ser matriculadas etc.

Renda: Reflete o padrão de vida dos habitantes de um país ou de uma região. A qualidade de vida é avaliada segundo o cálculo do PIB (Produto Interno Bruto) *per capita*, obtendo-se o total de bens e serviços produzidos durante um ano na região e dividindo-o pelo número de habitantes.

Análise e contexto

Os indicadores das condições de vida das populações

No livro *Estatística aplicada às Ciências Sociais*, o autor Paulo Afonso Bracarense aponta que as duas principais limitações sociais do IDH são:

- o PIB *per capita* não consegue dar conta da má distribuição de renda;
- o índice de escolaridade não leva em conta a qualidade do ensino dado.

Para justificar essas limitações, apresentamos, a seguir, um trecho do livro para que você conheça os argumentos do autor.

Cassandra Cury/Pulsar Imagens

Sala de aula da escola de Ensino Fundamental da aldeia Aiha, da etnia kalapalo, no Parque Indígena do Xingu (MT), agosto de 2023.

[...]

A riqueza das nações é medida por meio do cálculo de seu Produto Interno Bruto (PIB), que representa a soma (em valores monetários) de todos os bens e serviços finais produzidos em uma determinada região durante um período. O seu cálculo não é simples, como será visto mais à frente. No Brasil, ele é feito pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), órgão vinculado ao Ministério do Planejamento.

Verifica-se, no entanto, que países ricos (de PIB elevado) possuem, em seu território nacional, situações de altos níveis de pobreza e com acentuadas desigualdades sociais. Constata-se, então, que riqueza e crescimento econômico não implicam diretamente em desenvolvimento social. Dessa forma, o indicador PIB *per capita*, resultado da divisão de riqueza total do país pelo número de habitantes, é insuficiente para medir a condição de qualidade de vida de uma população.

Como foi apontado, mais recentemente, sob orientação de organismos internacionais – como a Organização das Nações Unidas (ONU), a Organização para a Cooperação do Desenvolvimento Econômico (OCDE), a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco), a Organização das Nações Unidas para a Agricultura e Alimentação (FAO), a Organização Internacional do Trabalho (OIT), a Organização Mundial da Saúde (OMS) e o Fundo das Nações Unidas para as Crianças (Unicef), entre outros –, tem sido realizado um grande esforço conceitual e metodológico para o desenvolvimento de instrumentos de mensuração de bem-estar e de mudança social. Esses são marcos importantes de produção e disseminação de estatísticas públicas que passaram a incorporar novas dimensões investigativas e de produção de relatórios sociais de maneira mais organizada e sistemática.

Uma série de novos indicadores tem sido proposta por estudiosos e órgãos dedicados à análise das condições de vida das populações. No entanto, existem alguns que têm sido usados universalmente, e que por isso são importantes para estudos comparativos, como o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) e o índice de Gini [...].

A construção de indicadores alternativos aos estritamente econômicos, e mesmo ao IDH, tem alcançado propostas metodológicas bastante inovadoras, mas que, no entanto, ainda não têm sua difusão irradiada globalmente.

Fonte: BRACARENSE, P. A. *Estatística aplicada às Ciências Sociais*. Curitiba: IESDE Brasil, 2018. p. 142.

Após a leitura do texto, junte-se a três colegas para realizar as atividades a seguir.

1. Pesquisem como é feito o cálculo do IDH de um país e detalhem quais índices são utilizados. 1. Resposta no Manual do Professor.
2. Pesquisem o IDH dos estados brasileiros utilizando os dados mais recentes. Apresentem as informações em uma tabela ou um gráfico. Incluam, também, o IDH do Brasil. 2. Resposta no Manual do Professor.
3. Elaborem um texto comparando o IDH do Brasil com o IDH dos estados. 3. Resposta pessoal.

Outros índices importantes

Apesar de não abordarmos aqui todos os índices socioeconômicos que frequentemente aparecem na mídia, vamos apresentar alguns que podem interferir em sua vida, sua futura profissão e outras situações que você esteja planejando para o futuro.

Índices de inflação

Inflação é a denominação dada ao aumento dos preços de produtos e serviços.

O cálculo da inflação é feito com base nos índices dos preços. O IBGE produz dois índices: o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (**IPCA**) e o Índice Nacional de Preços ao Consumidor (**INPC**).

O IPCA engloba uma parcela maior da população e aponta a variação do custo de vida médio de famílias com renda mensal de 1 a 40 salários mínimos. O INPC avalia o custo de vida médio apenas das famílias com renda de 1 a 5 salários mínimos.

IPCA e INPC

O IPCA é utilizado pelo governo federal como índice oficial da inflação no Brasil. Por isso, esse índice é referência para o estabelecimento de metas de inflação e alterações na taxa de juros cobrada por instituições financeiras.

Tanto o IPCA quanto o INPC medem a variação de preços de uma cesta de produtos e serviços consumida pela população e analisam se os preços aumentaram ou diminuíram de um mês para o outro. Entre os produtos e serviços estão incluídos: arroz, feijão, passagem de ônibus, material escolar, assistência médica, cinema etc. Esses índices consideram não apenas a variação de preços desses produtos ou serviços, mas o "peso" deles no orçamento das famílias.

IPCA/IBGE – 2023

Mês	Índice (em %)		
	Do mês	Acumulado	
		No ano	Nos últimos 12 meses
Mar. 2023	0,71	2,09	4,65
Fev. 2023	0,84	1,37	5,60
Jan. 2023	0,53	0,53	5,77

Fonte: OLIVEIRA, R. Tabela IPCA 2024: Índice oficial de inflação atualizado. *Mobills*, [*s. l.*], 10 abr. 2024. Disponível em: https://www.mobills.com.br/tabelas/ipca/. Acesso em: 28 ago. 2024.

A tabela contém o IPCA dos meses de janeiro, fevereiro e março de 2023 acumulados no ano e nos últimos 12 meses. Agora, vamos interpretar esses dados.

Para pensar e discutir

1. Explique os cálculos feitos, a partir dos dados do IPCA de janeiro, fevereiro e março, que resultaram no índice 2,09%, correspondente ao índice acumulado em 2023 nesses três meses. 1. Resposta no Manual do Professor.
2. Se, em março de 2023, um trabalhador recebeu um aumento de 3,90% em seu salário, correspondente ao reajuste dos últimos 12 meses, o poder de compra dele aumentou ou diminuiu? Justifique. 2. Diminuiu; resposta pessoal.

PIB

O **Produto Interno Bruto** (PIB) é um indicador econômico que representa a soma de todos os bens e serviços produzidos em uma área geográfica (em um país, por exemplo) durante determinado período. Em linhas gerais, o PIB representa a dinâmica do lugar e é utilizado para analisar o desenvolvimento da economia.

Quando você escutar um analista econômico falando a respeito do crescimento econômico brasileiro em determinado período, ele provavelmente estará se baseando na variação percentual do PIB nesse período, fazendo comparações com outros países. A preocupação com o crescimento da economia traz outras questões. De maneira simplificada, quanto maior a renda, melhor a qualidade de vida. Quando há aumento na renda de um país, a tendência é que mais pessoas melhorem de condição de vida. Vale ressaltar, no entanto, que a renda não é o único fator importante para a qualidade de vida e, como vimos, há críticas ao uso do PIB como indicador de bem-estar, porque ele não traz indicações sobre a distribuição de renda ou a preservação das florestas, por exemplo.

Análise e contexto

O PIB (Produto Interno Bruto)

Leia o texto a seguir para conhecer um pouco mais a respeito do PIB.

PIB: entenda o que é e como é calculado

O PIB (Produto Interno Bruto) é o conjunto de riquezas gerado em um país. Trata-se de um índice econômico que engloba praticamente toda a cadeia produtiva brasileira.

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) calcula trimestralmente o que o país produz num período, na agropecuária, indústria e serviços.

Comparando o PIB atual com o dos anos anteriores, podemos saber se a atividade econômica está crescendo ou diminuindo. O índice também permite comparar o desempenho da nossa economia em relação ao desempenho da economia de outros países.

smshoot/Shutterstock.com

No início de 2024, o Brasil apresentava expectativa de aumento do PIB para o ano.

O Banco Central e o governo federal utilizam o PIB para tomar diversas decisões que influenciam diretamente a sua vida. [...] As empresas e os investidores estudam o PIB antes de tomar decisões de investimento, antes de contratar ou demitir, antes de ampliar ou retrair suas atividades.

O primeiro cálculo de produção nacional foi publicado em 1953 nas Nações Unidas. Ele foi baseado em um documento do economista Richard Stone, que recebeu o Prêmio Nobel de Economia em 1984.

Como é feito o cálculo do PIB?

Existem duas formas mais usadas para calcular o PIB e ambas chegam ao mesmo resultado. A primeira é contar tudo que se produz, na chamada “ótica da oferta”. Nessa conta, entram os resultados da agropecuária, da indústria e dos serviços. Aqui estão produtos finais, sendo tudo aquilo que é vendido ao consumidor, como pães, carros e brinquedos. Também estão nessa conta os serviços, como o salão de beleza e os gastos com empregados domésticos.

A segunda forma de calcular é somando o que se gastou no país. Esse método considera a visão da demanda. Entram nessa conta o consumo das famílias, os gastos do governo e os investimentos das empresas e do governo. De maneira simplificada, o PIB é calculado através da fórmula:

$$\mathbf{PIB = C + I + G + (X - M)}$$

Onde:

C = Gastos das empresas no setor privado;
I = Investimentos;
G = Gastos dos governos e empresas públicas;
X = Exportações;
M = Importações.

Carrossel de imagens Índices socioeconômicos

[...]

Um dos fatores que mais tem influência no crescimento do PIB é o consumo das famílias. Ou seja, quanto mais as pessoas compram, mais as empresas precisam produzir e investir para produzir mais.

PIB: saiba o que é e como é calculado. *Finance One*, [*s. l.*], 11 mar. 2020. Disponível em: https://financeone.com.br/PIB-o-que-e-e-como-e-calculado/. Acesso em: 28 ago. 2024.

Após a leitura do texto, junte-se a mais três colegas para fazerem as atividades a seguir.

1. Pesquisem e registrem o PIB *per capita* brasileiro nos últimos 10 anos. 1. Resposta pessoal.

2. Pesquisem e registrem o PIB *per capita* de outros quatro países nos últimos 10 anos. 2. Resposta pessoal.

3. Com esses dados, elaborem um gráfico comparativo entre o PIB *per capita* brasileiro e o PIB *per capita* dos outros países no período solicitado. 3. Resposta pessoal.

4. Elaborem um texto, com base no gráfico comparativo, analisando o PIB *per capita* brasileiro em relação ao PIB *per capita* das outras nações que escolheram. 4. Resposta pessoal.

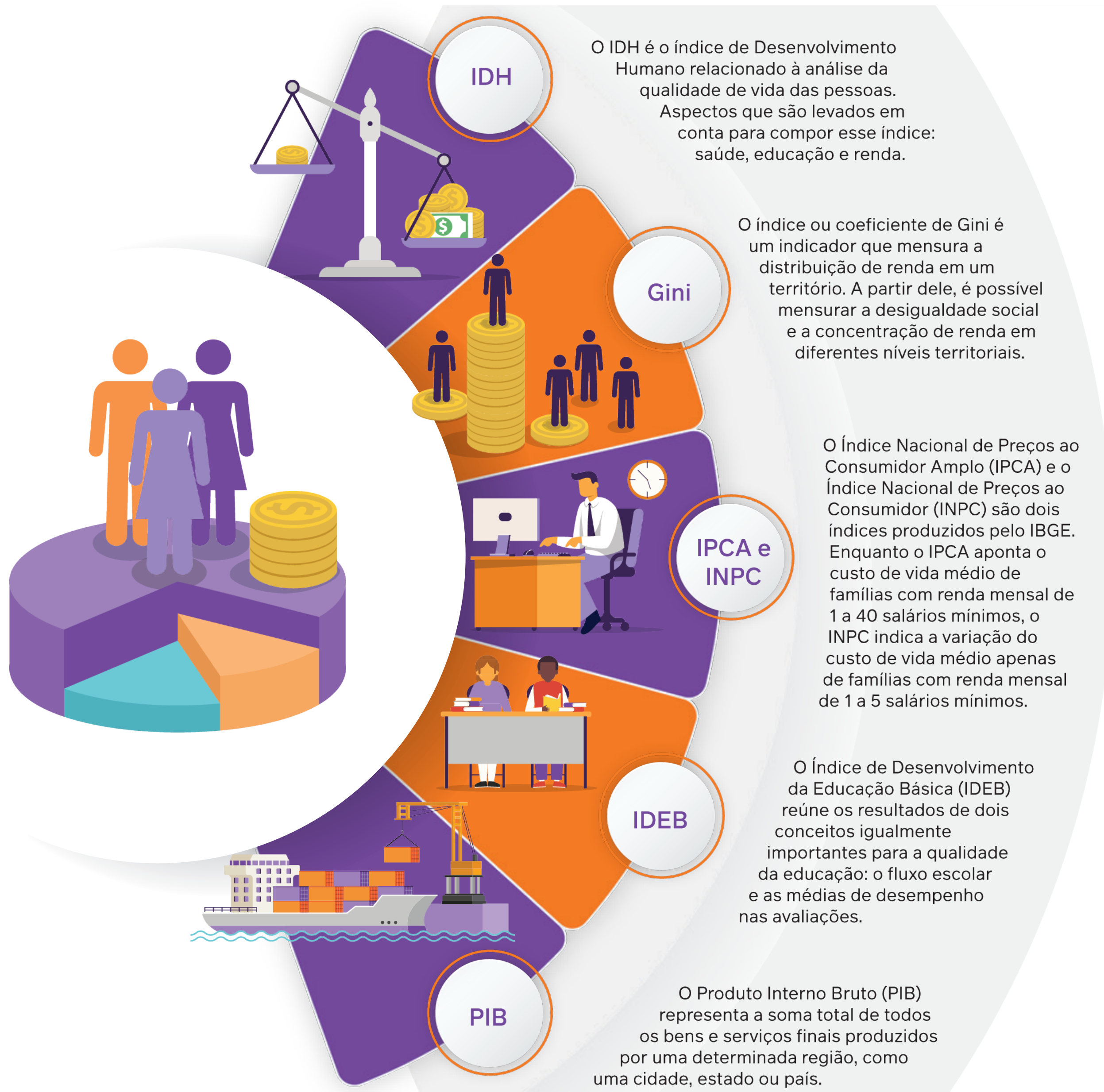
Observação: É necessário procurar o PIB *per capita* em dólar de todos esses países.

Infográfico

Podcast
Um país de desigualdades

Conheça alguns índices sociais e econômicos

Existem diversos índices que, de certa maneira, acabam “mapeando” a vida das pessoas de uma localidade em relação a diversos aspectos, como saúde, educação e bem-estar social e econômico. Não é necessário que você domine a técnica de cálculo desses índices nem compreenda todos os detalhes da interpretação de suas funções. Entretanto, o conhecimento do significado de cada um deles permite ampliar sua visão socioeconômica do país e da sociedade em que está inserido. Vamos conhecê-los ou relembrá-los.



Fábio Nienow

Produza um texto contendo uma resposta para cada uma das questões a seguir.

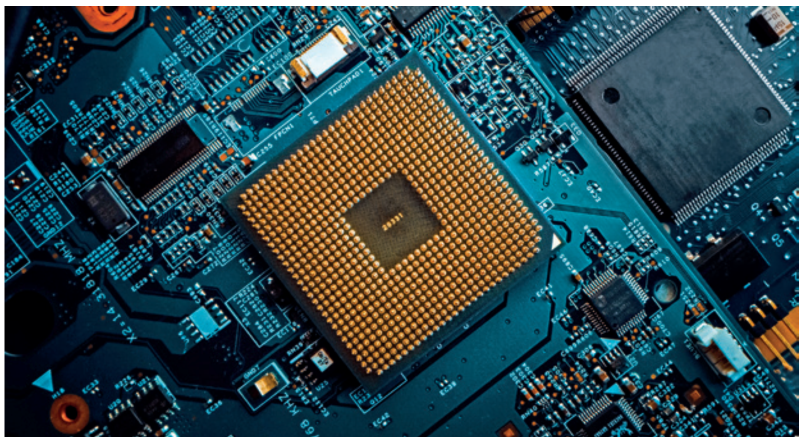
1. Como os índices socioeconômicos podem ser utilizados para mudar um país? 1. Resposta pessoal.

2. O que esses índices, em sua opinião, não indicam? 2. Resposta pessoal.

Linguagem estatística

2

Você já viu um equipamento eletrônico como o representado na imagem abaixo? Para uma pessoa que não conhece esse equipamento, provavelmente surgiria a pergunta: **O que é isso**? E a próxima questão seria: **Para que serve**? Uma pessoa ainda mais curiosa perguntaria, em seguida: **Como podemos utilizá-lo**?



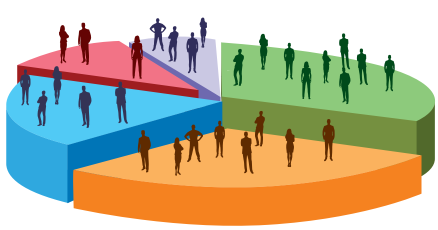
Gorodenkoff/Shutterstock.com

Modelo de placa utilizada na parte interna de um dispositivo eletrônico.

Mas essas três questões não estão associadas apenas a um dispositivo eletrônico. O livro *Estatística – O que é, para que serve, como funciona*, do autor Charles Wheelan, utiliza no próprio título três questões condutoras para tentar esclarecer ao leitor o que vem a ser Estatística: O que é? Para que serve? Como funciona?

Não propomos aqui um estudo completo de Estatística. Queremos que você compreenda melhor esse importante recurso de análise de informações: entenda como os dados gerados em uma pesquisa estatística são interpretados.

As figuras a seguir transmitem a ideia da Estatística como uma maneira de conhecer a realidade do nosso país. Os chamados censos demográficos brasileiros, por exemplo, apresentam os dados populacionais coletados. Mas é preciso muito mais do que esses dados para compreender e analisar algumas situações.



Tarcísio Garbellini

Figura 1.

Tarcísio Garbellini

Figura 2.

Para pensar e discutir

1. Pensando em Censo Demográfico, o que a figura 1 sugere a você? E a figura 2? 1. Resposta pessoal.

Os dados brutos levantados em uma pesquisa acabam nos dando “pistas” desorganizadas sobre uma realidade. Assim, entra em jogo o tratamento da informação, que processa esses dados, organizando-os. Depois disso, a análise crítica das informações possibilita alguma conclusão significativa a respeito da pesquisa.

Em diversos momentos do Ensino Fundamental, na disciplina de Matemática, você teve a oportunidade de explorar pequenas pesquisas, com a tabulação dos dados e a elaboração de gráficos estatísticos. Para fazer gráficos estatísticos, hoje temos as chamadas **planilhas eletrônicas.**

Nosso interesse aqui é a chamada **Estatística Descritiva**, que nos propicia conhecer um pouco melhor os dados gerados em uma pesquisa e, mais importante, obter determinadas medidas para “resumir” conjuntos de dados observados. Entram nesse estudo, por exemplo, as chamadas tabelas de frequências e as medidas de tendência central.

Elementos em pesquisas estatísticas

Vivemos em um país continental. Conhecer as condições de vida das pessoas, o grau de escolaridade, a renda familiar, a quantidade de pessoas em uma mesma família e tantas outras informações é de interesse geral. Para isso são realizados os censos demográficos feitos de tempos em tempos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). É com base neles que autoridades governamentais tomam decisões sobre como direcionar recursos e políticas especiais.

Quando, por exemplo, o tema é "População", a própria página do IBGE indica ao leitor temas e subtemas, como os indicadores socioeconômicos que já vimos anteriormente.

Caso tenha interesse em obter mais informações sobre esse tema, consulte o *site* do IBGE, disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao.html (acesso em: 29 ago. 2024).

Nesse *site*, você encontra diversos temas e subtemas que permitem conhecer mais sobre a realidade da população brasileira.

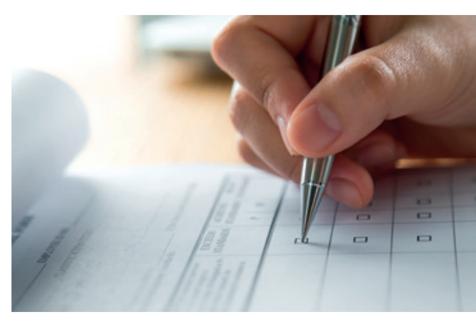
Agora, vamos imaginar que você é um empresário que pretende lançar determinado produto no mercado. Recomenda-se que, inicialmente, você faça ou encomende uma pesquisa não apenas focando o tipo de produto a ser lançado, mas também considerando outros fatores.

1	Sua empresa encomenda uma pesquisa a um instituto especializado.
2	O instituto de pesquisa define o conjunto de pessoas que representam o universo estatístico a ser pesquisado.
3	Como muitas vezes é inviável pesquisar todas as pessoas, o instituto define uma amostra representativa da população a ser pesquisada. A escolha dessa amostra é muito criteriosa para de fato representar essa população.
4	Define-se como os dados serão coletados. Por exemplo, podem ser feitas entrevistas *on-line*.
5	Os dados coletados são organizados em tabelas e gráficos por meio de *softwares* para serem analisados. Pode-se também, nessa etapa, calcular as medidas que resumem os dados (médias, desvios etc.).
6	O instituto de pesquisa apresenta à empresa uma análise dos dados, indicando margem de erros, médias e tendências de aceitação do produto a ser lançado.

Variáveis em uma pesquisa

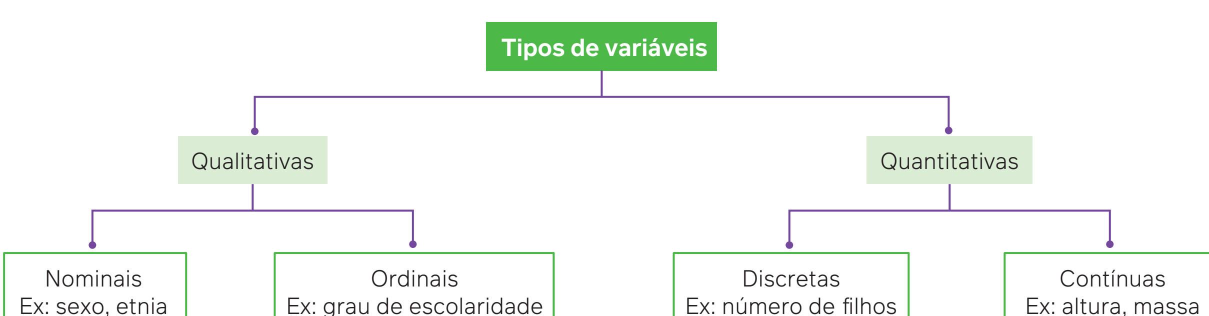
Uma observação importante diante de uma pesquisa é que cada um dos itens investigados é chamado de **variável**. São exemplos de variáveis:

- estado civil;
- idade;
- renda mensal;
- cor predileta;
- atividade física praticada.


jannoon028/Shutterstock.com

Pessoa respondendo a uma pesquisa.

As variáveis são classificadas como **qualitativas** ou **quantitativas**. Observe o diagrama a seguir.



Acervo editora

As **variáveis qualitativas**, como o próprio nome diz, referem-se à qualidade que pode ser classificada. Se estamos pesquisando, por exemplo, o gênero de filme predileto (policial, ficção, ação etc.) estamos diante de uma variável nominal. Quando, entretanto, existe uma ordenação (ótimo, regular, médio e fraco, por exemplo), a variável qualitativa é ordinal.

Já as **variáveis quantitativas** são representadas por números. Quando esses números são naturais, dizemos que as variáveis correspondentes são discretas (número de pessoas, quantidade de livros lidos etc.). Para chegar a esses números, utilizamos uma contagem. Por outro lado, quando esses números são reais e obtidos por meio de medições que podem assumir valores com casas decimais, por exemplo, as variáveis correspondentes são contínuas (temperatura, renda familiar etc.).

Para explorar

Junte-se a três colegas para fazer as atividades a seguir, em que vocês vão explorar a ideia de tipos de variáveis em uma pesquisa.

1. Elaborem duas perguntas para os demais colegas cujos resultados representem variáveis qualitativas, sendo uma nominal e outra ordinal. 1. Respostas pessoais.
2. Elaborem duas perguntas para seus familiares ou pessoas que vivem com você cujos resultados representem variáveis quantitativas, sendo uma discreta e outra contínua. 2. Respostas pessoais.
3. Apresentem as perguntas para os colegas, comentando as distinções entre as variáveis e justificando cada uma delas. 3. Respostas pessoais.

Atividades resolvidas

5. Considere que as pessoas que concorrem a uma vaga em concurso público tenham que responder às seguintes questões:

a) Você possui computador no local em que mora?

b) Qual é o número aproximado de vezes que você acessa a internet por semana?

c) Qual provedor utiliza para acessar a rede?

d) Você já comprou algum tipo de produto pela internet?

Classifique as respostas dessas questões como qualitativas ou quantitativas.

- Analisando as quatro questões, temos:

a) Variável qualitativa (a resposta pode ser sim ou não).

b) Variável quantitativa (a resposta será numérica).

c) Variável qualitativa (a resposta será o nome de uma empresa).

d) Variável qualitativa (a resposta pode ser sim ou não).

6. Considere uma pesquisa envolvendo variáveis quantitativas consistindo nas seguintes investigações.

a) Quantidade de estudantes em cada escola de um município.

b) Média das alturas dos estudantes dessas escolas, em metros.

c) Quantidade de aulas de cada escola em um mês letivo.

Classifique cada uma das variáveis quantitativas em discretas ou contínuas.

- Analisando cada variável quantitativa, temos:

a) Discreta, pois a quantidade de estudantes é representada por um número natural.

b) Contínua, pois a média das alturas é representada por um número real.

c) Discreta, pois a quantidade de aulas mensais é representada por um número natural.

Frequências

Já vimos que os gráficos estatísticos são utilizados para representar os dados de uma pesquisa. Além deles, também temos as tabelas. Elas são fundamentais para a organização dos dados referentes às variáveis. Assim, por exemplo, para cada variável em uma pesquisa, contamos o número de vezes que cada um de seus valores está presente. Esse número é chamado de **frequência absoluta** (ou, normalmente, apenas frequência). Quando, porém, desejamos evidenciar o número de vezes que um dos valores ocorre em relação ao total, apresentamos a **frequência relativa** (geralmente dada em porcentagem).

Exemplo:

A tabela apresenta as populações brasileiras conforme o Censo 2022, tendo como fonte o IBGE. Observe as colunas com as frequências absoluta e relativa.

População por região		
Região	**População**	**Percentual**
Região Norte	17 349 619	8,54%
Região Nordeste	54 644 582	26,91%
Região Sudeste	84 847 187	41,79%
Região Sul	29 933 315	14,74%
Região Centro-Oeste	16 287 809	8,02%
BRASIL	203 062 512	100,00%
	Frequência absoluta	Frequência relativa

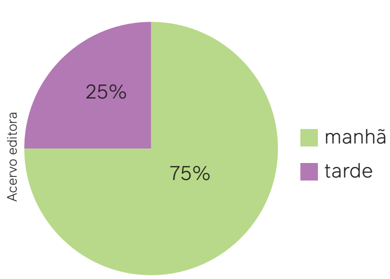
Fonte: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). *Censo 2022*. Brasília, DF: IBGE, [20--]. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/37237-de-2010-a-2022-populacao-brasileira-cresce-6-5-e-chega-a-203-1-milhoes. Acesso em: 29 ago. 2024.

Tanto as frequências absolutas quanto as frequências relativas dos dados também são representadas nos diversos gráficos estatísticos.

Exemplos:

- **Frequência relativa** (*fr*) apresentada num gráfico de setores.

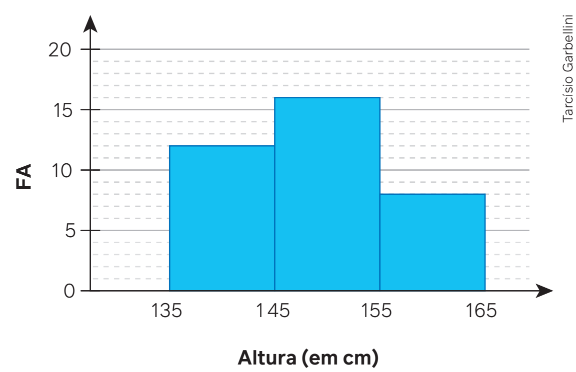
Período de estudo



Fonte: Dados fictícios.

- **Frequência absoluta** (*fa*) apresentada num histograma.

Altura dos visitantes de uma atração infantil



Fonte: Dados fictícios.

Atividades resolvidas

7. Em uma escola de Ensino Médio, 50 estudantes responderam uma pesquisa sobre a área do conhecimento em que eles apresentam maior dificuldade. O resultado foi:

Ciências Humanas: 6 estudantes

Ciências da Natureza: 24 estudantes

Linguagens: 2 estudantes

Matemática: 18 estudantes

Obtenha as frequências relativas dos estudantes em cada área do conhecimento.

- A frequência relativa de cada área é calculada pela razão entre a frequência absoluta e o total de alunos:

Ciências Humanas: $fr = \frac{6}{50} = 0{,}12 = 12\%$

Ciências da Natureza: $fr = \frac{24}{50} = 0{,}48 = 48\%$

Linguagens: $fr = \frac{2}{50} = 0{,}04 = 4\%$

Matemática: $fr = \frac{18}{50} = 0{,}36 = 36\%$

8. (Enem) No quadro seguinte, são informados os turnos em que foram eleitos os prefeitos das capitais de todos os estados brasileiros em 2004.

	cidade	turno
1	Aracaju (SE)	1º
2	Belém (PA)	2º
3	Belo Horizonte (BH)	1º
4	Boa Vista (RR)	1º
5	Campo Grande (MS)	1º
6	Cuiabá (MT)	2º
7	Curitiba (PR)	2º
8	Florianópolis (SC)	2º
9	Fortaleza (CE)	2º

	cidade	turno
10	Goiânia (GO)	2º
11	João Pessoa (PB)	1º
12	Macapá (AP)	1º
13	Maceió (AL)	2º
14	Manaus (AM)	2º
15	Natal (RN)	2º
16	Palmas (TO)	1º
17	Porto Alegre (RS)	2º
18	Porto Velho (RO)	2º

	cidade	turno
19	Recife (PE)	1º
20	Rio Branco (AC)	1º
21	Rio de Janeiro (RJ)	1º
22	Salvador (BA)	2º
23	São Luís (MA)	1º
24	São Paulo (SP)	2º
25	Teresina (PI)	2º
26	Vitória (ES)	2º

Fonte: TSE

Na Região Norte, a frequência relativa de eleição dos prefeitos do 2º turno foi, aproximadamente,

a) 42,86%. **b)** 44,44%. **c)** 50,00%. **d)** 57,14%. **e)** 57,69%.

- Inicialmente organizamos os municípios conforme os estados da Região Norte e o turno em que os candidatos foram eleitos:

Pará (PA) 2º turno Amapá (AP) 1º turno Tocantins (TO) 1º turno Acre (AC) 1º turno
Roraima (RR) 1º turno Amazonas (AM) 2º turno Rondônia (RO) 2º turno

- São 7 capitais, das quais 3 tiveram seus prefeitos eleitos no 2º turno. Assim, temos a frequência relativa (*fr*) dada por:

$$fr = \frac{3}{7} \cong 0{,}4286 = 42{,}86\%$$

Atividades

15. O quadro a seguir contém dados de uma pesquisa sobre o tipo de música que os estudantes do Ensino Médio de uma escola preferem. Cada um optou por exatamente um tipo de música.

Tipo de música	Número de estudantes
Pop	70
Rock	40
Hip-hop	30
Eletrônica	20
Sertanejo	40

Fonte: Dados fictícios.

a) Quantos estudantes participaram dessa pesquisa? 15. a) 200

b) Obtenha, em porcentagem, as frequências relativas de cada tipo de música quanto à preferência dos estudantes. 15. b) *Pop*: 35%; *rock*: 20%; *hip-hop*: 15%; eletrônica: 10%; sertanejo: 20%.

16. Um grupo de 20 pessoas participou de uma pesquisa sobre o tempo em horas que cada uma permanece diariamente na internet. Os dados estão representados no quadro abaixo.

0,5	3,0	4,5	3,0	1,0
1,0	3,0	4,5	3,0	1,0
1,0	4,0	4,0	3,0	4,0
4,0	4,5	0,5	3,0	4,0

Determine a frequência absoluta e a frequência relativa das pessoas que permanecem na internet diariamente 4,5 horas. 16. $fa = 3$; $fr = 0{,}15 = 15\%$

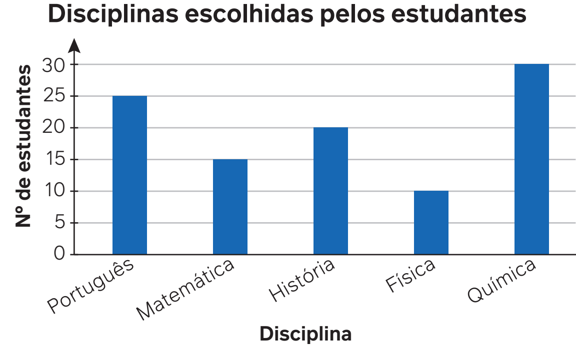
17. Em uma pesquisa feita entre 3 600 pessoas, observou-se a quantia que cada uma gastava por semana em lanches. Para organizar as informações, os dados foram separados em 5 classes, conforme o quadro. Calcule o percentual de pessoas que gastam pelo menos 125 reais por semana em lanches. 17. 60%

Valor gasto (reais)	Número de pessoas
50 ⊢ 75	300
75 ⊢ 100	640
100 ⊢ 125	500
125 ⊢ 150	1 310
150 ⊢ 175	850

Fonte: Dados fictícios.

18. Entre os 60 estudantes de uma turma do Ensino Médio, cada um tinha que escolher uma disciplina para fazer uma pesquisa. O resultado foi apresentado no gráfico de colunas abaixo.

Disciplinas escolhidas pelos estudantes



TDPStudio

18. Resposta no Manual do Professor. Fonte: Dados fictícios.

Organize essas informações em uma tabela contendo a frequência absoluta e a frequência relativa na forma decimal de 0 a 1 de cada disciplina.

19. O quadro a seguir apresenta parte da distribuição de frequências das notas de 200 candidatos na primeira fase de um concurso. Quantos candidatos conseguiram notas maiores ou iguais a 9?
19. 70

Notas	Frequência absoluta	Frequência relativa
0,0 ⊢ 6,0		0,25
6,0 ⊢ 7,0	40	
7,0 ⊢ 8,0		0,15
8,0 ⊢ 9,0		0,05
9,0 ⊢ 10,0		
Total	200	1,00

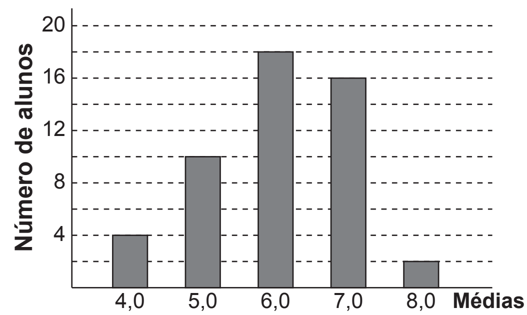
20. (Unifor-CE) Em certa eleição municipal foram obtidos os seguintes resultados:

Candidato	Porcentagem do total de votos	Número de votos
A	26%	
B	24%	
C	22%	
nulo ou em branco		196

O número de votos obtidos pelo candidato vencedor foi: 20. Alternativa **b**.

a) 178
b) 182
c) 184
d) 188
e) 191

21. (Enem) Considere que as médias finais dos alunos de um curso foram representadas no gráfico a seguir.



Sabendo que a média para aprovação nesse curso era maior ou igual a 6,0, qual foi a porcentagem de alunos aprovados? 21. Alternativa **e**.

a) 18%
b) 21%
c) 36%
d) 50%
e) 72%

Diagrama de ramo e folhas

Uma maneira um pouco diferente de representar os dados de uma pesquisa, que você provavelmente ainda não utilizou no Ensino Fundamental, é o chamado **diagrama de ramo e folhas**. Esse diagrama representa de maneira simplificada a distribuição de frequência de uma variável quantitativa, explicitando os valores assumidos por ela.

Para exemplificar, vamos considerar um grupo de 32 estudantes que se organizaram para fazer algumas medições. Ao medir suas massas em quilogramas, os dados obtidos foram organizados no quadro abaixo:

Massa (em quilogramas)															
36	37	38	38	39	40	44	45	45	45	47	47	48	48	48	49
50	50	50	50	53	56	58	60	61	62	63	65	70	71	72	74

Podemos organizar esses dados de outra maneira para facilitar a visualização. Observando que as massas das 32 pessoas estão representadas por números com dois algarismos (dezenas e unidades), utilizamos um traço vertical para dividir esses números em duas partes: a da esquerda será chamada de ramo (contendo as dezenas) e a da direita será chamada de folhas (contendo as unidades). Assim, na linha de cada ramo, para facilitar a leitura, colocamos as massas em ordem crescente da esquerda para a direita:

Ramo	Folhas
3	6 7 8 8 9
4	0 4 5 5 5 7 7 8 8 8 9
5	0 0 0 0 3 6 8
6	0 1 2 3 5
7	0 1 2 4

Acervo editora

Para pensar e discutir

1. Observe apenas o diagrama de ramo e folhas e diga qual "faixa" de massa é mais frequente nesse grupo de estudantes. 1. 40 kg

2. E qual é a "faixa" de massa menos frequente nesse grupo? 2. 70 kg

3. Existem duas pessoas com massa 38 kg. Como essas massas foram representadas no diagrama?

4. Caso houvesse uma pessoa com 102 kg no grupo, como você poderia representar essa massa no diagrama?

4. Resposta no Manual do Professor.

3. Repete-se o algarismo das unidades no ramo 3.

Atividades resolvidas

9. No quadro abaixo estão indicadas as idades em anos completos de um grupo de pessoas reunidas para a comemoração do aniversário do bisavô da família. Construa um diagrama de ramo e folhas.

9	46	48	50	63	66	68	75	82	87	98
82	35	27	18	19	12	33	38	73	44	48

- Observando as dezenas e unidades das idades das pessoas reunidas, utilizamos um traço vertical para dividi-las em duas partes. Iniciamos colocando do lado esquerdo os algarismos que irão indicar o "ramo", isto é, os algarismos das dezenas de 0 a 9, e do lado direito as "folhas" com os algarismos que representam as unidades das idades das pessoas. Em cada ramo, colocamos as idades em ordem crescente da esquerda para a direita, para facilitar a leitura.

Ramo	Folhas
0	9
1	2 8 9
2	7
3	3 5 8
4	4 6 8 8
5	0
6	3 6 8
7	3 5
8	2 2 7
9	8

Acervo editora

10. Em determinado hotel, do 3º andar ao 8º andar, estão localizados os quartos para os hóspedes, sendo 10 apartamentos em cada andar, numerados da seguinte maneira: os algarismos das dezenas (de 3 a 8) indicam o andar e os algarismos das unidades (de 0 a 9) indicam o número do quarto. Assim, por exemplo, o quarto 35 fica no 3º andar. Paula é a responsável pela recepção e, a cada dia, elabora um diagrama de ramo e folhas para indicar os quartos que estão ocupados. Hoje ela fez o seguinte diagrama:

3	5 7
4	1 2 4 6 9
5	2 3 4 5 6 7 8 9
6	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
7	2 3 8
8	1

a) Quais são os números dos quartos desocupados no 4º andar?

b) Qual é o andar com a maior taxa de ocupação dos quartos?

c) Sete quartos são reservados para um grupo de pessoas que chegarão hoje e desejam ficar no mesmo andar. Em quais andares Paula poderá atender ao pedido desses hóspedes?

- Item **a**: no ramo cujo algarismo é 4, os números das folhas indicam os quartos ocupados do 4º andar. Assim, os que não estão indicados representam os quartos desocupados, isto é, 40, 43, 45, 47 e 48.
- Item **b**: no ramo 6, que corresponde ao 6º andar, a ocupação é de 100%, pois todos os quartos de 40 a 49 estão ocupados.
- Item **c**: são três as possibilidades: 3º andar → 2 quartos ocupados e 8 desocupados; 7º andar → 3 quartos ocupados e 7 desocupados; 8° andar → 1 quarto ocupado e 9 desocupados.

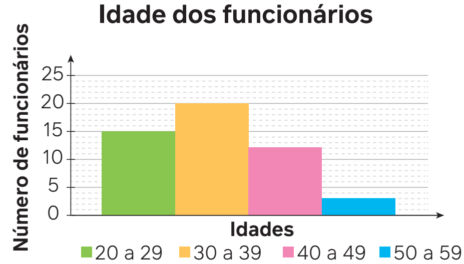
Para explorar

Junte-se a um colega para fazer o que se pede a seguir.

1. O quadro a seguir contém as idades de 50 funcionários da empresa Força Total, que presta serviços de manutenção elétrica e hidráulica em residências, e um histograma foi elaborado com base nos dados do quadro.

20	20	21	21	22	27	25	24	29	28
23	23	22	25	24	40	40	48	48	48
43	44	42	42	41	39	33	31	31	34
35	36	38	32	33	37	37	30	30	30
32	39	39	30	52	57	53	45	49	37

Idade dos funcionários



Tarcísio Garbellini

Fonte: Gerência da empresa (dados fictícios).

Utilizando os dados do quadro, façam um diagrama de ramo e folhas. 1. Resposta no Manual do Professor.

2. Pesquisem em planilhas eletrônicas a construção do diagrama de ramo e folhas e, com os mesmos dados, elaborem o diagrama utilizando esse recurso tecnológico. 2. Resposta pessoal.

3. Comparem o diagrama com o histograma apresentado. 3. Resposta pessoal.

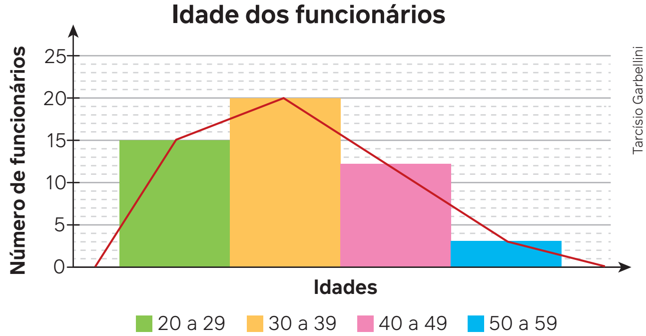
4. Escrevam um texto comparando as duas construções e comentem o grau de dificuldade de construção e a semelhança nas informações que eles produzem. 4. Resposta pessoal.

O diagrama de ramo e folhas possibilita fazer uma leitura rápida da distribuição do conjunto de valores. Além disso, sua construção não exige muito esforço. Atualmente, a construção de diagramas e gráficos estatísticos ficou facilitada pela possibilidade do uso de recursos digitais. Por isso, o histograma passou a ser bem mais utilizado do que o diagrama de ramo e folhas.

Com base no histograma da página anterior, podemos obter o **polígono das frequências** ligando os pontos médios das classes. Note que, antes da primeira classe e depois da última, ligamos o ponto médio de ambas com o eixo horizontal para formar um polígono.

Esse polígono de frequências possibilita observar comparativamente a distribuição das classes.

Idade dos funcionários



Fonte: Gerência da empresa (dados fictícios).

Atividades

22. No quadro incompleto a seguir estão as alturas de um grupo de pessoas. Note que elas estão divididas em classes. Por exemplo, o intervalo [150; 155[significa alturas de 150 cm a 155 cm, porém excluindo a medida 155 cm.

Altura (cm)	Frequência absoluta	Frequência relativa
[150, 155[	2	
[155, 160[	6	
[160, 165[	10	
[165, 170[	5	
[170, 175[	4	
[175, 180[	6	
[180, 185[	12	
[185, 190]	5	
Total		

Copie esse quadro no caderno e complete-o com as informações que faltam. 22. Resposta no Manual do Professor.

23. Junte-se a mais um colega para esta atividade.

a) Façam um levantamento das alturas de todos os estudantes da turma. 23. a) Resposta pessoal.

b) Dividam essas alturas em 5 classes igualmente espaçadas. 23. b) Resposta pessoal.

c) Elaborem uma tabela que contenha as classes, frequências relativas e frequências absolutas. 23. c) Resposta pessoal.

d) Construam um histograma para representar os dados levantados. 23. d) Resposta pessoal.

e) Com base no histograma, façam o polígono das frequências. 23. e) Resposta pessoal.

24. O diagrama de ramo e folhas a seguir contém as idades dos 40 funcionários de uma indústria de alimentos em determinada data.

Acervo editora

1	8 8 9
2	0 1 1 2 2 2 7 8 8 9
3	1 3 3 3 3 4 4 4 5 6 7 8 8 8
4	0 1 2 2 3 4 8 9
5	1 5 8
6	2 5

24. a) 65 anos
24. b) 33 anos
24. c) *fa* = 14; *fr* = 35%

a) Qual é a maior idade entre os funcionários?

b) Qual é a idade com maior frequência?

c) Quais são a frequência absoluta e a frequência relativa das idades de 30 a 39 anos nessa empresa?

25. (EEAR) A tabela apresenta as frequências acumuladas das notas de 70 alunos obtidas em uma avaliação. A frequência absoluta da 2ª classe é:
25. Alternativa **a**.

Notas	Frequência acumulada
2,0 ⊢ 3,5	12
3,5 ⊢ 5,0	26
5,0 ⊢ 6,5	43
6,5 ⊢ 8,0	57
8,0 ⊢ 9,5	70

a) 14. **b)** 15. **c)** 16. **d)** 17.

26. Junte-se a um colega para esta atividade. Utilizando os dados da atividade anterior e com o auxílio de planilhas eletrônicas:

a) construam o histograma dessa distribuição. 26. a) Resposta no Manual do Professor.

b) com base no histograma, façam o polígono das frequências. 26. b) Resposta no Manual do Professor.

Realizando uma pesquisa estatística

Para elaborar uma pesquisa, é importante pensar nos seguintes questionamentos:

- O que vou pesquisar?
- Quais são minhas variáveis de interesse?
- O que espero dessa pesquisa estatística?
- E se os dados levantados não forem suficientes para chegar a uma conclusão?

CBakhtiar Zein/Shutterstock.com

Geralmente, uma pesquisa estatística parte de uma pergunta que se refere ao objeto a ser pesquisado. Você já deve ter feito diversas pesquisas ao longo de sua escolarização e, provavelmente, em algumas delas utilizou *sites* de busca que o auxiliaram bastante.

Queremos agora que você faça uma pesquisa estatística envolvendo todas as etapas. O objetivo será conhecer melhor algum tema que você esteja estudando em outra área de conhecimento.

Uma etapa importante nesse tipo de pesquisa é a coleta dos dados que depois serão analisados. Na elaboração do instrumento para fazer a coleta, as perguntas devem estar alinhadas com a questão que se deseja responder. Apresentamos a seguir um exemplo de pesquisa que consta na avaliação de que participam os estudantes ao ingressarem na universidade e ao final do curso. Acompanhe!

Essa avaliação, feita pelo MEC, é conhecida como Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (Enade) e objetiva acompanhar o processo de aprendizagem e o desempenho acadêmico dos estudantes.

No processo de avaliação do Enade, os estudantes devem preencher um questionário.

O questionário é "um instrumento importante para compor o perfil dos participantes". Há uma exigência de que o documento seja preenchido apenas pelo estudante, sem sofrer nenhuma interferência. Selecionamos a seguir alguns itens do "Questionário do estudante – Enade-2022", que era composto de 68 itens, para que você observe com atenção.

[...]

2. Qual é a sua cor ou raça?

A ☐ Branca. B ☐ Preta. C ☐ Amarela. D ☐ Parda. E ☐ Indígena. F ☐ Não quero declarar.

5. Até que etapa de escolarização sua mãe concluiu?

A ☐ Nenhuma.
B ☐ Ensino Fundamental: 1º ao 5º ano (1ª a 4ª série).
C ☐ Ensino Fundamental: 6º ao 9º ano (5ª a 8ª série).
D ☐ Ensino Médio.
E ☐ Ensino Superior – Graduação.
F ☐ Pós-graduação.

7. Quantas pessoas da sua família moram com você? Considere seus pais, irmãos, cônjuge, filhos e outros parentes que moram na mesma casa com você.

A ☐ Nenhuma.
B ☐ Uma.
C ☐ Duas.
D ☐ Três.
E ☐ Quatro.
F ☐ Cinco.
G ☐ Seis.
H ☐ Sete ou mais.

8. Qual a renda total de sua família, incluindo seus rendimentos?

A ☐ Até 1,5 salário mínimo (até R$ 1.818,00).
B ☐ De 1,5 a 3 salários mínimos (R$ 1.818,01 a R$ 3.636,00).
C ☐ De 3 a 4,5 salários mínimos (R$ 3.636,01 a R$ 5.454,00).
D ☐ De 4,5 a 6 salários mínimos (R$ 5.454,01 a R$ 7.272,00).
E ☐ De 6 a 10 salários mínimos (R$ 7.272,01 a R$ 12.120,00).
F ☐ De 10 a 30 salários mínimos (R$ 12.120,01 a R$ 36.360,00).
G ☐ Acima de 30 salários mínimos (mais de R$ 36.360,00).

21. Alguém em sua família concluiu um curso superior?

A ☐ Sim.
B ☐ Não.

22. Excetuando-se os livros indicados na bibliografia do seu curso, quantos livros você leu neste ano?

A ☐ Nenhum.
B ☐ Um ou dois.
C ☐ De três a cinco.
D ☐ De seis a oito.
E ☐ Mais de oito.

23. Quantas horas por semana, aproximadamente, você dedicou aos estudos, excetuando as horas de aula?

A ☐ Nenhuma, apenas assisto às aulas.
B ☐ De uma a três.
C ☐ De quatro a sete.
D ☐ De oito a doze.
E ☐ Mais de doze.

[...]

BRASIL. INEP. *Questionário do estudante*. Brasília, DF: INEP, 2022. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/questionario_estudante/questionarios_estudante_enade_2022.pdf. Acesso em: 29 ago. 2024.

Para pensar e discutir

1. A pergunta “Quantos fogões existem na casa em que você mora?” traria algum dado relevante para observar a situação socioeconômica de um grupo de pessoas? Justifique. 1. Resposta pessoal.
2. E se a pergunta for “Quantos banheiros há na casa em que você mora?”, a resposta trará algum fato importante sobre a situação socioeconômica? 2. Resposta pessoal.
3. Que tipo de questão você faria a fim de contribuir para o levantamento socioeconômico de um grupo de pessoas de uma localidade diferente das elencadas até aqui? 3. Resposta pessoal.

Etapas de uma pesquisa estatística

Uma pesquisa estatística é uma investigação que parte da observação de fenômenos de caráter natural, social, econômico ou cultural e da identificação de um problema. Nessa perspectiva, pesquisar não significa estudar um assunto do qual não se tem conhecimento, como os tipos de triângulos e suas características, por exemplo. A pesquisa estatística envolve a produção de conhecimento novo.

Com base nessas ideias, o pesquisador é, portanto, um curioso, um questionador, um crítico, um cientista que investiga para descobrir coisas novas. E a pesquisa possui um aporte científico que lhe dá credibilidade. Para realizar uma pesquisa, é necessário cumprir algumas etapas, de forma a organizá-la e estruturá-la. Dependendo do tipo de pesquisa a ser feita, é importante definir sua finalidade e abrangência. Destacamos, a seguir, para qualquer pesquisa estatística a ser realizada, as quatro principais etapas.

1. Problematização.
2. Planejamento.
3. Execução da pesquisa e análise de dados.
4. Atuação sobre os resultados da pesquisa.

Vamos estudar um pouco mais a respeito de cada uma dessas etapas, que podem auxiliar na compreensão das ideias centrais da estrutura de uma pesquisa estatística.

Problematização

Nessa etapa, é necessário estabelecer o tema no qual está inserido o problema que se deseja pesquisar; formular questões pertinentes ao tema e levantar hipóteses.

- **Tema:** ao se levantar possibilidades para um tema de pesquisa, é essencial que ele seja relevante e de interesse coletivo e tenha como base uma situação complexa sobre a qual se deseja saber mais dados ou realizar análises profundas.

  Exemplo:

  Quantidade de crianças em situação de rua em minha cidade; destinação do lixo da escola; taxa de desemprego na localidade; diminuição da maioridade penal; opinião da maioria sobre a legalização do aborto; preconceito social; relação entre fome e desperdício etc.

- **Questões:** uma vez escolhido o tema, é preciso determinar a quais questões a pesquisa deverá tentar responder. A elaboração dessas questões determinará a forma de coleta e análise de dados, por isso é uma etapa imprescindível do projeto de pesquisa.

  Exemplo:

  Se o tema for desemprego na localidade, é preciso definir: O que queremos saber sobre o tema? Qual sua causa? Qual sua relação com as localidades vizinhas? Qual é sua progressão histórica?

  São inúmeras as possibilidades de questões, e é preciso fazer escolhas conscientes para planejar um bom projeto de pesquisa.

- **Hipóteses**: além de levantar as questões, também é função do pesquisador elaborar respostas hipotéticas que a pesquisa irá confirmar ou negar. As hipóteses são importantes para o pesquisador estabelecer relações com os conhecimentos que já possui e tentar “prever o futuro” deduzindo possíveis resultados. Posteriormente, elas serão retomadas e, se confirmadas, poderão fazer parte da conclusão da pesquisa.

Exemplo:

Se o tema for sobre crianças em situação de rua e a questão norteadora da pesquisa for “O que pensam as pessoas sobre as crianças que vivem nas ruas?”, são possíveis hipóteses de resposta: há crianças vivendo nas ruas por falta de responsabilidade dos pais; as crianças em situação de rua são consequência de drogadição delas e/ou familiares; as crianças vivem nas ruas porque não gostam de estudar, por isso abandonam a escola e o lar.

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal.

1. Se você fosse elaborar uma hipótese sobre o motivo de haver crianças em situação de rua, qual seria?
2. Qual sua hipótese sobre o motivo da queda do número de pais que levam seus filhos para se vacinarem?

2. Resposta pessoal.

Planejamento

O planejamento envolve a definição de três parâmetros que influenciarão na abordagem da pesquisa e dos resultados: população e amostra, instrumento de coleta de dados e planejamento da coleta de dados.

- **População e amostra:** em estudos estatísticos, a palavra **população** se refere a todos os indivíduos ou objetos de um determinado grupo. Já a palavra **amostra** diz respeito a um conjunto específico de elementos da população.

População

Amostra

Arthimedes/Shutterstock.com

Representação de uma população e sua amostra.

A população é utilizada em caso da **pesquisa censitária** (que envolve todos os elementos da população – por exemplo, ao analisar todos os exames de sangue feitos numa determinada instituição). É mais comum o uso de **pesquisa amostral** (que representa parte de uma população – por exemplo, ao analisar 10% dos exames de sangue por meio de sorteio).

Exemplo:

No caso da pesquisa sobre “Crianças em situação de rua”, a população pode ser “comunidade escolar da minha escola” e a amostra “10% dos pais, professores e estudantes de minha escola”, quantidade obtida por meio de sorteio.

- **Instrumento de coleta de dados:** para elaborar o instrumento de coleta, é importante a prévia discussão coletiva, com atenção para perguntas com potencial de responder à sua questão de pesquisa. Também é necessário pontuar variáveis que podem influenciar nos resultados, como idade, poder aquisitivo, formação etc.

As perguntas podem ser abertas ou de múltipla escolha. No caso das perguntas abertas, nas quais o participante da pesquisa pode responder o que quiser, as respostas deverão ser categorizadas posteriormente para que possam ser agrupadas e quantificadas permitindo a análise de dados. Já no caso das perguntas de múltipla escolha, as opções de resposta precisam ser bem pensadas para garantir que traduzam todas as possíveis respostas, sem induzir os participantes a uma ou outra alternativa.

Prostock-studio/Shutterstock.com

Jovem fazendo pesquisa.

Exemplo:

No caso da pesquisa sobre "Crianças em situação de rua", podem ser feitas perguntas como:

- Qual é a principal razão de as crianças estarem na rua?
- A quem você atribui a culpa/responsabilidade de elas estarem nas ruas?
- "Crianças que vivem na rua são futuros delinquentes." – Como você julga essa afirmativa?
- Você já se mobilizou para ajudar crianças em situação de rua? De que forma?
- Como você se sente quando vê crianças trabalhando nos semáforos?

- **Planejamento da coleta de dados:** a coleta deve ser feita da mesma forma por todos os entrevistadores/pesquisadores. Se a opção for pelo uso de questionário eletrônico, todos terão o mesmo questionário e utilizarão a mesma forma de distribuição. Se a opção for por entrevista individual com preenchimento do questionário pelo pesquisador, todos devem estipular a melhor maneira de proceder, e isso deve ser respeitado. Para que não haja distorção dos resultados, os dados precisam ser coletados de forma idêntica por todos.

Execução da pesquisa e análise de dados

A execução é a parte mais longa do projeto e pode ser organizada em cinco partes:

- **Coleta dos dados:** é o primeiro passo da execução e deve acontecer em conformidade com o que foi estabelecido no planejamento. É preciso também estabelecer um prazo para essa coleta, de modo que os dados analisados reflitam uma situação em determinado período.
- **Organização dos dados:** a alimentação e organização dos dados podem ser feitas por uma pessoa ou grupo em uma planilha, de preferência eletrônica, para que algumas ferramentas tecnológicas auxiliem a organização: se o questionário da sua pesquisa for feito em formulário eletrônico, os dados serão organizados por questão e, no caso de questões de múltipla escolha, alguns gráficos podem ser gerados automaticamente.
- **Tratamento dos dados:** pode ser feito manual ou automaticamente por meio de planilhas eletrônicas. Nessa fase, é possível observar os dados considerando as variáveis propostas no instrumento de coleta, comparando os valores absolutos e percentuais. É possível gerar gráficos que auxiliem na leitura dos dados.
- **Análise dos dados:** com os dados organizados, passa-se a analisá-los e interpretá-los. Essa análise depende de um olhar cuidadoso e do uso de algumas medidas estatísticas para verificar se há uma tendência no comportamento analisado e se há uma relação entre as variáveis coletadas.

  Algumas questões norteadoras para a análise de dados: O que, de modo geral, as pessoas pensam sobre o assunto? Houve diferença entre as faixas etárias? Houve divergência de opinião considerando o poder aquisitivo? Como as pessoas estão se mobilizando (ou não) para minimizar o problema apresentado?

Mauro Salgado

- **Conclusão e divulgação dos resultados:** a conclusão requer análise crítica e reflexiva dos dados. Nessa etapa, é importante produzir um texto, reportagem, infográfico ou artigo que sintetize as principais descobertas da pesquisa, comparando-as com as hipóteses iniciais. Esses dados devem ser compartilhados para conhecimento de todos por meio de redes sociais, murais, apresentação em eventos, publicação em jornais etc.

Para pensar e discutir

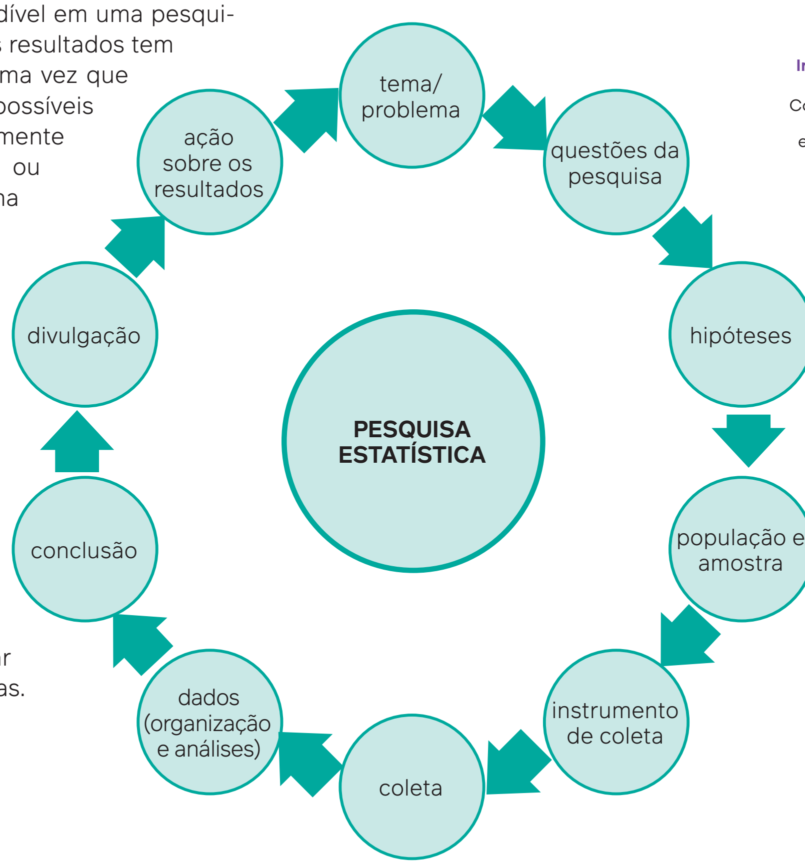
1. O Censo Demográfico de 2022 foi uma pesquisa feita com apenas amostra da população brasileira? Explique. 1. Não; resposta pessoal.
2. Uma pesquisa sobre candidatos ao cargo de presidente da República quando feita antes de uma eleição é censitária ou amostral? 2. Amostral.
3. Dê alguns exemplos de pesquisas de que você ou alguém que você conhece já participou. 3. Resposta pessoal.
4. Como você divulgaria os resultados se fizesse uma pesquisa? 4. Resposta pessoal.

Atuação sobre os resultados da pesquisa

Infográfico clicável
Coronavírus, um caso estatístico

Apesar de não ser imprescindível em uma pesquisa estatística, a atuação sobre os resultados tem sido cada vez mais valorizada, uma vez que questiona o pesquisador sobre possíveis ações que possam ser efetivamente implementadas para minimizar ou resolver o problema observado na pesquisa.

No caso do exemplo sobre pesquisa de crianças em situação de rua, podem ser feitas várias ações, como um mapeamento das ruas onde há crianças trabalhando, para que os órgãos competentes atuem ou uma campanha nas redes sociais para auxiliar as famílias dessas crianças. A ação escolhida irá depender da questão problematizadora e da resposta encontrada. De modo geral, as respostas podem gerar novas perguntas e novas pesquisas.



Acervo editora

Até aqui, vimos as ideias e etapas principais de uma pesquisa. Agora, você e seus colegas farão a pesquisa proposta a seguir.

Atividades

27. Pesquisa estatística

Para organizar a pesquisa proposta, dividimos as etapas em oito itens. Cada grupo deverá:

I. escolher um tema a ser abordado entre os assuntos que vocês estão estudando em outra área de conhecimento: Ciências Humanas e Sociais, Ciências da Natureza ou Linguagens;

II. definir qual é a variável de interesse;

III. escolhido o tema, pensar nas questões que vocês desejam responder por meio da pesquisa. Levantem algumas hipóteses;

IV. definir a população a ser pesquisada e se a pesquisa será censitária ou amostral;

V. preparar o instrumento de coleta de dados e planejar como ela será feita;

VI. concluída a coleta, organizar os dados em tabelas e gráficos e analisá-los;

VII. em seguida, apresentar os dados usando representações gráficas e textos sobre as conclusões;

VIII. refletir sobre os resultados da pesquisa e possíveis ações. 27. Respostas pessoais.

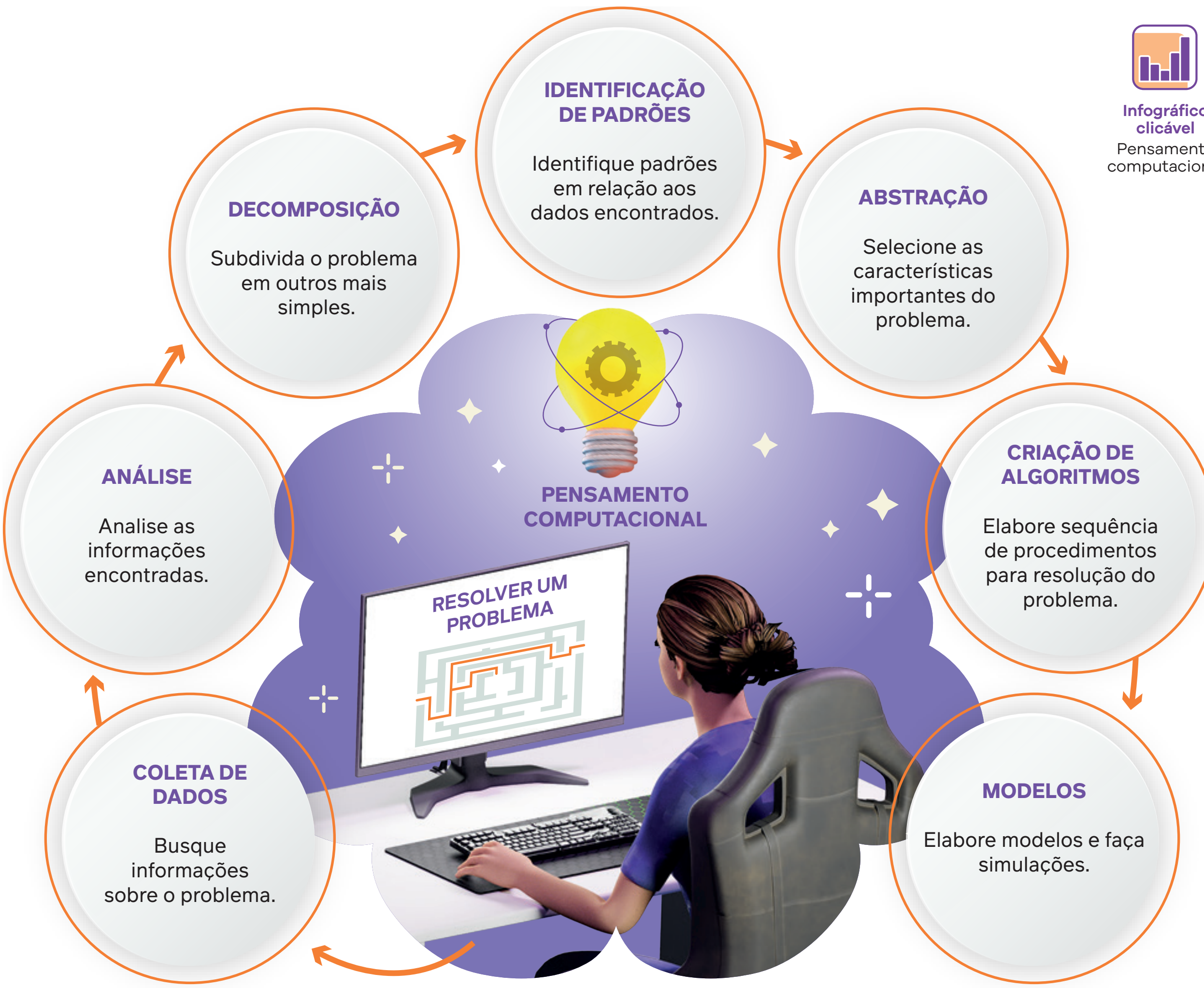
3 Pensamento computacional

Vivemos uma verdadeira revolução digital. Aspectos diversos da sociedade são influenciados por essa revolução. Estudantes e profissionais precisam cada vez mais utilizar todo o potencial que a tecnologia tem a oferecer. Ao ensinar e aprender programação, estamos exercitando o pensamento computacional.

Entretanto, o pensamento computacional está relacionado não apenas a computadores e programação, mas também, e principalmente, às etapas que utilizamos para resolver um problema ou desafio.

O exercício do pensamento computacional está ligado aos procedimentos necessários para realizar essas etapas, entre as quais podem ser destacadas: a identificação de um problema, a coleta de dados, a análise de dados, a busca de padrões, a construção de algoritmos e a elaboração de modelos que visam resolver o problema. A ilustração a seguir representa algumas dessas etapas.

Infográfico clicável
Pensamento computacional



Fábio Nienow

Modelo de etapas do pensamento computacional.

Para pensar e discutir

1. Para desenvolver o pensamento computacional, é necessário compreender linguagem de programação? Justifique. 1. Não; resposta pessoal.
2. O pensamento computacional aplica-se apenas à resolução de problemas matemáticos? 2. Não.
3. Descreva um problema do cotidiano que possa ser resolvido usando o pensamento computacional. 3. Resposta pessoal.

O raciocínio lógico e o pensamento computacional


vs148/Shuttersotck.com

O raciocínio lógico e o pensamento computacional foram a base para as linguagens de programação utilizadas hoje em dia.

O texto a seguir defende e enfatiza a importância do ensino do pensamento computacional nas escolas de Ensino Básico. Leia-o juntamente com um colega.

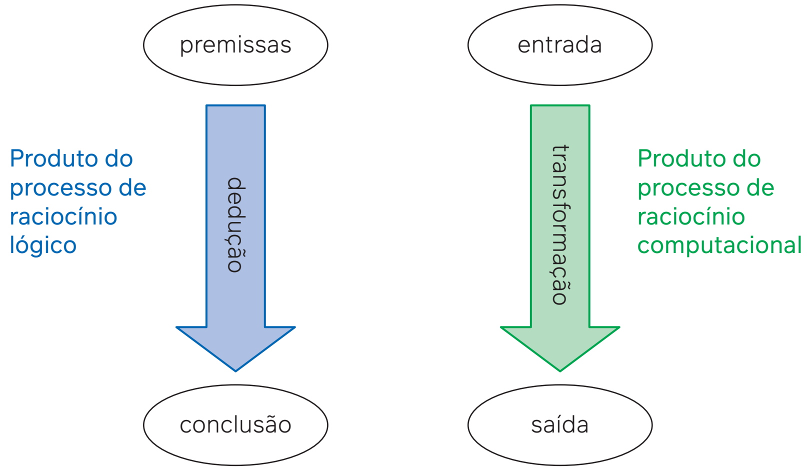
Entendendo o pensamento computacional

Para entender o que é o *pensamento computacional*, precisamos entender o que é computação. E, para entender o que é *computação*, a melhor maneira é um olhar histórico, pois entendendo a origem dos conceitos podemos compreendê-los em maior plenitude. O grande objetivo da computação é "raciocinar sobre o raciocínio". Porém, diferente da filosofia, aqui não estamos pensando de forma mais ampla sobre o raciocínio, mas sim interessados no processo de racionalização do raciocínio, ou seja, na formalização do mesmo, o que permite a sua automação e análise (matemática).

A questão de formalização do raciocínio está intimamente relacionada à resolução de problemas.

[...]

Da mesma forma que o produto do raciocínio lógico é a prova, o produto do raciocínio computacional é a sequência de regras que define a transformação, que comumente chamamos de *algoritmo*. O problema que está sendo resolvido aqui é como transformar a entrada na saída. Exemplos concretos seriam: Dado um número, como encontrar seus fatores primos? Dada uma pilha de provas de alunos, como ordenar essas provas? Dado um mapa rodoviário, como encontrar uma rota? Dados os ingredientes, como fazer um bolo?



Acervo editora

Como o resultado do processo de raciocínio computacional deve ser uma descrição clara e não ambígua de um processo, a computação está fortemente baseada na matemática, que provê uma linguagem precisa para descrição de modelos. Mas, diferente da matemática, o objeto da computação são os processos – ou seja, em computação se constrói modelos de processos. Esses modelos, comumente chamados de algoritmos, podem ser bastante abstratos, descritos em linguagem natural ou linguagens de especificação, ou como programas em uma linguagem de programação.

Pode-se argumentar que na matemática também usam-se diversas abstrações para nos ajudar a resolver problemas. Então por que precisamos de computação? Somente para automatizar a solução do problema? Não, muito mais que isso. Vamos discutir este ponto em um exemplo.

Um professor quer ensinar os alunos a fatorar um número em seus fatores primos. Ele tipicamente explica os passos que os alunos devem seguir e demonstra em alguns exemplos, ou seja, apresenta um algoritmo para os alunos. Por vezes, esse algoritmo é, além de apresentado de forma oral, descrito em português em um livro. Os alunos, então, seguem o processo várias vezes para aprender o procedimento. Mas e se o problema fosse, em vez da fatoração, ordenar uma pilha de provas de alunos? Como o professor explicaria aos alunos como a tarefa deve ser realizada? E se quiséssemos que, em vez de ordenar uma pilha dada, os alunos mesmos descrevessem como fariam a ordenação? Quais técnicas o professor utilizaria para ajudar os alunos a solucionar o problema? Note que o problema é "descreva o processo de ordenação de uma pilha de provas". Não é uma tarefa trivial. A matemática não nos ajuda a resolver esse tipo de problema, pois não provê as abstrações necessárias para descrever a solução. Além disso, não é objeto da matemática investigar "Como construímos uma prova?", ou mais genericamente, "Como construímos um algoritmo?". A ênfase do raciocínio ou pensamento computacional não são apenas os produtos em si (provas ou algoritmos), e sim o processo de construção desses produtos – ou seja, além das abstrações necessárias para descrever algoritmos, o pensamento computacional engloba também técnicas para a construção de algoritmos que podem ser vistas como técnicas de solução de problemas.

RIBEIRO, L.; FOSS, L.; CAVALHEIRO, S. *Entendendo o pensamento computacional*. Ithaca: Cornell University, 2017. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1707.00338.pdf. Acesso em: 29 ago. 2024.

Com base no texto, responda às questões a seguir.

1. O que você interpreta como pensamento computacional? 1. Resposta pessoal.

2. Pense na realização de duas tarefas do dia a dia em que o pensamento computacional possa ser aplicado. Escreva essas tarefas em um papel e troque com seu colega. Ele deve tentar justificar como o pensamento computacional seria aplicado às tarefas que você apresentou, e você fará o mesmo com as tarefas apresentadas por ele. Em seguida, discutam e validem as justificativas. 2. Resposta pessoal.

Abordaremos, neste tópico, as ideias referentes ao pensamento computacional no que diz respeito aos algoritmos e fluxogramas.

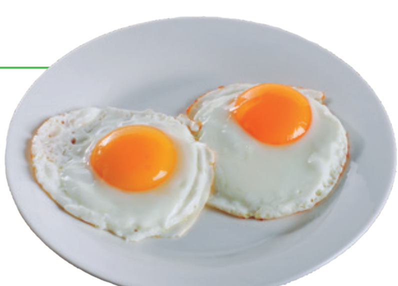
Algoritmos e fluxogramas

Jorge é um estudante de Engenharia. Ele estuda em uma universidade que fica distante da casa de seus pais. Por isso, ele mora sozinho em um apartamento. Teve de aprender a se virar: lava suas roupas e frequentemente limpa os cômodos. Aprendeu a cozinhar utilizando receitas de *sites* de busca. Um dia, resolveu fazer ovo frito. Não teve dúvidas: foi ao computador e digitou "Ovo frito no micro-ondas passo a passo". Imediatamente apareceram diversas receitas, entre as quais ele escolheu a descrita a seguir.

- Com quantos passos se preparam ovos "fritos" no micro-ondas?

Sugestão:

1. Separe os seguintes ingredientes e utensílios:
   - 1 ovo;
   - pimenta-do-reino;
   - sal;
   - 2 pires do mesmo tamanho.
2. Pegue o ovo e quebre, depositando-o, sem estourar, em um dos pires.
3. Coloque no ovo sal a gosto.
4. Coloque no ovo pimenta a gosto.
5. Cubra o ovo com o outro pires.
6. Coloque esses dois pires com o ovo dentro do micro-ondas.
7. Programe o micro-ondas por 1 minuto e 30 segundos.
8. Está pronto para comer.



Tatjana Baibakova/Shutterstock.com

Ovos preparados no micro-ondas.

Você reparou que esse procedimento poderia ser simplificado em 4 passos?

1. Quebre um ovo em um pires; adicione sal e pimenta a gosto.
2. Coloque outro pires para cobrir o ovo.
3. Leve ao micro-ondas durante 1 minuto e meio.
4. Pronto, é só provar!

A esses dois exemplos de procedimentos poderíamos chamar de algoritmos para preparar ovos no micro-ondas. Mas o que é um **algoritmo**?

Podemos interpretar um algoritmo como a descrição do passo a passo para resolver um problema. O algoritmo pode também ser interpretado como uma sequência simples e objetiva de instruções para solucionar determinado problema.

Diariamente utilizamos algoritmos na realização das mais variadas tarefas: preparar uma receita de bolo, instalar um aparelho de TV novo, tomar um banho etc.

Um **algoritmo** é uma sequência finita, ordenada e não ambígua de passos para solucionar determinado problema ou realizar uma tarefa.

Não pretendemos nesse momento desenvolver toda uma teoria de linguagem de computação. Entretanto, podemos nos apropriar de suas ideias básicas, que nos possibilitarão desenvolver boas noções dessa poderosa ferramenta na organização e na resolução de problemas diversos. O britânico Alan Mathison Turing (1912-1954) é tido como o “pai da computação”, pois ofereceu importante contribuição na criação do computador moderno. Deve-se a ele a elaboração de um modelo teórico que seria responsável pela criação de conceitos como o de algoritmo.

Para que você possa conhecer um pouco mais desse personagem e compreender melhor sua grande façanha, vamos propor uma atividade um pouco diferente, indicada no boxe.

1. Assista ao filme *O jogo da imitação*.
2. Em equipe com os colegas, elabore um texto que, entre outros tópicos, apresente:
   - as dificuldades de Turing;
   - o feito de Turing;
   - o contexto histórico do filme.
3. Elaborem duas questões a serem feitas às demais equipes a respeito do filme para promover uma discussão com a turma.

Algoritmos

Existem vários algoritmos para solucionar o mesmo problema, mas a construção de todos eles geralmente segue alguns passos principais.

- Compreender o problema e identificar todos os dados apresentados.
- Definir os dados de entrada.
- Escolher quais passos/cálculos devem ser executados para alcançar o objetivo.
- Definir os dados de saída/resultado.
- Testar o algoritmo como uma simulação, ou seja, utilizando os valores dados no problema inicial.

Além desses passos, também é importante observar que os algoritmos podem ser classificados de acordo com sua construção, conforme sua aplicação, ou mesmo pelo tipo de problema que visam resolver.

Algoritmos com iteração

São aqueles em que o executor precisa repetir uma ou mais ações determinado número de vezes.

Algoritmos com tomada de decisão

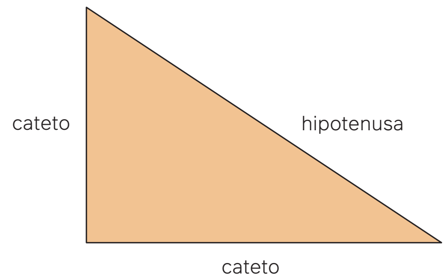
São aqueles em que o executor precisa analisar uma determinada resposta para obter um caminho.

Algoritmos simples

São seguidos do início ao fim, sem que o executor precise analisar as respostas para tomar decisões ou repetir algum comando.

Atividades resolvidas

11. Escreva um algoritmo para o cálculo da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo, dadas as medidas dos dois catetos.



- Como conhecemos as medidas dos catetos, um algoritmo para o cálculo da medida da hipotenusa pode ser:

1. Chame o primeiro cateto de c_1.
2. Chame o segundo cateto de c_2.
3. Chame a hipotenusa de h.
4. Eleve o valor de c_1 ao quadrado.
5. Eleve o valor de c_2 ao quadrado.
6. Adicione os valores encontrados nos passos 4 e 5.
7. Calcule a raiz quadrada do resultado obtido no passo 6.
8. Iguale o resultado obtido no passo 7 a h.
9. Escreva "O valor da hipotenusa é h".

Para pensar e discutir

1. Qual é a fórmula matemática que calcula a medida da hipotenusa h em função das medidas dos catetos c_1 e c_2?

2. Considerando que as medidas dos catetos estão em centímetros, qual etapa você acrescentaria ao algoritmo para transformar essa medida em metros? 2. Resposta pessoal.

1. $h = \sqrt{(c_1)^2 + (c_2)^2}$

12. Trocar um pneu furado!

Um motorista está dirigindo em uma rodovia quando percebe, pela trepidação do carro, que um pneu furou. Escreva um algoritmo para a troca de pneu do carro.

- A partir do momento em que o motorista percebe que o pneu está furado, há as etapas a seguir para a troca do pneu.

1. Estacionar o carro em um local fora da pista.
2. Desligar o carro.
3. Sair do carro e pegar o estepe.
4. Pegar o macaco.
5. Suspender o carro com o macaco.
6. Pegar a chave para desenroscar os parafusos.
7. Desenroscar os quatro parafusos do pneu furado.
8. Tirar o pneu furado.
9. Pegar o estepe e posicionar no lugar do pneu furado.
10. Rosquear os quatro parafusos no estepe.
11. Abaixar o carro com o macaco.
12. Guardar as ferramentas e o pneu furado.

mezzotint/Shutterstock.com

Pessoa trocando pneu.

Para explorar

Junte-se a mais dois colegas e façam o que se pede a seguir.

1. Pesquisem um algoritmo para uma receita de bolo e apresentem-no aos demais colegas. 1. Resposta pessoal.

2. Elaborem um algoritmo para resolver uma equação do 2º grau escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, conhecendo-se os valores reais de a, b e c e substituindo na fórmula resolutiva $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. 2. Resposta pessoal.

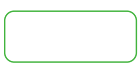
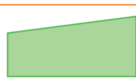
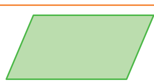
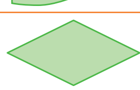
Fluxogramas

Os algoritmos podem também ser expressos em forma de **fluxogramas**. O fluxograma é um conjunto de ícones que representa o fluxo de atividades de determinado processo. Representa, em outras palavras, uma notação especial feita de símbolos e abreviações que visam representar um processo composto de etapas.

Esse tipo de linguagem exige o conhecimento de alguns símbolos em forma de retângulos, ovais, losangos e algumas outras formas, assim como setas conectoras empregadas para definir fluxo e sequência.

Os principais símbolos utilizados em fluxogramas estão destacados a seguir, bem como seus significados.

Acervo editora

Símbolo	Significado
	Indica tanto o início de um processo quanto seu fim.
	A seta é utilizada para conectar os símbolos e também para indicar o sentido do fluxo.
	Indica entrada manual.
	Indica cada atividade a ser executada.
	Indica a entrada/saída de dados genéricos.
	Indica documento a ser gerado ou inserido.
	Indica a necessidade de uma tomada de decisão.

Veja a seguir alguns exemplos de fluxogramas. Procure analisar cada um deles e, caso necessário, discuta-os com seus colegas.

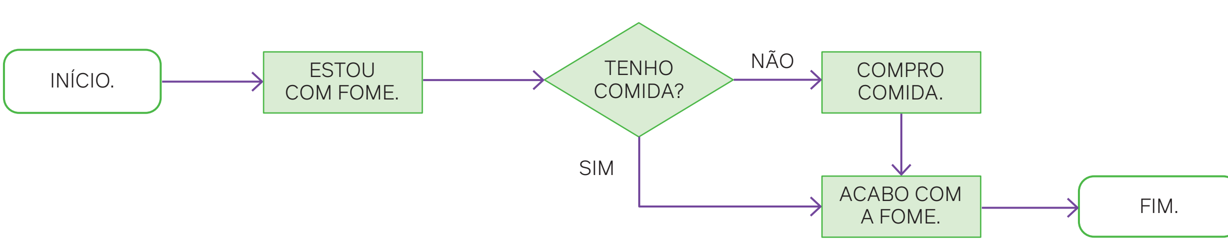
Atividades resolvidas

13. Elabore um fluxograma indicando as etapas a serem seguidas para resolver a situação a seguir.

Bateu aquela fome!

Estou com fome e preciso comer. O que fazer?

- O início pode ser a constatação de que a pessoa está com fome. Um possível fluxograma é:



Acervo editora

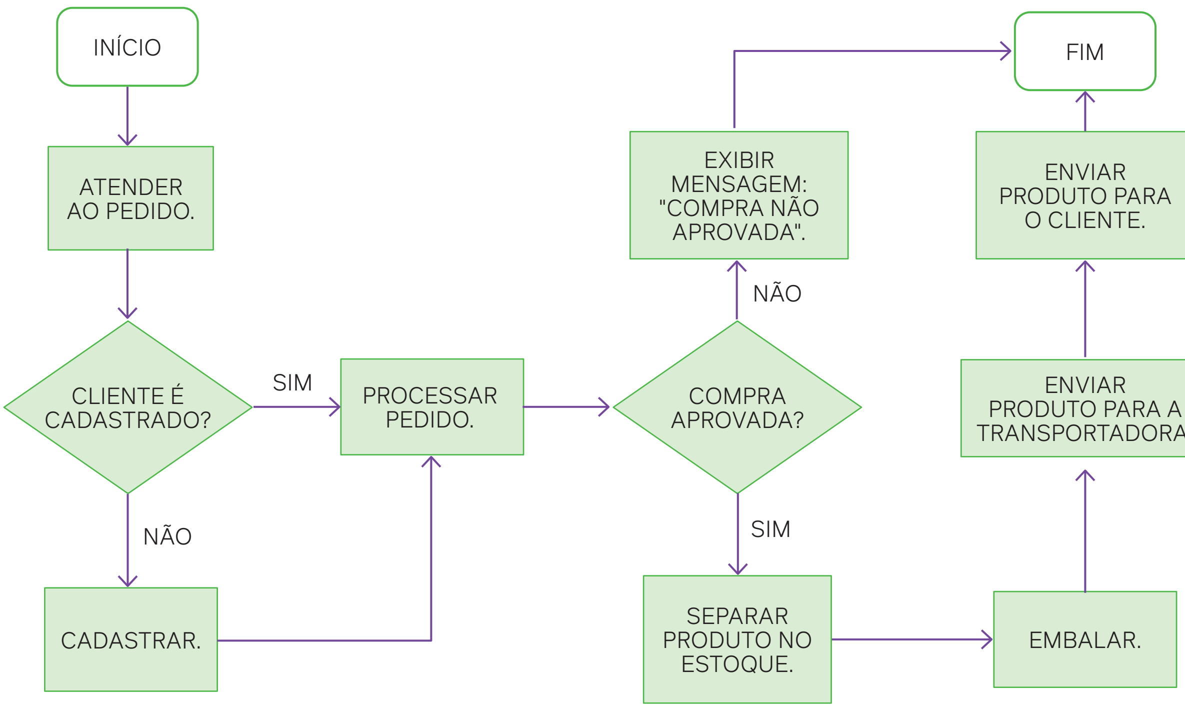
Para pensar e discutir

1. Como seria o algoritmo correspondente ao fluxograma apresentado na página anterior? Descreva-o. 1. Resposta pessoal.

2. Esse fluxograma apresenta uma tomada de decisão. Qual figura geométrica indica essa tomada de decisão? 2. O losango.

14. Elabore um fluxograma com as etapas necessárias para atender um cliente que quer realizar uma compra *on-line* de determinado produto.

- Atende-se inicialmente um pedido feito e verificam-se os dados do cliente; processa-se o pedido, aprova-se a compra e envia-se o pedido. Essas são algumas etapas que devem aparecer no fluxograma.



Acervo editora

Para pensar e discutir

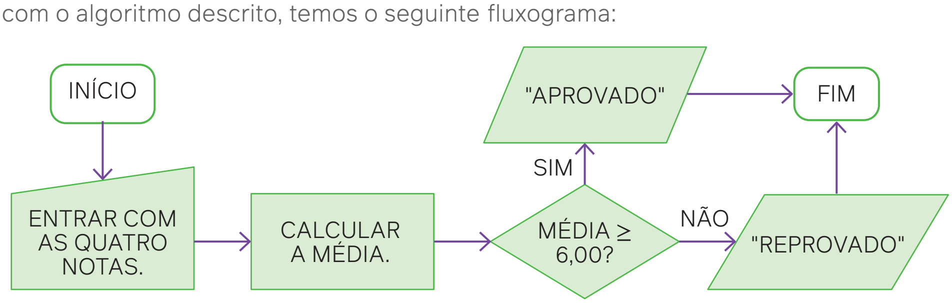
1. Qual é a primeira decisão após atender ao pedido de um cliente? 1. Verificar se ele tem cadastro.

2. O que é feito quando a compra do cliente não é aprovada? 2. Aparece a mensagem: "Compra não aprovada".

3. Que outro item você considera importante também aparecer nesse fluxograma? 3. Resposta pessoal.

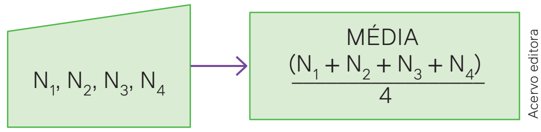
15. Elabore um fluxograma dado o algoritmo:
Calcular a média de quatro notas de um estudante e verificar se ele foi aprovado (média maior ou igual a 6) ou reprovado (se a média for menor que 6).
Algoritmo:
1. Entrar com as quatro notas do estudante.
2. Calcular a média aritmética dessas quatro notas.
3. Verificar se a média é maior ou igual a 6.
4. Se sim, indicar no vídeo "Aprovado".
5. Se não, indicar no vídeo "Reprovado".

- De acordo com o algoritmo descrito, temos o seguinte fluxograma:



Acervo editora

- Nesse fluxograma, poderíamos utilizar símbolos ou expressões em vez de palavras. Por exemplo, no lugar de “entrar com as quatro notas” e “calcular a média”, poderíamos ter feito:

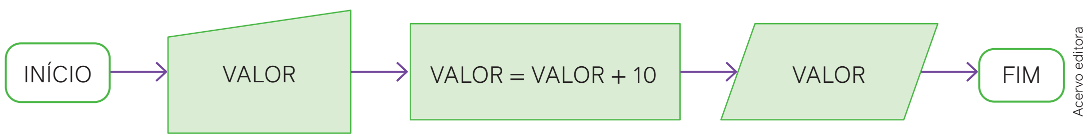


Importante:

Na computação, o algoritmo (representado por meio de um fluxograma) diz ao computador o que ele deverá fazer. Mas, assim como existem diferentes idiomas que as pessoas utilizam para se comunicar, também existem diferentes linguagens na computação – ou seja, um mesmo algoritmo pode ser escrito em linguagens diferentes.

Atividades

28. Analise o fluxograma a seguir.



a) Explique o que indica o fluxograma. 28. a) A soma de um número com dez.

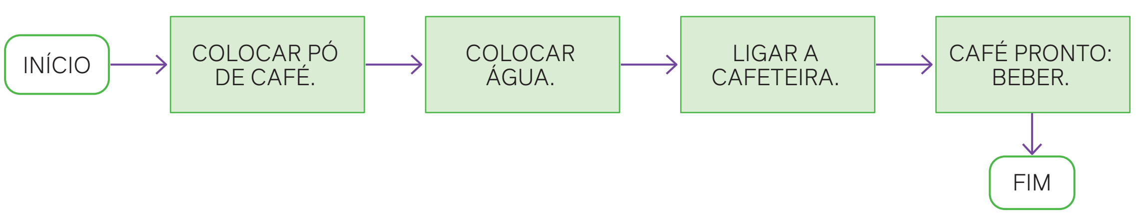
b) Escreva uma situação que possa ser representada por meio desse fluxograma. 28. b) Resposta pessoal.

29. Pense em sua rotina quando você tem aulas, desde o momento em que acorda, vindo para a escola, até a volta para casa. O início seria acordar e o fim seria chegar em casa. Com base nisso, faça o que se pede:

a) Escreva um algoritmo que descreva em palavras sua rotina. 29. a) Resposta pessoal.

b) Elabore um fluxograma correspondente a esse algoritmo. 29. b) Resposta pessoal.

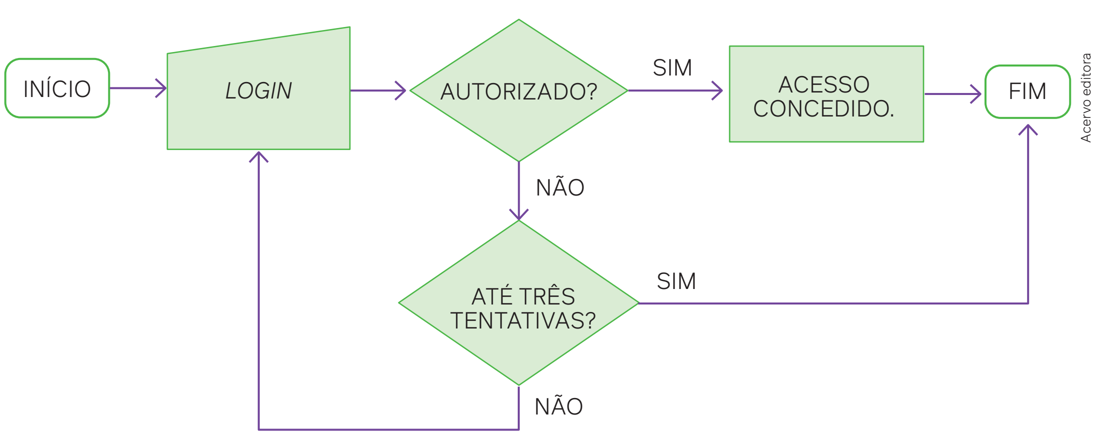
30. Márcia elaborou um fluxograma para fazer café em sua casa após colocar o filtro na cafeteira.



Refaça o fluxograma da Márcia inserindo as seguintes etapas após ligar a cafeteira: 30. Resposta pessoal.

- Aguardar.
- O café está pronto?
- Se sim, beber; se não, aguardar.

31. Observe atentamente as informações do fluxograma a seguir.



Escreva uma frase que interprete esse fluxograma e sua finalidade. 31. Resposta pessoal.

32. Elabore um fluxograma conforme o algoritmo a seguir.

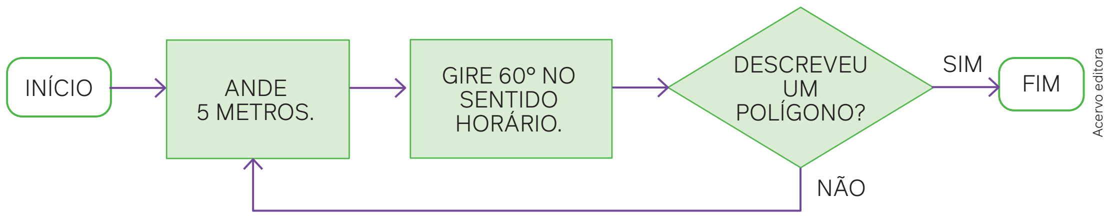
Podcast
Fluxogramas no dia a dia

- Entre com dois números A e B.
- Efetue a adição desses dois valores.
- Apresente o resultado da adição desses dois valores.

32. Resposta no Manual do Professor.

33. Faça um fluxograma para calcular o resultado da avaliação de um estudante após duas etapas, sendo que a nota da 1ª etapa representa 40% do resultado, e a nota da 2ª etapa, 60% do resultado. Esse estudante será considerado aprovado se o resultado for maior ou igual a 6 e reprovado se o resultado for menor. É importante, no final, exibir "aprovado" ou "reprovado". 33. Resposta no Manual do Professor.

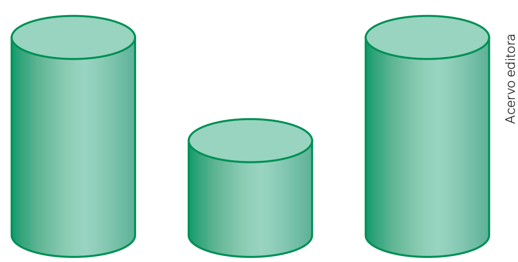
34. Analise o fluxograma abaixo.



Explique o que indica esse fluxograma. 34. Os passos para que uma pessoa faça um percurso com a forma de um hexágono.

35. Utilizando como referência a atividade anterior, elabore um fluxograma de tal maneira que a pessoa faça um percurso correspondente a um quadrado de lado 10 m. 35. Resposta no Manual do Professor.

36. Propomos aqui um desafio muito curioso para resolver por meio de algoritmo.
Você dispõe de três recipientes vazios em forma de cilindro. A capacidade deles, quando totalmente cheios, está indicada em litros nas figuras a seguir.



No momento, não há outras marcações além da indicação da capacidade máxima. Elabore uma sequência de passos para que em um dos recipientes seja possível colocar exatamente 6 litros de água. 36. Resposta pessoal.

Introdução à programação

Até aqui você trabalhou com algoritmos e fluxogramas. Esses modelos representam não apenas a forma como dados são processados, mas também a linguagem que os computadores entendem.

A linguagem algorítmica recebe também a denominação de pseudocódigo ou pseudolinguagem. Ela representa uma linguagem intermediária entre a linguagem natural e a linguagem de programação. Ao utilizarmos um pseudocódigo, nos aproximamos das construções de uma linguagem de programação, mas sem a exigência de rigidez na definição das regras para suas instruções.

E o que é linguagem de programação?

Com o objetivo de tornar mais simples, mais eficiente e menos sujeito a erros o trabalho dos programadores de computador, foram criadas diversas linguagens de programação similares à linguagem natural. Podemos dizer que linguagem de programação é um conjunto de palavras-chave, geralmente na língua inglesa, e um conjunto de símbolos que estabelecem os comandos e as instruções necessárias para a elaboração de um programa.

As linguagens que têm essas características – ou seja, são mais próximas da linguagem natural – são chamadas de linguagens de alto nível. Algumas delas: *Pascal*, *C*, *Java*, *C++* e *Python*. Já as linguagens denominadas de baixo nível são as que estão mais próximas da linguagem de máquina (representação binária), como *Assembly*.

Veja a seguir o exemplo de um programa que calcula a média entre duas notas, considerando aprovada a nota maior ou igual a 7 e reprovadas todas as outras.

```
1 INÍCIO_ALGORITMO
2 DECLARE nota1, nota2, M: NUMÉRICO
3 LEIA nota 1
4 LEIA nota 2
5 M ← (nota1 + nota2)/2
6 SE M >= 7.0 ENTÃO
7 ESCREVA “Aprovado”
8 SENÃO
9 ESCREVA “Reprovado”
10 FIM-SE
11 FIM_ALGORITMO
```

Observação:

Em linguagem de programação, o símbolo >= é chamado de operador e equivale ao símbolo $\geq$.

As palavras escritas com letras maiúsculas são parte do conjunto de regras que a linguagem algorítmica deve seguir. Há certa flexibilidade quanto ao uso dessas palavras, por exemplo: a instrução ESCREVA pode ser substituída por ESCREVER. Note que as instruções LEIA e ESCREVA referem-se a operações de entrada e saída de dados.

O símbolo / na linha 5 indica a operação de divisão, e o símbolo ← expressa uma operação de atribuição. Esse segundo símbolo pode ser assim interpretado: a posição de memória, representada por *M*, recebe o valor correspondente à soma da nota 1 com a nota 2 e o resultado é dividido por 2.

Há uma grande vantagem no uso de linguagem algorítmica: a facilidade com que um pseudocódigo é transcrito em linguagem de programação. Entretanto, há a desvantagem de limitar a capacidade de expressão por causa das regras impostas para a elaboração de instruções.

É claro que você pode pesquisar muito mais informações sobre as linguagens que existem. Que tal fazer cursos para ser um programador de computador?

Para explorar

Junte-se a outro colega que queira conhecer melhor a linguagem de programação para fazer o que se pede a seguir.

Parte 1

a) Pesquisem, entre as linguagens de programação, quais são as mais utilizadas. Parte 1 a) Resposta pessoal.

b) Elaborem um quadro comparativo com as vantagens e desvantagens de cada uma. Parte 1 b) Resposta pessoal.

Parte 2

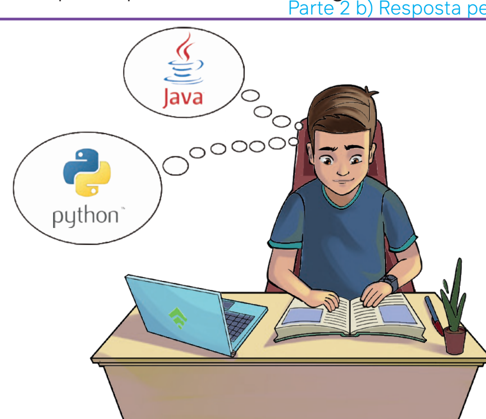
Entrevistem alguém de sua comunidade que compreenda linguagens de programação.

a) Elaborem um questionário com o objetivo de obter informações sobre a formação desse profissional; por exemplo, quando iniciou o trabalho com programação, as dificuldades que enfrentou, a remuneração (para verificar se a atividade é valorizada ou não), os erros que já cometeu em uma programação, suas motivações, exemplos de problemas que um programa de computador resolve etc. Parte 2 a) Resposta pessoal.

b) Com os dados obtidos na entrevista, elaborem um texto para apresentar aos colegas em sala de aula. Parte 2 b) Resposta pessoal.

Importante:

Neste estudo, fizemos apenas uma introdução às chamadas linguagens de programação. Independentemente da linguagem a ser utilizada, é importante se habituar a compreender e empregar de forma clara os algoritmos e os fluxogramas. Tanto a lógica quanto os algoritmos podem ser empregados em diferentes linguagens de programação.



Danillo Souza

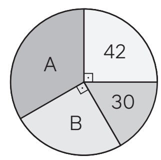
5. a) Resposta no Manual do Professor.
5. b) Resposta no Manual do Professor.
5. c) Resposta no Manual do Professor.
5. d) Resposta no Manual do Professor.
5. e) Resposta no Manual do Professor.
5. f) Resposta no Manual do Professor.
5. g) Resposta no Manual do Professor.
5. h) Resposta no Manual do Professor.

Atividades finais

1. Considerando o gráfico de setores a seguir, faça o que se pede.

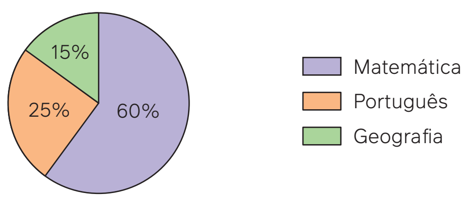
a) Determine a quantidade correspondente ao setor B. 1. a) 42

b) Determine a quantidade correspondente ao setor A. 1. b) 54



2. Uma professora fez um levantamento para saber em qual disciplina os estudantes de uma escola sentiam mais dificuldades. Todos os 400 estudantes escolheram exatamente uma disciplina, e o resultado foi representado pelo gráfico a seguir.

Dificuldade dos estudantes nas disciplinas



Fonte: Dados levantados pela professora (dados fictícios).

a) Quais as medidas dos ângulos centrais dos três setores indicados? 2. a) Matemática: 216°; Português: 90°; Geografia: 54°.

b) Quantos estudantes escolheram a disciplina de Matemática? 2. b) 240.

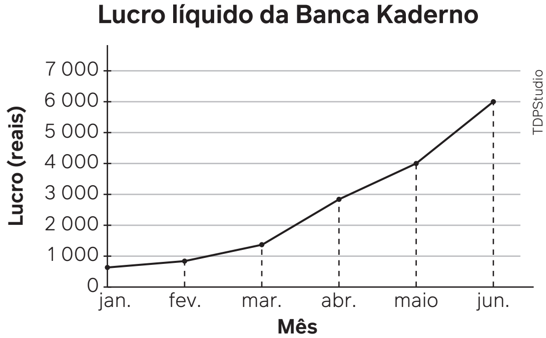
3. Sobre frequências, responda:

a) Quando, em uma pesquisa, indicamos em um gráfico o número de elementos de determinada categoria, isso significa frequência absoluta ou frequência relativa? 3. a) Frequência absoluta.

b) A utilização de percentual para representar uma categoria em uma pesquisa é frequência absoluta ou frequência relativa? 3. b) Frequência relativa.

4. No gráfico abaixo, temos a evolução do lucro líquido da Banca Kaderno ao longo dos seis primeiros meses de determinado ano.

Lucro líquido da Banca Kaderno



Fonte: Proprietário da banca Kaderno (dados fictícios)

a) Em quais meses o lucro esteve acima de 3 mil reais? 4. a) Maio e junho.

b) Como você definiria, em uma frase, os lucros da Banca Kaderno ao longo desses seis meses? 4. b) Resposta pessoal.

5. Responda às questões a seguir sobre os assuntos abordados nesta unidade.

a) O que é PIB e o que indica sobre um país?

b) O que é renda *per capita*? Qual é sua finalidade?

c) Quando usar um gráfico de setores?

d) Quando usar um gráfico de linhas?

e) O que é um fluxograma?

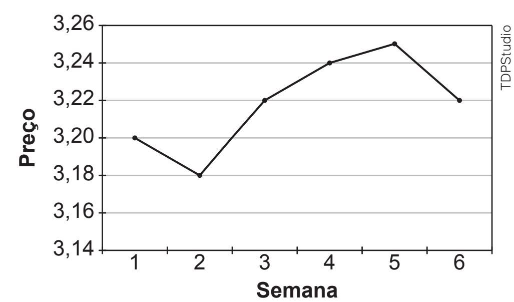
f) O que faz um algoritmo?

g) Cite um índice usado para medir a inflação.

h) O que o IDH indica?

Questões de vestibulares e Enem

6. (UEG) As ações de uma empresa variaram semanalmente conforme os dados da figura a seguir.

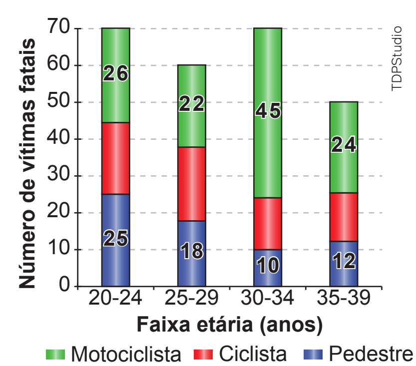


De acordo com os dados apresentados, o período de maior variação ocorreu entre as semanas:

a) 2 e 3.
b) 1 e 2.
c) 4 e 5.
d) 3 e 4.
e) 5 e 6.

6. Alternativa **a**.

7. (Unesp) O gráfico indica o número de vítimas fatais no trânsito de uma grande cidade em 2017. Os dados estão distribuídos por quatro faixas etárias e por três categorias de locomoção dessas vítimas: pedestres, ciclistas e motociclistas.



Nesse ano, a porcentagem de vítimas fatais que se deslocavam de bicicleta e tinham menos de 30 anos, em relação ao total de vítimas das quatro faixas etárias e das três categorias de locomoção, foi de:

a) 15,6%.
b) 21,6%.
c) 30%.
d) 12,5%.
e) 27,2%.

7. Alternativa **a**.

8. (EEAR) A tabela informa o percentual de alunos inscritos, por região, em um determinado concurso (A), em 2013. Se esses dados forem representados em um gráfico de setores, a medida aproximada do ângulo do setor correspondente à região Sudeste é

Número de inscrições no concurso A em 2013	
Regiões	**Inscritos (%)**
Centro-Oeste	9
Norte	10
Sul	12
Nordeste	33
Sudeste	36

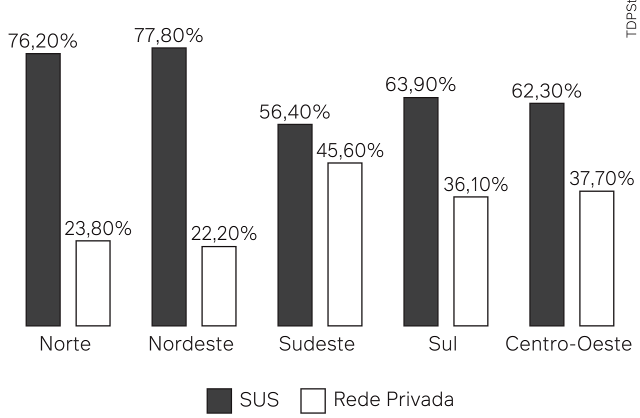
8. Alternativa **c**.

a) 135° **b)** 132° **c)** 130° **d)** 120°

9. (Ufscar-SP) O gráfico a seguir compara, por região, o percentual do número de internações com duração superior a 24 horas, realizadas na rede privada e no SUS (Sistema Único de Saúde) em 2019.

9. Alternativa **a**.

Internações com mais de 24 horas de duração



Segundo esse gráfico, é correto afirmar que

a) mais da metade destas internações em todo o Brasil foram realizadas pelos SUS.

b) na região Sudeste, a maioria dessas internações foram realizadas fora do SUS.

c) nas regiões Norte e Nordeste, a quantidade destas internações realizadas fora do SUS foi superior a 30%.

d) mais de 70% dessas internações em cada uma das regiões (Sudeste, Sul e Centro-Oeste) foram realizadas pelos SUS.

10. (UEA-AM) Uma prova foi aplicada em uma turma de 40 alunos e com os resultados foi construída a tabela seguinte.

Conceito	Número de alunos
SS	8
MS	12
MM	15
MI	2
II	3

Um gráfico de setores será construído a partir dos resultados dessa prova e o ângulo do setor que representará o conceito MM terá medida igual a

a) 15° **b)** 37,5° **c)** 72° **d)** 112,5° **e)** 135°

10. Alternativa **e**.

11. (UEA-AM) A tabela registra a quantidade de peças em determinado estoque agrupadas em cinco tipos. Os mesmos dados estão representados no gráfico.

Tipo	Quantidade
I	50
II	65
III	80
IV	20
V	10

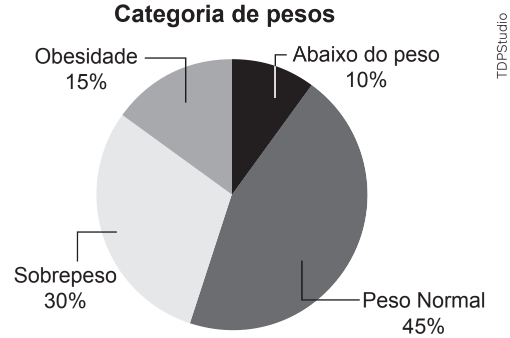
As regiões P, Q e R, no gráfico, correspondem, respectivamente, aos tipos 11. Alternativa **d**.

a) II, I e III. **c)** I, IV e II. **e)** II, IV e III.

b) I, IV e III. **d)** II, I e IV.

12. (IFMT) Uma das medidas ainda muito utilizadas para avaliar o peso de uma pessoa é o IMC (Índice de Massa Corporal), obtido dividindo-se seu peso (em quilogramas) pelo quadrado da sua altura (em metros).
Essa medida é usada, por exemplo, para determinar em que categoria de peso a pessoa se encontra: abaixo do peso, peso normal, sobrepeso ou obesidade.
Foi feita uma pesquisa sobre o IMC em um grupo de 320 pessoas e os resultados obtidos são apresentados no gráfico a seguir:

Categoria de pesos



Podemos afirmar que, nesse grupo estudado, há:

12. Alternativa **e**.

a) mais de 32 pessoas abaixo do peso.

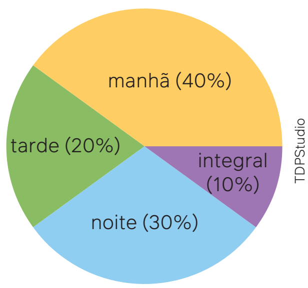
b) menos de 96 pessoas com sobrepeso.

c) mais de 50 pessoas com obesidade.

d) exatamente 80 pessoas com sobrepeso.

e) exatamente 144 pessoas com peso normal.

13. (Provão Paulista) Uma escola tem alunos nos turnos da manhã (40%), da tarde (20%) e da noite (30%), e, ainda, alunos no turno único de tempo integral (10%). O gráfico de "pizza" mostra essas porcentagens, ilustradas por setores circulares com ângulos proporcionais às porcentagens.



O ângulo, em graus, do setor de círculo correspondente ao turno da manhã é 13. Alternativa **a**.

a) 144°

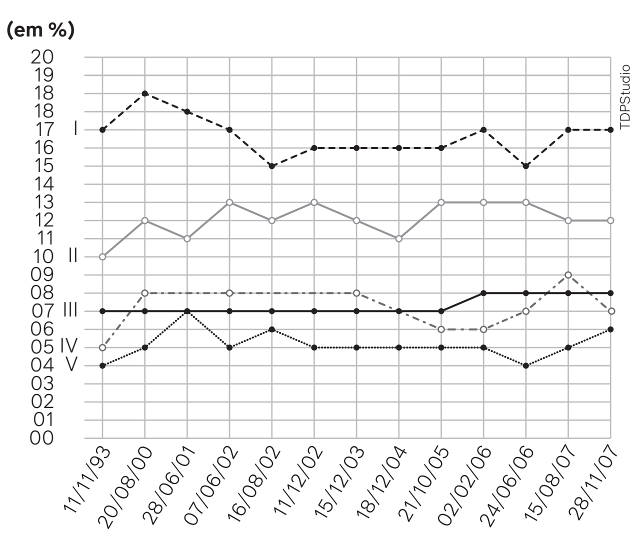
b) 108°

c) 90°

d) 120°

e) 72°

14. (Enem) O Torcidômetro é uma ferramenta para se entender a dinâmica do crescimento ou encolhimento das torcidas dos times de futebol no país. O gráfico mostra a variação percentual, entre 1993 e 2007, das torcidas de cinco times numerados em: I, II, III, IV e V.



Os dados exibidos no gráfico indicam que a torcida que apenas cresceu, entre fevereiro de 2006 e agosto de 2007, foi a torcida do time 14. Alternativa **d**.

a) I.

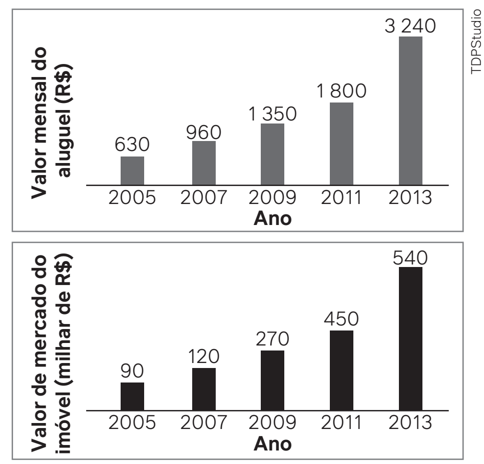
b) II.

c) III.

d) IV.

e) V.

15. (Enem) No período de 2005 a 2013, o valor de venda dos imóveis em uma cidade apresentou alta, o que resultou no aumento dos aluguéis. Os gráficos apresentam a evolução desses valores, para um mesmo imóvel, no mercado imobiliário dessa cidade.



A rentabilidade do aluguel de um imóvel é calculada pela razão entre o valor mensal de aluguel e o valor de mercado desse imóvel.

Com base nos dados fornecidos, em que ano a rentabilidade do aluguel foi maior? 15. Alternativa **b**.

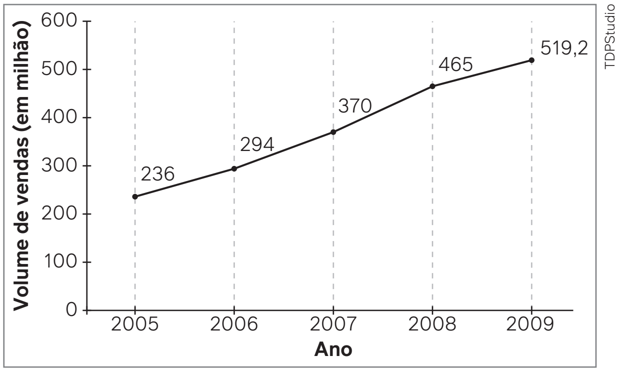
a) 2005 **b)** 2007 **c)** 2009 **d)** 2011 **e)** 2013

16. (Enem) A receita R de uma empresa ao final de um mês é o dinheiro captado com a venda de mercadorias ou com a prestação de serviços nesse mês, e a despesa D é todo o dinheiro utilizado para pagamento de salários, conta de água e luz, impostos, entre outros. O lucro mensal obtido ao final do mês é a diferença entre a receita e a despesa registradas no mês. O gráfico apresenta as receitas e despesas, em milhão de real, de uma empresa ao final dos cinco primeiros meses de um dado ano.

A previsão para os próximos meses é que o lucro mensal não seja inferior ao maior lucro obtido até o mês de maio. Nessas condições, o lucro mensal para os próximos meses deve ser maior ou igual ao do mês de 16. Alternativa **b**.

a) janeiro. **b)** fevereiro. **c)** março. **d)** abril. **e)** maio.

17. (Enem) A depressão caracteriza-se por um desiquilíbrio na química cerebral. Os neurônios de um deprimido não respondem bem aos estímulos dos neurotransmissores. Os remédios que combatem a depressão têm o objetivo de restabelecer a química cerebral. Com o aumento gradativo de casos de depressão, a venda desses medicamentos está em crescente evolução, conforme ilustra o gráfico.

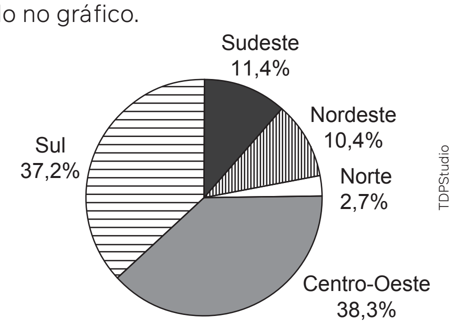


No período de 2005 a 2009, o aumento percentual no volume de vendas foi de 17. Alternativa **c**.

a) 45,4 **c)** 120 **e)** 283,2

b) 54,5 **d)** 220

18. (Enem) Estimativas do IBGE para a safra nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, apontavam uma participação por região conforme indicado no gráfico.



As estimativas indicavam que as duas regiões maiores produtoras produziriam, juntas, um total de 119,9 milhões de toneladas dessas culturas, em 2012.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 29 ago. 2012.

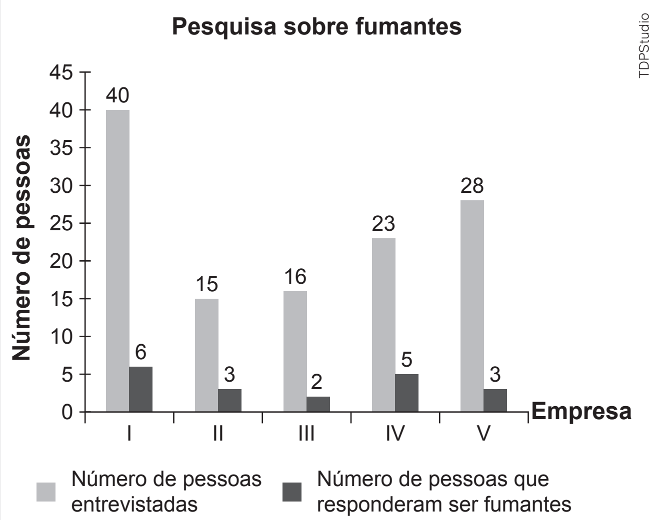
De acordo com esses dados, qual seria o valor mais próximo da produção, em milhão de tonelada, de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, na Região Sudeste do país? 18. Alternativa **e**.

a) 10,3. **c)** 13,6. **e)** 18,1.

b) 11,4. **d)** 16,5.

19. (Enem) Para fazer uma campanha contra o tabagismo, um empresário encomendou uma pesquisa com pessoas que trabalham em suas cinco empresas para saber quantas fumam. O gráfico mostra o número de pessoas entrevistadas e quantas responderam ser fumantes em cada uma das empresas.
A empresa que possui o menor percentual de pessoas fumantes é: 19. Alternativa **e**.

Pesquisa sobre fumantes



a) I. **c)** III. **e)** V.

b) II. **d)** IV.

Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão em relação aos assuntos e objetivos trabalhados ao longo deste capítulo.

Objetivos de aprendizagem	Sim	É necessário retomar
Identifico, construo e analiso gráficos estatísticos.		
Interpreto criticamente situações socioeconômicas com base em índices.		
Reconheço a diferença entre frequência absoluta e frequência relativa de uma distribuição de dados.		
Analiso e construo diagrama de ramo e folhas associado a uma distribuição de dados.		
Compreendo noções básicas referentes à linguagem computacional.		
Utilizo algoritmos e fluxogramas a fim de descrever procedimentos para a execução de uma atividade.		

Neste capítulo, você vai:

- utilizar as unidades de medidas adotadas no Sistema Internacional de Unidades;
- relacionar grandezas fundamentais e derivadas com suas respectivas unidades de medida;
- identificar algarismos significativos na representação de uma medida;
- utilizar a notação científica para expressar uma medida;
- expressar a ordem de grandeza de uma medida;
- retomar os conceitos de razão e proporção;
- identificar quando duas grandezas relacionadas são direta ou inversamente proporcionais;
- resolver problemas relacionados às grandezas direta ou inversamente proporcionais.

CAPÍTULO

3

Grandezas e medidas

Organização das Nações Unidas

Fonte: ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. Sobre o nosso trabalho [...]. *ONU,* Brasília, DF, c2024. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs. Acesso em: 29 ago. 2024.

Os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) formam uma agenda mundial que foi adotada em 2015 durante a Cúpula das Nações Unidas sobre o Desenvolvimento Sustentável. Os ODS visam melhorar a vida da população mundial em vários aspectos. Essa agenda é composta dos 17 objetivos listados na imagem, que se desdobram em 169 metas para serem atingidas até o ano de 2030. Para que ações que visem atingir essas metas possam ser estabelecidas, é necessário o uso de medidas de grandezas que auxiliem no acompanhamento e monitoramento dessas ações. Neste capítulo, você terá a oportunidade de aprofundar seus conhecimentos no estudo de unidades de medida que o auxiliarão a resolver os mais diversos tipos de problema.

1. **Qual é a importância de existirem unidades de medida padronizadas?** 1. Resposta pessoal.
2. **Como você pensa que as unidades de medida podem auxiliar no monitoramento de metas?** 2. Resposta pessoal.

1 Grandezas e unidades fundamentais

O que é medir?

Uma resposta imediata para essa pergunta está relacionada com o verbo “comparar”. Desde o momento em que nos levantamos, utilizamos algum tipo de medida: olhamos o relógio, para saber se podemos ou não ficar um pouco mais na cama; tomamos banho e controlamos a temperatura da água; no café, temos que decidir se a xícara estará cheia ou quase cheia; preocupados com a quantidade de calorias, escolhemos determinado tipo de pão para comer; ao escovar os dentes, pressionamos a pasta contra a escova para sair certa quantidade etc.

O ato de medir está presente nas mais diversas áreas do conhecimento. A imagem apresenta um instrumento de medida sendo utilizado na área de Medicina.

Itthiphon_No/Shutterstock.com

Esfigmomanômetro é o nome do aparelho usado para aferir a pressão arterial.

Para pensar e discutir

1. Quais medidas estão indicadas na imagem acima? O que elas significam? 1. SIS, DIA e Pulso. Resposta no Manual do Professor.
2. Quais unidades de medida são utilizadas para avaliar a distância entre dois objetos? 2. Quilômetro, jarda, palmo, metro, entre outras.
3. O que é grandeza? Cite um exemplo. 3. Tudo pode ser medido; resposta pessoal.

Unidades de medidas de grandeza

Quando falamos na velocidade máxima de 110 km/h que é permitida para automóvel em uma rodovia, estamos representando a medida de uma grandeza. Ao registrar a temperatura de 41 °C em um dia de verão, temos também a indicação da medida de uma grandeza.

kesy1/Shutterstock.com

Placa de limite de velocidade.

Jo Galvao/Shutterstock.com

Painel digital de rua com temperatura em São Paulo, 2020.

Toda vez que fazemos a medição de uma grandeza, estamos comparando a quantidade medida com o seu padrão. Cada grandeza pode ser associada a uma ou mais unidades de medida.

Exemplo:

Se a altura de um poste é 5 metros, temos:

Grandeza: **comprimento**

A altura do poste tem 5 vezes a unidade de medida adotada que é o metro, porém se a unidade de medida fosse o centímetro, a altura do poste teria 500 cm, isto é, 500 vezes a unidade de medida adotada.

Uma **grandeza** é tudo aquilo que pode ser medido.

Uma **unidade de medida** é uma quantidade específica de uma grandeza que serve de padrão para a comparação em outras medições.

O Sistema Internacional de Unidades

Ao longo da nossa história, diferentes unidades de medida foram criadas para uma mesma grandeza. Essas diferentes unidades algumas vezes causavam dificuldades não apenas para o comércio, mas também para a comunicação entre os povos.

No início da década de 1960, na 11ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, foi criado o Sistema Internacional de Unidades (SI). O objetivo foi padronizar as unidades de medida de inúmeras grandezas existentes, tornando-as acessíveis a todos. Nessa elaboração foram adotadas sete grandezas de base e as correspondentes unidades de medida, veja a seguir:

Grandeza de base	Unidade de base (símbolo)
Comprimento	metro (m)
Massa	quilograma (kg)
Tempo	segundo (s)
Temperatura	kelvin (K)
Corrente elétrica	ampere (A)
Quantidade de substância	mol (mol)
Intensidade luminosa	candela (cd)

Fonte: RESUMO do Sistema Internacional de Unidades – SI. *In*: BRASIL. Ministério da Economia. Inmetro, [Brasília, DF], [20--]. Disponível em: http://www.inmetro.gov.br/consumidor/pdf/resumo_si.pdf. Acesso em: 30 ago. 2024.

Com base nessas grandezas, as demais são definidas e têm suas unidades de medida estabelecidas. São as chamadas **grandezas derivadas**. As unidades de medida das grandezas derivadas são obtidas como produto ou como quociente de potências das unidades de base. No quadro a seguir, observe alguns exemplos.

Grandeza derivada	Unidade de medida (símbolo)
Volume	metro cúbico (m^3)
Concentração de massa	quilograma por metro cúbico (kg/m^3)
Velocidade	metro por segundo (m/s)
Aceleração	metro por segundo ao quadrado (m/s^2)

Para pensar e discutir

1. Considerando a grandeza derivada área, qual sua unidade de medida? E seu símbolo? 1. Metro quadrado; m^2.
2. Quais das sete grandezas de base você já estudou? 2. Resposta pessoal.
3. Como você define velocidade? 3. Resposta pessoal.

Existem unidades de medida derivadas que possuem denominações e símbolos especiais. Elas fazem parte do Sistema Internacional de Unidades, além de poderem ser expressas em termos de unidades de medida de base. Veja a seguir alguns exemplos.

- Grandeza: **força**
  Unidade de medida (símbolo): **newton** (N)
  Correspondente em termos de unidade de medida de base: $\frac{m \cdot kg}{s^2}$
- Grandeza: **potência**
  Unidade de medida (símbolo): **watt** (W)
  Correspondente em termos de unidade de medida de base: $\frac{m^2 \cdot kg}{s^3}$
- Grandeza: **carga elétrica**
  Unidade de medida (símbolo): **coulomb** (C)
  Correspondente em termos de unidade de medida de base: $A \cdot s$
- Grandeza: **pressão**
  Unidade de medida (símbolo): **pascal** (Pa)
  Correspondente em termos de unidade de medida de base: $\frac{kg}{m \cdot s^2}$

Atividades resolvidas

1. Em uma prova, um corredor conseguiu percorrer 3,5 km em um tempo de 45 minutos. Como seria essa informação utilizando apenas as unidades de medida de base do Sistema Internacional?

- A grandeza **comprimento** no SI tem como unidade de base o metro. Assim, temos:

$$3{,}5\text{ km} = 3{,}5 \cdot 1\,000\text{ m}$$
$$3{,}5\text{ km} = 3\,500\text{ m}$$

- Já a grandeza **tempo** no SI tem como unidade de base o segundo:

$$45\text{ min} = 45 \cdot 60\text{ s}$$
$$45\text{ min} = 2\,700\text{ s}$$

Portanto, ele percorreu 3 500 m em 2 700 s.

2. A grandeza densidade é a razão entre as grandezas **massa** e **volume**, nessa ordem, considerando constantes a pressão e a temperatura. Utilizando as unidades de base, obtenha, em símbolos, a unidade de medida para **densidade**.

- Como densidade é a razão entre massa e volume, temos:

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}} \rightarrow \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

3. Na fórmula de energia $E = m \cdot c^2$ tem-se: m, que representa a massa; e c^2, que representa a velocidade da luz ao quadrado. A unidade do SI utilizada para energia é o joule. Escreva, de acordo com a fórmula, a expressão da energia em termos das unidades de medida de base.

- A massa m é dada na unidade quilograma:

$$\text{massa } (m) \rightarrow \text{kg}$$

- Já velocidade ao quadrado é:

$$c^2 \rightarrow \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Vídeo
Ano-luz

- Multiplicando as duas grandezas para obter a energia E, temos:

$$E \rightarrow \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Para explorar

Junte-se a mais dois colegas para esta atividade.

1. Observem a imagem ao lado e respondam:

a) O que o visor da balança está indicando?
1. a) 89,7 kg

b) Qual é a unidade de medida?
1. b) Quilograma.

2. Pesquisem para responder:

a) Qual é a definição de peso? Qual é a unidade conforme o Sistema Internacional?
2. a) Resposta pessoal; Newton (N).

b) Conforme a medida indicada na balança, qual é o peso dessa pessoa na Terra? Explique.
2. b) 879,06 kg · m/s².

Zigmunds Dzgalvis/Shutterstock.com

Pessoa aferindo sua massa.

Massa: é uma medida da quantidade de matéria em um corpo e é uma grandeza escalar. Ela é independente da localização do objeto no espaço e é medida em quilogramas (kg).

Peso: é uma força que resulta da ação da gravidade sobre a massa de um objeto. O peso varia de acordo com a localização do objeto (por exemplo, na Terra ou na Lua) e é medido em Newtons (N).

Atividades

1. Utilizando apenas a unidade de base, conforme o Sistema Internacional de Unidades, assinale a alternativa que corresponde às unidades de medida tempo e velocidade, respectivamente. 1. Alternativa **c**.
   a) Horas e metros por hora.
   b) Horas e quilômetros por hora.
   c) Segundos e metros por segundo.
   d) Minutos e metros por minuto.

2. (UEMG) "A moça imprimia mais e mais velocidade a sua louca e solitária maratona."

   EVARISTO, 2014. p. 67.

   Conceição Evaristo refere-se claramente a uma grandeza física nesse texto: "imprimia mais e mais velocidade." Trata-se de uma grandeza relacionada não à velocidade, mas à mudança da velocidade, em relação ao tempo.
   A unidade dessa grandeza física, no Sistema Internacional de Unidades, é 2. Alternativa **d**.
   a) m.
   b) s.
   c) $m \cdot s^{-1}$
   d) $m \cdot s^{-2}$

3. Na embalagem de uma lâmpada há a indicação de que ela pode ser utilizada em duas medidas de tensão elétrica: 127 V e 220 V. O símbolo V significa volts e representa a razão entre a energia mecânica em joules e a carga elétrica em coulombs. Usando unidades de base do SI, qual é a expressão que representa 1 volt? 3. $1\ V = 1\frac{J}{C} = 1\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3}$

4. A potência de uma lâmpada indica o quanto de energia elétrica ela consome para gerar energia luminosa. A unidade no SI é o watt, que equivale à quantidade de joules por segundo. Utilizando unidades de base do SI, obtenha a expressão que representa 9 watt indicado na embalagem de uma lâmpada. 4. $9\ W = 9\frac{J}{s} = 9\ \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$

5. A densidade de um corpo é a razão entre massa e volume do corpo. Qual é a densidade no SI de um líquido que tem 1,3 kg em 1 litro? 5. 1 300 kg/m^3

6. (IFSC) Assinale a alternativa que apresenta corretamente a unidade de medida de massa do Sistema Internacional (SI). 6. Alternativa **d**.
   a) Newton (N).
   b) Pascal (Pa).
   c) Joule (J).
   d) Quilograma (kg).
   e) Grama (g).

7. (EEAR) Assinale a alternativa na qual tem-se uma unidade fundamental do Sistema Internacional de Unidades e a letra que a representa. 7. Alternativa **b**.
   a) newton, N
   b) kelvin, K
   c) joule, J
   d) volt, V

8. (UFG-GO) Nos laboratórios de física, fazemos uma série de medidas de grandezas que serão utilizadas para comprovar alguma teoria ou obter algum resultado esperado. Os valores numéricos dessas grandezas devem vir sempre acompanhados de sua respectiva unidade. Para as grandezas comprimento, área, tempo e força, estas unidades, no Sistema Internacional de Unidades (S.I.) são, respectivamente: 8. Alternativa **d**.
   a) cm; m^2; min; W
   b) cm; m^4; s; A
   c) m; cm^2; s; J
   d) m; m^2; s; N
   e) m; m^3; s; N

9. (Udesc) Ao resolver alguns exercícios, um estudante de Física achou interessante inventar uma nova grandeza física que foi calculada pela multiplicação entre massa e tempo, dividindo o resultado pela multiplicação entre distância e pressão. Segundo o Sistema Internacional de Unidades, uma unidade de medida para esta nova grandeza física é dada por: 9. Alternativa **c**.
   a) $\frac{s^2}{kg}$
   b) $\frac{J}{W}$
   c) $\frac{J \cdot s^2}{W}$
   d) $\frac{s^3}{W}$
   e) $\frac{N \cdot m}{s^3}$

10. (Uerj) As unidades joule, kelvin, pascal e newton pertencem ao SI – Sistema Internacional de Unidades. Entre elas, aquela que expressa a magnitude do calor transferido de um corpo a outro é denominada: 10. Alternativa **a**.
    a) joule.
    b) kelvin.
    c) pascal.
    d) newton.

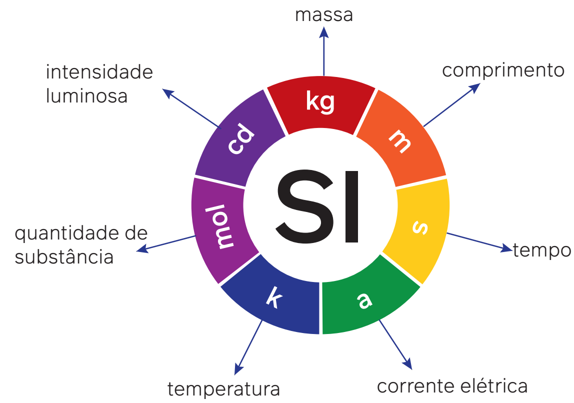
11. (Uece) No Sistema Internacional de Unidades, comprimento, massa e tempo são algumas grandezas fundamentais, e a partir delas são definidas outras, como, por exemplo, aceleração, área e volume. Suponha que em outro sistema de unidades sejam adotadas como grandezas fundamentais o tempo, a massa e a velocidade. Nesse sistema hipotético, a altura de uma pessoa seria dada em unidades de 11. Alternativa **a**.
    a) tempo × velocidade.
    b) massa × tempo.
    c) massa × velocidade.
    d) tempo × massa × velocidade.

12. (UEG-GO) Um líquido vital à nossa vida e muito utilizado nos laboratórios de física é a água, cuja massa específica é igual a 1,0 g/cm^3. Se uma massa de 2 500 kg é medida, qual o volume ocupado por ela no Sistema Internacional de Unidades (S.I.)? 12. Alternativa **e**.
    a) 2 500 m^3
    b) 0,25 m^3
    c) 25 m^3
    d) 2,5 cm^3
    e) 2,5 m^3

Conversão entre unidades

O esquema apresentado contém as grandezas de base do Sistema Internacional de Unidades, bem como os símbolos das correspondentes unidades de medida.

Não apenas essas grandezas e unidades fazem parte do Sistema Internacional de Unidades, mas as grandezas e as unidades que são ditas derivadas (inclusive aquelas com nomes especiais, como pascal, newton, coulomb, watt e outras). A partir daqui, quando for mencionado SI será referente a todas essas unidades e seus múltiplos e submúltiplos.



Acervo editora

No SI, diversos prefixos foram adotados para indicar múltiplos e submúltiplos das unidades de medida. No quadro a seguir estão os principais prefixos empregados e seu fator de multiplicação.

Prefixo	Fator de multiplicação	Símbolo
tera	10^{12}	T
giga	10^{9}	G
mega	10^{6}	M
quilo	10^{3}	k
hecto	10^{2}	h
deca	10^{1}	da
deci	10^{-1}	d
centi	10^{-2}	c
mili	10^{-3}	m
micro	10^{-6}	µ
nano	10^{-9}	n
pico	10^{-12}	p

A unidade **grama** representa uma exceção, pois ela recebe o fator de multiplicação 10^3 (quilo), isto é:

$$10^3\ g = 1000\ g = 1\ kg$$

Exemplos:

- 2 micrômetros:

$$2\ \mu m = 2 \cdot \underbrace{10^{-6}}_{\text{Fator de multiplicação.}}\ m$$

- 5,7 quilowatts:

$$5{,}7\ kW = 5{,}7 \cdot \underbrace{10^{3}}_{\text{Fator de multiplicação.}}\ W$$

Para pensar e discutir

1. Qual é o fator de multiplicação para transformar a medida de capacidade 7,2 mL para L? 1. 10^{-3}
2. Quantos metros correspondem a uma distância de 18 hectômetros? Explique como calculou. 2. 1800 m

Nas diversas aplicações relacionadas a medidas, nos deparamos com grandezas macroscópicas e com grandezas microscópicas. Como forma de representação das medidas correspondentes, utilizamos não apenas os prefixos mencionados anteriormente, mas também a notação científica.

Para escrever um número real x em notação científica, um dos fatores é um número maior ou igual a 1 e menor do que 10 e o outro fator é uma potência inteira de 10.

Observação:
Em símbolos, dizemos que $x = \alpha \cdot 10^k$ está na notação científica se $\alpha \in [1, 10)$ e $k \in \mathbb{Z}$.
Exemplos:

- A distância da Terra ao Sol é de 149 600 000 000 m ou, na notação científica, $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m.
- A massa de um elétron é de $9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg.

Nosso interesse maior aqui refere-se à utilização dos conhecimentos sobre unidades de medidas de grandezas para o trabalho com transformações de unidades, retomando e aprofundando aspectos estudados ao longo do Ensino Fundamental.

Analise a seguir cada atividade resolvida sobre transformação de unidade. Verifique se utilizaria outro procedimento de resolução e apresente-o aos demais colegas.

Atividades resolvidas

4. O volume de 1,2 m³ de uma determinada substância líquida foi totalmente transferido para frascos iguais de 300 mL de capacidade. Calcule o número total de frascos utilizados.

- Observando que o volume de 1 m³ corresponde à capacidade de 1 000 L, temos:

$$1{,}2\ \text{m}^3 \downarrow$$
$$1{,}2 \cdot 1\,000\ \text{L} = 1\,200\ \text{L}$$
$$1\,200\ \text{L} = 1\,200 \cdot 1\,000\ \text{mL} = 1\,200\,000\ \text{mL}$$

- A capacidade de 1 200 000 mL será transferida para n frascos com capacidade de 300 mL. Assim, temos:

$$n \cdot 300 = 1\,200\,000$$
$$n = \frac{1\,200\,000}{300} \Rightarrow n = 4\,000$$

Portanto, são utilizados 4 000 frascos.

5. Um ano-luz corresponde à distância percorrida pela luz no vácuo ao longo de um ano. Essa distância equivale a aproximadamente 9 460 000 000 000 000 m. Escreva essa distância na notação científica.

- Na notação científica, a distância tem que ser escrita na forma $\alpha \cdot 10^k$, sendo α um número inteiro de 1 a 10, não podendo ser 10, e k um expoente inteiro. Observando a posição da vírgula que indica a parte decimal, temos:

$$9\,460\,000\,000\,000\,000{,}0$$
$$\downarrow \text{Dividimos e multiplicamos por } 1\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{15}.$$
$$9\,460\,000\,000\,000\,000{,}0 \cdot \frac{10^{15}}{10^{15}} =$$
$$= \frac{9\,460\,000\,000\,000\,000{,}0 \cdot 10^{15}}{1\,000\,000\,000\,000\,000} = 9{,}46 \cdot 10^{15}$$

Portanto, na notação científica, essa distância é $9{,}46 \cdot 10^{15}$ metros.

Para pensar e discutir

1. Na transformação para notação científica da **atividade resolvida 5**, quantas casas decimais para a esquerda a vírgula foi deslocada? E qual o expoente correspondente da base 10? 1. 15; 15
2. Qual seria a notação científica da medida 0,0000000005 g? Explique o deslocamento da vírgula e o expoente da base 10. 2. $5 \cdot 10^{-10}$
3. Escreva uma regra para transformar um número na notação científica. 3. Resposta pessoal.

6. As substâncias A e B são misturadas para a produção de um remédio. Nessa mistura, para cada 4 partes da substância A tem-se 1 parte da substância B. Calcule a quantidade em mL necessária de cada uma dessas substâncias para produzir 120 mL do remédio.

- Temos aqui um problema de divisão em partes desiguais. Como são 5 partes (4 partes de A + 1 parte de B) dividimos 120 mL por 5, obtendo assim o correspondente a cada uma das partes:

$$(120\ \text{mL}) \div 5 = 24\ \text{mL}$$

- Calculando as quantidades de cada substância:

$$\text{Substância A: } 4 \cdot (24\ \text{mL}) = 96\ \text{mL}$$
$$\text{Substância B: } 1 \cdot (24\ \text{mL}) = 24\ \text{mL}$$

Portanto, são 96 mL da substância A e 24 mL da substância B.

7. Em um vazamento observou-se que uma torneira gotejava 7 vezes a cada 20 segundos. Considerando que cada gota tenha o volume aproximado de 0,2 mL, calcule o vazamento em mL ocorrido em 1 hora.

- Transformando 1 h em segundos:

$$1\ \text{h} = 60\ \text{min e } 1\ \text{min} = 60\ \text{s}$$
$$1\ \text{h} = 60 \cdot 60\ \text{s} \Rightarrow 1\ \text{h} = 3\,600\ \text{s}$$

- Número de intervalos de 20 s:

$$\frac{3\,600\ \text{s}}{20\ \text{s}} = 180$$

Podcast
A importância das grandezas e medidas

- Como são 7 gotas a cada 20 s, o total de gotas é:

$$7 \cdot 180 = 1\,260$$

- Cálculo do vazamento de 1 260 gotas:

$$1\,260 \cdot 0{,}2 = 252$$

Portanto, o vazamento em 1 hora é de aproximadamente 252 mL.

8. Pedro observou que o relógio do painel de seu carro atrasa aproximadamente 1 min e 15 s a cada dia. Qual é o tempo total de atraso após 30 dias?

- Cálculo do atraso em 30 dias:

$$t = 30 \cdot (1\ \text{min}\ 15\ \text{s})$$
$$\downarrow 1\ \text{min} = 60\ \text{s}$$
$$t = 30 \cdot (60\ \text{s} + 15\ \text{s})$$
$$t = 30 \cdot 75\ \text{s} = 2\,250\ \text{s}$$

- Passando para minutos e segundos:

$$2\,250 \div 60 = 37{,}5$$
$$t = 37{,}5\ \text{min}$$
$$t = 37\ \text{min} + 0{,}5\ \text{min}$$
$$t = 37\ \text{min} + 0{,}5 \cdot (60\ \text{s})$$
$$t = 37\ \text{min} + 30\ \text{s}$$

Portanto, após 30 dias, o atraso total do relógio será de aproximadamente 37 minutos e 30 segundos.

9. A velocidade máxima de um automóvel em uma determinada localidade é de 60 km/h. Qual é essa velocidade em m/s?

- Observando que 1 km = 1 000 m e que 1 h = 60 min = 60 · 60 s = 3 600 s, temos:

$$60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 60 \cdot \left(\frac{1\,000\ \text{m}}{3\,600\ \text{s}}\right)$$
$$60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{60\,000}{3\,600}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 16{,}666...\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Portanto, a velocidade é de aproximadamente 16,67 m/s.

Análise e contexto

Medida de transferência e armazenamento de dados

O texto a seguir aborda as medidas de transferência e de armazenamentos de dados. Junte-se a mais um colega para a leitura do texto e também fazer as atividades propostas.

Medida de armazenamento de informações

Assim como empregamos unidades de medida, por exemplo, para avaliar superfícies ou para avaliar comprimentos, também utilizamos as unidades de medida que permitem calcular a capacidade de armazenamento de informações ou até medir o processamento de dados em um computador.

Para tanto, as unidades mais empregadas são: **bit**, **byte**, **quilobyte**, **megabyte**, **gigabyte** e **terabyte**. Aqui é preciso compreender como essas unidades se relacionam. Uma maneira de conduzir uma comparação é utilizar um livro com muitas páginas. Nessa comparação, uma letra do livro representa **1 byte**. Dividindo essa letra em 8 partes, cada uma dessas partes será **1 bit**. Ao juntar várias dessas letras teremos uma palavra e com várias palavras formamos um parágrafo. Esse parágrafo, nessa comparação, representa **1 quilobyte**. Agora, considerando cada página desse livro, teremos a ideia de **1 megabyte**. Já o livro, por sua vez, representaria **1 gigabyte**. Por fim, considerando que temos uma biblioteca, estaremos diante de **1 terabyte**.

Espaço	Unidade de medida	Número de caracteres
8 bits	1 byte	1
1 024 bytes	1 kilobyte	1 024
1 024 kilobytes	1 megabytes	1 048 576
1 024 megabytes	1 gigabytes	1 073 741 824
1 024 gigabytes	1 terabyte	1 099 511 627 776

Essa é uma analogia que auxilia a compreensão entre as unidades de medida, mesmo que não represente exatidão, pois permite construir uma boa referência de comparação.

Além desse conhecimento sobre essas unidades, também é importante conhecer um pouco sobre **velocidade de conexão**. A velocidade de banda larga, que depende do cabo utilizado (cabo coaxial ou cabo de fibra ótica), é dada em **bits por segundo**. Essa unidade em geral utiliza o símbolo **bps** em vez de **b/s**.

1. Os prefixos tera, giga, mega e quilo utilizados no texto são os mesmos do SI, porém não se referem às mesmas unidades. Explique a diferença. 1. Resposta pessoal.

2. De byte para quilobyte, de quilobyte para megabyte, de megabyte para gigabyte e de gigabyte para terabyte há um mesmo fator de multiplicação. Qual é esse fator de multiplicação? 2. 1024

3. Explique o significado de taxa de transferência de um arquivo. 3. Resposta pessoal.

4. Pesquise a distribuição de banda larga de acordo com os passos a seguir: 4. Resposta pessoal.
- passo 1: escolha um ambiente que utilize uma assinatura de operadora de internet;
- passo 2: determine o tipo de conexão utilizada: cabo coaxial ou fibra ótica;
- passo 3: verifique a velocidade de internet oferecida pela operadora na assinatura do plano;
- passo 4: meça a velocidade da banda larga nessa conexão em diferentes momentos do dia (verificar sugestão feita pela Anatel);
- passo 5: verifique se o serviço da operadora está de acordo com os padrões da Anatel. Consulte os padrões da Anatel.

5. Escreva um pequeno texto explicando se, em sua opinião, o cabo utilizado para a conexão fosse outro, a velocidade sofreria ou não alguma alteração. 5. Resposta pessoal.

6. Reúnam-se em grupo e discutam os textos produzidos. Em seguida, apresentem para a turma uma síntese da discussão. 6. Resposta pessoal.

Atividades

13. Faça as seguintes conversões de unidades:

a) 12 m^3 em cm^3 13. a) 12 000 000 cm^3

b) 25 m^2 em cm^2 13. b) 250 000 cm^2

c) 4,5 L em mL 13. c) 4 500 mL

d) 30 m/s em km/h 13. d) 108 km/h

14. Responda aos itens a seguir.

a) Considerando as grandezas computacionais, 2 kilobytes (quilobytes) correspondem a quantos bytes? 14. a) 2 048 bytes

b) Considerando a grandeza comprimento, 2 quilômetros correspondem a quantos metros? 14. b) 2 000 m

15. Analise cada afirmação a seguir e indique quais são verdadeiras e quais são falsas.

I. O prefixo **tera** representa um fator de multiplicação igual a 10^{12}. 15. I. Verdadeira.

II. O prefixo **kilo** (ou quilo) representa um fator de multiplicação igual a 10^3. 15. II. Verdadeira.

III. O prefixo **mili** representa um fator de multiplicação igual a 10^{-6}. 15. III. Falsa.

IV. O prefixo **micro** representa um fator de multiplicação igual a 10^{-3}. 15. IV. Falsa.

V. O prefixo **nano** representa um fator de multiplicação igual a 10^{-12}. 15. V. Falsa.

16. Joana tem uma coleção de fotos em um arquivo. Sabe-se que 1 foto corresponde ao tamanho médio de 500 kB (quilobytes). Considerando essa média, assinale a alternativa que tem o maior número de fotos que Joana poderia armazenar em um *pendrive* de 8 GB (gigabyte): 16. Alternativa **b**.

a) 8 000

b) 16 000

c) 32 000

d) 64 000

17. Abaixo estão indicadas algumas medidas. Passe-as para a notação científica.

a) A velocidade da luz no vácuo é de aproximadamente 300 000 000 m/s. 17. a) $3 \cdot 10^8$ m/s

b) Conforme o Censo de 2022, a população brasileira é de aproximadamente 203,1 milhões de habitantes. 17. b) $2{,}031 \cdot 10^8$

c) A espessura média de um fio de cabelo é de 70 micrômetros. 17. c) $7 \cdot 10^{-5}$ m

d) Um próton possui massa de: 0,000000000000000000000000001673 kg. 17. d) $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg

18. Uma das menores formas de vida conhecida na Terra vive no fundo do mar: nanobe. Sabe-se que o tamanho máximo que pode ter corresponde a 150 nanômetros. Escreva essa medida na notação científica. 18. $1{,}5 \cdot 10^{-7}$ m

19. Observe a seguir os números indicados em notação científica. Escreva-os com todos os algarismos.

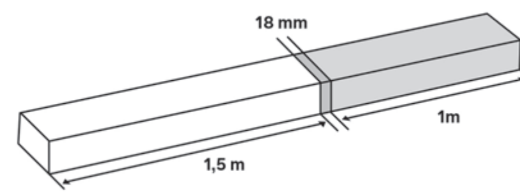
a) $9{,}2 \cdot 10^7$ 19. a) 92 000 000

b) $8{,}1 \cdot 10^{-4}$ 19. b) 0,00081

c) $7{,}21 \cdot 10^6$ 19. c) 7 210 000

d) $4{,}02 \cdot 10^{-5}$ 19. d) 0,0000402

20. (Enem) Atendendo à encomenda de um mecânico, um soldador terá de juntar duas barras de metais diferentes. A solda utilizada tem espessura de 18 milímetros, conforme ilustrado na figura.



Mauro Salgado

Qual o comprimento, em metros, da peça resultante após a soldagem? 20. Alternativa **d**.

a) 2,0230

b) 2,2300

c) 2,5018

d) 2,5180

e) 2,6800

21. Em uma dieta alimentar rigorosamente feita com acompanhamento médico, uma pessoa conseguiu emagrecer 200 g por semana. Ao fim de algumas semanas ela passou de 70 kg de massa para 56 kg. Determine a quantidade total de semanas que durou essa dieta. 21. 70

22. Marta estava correndo em sua bicicleta e, em determinado momento, observou que a velocidade atingida era de 25 km/h. Qual é essa velocidade aproximadamente em m/s? 22. Aproximadamente 6,94 m/s.

23. A caixa-d´água de uma residência tem 625 mil centímetros cúbicos de água. Qual é essa capacidade em litros de água? 23. 625 L

24. Qual é a capacidade máxima de uma piscina, em litros de água, considerando que o volume da parte interna é de 92 m^3? 24. 92 000 L

25. (FGV-SP) Na tela do Explorador de Arquivos do Windows 10, uma das colunas exibe o tamanho dos arquivos de uma determinada pasta (ou diretório). A unidade kB (quilobytes), utilizada nesse contexto, é equivalente a 25. Alternativa **b**.

a) 1 024 bits.

b) 1 024 bytes.

c) 256 bits.

d) 256 bytes.

e) 512 bytes.

26. A densidade demográfica corresponde à distribuição de uma população em determinada área. Seu cálculo é feito pela razão entre o total de habitantes de determinada região e a área dessa região, geralmente em habitantes/km². Em uma atividade da disciplina de Geografia, o professor apresentou, conforme valores aproximados do Censo de 2022, o *ranking* dos 8 estados mais populosos do Brasil. Apresentou o quadro a seguir, colocando uma coluna com as áreas ocupadas por esses estados.

Estado	População	Território (km²)
São Paulo	44 411 000	248 000
Minas Gerais	20 540 000	587 000
Rio de Janeiro	16 055 000	44 000
Bahia	14 142 000	565 000
Paraná	11 444 000	199 000
Rio Grande do Sul	10 881 000	282 000
Pernambuco	9 058 000	98 000
Ceará	8 792 000	149 000

IBGE. Panorama. *In*: IBGE. Censo 2022. Rio de Janeiro: IBGE, [2022]. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/. Acesso em: 30 ago. 2024.

Utilizando essas informações, o professor solicitou aos estudantes que refizessem o *ranking* desses estados, mas apenas com as densidades demográficas. Qual o *ranking* obtido? 26. Resposta no Manual do Professor.
Utilize uma calculadora e arredonde as densidades para números inteiros.

27. (Enem) A bula de um antibiótico infantil, fabricado na forma de xarope, recomenda que sejam ministrados, diariamente, no máximo 500 mg desse medicamento para cada quilograma de massa do paciente. Um pediatra prescreveu a dosagem máxima desse antibiótico para ser ministrada diariamente a uma criança de 20 kg pelo período de 5 dias. Esse medicamento pode ser comprado em frascos de 10 mL, 50 mL, 100 mL, 250 mL e 500 mL. Os pais dessa criança decidiram comprar a quantidade exata de medicamento que precisará ser ministrada no tratamento, evitando a sobra de medicamento. Considere que 1 g desse medicamento ocupe um volume de 1 cm³.
A capacidade do frasco, em mililitro, que esses pais deverão comprar é: 27. Alternativa **b**.

a) 10.
b) 50.
c) 100.
d) 250.
e) 500.

28. (Enem) Em alguns países anglo-saxões, a unidade de volume utilizada para indicar o conteúdo de alguns recipientes é a onça fluida britânica. O volume de uma onça fluida britânica corresponde a 28,4130625 mL.
A título de simplificação, considere uma onça fluida britânica correspondendo a 28 mL.
Nessas condições, o volume de um recipiente com capacidade de 400 onças fluidas britânicas, em cm³, é igual a: 28. Alternativa **a**.

a) 11 200.
b) 1 120.
c) 112.
d) 11,2.
e) 1,12.

29. (UFPI) A nossa galáxia, a Via Láctea, contém cerca de 400 bilhões de estrelas. Suponha que 0,05% dessas estrelas possua um sistema planetário onde exista um planeta semelhante à Terra. O número de planetas semelhantes à Terra, na Via Láctea, é: 29. Alternativa **c**.

a) $2 \cdot 10^4$
b) $2 \cdot 10^6$
c) $2 \cdot 10^8$
d) $2 \cdot 10^{11}$
e) $2 \cdot 10^{12}$

Notação científica e precisão nas medidas de grandezas

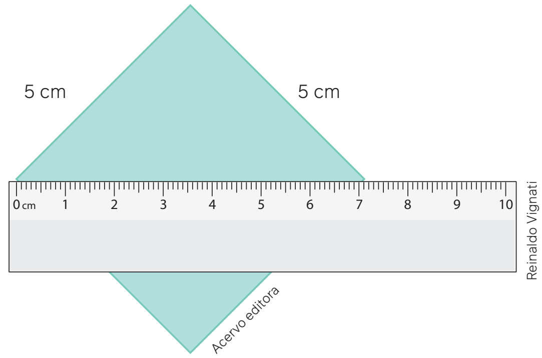
Vimos que medir é comparar grandezas de mesma natureza. Isso nos leva a um procedimento experimental e, como tal, sujeito a valores aproximados que dependerão, entre outros fatores, da precisão necessária para o contexto, da técnica empregada na medição e do instrumento utilizado.


AstroStar/Shutterstock.com
Trena manual.


Varavin88/Shutterstock.com
Trena digital.

Além disso, dependendo da situação, podemos obter medidas indiretas (relações matemáticas) ou medidas diretas (utilizando instrumentos).

Como exemplo, considere um quadrado de lado medindo 5 cm. A medida da diagonal do quadrado, obtida indiretamente pela aplicação do teorema de Pitágoras, será $5\sqrt{2}$ cm. Na ilustração, a régua está posicionada para obter a medida da diagonal do quadrado.



Para pensar e discutir

1. Qual é a medida da diagonal indicada pela régua? 1. 7,1 cm
2. Na medição indireta obtida pelo teorema de Pitágoras, qual é essa medida com aproximação de três casas decimais? Utilize uma calculadora para auxiliar. 2. 7,071 cm
3. Qual é a diferença entre essas duas medidas? 3. 0,029 cm

Grau de precisão e algarismos significativos

Ainda retomando o exemplo anterior, quando dizemos que a medida da diagonal do quadrado é $5\sqrt{2}$ cm, estamos empregando uma medida que não pode ser obtida por meio de medição direta com régua, por exemplo. Lembre que o número $5\sqrt{2}$ é irracional, ou seja, na sua representação decimal tem infinitas casas decimais e não periódicas. Nenhuma régua permite obter tal número em uma medição.

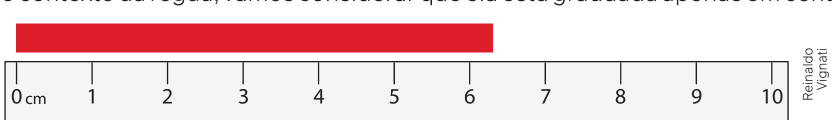
Podemos até dizer que a medida da diagonal, observando a ilustração, está entre 7,0 cm e 7,1 cm ou, caso queiramos utilizar a unidade milímetro, entre 70 mm e 71 mm. Podemos também fazer uma estimativa de 7,06 cm, já que se encontra mais próxima de 7,1 cm do que 7,0 cm.

Não é possível afirmar com exatidão o resultado de nenhuma medição obtida empiricamente. O que podemos definir é o **grau de precisão** que queremos garantir a cada medição.

E do que depende o grau de precisão?

Em relação a um instrumento, o grau de precisão depende da unidade em que ele é graduado. Vamos utilizar duas situações envolvendo a determinação do comprimento de uma linha colorida.

Situação 1: Utilizando ainda o contexto da régua, vamos considerar que ela está graduada apenas em centímetros:



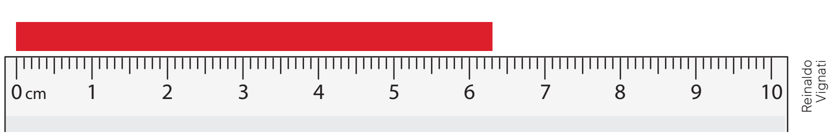
- Podemos observar que a linha colorida tem 6 cm; já para obter os milímetros, precisamos fazer uma estimativa, por exemplo, 6,4 cm. Neste caso temos:

  6 cm – representa medida precisa ou correta

  0,4 cm = 4 mm – representa medida duvidosa

Neste caso, dizemos que o **grau de precisão** vai até os **centímetros**.

Situação 2: Caso a régua esteja graduada em centímetros e milímetros:



- Podemos observar que a linha colorida tem 6 cm e 3 mm, isto é, 6,3 mm. Para o algarismo que vem depois do 3, podemos fazer uma estimativa, por exemplo, 6,38 cm. Assim, temos:

  6,3 cm – representa medida precisa ou correta

  0,08 cm – representa medida duvidosa

Nesse caso, dizemos que o **grau de precisão** vai até os **milímetros**.

Com o objetivo de facilitar a relação entre unidades de medida e precisão dos instrumentos, utiliza-se o conceito de algarismos significativos.

Com base no valor de uma medição, chamamos de **algarismos significativos** todos os algarismos precisos e o primeiro algarismo duvidoso.

Exemplos:

9,723 km → 4 algarismos significativos
0,091 g → 2 algarismos significativos
62,0023 h → 6 algarismos significativos
0,0099720 N → 5 algarismos significativos

Para pensar e discutir

1. Qual é o algarismo duvidoso na medida 9,723 km? 1. 3
2. Quais são os 2 algarismos significativos na medida 0,091 g? 2. 9 e 1
3. Quais são os algarismos significativos nos exemplos 62,0023 h e 0,0099720 N? 3. 6, 2, 0, 0, 2 e 3; 9, 9, 7, 2 e 0

Um procedimento para reconhecer os algarismos significativos, com base no valor de uma medição, é contar aqueles que estão escritos da esquerda para a direita, a partir do primeiro algarismo diferente de zero. É possível verificar nos exemplos acima.

Entretanto, escrever o valor de uma medição na notação científica é o procedimento que não apenas permite identificar quais são os algarismos significativos, como também nos dá a ordem de grandeza. Vamos retomar os exemplos apresentados:

9,723 km → notação científica: $\underbrace{9{,}723}_{\text{4 algarismos significativos}} \cdot 10^{0}$ km

0,091 g → notação científica: $\underbrace{9{,}1}_{\text{2 algarismos significativos}} \cdot 10^{-2}$ g

62,0023 h → notação científica: $\underbrace{6{,}20023}_{\text{6 algarismos significativos}} \cdot 10^{1}$ h

0,0099720 N → notação científica: $\underbrace{9{,}9720}_{\text{5 algarismos significativos}} \cdot 10^{-3}$ N

Observações:

1. O algarismo duvidoso é sempre o último algarismo significativo em uma medição, isto é, aquele que está mais à direita.
2. Se o resultado de uma medição de massa fosse 0,351 g, por exemplo, o zero não seria um algarismo significativo, pois ele não faz parte da medição. Note que, na notação científica, teríamos $3{,}51 \cdot 10^{-1}$ g, portanto com 3 algarismos significativos, sendo 1 o algarismo duvidoso.
3. Se o resultado de uma medição de comprimento fosse 14,50 m, o zero seria um algarismo significativo, pois ele representaria que a medição teria gerado o centésimo no resultado. Na notação científica, teríamos $1{,}450 \cdot 10^{1}$, portanto com 4 algarismos significativos.

Atividades resolvidas

10. Considere que uma fita métrica tenha sido graduada em metros, decímetros e centímetros. Ao realizar a medida de comprimento de uma sala obteve-se 9,735 m. Indique nessa medida quais algarismos são significativos e qual deles representa uma medida duvidosa.

- Os quatro algarismos são significativos; mas só o algarismo 5 representa uma medida duvidosa.

9,	7	3	5

5 → Milésimo do metro: medida duvidosa.
3 → Centésimo do metro: medida certa.
7 → Décimo do metro: medida certa.
9, → Parte inteira do metro: medida certa.

Assim, a medida duvidosa seria 0,005 m, isto é, 5 mm.

11. A altura de uma pessoa é 1,74 m. Indique os algarismos significativos nesse número e quais representam medidas precisas ou medidas duvidosas.

- Essa medida na notação científica pode ser escrita como:

$$1{,}74 \cdot 10^1 \text{ m}$$

- São algarismos significativos:

$$1, 7 \text{ e } 4$$

- O algarismo duvidoso é 4, portanto representa uma medida duvidosa. Essa pessoa poderia ter medida, por exemplo, igual a 1,739 ou 1,741.

12. Faça um arredondamento na medida 0,00357 cal/g, de modo que ela fique com dois algarismos significativos.

- Observe que a medida apresentada tem 3 algarismos significativos, isto é, escrevendo essa medida da notação científica, temos:

$$0{,}00357 \text{ cal/g} = 3{,}57 \cdot 10^{-3} \text{ cal/g}$$

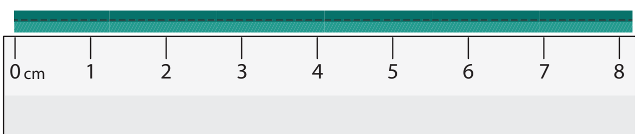
- Arredondando essa medida, escrevemos:

$$0{,}0036 \text{ cal/g} = 3{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ cal/g}$$

Portanto, ao fazer o arredondamento, os 2 algarismos significativos são 3 e 6.

Atividades

30. Considere que a régua abaixo contém apenas medidas em centímetros e está sendo utilizada para obter o comprimento da fita colorida verde.



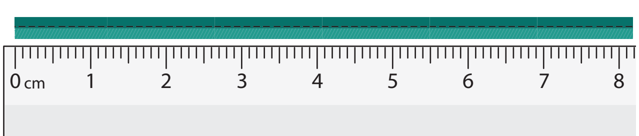
Acervo da editora

a) Qual é o grau de precisão da medida da tira verde? 30. a) O centímetro.

b) Escreva a medida de precisão do comprimento da fita. 30. b) 8 cm

c) Uma medida possível dessa fita é 8,2 cm. Qual a medida duvidosa? 30. c) 0,2 cm

31. Ainda referente à fita colorida, agora a régua contém centímetros e milímetros. Um estudante apresentou 8,17 cm como medida da fita.



Acervo da editora

a) Em relação ao número 8,17, quais são os algarismos significativos? 31. a) 8, 1 e 7

b) Desses algarismos, qual deles é algarismo duvidoso? 31. b) 7

c) A medida 8,17 cm é precisa? Explique. 31. c) Não.

32. Um termômetro foi colocado dentro de um recipiente contendo água. Um estudante, ao observar o termômetro, interpretou que a medida era igual a 37,8 °C.

a) Quantos algarismos significativos tem a medida indicada pelo estudante? 32. a) 3

b) Conforme escala, qual é a medida precisa da temperatura? 32. b) 37 °C

33. Copie o quadro abaixo no caderno e complete com a quantidade de algarismos significativos das medidas.
33. 1; 3; 4; 4; 2; 3.

Medida	Quantidade de algarismos significativos
0,0009 s	
148 cm	
165,0 mm	
20,00 m/s	
450000 g	
0,00120 kg	

34. A medida da superfície de uma região de preservação é de 125,89 km². Em relação a essa medida, faça o que se pede.

a) Escreva-a na notação científica e indique os algarismos significativos.
34. a) $1{,}2589 \cdot 10^2$ km²; 1, 2, 5, 8 e 9

b) Transforme essa medida para m², escreva-a na notação científica e indique os algarismos significativos.
34. b) $125{,}89 \cdot 10^6$ m²; $1{,}2589 \cdot 10^8$ m²; 1, 2, 5, 8 e 9

35. Ao obter a medida de uma força chegou-se ao resultado 0,004558 N.

a) Escreva essa medida na notação científica e indique a quantidade de algarismos significativos.
35. a) $4{,}558 \cdot 10^{-3}$ N; 4

b) Faça um arredondamento dessa medida para que tenha apenas 2 algarismos significativos. Identifique esses algarismos.
35. b) Aproximadamente $0{,}0046 \text{ N} = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$; 4 e 6

Ordem de grandeza

A notação científica de uma medição nos permite, como vimos anteriormente, verificar os algarismos que são significativos. Essa mesma notação auxilia na obtenção da ordem de grandeza de uma medição. Para compreender o que significa a ordem de grandeza, vamos analisar a velocidade da luz no vácuo.

No Sistema Internacional de Unidades a velocidade da luz é dada por:

Velocidade da luz = 299 792 458 m/s

A ordem de grandeza dessa medida nada mais é do que a potência de dez mais próxima, ao escrever a medida na notação científica. Escrevendo a medida acima na notação científica:

Velocidade da luz = $2{,}99792458 \cdot 10^8$ m/s

Note que o número escrito na notação científica se encontra entre duas potências de base 10, isto é:

$$10^8 < 2{,}99792458 \cdot 10^8 < 10^9$$

Existem situações de números (obtidos de medições) que podem gerar dúvidas quanto à ordem de grandeza. Por isso, há uma convenção para o estabelecimento da ordem de grandeza.

Quando a medida N é escrita na notação científica $N = \alpha \cdot 10^k$ temos que:

se $\alpha < 3{,}16$, então a ordem de grandeza de N é 10^k;

se $\alpha \geq 3{,}16$, então a ordem de grandeza de N é 10^{k+1}.

Para pensar e discutir

1. O número $2{,}99792458 \cdot 10^8$ está mais próximo de qual potência: 10^8 ou 10^9? 1. 10^8

2. Qual é a ordem de grandeza da velocidade da luz? 2. 10^8

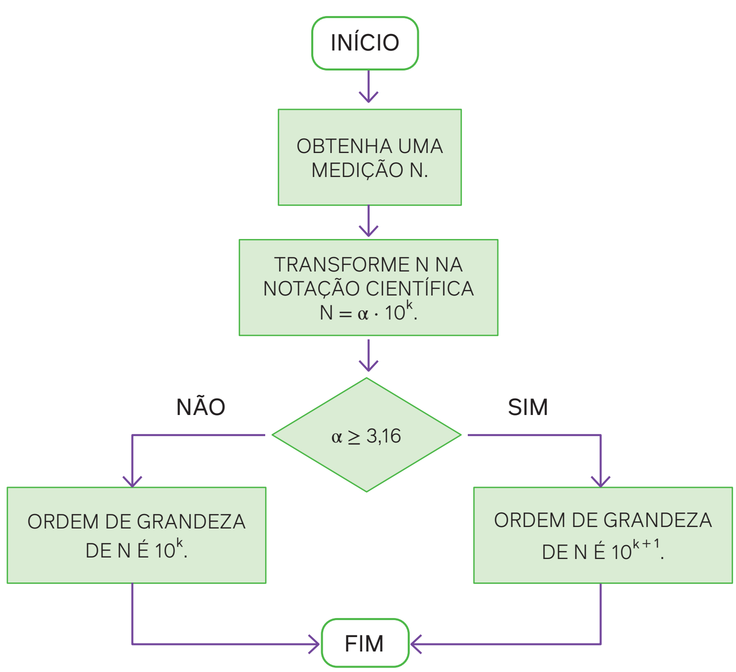
3. Utilize uma calculadora e calcule $\sqrt{10}$. Após, responda: Entre quais potências inteiras de base 10 está situado $\sqrt{10}$? 3. Entre 10^0 e 10^1.

Observações:

1. O valor 3,16 vem da aproximação racional do número irracional $\sqrt{10} = 10^{0,5} \cong 3{,}16$.

2. Alguns autores excluem $\alpha = 3{,}16$ da convenção acima para estabelecer a ordem de grandeza por entenderem que nenhuma medida experimental está associada ao número irracional $\sqrt{10}$.

No fluxograma a seguir, temos a representação dos passos para determinar a ordem de grandeza de uma medição.



Acervo editora

Carrossel de imagens
Quantidades astronômicas

Para explorar

Junte-se a mais dois colegas para estas atividades.

1. Analisem o fluxograma da página anterior, sobre a verificação da ordem de grandeza de uma medida, e elaborem outro fluxograma com o mesmo objetivo. 1. Resposta pessoal.

2. Utilizando as unidades de base do Sistema Internacional, escrevam cada medida abaixo na notação científica.

a) Distância da Terra à Lua: 384 400 km. 2. a) $3,884 \cdot 10^8$ m

b) Espessura média de um fio de cabelo: 70 micrômetros. 2. b) $7 \cdot 10^{-5}$ m

c) Tempo aproximado de reprodução de uma bactéria: 20 minutos. 2. c) $1,2 \cdot 10^3$ s

3. Obtenham a ordem de grandeza das medidas apresentadas no item anterior e justifiquem os resultados com base na convenção estabelecida no fluxograma da página anterior. 3. Resposta no Manual do Professor.

4. Pesquisem na biblioteca de sua escola, ou em *sites* de divulgação científica, um texto contendo conhecimentos científicos e dados numéricos resultantes de medidas de grandezas. Interpretem as informações contidas nesse texto e apresentem uma conclusão aos demais colegas. Nessa apresentação, informem se os dados numéricos estão ou não escritos em notação científica e indiquem a ordem de grandeza da correspondente informação. 4. Resposta pessoal.

Atividades resolvidas

13. A Lua é o único satélite natural da Terra descrevendo uma órbita elíptica. A distância máxima entre a Lua e a Terra é aproximadamente 406 000 km. Qual é a ordem de grandeza dessa medida?

- Escrevemos a distância na notação científica:

$$406\,000 \text{ km} = 4,06 \cdot 10^5 \text{ km}$$

Como $4,06 > 3,16$, temos que a ordem de grandeza é a potência de 10 apresentada na notação científica, porém adicionando 1 ao expoente, isto é, ordem de grandeza da medida: 10^6.

14. Estima-se que uma mulher adulta tenha 28 trilhões de células. Obtenha a ordem de grandeza correspondente a essa quantidade de células.

- Escrevendo na notação científica essa quantidade:

$$28 \text{ trilhões} = 28\,000\,000\,000\,000$$

$$28 \text{ trilhões} = 2,8 \cdot 10^{13}$$

Como $2,8 < 3,16$, a ordem de grandeza é a potência de 10 apresentada na notação científica, isto é, ordem de grandeza da medida: 10^{13}.

15. (UFPE) Em um hotel com 200 apartamentos o consumo médio de água por apartamento é de 100 litros por dia. Qual a ordem de grandeza do volume que deve ter o reservatório do hotel, em metros cúbicos, para abastecer todos os apartamentos durante um dia?

a) 10^1

b) 10^2

c) 10^3

d) 10^4

e) 10^5

- Vamos obter inicialmente o consumo diário dos 200 apartamentos:

$$\text{consumo diário} = 200 \cdot (100 \text{ L}) = 20\,000 \text{L}$$

- Observando esse consumo em metros cúbicos:

$$1\,000 \text{ L} \rightarrow 1 \text{ m}^3$$

$$20\,000 \text{ L} \rightarrow 20 \cdot (1 \text{ m}^3) = 20 \text{ m}^3$$

- Escrevendo essa medida na notação científica:

$$20 \text{ m}^3 = 2 \cdot 10^1 \text{ m}^3$$

Como $2 < 3,16$, a ordem de grandeza é a potência de 10 apresentada na notação científica, isto é, ordem de grandeza da medida: 10^1. Alternativa **a**.

Para pensar e discutir

1. Você resolveria alguma dessas três atividades de outra maneira? Explique. 1. Resposta pessoal.
2. A ordem de grandeza de 28 trilhões é igual a 1 trilhão? 2. Não.
3. Sabemos que 20 000 L de água correspondem a 20 m^3. Essas duas medidas têm a mesma ordem de grandeza? Justifique. 3. Não.

Atividades

36. Responda:

a) Qual é a ordem de grandeza de uma medida que está no intervalo]0, 1[? 36. a) 10^{-n}, para $n \geq 0$

b) E de uma medida que está no intervalo [1, 10[? 36. b) 10^0 ou 10^1

c) E de uma medida que está no intervalo [1, 100[? 36. c) 10^0, 10^1 ou 10^2

37. A seguir estão indicados resultados de medições expressas em notação científica. Para cada uma delas informe a ordem de grandeza na unidade correspondente.

a) $3{,}4 \cdot 10^{-6}$ g 37. a) 10^{-5}

b) $2{,}4 \cdot 10^{6}$ m 37. b) 10^6

c) $3{,}1 \cdot 10^{-16}$ kg 37. c) 10^{-16}

d) $7{,}0 \cdot 10^{12}$ t 37. d) 10^{13}

38. Utilizando os dados da população brasileira, conforme Censo de 2022, o número de habitantes no país é de aproximadamente 203,1 milhões.

a) Escreva esse número de habitantes com todos os algarismos. 38. a) 203 100 000

b) Expresse esse mesmo número na notação científica. 38. b) $2{,}031 \cdot 10^8$

c) Baseado na notação científica, apresente a quantidade de algarismos significativos. 38. c) 4

d) Qual a ordem de grandeza desse número? 38. d) 10^8

39. Um estudante de Biologia avaliou que uma pessoa adulta possui em seu trato digestivo em torno de 100 bilhões de bactérias. Considerando 1 000 pessoas adultas, qual a ordem de grandeza da quantidade de bactérias? 39. 10^{14}

40. Observe as afirmações sobre ordem de grandeza de números e as classifique como verdadeiras (V) ou falsas (F). Para as falsas, indique a ordem de grandeza correta.

I. A ordem de grandeza do número 200 é 10^2. 40. I. V

II. A ordem de grandeza do número 48 201 é 10^5. 40. II. V

III. A ordem de grandeza do número 0,000000001 é 10^{-10}. 40. III. F; 10^{-9}

41. Uma casa possui uma área de 450 m^2. Determine:

a) a quantidade de algarismos significativos na medida dessa grandeza; 41. a) 3

b) a ordem de grandeza dessa medida. 41. b) 10^3

42. Considere que 1 átomo tenha diâmetro de aproximadamente um décimo de bilionésimo de metro.

a) Escreva essa medida na notação científica. 42. a) 10^{-10}

b) Indique a ordem de grandeza dessa medida. 42. b) 10^{-10}

43. Obtenha a ordem de grandeza mais próxima do tempo, em segundos, da duração de uma palestra de 2 horas. 43. 10^4

44. Estima-se que o planeta Terra tenha se formado há cerca de 4,5 bilhões de anos. Obtenha:

a) essa medida do tempo escrita com todos os algarismos; 44. a) 4 500 000 000

b) essa medida na notação científica. 44. b) $4{,}5 \cdot 10^9$

c) a ordem de grandeza dessa medida. 44. c) 10^{10}

45. (Uerj) Pela turbina de uma hidrelétrica passam 500 m^3 de água por segundo. A ordem de grandeza do volume de água que passa por essa turbina em 3 h corresponde, em litros, a: 45. Alternativa **b**.

a) 10^8 **b)** 10^{10} **c)** 10^{12} **d)** 10^{14}

46. (Cefet-CE) Um fumante compulsivo, aquele que consome em média cerca de 20 cigarros por dia, terá sérios problemas cardiovasculares. A ordem de grandeza do número de cigarros consumidos por este fumante durante 20 anos é de: 46. Alternativa **c**.

a) 10^2. **b)** 10^3. **c)** 10^5. **d)** 10^7. **e)** 10^9.

2 Grandezas direta e inversamente proporcionais

Agora que já conhecemos um pouco mais sobre grandezas e medidas, vamos observar outro aspecto importante nesse estudo: como as grandezas estão relacionadas. Nesse contexto, interessa-nos a compreensão de grandezas que são diretamente proporcionais e grandezas que são inversamente proporcionais.

Apenas para iniciar nosso estudo, que representa uma retomada de assuntos abordados no Ensino Fundamental, vamos considerar a situação ideal abaixo e, a partir dela, discutir algumas ideias.

Situação

Um carro viaja a uma velocidade constante de 90 km/h em uma estrada reta.


elpídio costa junior/iStockphoto.com

Carro trafegando em uma estrada.

Para pensar e discutir

1. O que significa uma situação ideal? 1. Resposta pessoal.
2. Nessa situação, em quanto tempo o carro percorre a distância de 180 km? E 45 km? 2. 2 horas; 30 minutos
3. Mantendo a velocidade constante, o que ocorre com a grandeza tempo quando reduzimos pela metade a grandeza distância? 3. Reduz pela metade.

A velocidade é uma grandeza que envolve a razão entre outras duas grandezas: distância e tempo.

$$\text{Velocidade} = \underbrace{\frac{\text{distância}}{\text{tempo}}}_{\text{Razão}}$$

Se essa velocidade de 90 km/h é constante em uma situação ideal, podemos escrever uma proporção:

$$90\text{ km/h} = \underbrace{\frac{90\text{ km}}{1\,h} = \frac{180\text{ km}}{2\,h} = \frac{270\text{ km}}{3\,h}\ldots}_{\text{Proporção}}$$

Razão e proporção

Os conceitos de razão e proporção são utilizados não apenas em situações da disciplina de Matemática, mas também em outras áreas do conhecimento e em momentos diversos do nosso dia a dia. Assim, por exemplo, quando alguém faz um bolo de aniversário, utiliza uma receita. Considere que essa receita resulte em um bolo para 10 pessoas. Se quisermos fazer essa receita para 20 pessoas, um procedimento seria fazer dois bolos iguais, e outro seria verificar se, duplicando os ingredientes, o resultado desejado é alcançado.

Danillo Souza

O nosso interesse maior aqui é o estudo de grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais. Antes, porém, por meio de algumas situações, vamos retomar os conceitos de razão e proporção.

Razão e proporção

A razão é a comparação entre dois números ou duas grandezas por meio de uma fração. A proporção é a igualdade de duas ou mais razões.

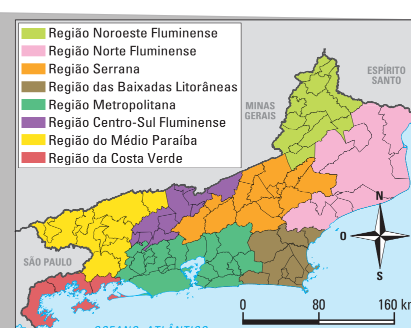
Veja, a seguir, exemplos de razão:

- Densidade: razão entre massa e volume.
- Velocidade: razão entre distância e tempo.
- Probabilidade: razão entre o número de situações favoráveis em um evento aleatório e o número de resultados possíveis.
- Escala: razão entre a medida do que é reproduzido em determinada representação e a medida correspondente à realidade.

Observe a representação de duas escalas no mapa a seguir.

Mapa político do Brasil

Alessandro da Costa



Fontes: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, [20--]. Disponível em: https://atlasescolar.ibge.gov.br/brasil/3036-federacao-eterritorio/unidades-politicoadministrativas.html; IBGE. *Cidades e estados*. Rio de Janeiro: IBGE, [20--]. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/rj/rio-de-janeiro.html. Acesso em: 30 ago. 2024.

1. Cada 1 cm na imagem do mapa representa 45 000 000 m no real. Cada 1 cm na imagem do mapa representa 8 000 000 m no real.

Para pensar e discutir

1. O que significa a escala 1 : 45 000 000? E a escala 1 : 8 000 000?
2. Se na imagem do mapa feita na escala 1 : 45 000 000 representarmos um segmento de comprimento 1 cm, qual é a distância real correspondente em quilômetros? 2. 450 km
3. E qual seria a distância real se o segmento de 1 cm fosse feito na imagem de escala 1 : 8 000 000? 3. 80 km

Exemplos de proporção:

- $\frac{25}{50} = \frac{100}{200}$
- $\frac{1}{100\,000} = \frac{2}{200\,000}$

Observações:

1. Em uma proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, os termos *a* e *d* são ditos extremos, enquanto os termos *b* e *c* são os termos ditos meios.

2. Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, vale a propriedade: o produto dos termos extremos é igual ao produto dos meios, isto é:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

3. A partir da proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, podemos escrever

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d} = \frac{a - c}{b - d}.$$

Atividades resolvidas

16. Mostre a validade da propriedade segundo a qual, em uma proporção, o produto dos termos extremos é igual ao produto dos termos ditos meios.

- Vamos considerar a seguinte proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

- Multiplicando os dois membros dessa igualdade por $b \cdot d$, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$
$$\frac{a}{b} \cdot b \cdot d = \frac{c}{d} \cdot b \cdot d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

17. Considerando a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, mostre que é verdadeira a relação $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$.

- Vamos considerar que a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$. Assim, temos:

$$\frac{a}{b} = k \Rightarrow a = b \cdot k$$
$$\frac{c}{d} = k \Rightarrow c = d \cdot k$$

- Adicionando essas duas igualdades membro a membro, obtemos:

$$a + c = b \cdot k + d \cdot k$$
$$a + c = k \cdot (b + d) \Rightarrow \frac{a + c}{b + d} = k$$

- Substituindo *k* obtido na relação inicial:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$$

Essa mesma demonstração vale para $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a - c}{b - d}$. Deixamos para você demonstrar.

18. Em um concurso público para o preenchimento de 200 vagas, o total de candidatos foi de 3 200. Determine o número de candidatos por vaga.

- Fazemos a razão entre *C* (número de candidatos) e *V* (número de vagas), nesta ordem:

$$\frac{C}{V} = \frac{3\,200}{200}$$
$$\frac{C}{V} = \frac{16}{1} \Rightarrow \frac{C}{V} = 16$$

Dizemos que para cada 16 candidatos há 1 vaga.

19. (Enem) Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2 000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm.
Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de

a) 1 : 250. **b)** 1 : 2 500. **c)** 1 : 25 000. **d)** 1 : 250 000. **e)** 1 : 25 000 000.

- Representando a escala por *E*, temos:

$$E = \frac{8 \text{ cm}}{2\,000 \text{ km}}$$

- Deixando as medidas na mesma unidade (cm):

$$2\,000 \text{ km} = 2\,000\,000 \text{ m} = 200\,000\,000 \text{ cm}$$
$$E = \frac{8}{200\,000\,000}$$
$$E = \frac{1}{25\,000\,000}$$

Portanto, a escala é 1 : 25 000 000.

Alternativa **e**.

20. (Uerj) Admita que, em dezembro de 2014, uma filha tinha 20 anos e seu pai, 50. Em dezembro de 2024, a razão entre as idades da filha e do pai será de:

a) $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{4}{3}$

- Observe as novas idades após 20 anos:

Filha: $20 + 10 = 30$

Pai: $50 + 10 = 60$

- Razão entre as idades:

$$\frac{\text{Filha}}{\text{Pai}} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

A razão entre as idades da filha e do pai, nessa ordem, é $\frac{1}{2}$.
Alternativa **b**.

Para pensar e discutir

1. Você teria uma resolução diferente para a **atividade resolvida 19**? Apresente-a. 1. Resposta pessoal.

2. A razão entre as idades da filha e do pai em 2014 e a razão entre as idades da filha e do pai em 2024 formam uma proporção? Explique. 2. Não; resposta pessoal.

21. (FMU-SP) Um vidro contém 200 cm^3 de mercúrio de densidade 13,6 g/cm^3. A massa de mercúrio contido no vidro é:

a) 0,8 kg **b)** 0,68 kg **c)** 2,72 kg **d)** 27,2 kg **e)** 6,8 kg

- Como a densidade é a razão entre as grandezas massa e volume, nessa ordem, temos:

$$d = \frac{m}{V}$$
$$13{,}6 = \frac{m}{200}$$
$$13{,}6 \cdot 200 = m \Rightarrow m = 2\,720$$

Como a massa está em gramas, temos que 2 720 g = 2,72 kg.
Alternativa **c**.

Atividades

47. Obtenha a razão que representa a densidade em g/cm^3 de corpo de massa 20 g e volume de 5 cm^3. 47. 4 g/cm^3

48. Escreva o número irracional que representa

a) o comprimento de uma circunferência pela medida de seu diâmetro, nesta ordem e em uma mesma unidade de comprimento; 48. a) π

b) o comprimento da diagonal de um quadrado pela medida de seu lado, nesta ordem e em uma mesma unidade de comprimento. 48. b) $\sqrt{2}$

49. Um município brasileiro tem aproximadamente 90 000 habitantes. Se esse município tem 500 médicos, então há 1 médico para quantos habitantes? 49. 180

50. Juliana fez um concurso público e observou que acertou 32 das 40 questões. Nessas condições, obtenha o que se pede.

a) A razão do número de acertos de Juliana para o número total de questões do concurso. 50. a) $\frac{4}{5}$

b) A razão do número de erros de Juliana para o número total de questões do concurso. 50. b) $\frac{1}{5}$

51. Em cada proporção a seguir, obtenha o valor do termo desconhecido.

a) $\frac{x-1}{2} = \frac{4}{5}$ 51. a) $\frac{13}{5}$

c) $\frac{10}{2-x} = \frac{9}{12}$ 51. c) $-\frac{34}{3}$

b) $\frac{2x+1}{5} = \frac{4-2x}{3}$ 51. b) $\frac{17}{16}$

d) $\frac{15}{7} = \frac{4x-1}{14}$ 51. d) $\frac{31}{4}$

52. (UFG-GO) Um tonel contém 72 litros de uma mistura homogênea de água e vinho, na proporção de 20% de água e 80% de vinho. Após retirar-se um balde cheio dessa mistura e, em seguida, completar-se o volume inicial do tonel com água pura, constatou-se que a quantidade de água existente no tonel é de 19,6 litros. Qual é a capacidade do balde? 52. 6,5 litros

53. (UFRGS) A planta de um terreno foi feita na escala 1 : 500. Se, na planta, o terreno tem área 10 cm^2, sua área real, em metros quadrados, é: 53. Alternativa **d**.

a) 25

b) 50

c) 100

d) 250

e) 500

54. (UFRN) Um café é preparado e, logo depois, é servido em quatro xícaras, nas quais é colocado o mesmo tipo de açúcar. A primeira xícara recebe 50 mL de café e 2 g de açúcar, a segunda, 70 mL de café e 3 g de açúcar; a terceira, 90 mL de café e 4 g de açúcar; a quarta, 120 mL de café e 5 g de açúcar. 54. Alternativa **c**.

O café se apresentará mais doce na

a) primeira xícara.
b) segunda xícara.
c) terceira xícara.
d) quarta xícara.

55. (FGV-SP) Em uma sala de aula, a razão entre o número de homens e o de mulheres é $\frac{3}{4}$. Seja N o número total de pessoas (número de homens mais o de mulheres). Um possível valor para N é: 55. Alternativa **d**.

a) 46
b) 47
c) 48
d) 49
e) 50

56. (UFMG) Um mapa está desenhado em uma escala em que 2 cm correspondem a 5 km. Uma região assinalada nesse mapa tem a forma de um quadrado de 3 cm de lado. A área real dessa região é de

a) 37,50 km².
b) 56,25 km².
c) 67,50 km².
d) 22,50 km².

56. Alternativa **b**.

Grandezas direta e inversamente proporcionais

Existem grandezas que se relacionam de tal forma que, quando uma delas duplica o seu valor, por exemplo, a outra também duplica, ou se uma delas se reduz para a terça parte, a outra também se reduz para terça parte. Tais grandezas são ditas diretamente proporcionais. Existem, entretanto, aquelas grandezas em que, ao duplicar uma, a outra fica reduzida à metade, ao triplicar uma, a outra fica reduzida a terça parte. Nesse caso, dizemos que tais grandezas são inversamente proporcionais.

Vamos analisar duas situações.

Situação 1

O dono de uma empresa de ônibus cobra o valor total de R$ 4.590,00 para uma excursão. O ônibus tem capacidade para 45 pessoas. Entretanto, o valor cobrado é o mesmo para a lotação total ou parcial.

xavierarnau/iStockphoto.com

Pessoas embarcando em um ônibus de turismo.

Situação 2

Em uma plantação de flores, uma torneira em forma de chuveiro despeja 15 litros de água a cada 1 minuto. Ao longo do dia, ela mantém essa vazão constante.

Andrii Yalanskyi/Shutterstock.com

Canteiro sendo regado.

Para pensar e discutir

1. Na **situação 1**, considerando a lotação de 45 pessoas, qual valor caberá a cada pessoa na excursão? Explique seu cálculo. 1. 102 reais; resposta pessoal
2. E se apenas 15 pessoas forem à excursão, o que ocorrerá com o valor que cada pessoa pagará em relação ao valor cobrado se o ônibus estivesse com a lotação total? 2. O valor será multiplicado por 3.
3. Na **situação 2**, quantos litros de água serão despejados em 10 minutos? 3. 150 litros
4. Triplicando o tempo da torneira aberta, o que ocorre com a quantidade de litros despejados pela torneira? 4. Triplica a quantidade.

Na **situação 1**, as duas grandezas relacionadas (quantidade de pessoas na excursão e valor que cada uma paga) são, nas condições estabelecidas, inversamente proporcionais. Já na **situação 2**, as grandezas relacionadas (tempo da torneira aberta e quantidade de litros de água), nas condições mencionadas, são diretamente proporcionais.

Duas grandezas x e y ($y \neq 0$) são ditas **diretamente proporcionais** quando o **quociente** (razão) entre as duas é uma **constante real** k, isto é:

$$\frac{x}{y} = k \rightarrow \text{quociente constante}$$

Duas grandezas x e y são ditas **inversamente proporcionais** quando o **produto** entre as duas é uma **constante real** k ($k \neq 0$), isto é:

$$x \cdot y = k \rightarrow \text{produto constante}$$

Observações:

1. Em grandezas diretamente proporcionais, temos: duplicando uma, a outra também duplica, triplicando uma, a outra também triplica, reduzindo uma delas pela metade, a outra também fica reduzida à metade etc.
2. Em grandezas inversamente proporcionais, temos: duplicando uma, a outra fica reduzida à metade, triplicando uma, a outra fica reduzida à terça parte, reduzindo uma delas pela metade, a outra duplica etc.

Regra de três simples

Empregamos a proporcionalidade em situações cotidianas, algumas vezes intuitivamente. Assim, apenas para exemplificar, se determinado produto é vendido em embalagens de 3 unidades, é intuitivo pensarmos que para ter 6 unidades desse produto precisamos comprar 2 embalagens. O quadro a seguir representa uma maneira de organizarmos essas informações.

duplica

Embalagens	Unidades
1	3
2	6

duplica

As grandezas são diretamente proporcionais:
$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

Analogamente, outro exemplo intuitivo refere-se às grandezas velocidade e tempo. Se com uma velocidade média de 50 km/h levamos 2 horas para fazer um percurso, aumentando a velocidade para 100 km/h esse percurso será feito em 1 hora, considerando isso de forma aproximada, sem haver contratempos. Observe agora essas informações no quadro:

duplica

Velocidade	Tempo
50	2
100	1

divide por dois

As grandezas são inversamente proporcionais:
$$50 \cdot 2 = 100 \cdot 1$$

Essa mesma situação poderia ser assim representada:

duplica

Velocidade	Tempo
50	2
100	1

duplica

As grandezas são inversamente proporcionais:
$$\frac{50}{100} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{invertemos uma delas, mantendo a outra.}$$

Na resolução de situações que não são intuitivas e precisamos determinar um valor desconhecido envolvendo grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizamos um procedimento conhecido como **regra de três**. Essa denominação se deve ao fato de que geralmente são dadas três informações e se pede uma quarta. A seguir, apresentamos algumas situações resolvidas. Procure analisá-las.

Atividades resolvidas

22. Em uma máquina utilizada para lavagem de roupas, uma pessoa gasta 120 g de sabão em pó para aproximadamente 15 peças de roupa. Mantendo essa proporção, quanto de sabão em pó seria necessário para lavar 27 peças de roupa?

- Organizamos essas informações em uma tabela e indicamos por x a quantidade desconhecida. Como o número de peças de roupa aumenta da situação 1 para a situação 2, sabemos que a quantidade de sabão também aumentará:

	Sabão em pó (em g)	Peças de roupa	
aumenta	120	15	aumenta
	x	27	

Diretamente proporcional

- As duas grandezas aumentarão proporcionalmente; pois, se duplicarmos a quantidade de peças de roupa, a quantidade de sabão em pó também duplicará. Assim, temos:

$$\frac{120}{x} = \frac{15}{27}$$

$$15 \cdot x = 120 \cdot 27$$

$$x = \frac{3\,240}{15} \Rightarrow x = 216$$

Portanto, serão necessários 216 g de sabão em pó.

23. Um caminhão se desloca com uma velocidade média de 40 km/h, completando certo percurso em 3 horas. Calcule o tempo necessário para fazer o mesmo percurso caso a velocidade do caminhão fosse de 48 km/h.

- As grandezas velocidade e tempo são inversamente proporcionais, isto é, aumentando a velocidade, o tempo para fazer determinado percurso será menor. Assim, organizando as informações no quadro, temos:

	Velocidade (em km/h)	Tempo (em h)	
aumenta	40	3	diminui
	48	x	

Inversamente proporcional

- Sendo inversamente proporcionais, o produto das grandezas é constante:

$$40 \cdot 3 = 48 \cdot x$$

$$\frac{120}{48} = x \Rightarrow x = 2{,}5$$

- Outra maneira de calcular é utilizar uma proporção, invertendo a grandeza desconhecida, por exemplo:

$$\frac{40}{48} = \frac{x}{3}$$

$$40 \cdot 3 = 48 \cdot x$$

$$\frac{120}{48} = x \Rightarrow x = 2{,}5$$

No caso de situação com grandezas inversamente proporcionais, apenas uma das frações deve ser invertida, podendo ser aquela com a grandeza conhecida, por exemplo, desde que a outra seja mantida.

Portanto, o caminhão fará o mesmo percurso em 2,5 h, isto é, 2 horas e 30 minutos.

24. Uma determinada piscina está com 24 000 L de água. Com 3 ralos de medidas iguais, são necessárias aproximadamente 10 horas para esvaziá-la completamente. Em quanto tempo essa mesma piscina seria esvaziada se tivesse apenas 2 ralos?

- As grandezas quantidade de ralos abertos e tempo são inversamente proporcionais, isto é, diminuindo a quantidade de ralos abertos, o tempo para esvaziar a piscina aumenta. Assim, organizando as informações no quadro, temos:

	Número de ralos abertos	Tempo (em h)	
diminui	3	10	aumenta
	2	x	

Inversamente proporcional

- Sendo inversamente proporcionais, o produto das grandezas é constante:

$$3 \cdot 10 = 2 \cdot x$$
$$\frac{30}{2} = x \Rightarrow x = 15$$

- Outra maneira de calcular é utilizar uma proporção, invertendo a grandeza conhecida, por exemplo:

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{x}$$
$$2 \cdot x = 3 \cdot 10$$
$$x = \frac{30}{2} \Rightarrow x = 15$$

Portanto, com dois ralos abertos, a piscina será esvaziada em 15 horas.

Para pensar e discutir

1. Na **atividade resolvida 23**, as grandezas velocidade e tempo são inversamente proporcionais. Ao multiplicar os valores correspondentes, o resultado é uma constante. Qual o significado dessa constante? 1. Distância percorrida.

2. Você resolveria a **atividade resolvida 24** de outra maneira? Explique. 2. Resposta pessoal.

3. O que aconteceria se na **atividade resolvida 25** algum dado numérico sobre massa fosse alterado? Mudaria o procedimento de resolução? 3. Resposta pessoal.

25. Na receita de um determinado prato, para cada 150 g de carne utiliza-se 5 g de sal. Para fazer essa receita utilizando 3 kg de carne, calcule a quantidade necessária de sal.

- Organizamos essas informações em uma tabela e indicamos por x a quantidade desconhecida.

	Carne (em g)	Sal (em g)	
aumenta	150	5	aumenta
	3 000	x	

Diretamente proporcional

- As duas grandezas aumentarão proporcionalmente, pois se duplicarmos a quantidade de carne, a quantidade de sal também duplicará. Assim, temos:

$$\frac{150}{3\,000} = \frac{5}{x}$$
$$150 \cdot x = 3\,000 \cdot 5$$
$$x = \frac{15\,000}{150} \Rightarrow x = 100$$

Portanto, serão necessários 100 g de sal.

26. Marcos, Andrea e Lúcia participaram de um bolão esportivo que rendeu a quantia total de R$ 392.000,00. Cada um participou com quantias diferentes: Marcos R$ 220,00, Andrea R$ 150,00 e Lúcia R$ 120,00. Fazendo a divisão proporcionalmente à participação, qual quantia cada um deles deve receber?

- Representando as quantias que cada um deles deve receber por x (Marcos), y (Andrea) e z (Lúcia) e considerando que são respectivamente proporcionais aos valores 220, 150 e 120, temos, para a constante de proporcionalidade k:

$$\frac{x}{220} = \frac{y}{150} = \frac{z}{120} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 220k \\ y = 150k \\ z = 120k \end{cases}$$

- Como a soma das quantias é o valor 392 000, podemos determinar o valor de k:

$$x + y + z = 392\,000$$
$$220k + 150k + 120k = 392\,000$$
$$490k = 392\,000$$
$$k = \frac{392\,000}{490}$$
$$k = 800 \Rightarrow \begin{cases} x = 220 \cdot 800 = 176\,000 \\ y = 150 \cdot 800 = 120\,000 \\ z = 120 \cdot 800 = 96\,000 \end{cases}$$

Portanto, Marcos deve receber R$ 176.000,00, Andrea R$ 120.000,00 e Lúcia R$ 96.000,00.

Observação:
Outra maneira de resolver a situação anterior é utilizando uma propriedade de proporção, isto é:

$$\frac{x}{220} = \frac{y}{150} = \frac{z}{120} = \frac{x + y + z}{220 + 150 + 120} = \frac{392\,000}{490} = 800 \Rightarrow \begin{cases} x = 220 \cdot 800 = 176\,000 \\ y = 150 \cdot 800 = 120\,000 \\ z = 120 \cdot 800 = 96\,000 \end{cases}$$

27. Três sócios resolveram dividir o faturamento mensal de R$ 58.000,00 em partes inversamente proporcionais aos dias que faltaram no mês de trabalho. Pedro faltou 9 dias, Carla faltou 5 dias e José faltou 3 dias. Qual a quantia que cada um deles recebeu?

- Representando as quantias que cada um deles deve receber por *x* (Pedro), *y* (Carla) e *z* (José) e considerando que são inversamente proporcionais aos valores 9, 5 e 3, respectivamente, temos, para a constante de proporcionalidade k:

$$x \cdot 9 = y \cdot 5 = z \cdot 3 = k \rightarrow \begin{cases} x = \frac{k}{9} \\ y = \frac{k}{5} \\ z = \frac{k}{3} \end{cases}$$

- Como a soma das quantias é o valor 58 000, podemos determinar o valor de *k*:

$$x + y + z = 58\,000$$

$$\frac{k}{9} + \frac{k}{5} + \frac{k}{3} = 58\,000$$

multiplicando por 45 (mmc dos denominadores)

$$45 \cdot \left(\frac{k}{9} + \frac{k}{5} + \frac{k}{3}\right) = 45 \cdot 58\,000$$

$$5k + 9k + 15k = 2\,610\,000$$

$$29k = 2\,610\,000$$

$$k = 90\,000 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{90\,000}{9} = 10\,000 \\ y = \frac{90\,000}{5} = 18\,000 \\ z = \frac{90\,000}{3} = 30\,000 \end{cases}$$

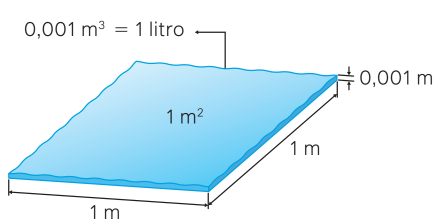
Portanto, Pedro deve receber R$ 10.000,00, Carla R$ 18.000,00 e José R$ 30.000,00.

Para explorar

Junte-se a dois ou três colegas e leiam o texto a seguir, para estas atividades.

Quando utilizamos o milímetro (mm), que é uma medida de comprimento, para representar a medida de chuvas, estamos informando a altura que a quantidade de água precipitada teria atingido em cada metro quadrado da cidade. Para analisar melhor essa situação, é preciso lembrar-se da relação entre milímetros (mm) e metros (m) e entre metros cúbicos (m^3) e litros (L). Considerando, então, que há uma coluna de água de 0,001 m de altura sobre uma superfície de 1 m^2, temos, sobre essa superfície, um volume de 0,001 m^3 ou 1 L.

Nota-se, então, que 1 mm de chuva é o mesmo que 1 L/m^2.



Reinaldo Vignati

1. Em novembro de 2023, a Região Sul do Brasil sofreu bastante com chuvas. Para ter uma ideia, no dia 18/11/2023, só na cidade de Cambará do Sul (RS), choveu 155,8 mm.

Fonte: BRASIL. Instituto Nacional de Meteorologia. *Eventos extremos*: novembro/2023 foi marcado por chuva acima da média nos estados do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Norte e Bahia. Brasília, DF: INMET, 2023. Disponível em: https://portal.inmet.gov.br/noticias/eventos-extremos-novembro-2023-foi-marcado-por-chuva-acima-da-m%C3%A9dia-nos-estados-do-rio-grande-do-sul-rio-grande-do-norte-e-bahia. Acesso em: 30 ago. 2024.

a) Quantos litros de água por metro quadrado choveu em 18/11/2023 na cidade de Cambará do Sul? 1. a) 155,8 L

b) Quantos litros de água teria ocorrido nessa mesma cidade em 12 m^2? 1. b) 1869,6 L

c) Na situação, as grandezas “mm de chuva” e “litros de água de chuva” são diretamente ou inversamente proporcionais? Justifique. 1. c) Diretamente proporcionais; resposta pessoal.

2. Vamos retomar os Objetivos do Desenvolvimento Sustentável, citados na abertura deste capítulo. Acessem a página https://brasil.un.org/pt-br/sdgs para conhecer mais sobre os 17 ODS.

Na página https://www.ipea.gov.br/ods/ods13.html, vocês encontrarão as metas relativas ao ODS13, que diz respeito às mudanças climáticas. Escolham uma das metas que possa estar associada às necessidades da sua região. Com a ajuda de um professor da área de Ciências da Natureza de suas Tecnologias, desenvolvam uma proposta relativa à meta escolhida, para ser aplicada à sua região. A proposta deve conter um parágrafo explicando como as aprendizagens deste capítulo foram úteis para desenvolvê-la. Apresentem a proposta para ser discutida com a turma. 2. Resposta pessoal.

Atividades

57. Indique se cada afirmação a seguir é verdadeira (V) ou falsa (F).

I. Se duas grandezas relacionadas são tais que, quando uma aumenta, a outra aumenta também, elas são ditas diretamente proporcionais. 57. I. F

II. Se duas grandezas relacionadas são tais que, quando uma aumenta, a outra diminui, elas são ditas inversamente proporcionais. 57. II. F

III. Quando duas grandezas são diretamente proporcionais, o quociente entre os valores correspondentes é constante. 57. III. V

IV. Quando duas grandezas são inversamente proporcionais, o produto entre os valores correspondentes é constante e diferente de zero. 57. IV. V

58. Considere que uma criança com 1 ano de idade tem massa 9,8 kg. Responda:

a) Com 2 anos de idade qual será a massa dessa mesma criança? 58. a) Não é possível saber.

b) As grandezas idade e massa de uma pessoa são grandezas direta ou inversamente proporcionais? 58. b) Idade e massa não são grandezas proporcionais.

59. Resolva cada situação a seguir.

a) Para completar um reservatório, Pedro encheu 30 vezes uma vasilha com capacidade de 6 litros em uma torneira; em seguida, para esvaziá-la, lançou o conteúdo no reservatório. Se ele utilizasse uma vasilha com capacidade de 3 litros, quantas vezes teria que lançar o conteúdo no mesmo reservatório para esvaziá-la? 59. a) 60

b) Considere que, para viajar de uma cidade para outra, com velocidade média de 60 km/h, um veículo leva 2 horas e 30 minutos. Se essa velocidade média fosse de 75 km/h, quanto tempo o veículo levaria para fazer a mesma viagem em condições ideias? 59. b) 2 horas

c) O dono de uma lanchonete observou que 1 kg de determinado tipo de pão em uma panificadora tem o custo de R$ 15,00. Se ele deseja gastar R$ 90,00 em pão, qual é a massa total que ele conseguirá comprar? 59. c) 6 kg

d) A distância de 4 cm em um mapa de uma cidade corresponde a um trajeto de 900 m nessa cidade. Para realizar um passeio correspondente a 24 cm no mapa, quantos quilômetros uma pessoa andaria nessa cidade? 59. d) 5,4 km

60. A quantia de R$ 288.000,00 deverá ser repartida entre três pessoas (A, B e C) em partes diretamente proporcionais aos números 4, 6 e 8, respectivamente. Determine as quantias que cada uma delas irá receber.
60. A: R$ 64.000,00; B: R$ 96.000,00 e C: R$ 128.000,00.

61. Utilizando um transferidor, um aluno deverá dividir um ângulo de medida 180° em três ângulos de medidas inversamente proporcionais aos números 1, 3 e 6. Quais são, respectivamente, as medidas desses três ângulos? 61. 120°, 40° e 20°, respectivamente

62. (Unesp) Semanalmente, o apresentador de um programa televisivo reparte uma mesma quantia em dinheiro igualmente entre os vencedores de um concurso. Na semana passada, cada um dos 15 vencedores recebeu R$ 720,00. Nesta semana, houve 24 vencedores; portanto, a quantia recebida por cada um deles, em reais, foi de 62. Alternativa **c**.

a) 675,00
b) 600,00
c) 450,00
d) 540,00
e) 400,00

63. (IFSP) A fotografia é uma forma de representação artística. Um fotógrafo deseja ampliar uma fotografia sem a distorcer, isto é, pretende produzir uma imagem semelhante à original. Se a fotografia original possui forma retangular de dimensões 12 cm × 16 cm e o fotógrafo pretende utilizar uma constante de proporcionalidade $k = 2{,}5$, então as dimensões da fotografia ampliada serão 63. Alternativa **c**.

a) 25 cm × 42 cm.
b) 25 cm × 40 cm.
c) 30 cm × 40 cm.
d) 30 cm × 42 cm.
e) 32 cm × 44 cm.

64. (Unicamp-SP) Para repor o teor de sódio no corpo humano, o indivíduo deve ingerir aproximadamente 500 mg de sódio por dia. Considere que determinado refrigerante de 350 mL contém 35 mg de sódio. Ingerindo-se 1 500 mL desse refrigerante em um dia, qual é a porcentagem de sódio consumida em relação às necessidades diárias? 64. Alternativa **d**.

a) 45%
b) 60%
c) 15%
d) 30%

65. (Enem) A vazão de água (em m^3/h) em tubulações pode ser medida pelo produto da área da seção transversal por onde passa a água (em m^2) pela velocidade da água (em m/h). Uma companhia de saneamento abastece uma indústria utilizando uma tubulação cilíndrica de raio r, cuja vazão da água enche um reservatório em 4 horas. Para se adaptar às novas normas técnicas, a companhia deve duplicar o raio da tubulação, mantendo a velocidade da água e mesmo material.
Qual o tempo esperado para encher o mesmo reservatório, após a adaptação às novas normas?

a) 1 hora.
b) 2 horas.
c) 4 horas.
d) 8 horas.
e) 16 horas.

65. Alternativa **a**.

66. (ESPM-SP) O consumo de combustível de um trator de arado, por um tempo de trabalho, é de 18 litros por hora. Esse mesmo consumo, por área trabalhada, é de 15 litros por hectare. Podemos estimar que, em 10 horas de trabalho, esse trator poderá arar cerca de: 66. Alternativa **a**.

a) 12 hectares.
b) 15 hectares.
c) 8 hectares.
d) 6 hectares.
e) 10 hectares.

Atividades finais

1. Uma superfície de 1 hectare tem 10 000 m² de área. Responda:

a) Essa medida corresponde a quantos quilômetros quadrados? 1. a) 0,01 km²

b) Quantos hectares tem 1 km²? 1. b) 100 hectares

2. A capacidade de 1 mL corresponde ao volume de 1 cm³. Determine, em cm³, a capacidade de:

a) uma embalagem de óleo de 720 mL; 2. a) 720 cm³

b) uma garrafa de suco de 1,5 L; 2. b) 1 500 cm³

c) um garrafão de água de 5 L. 2. c) 5 000 cm³

3. Em uma rodovia, um automóvel estava a 120 km/h, portanto, acima da velocidade limite permitida, e o motorista foi multado. Responda:

a) Esse veículo estava com qual velocidade em metros por minuto? 3. a) 2 000 m/min

b) E em metros por segundo? 3. b) Aproximadamente 33,33 m/s.

4. Considere que os números a seguir são resultados de medições. Sobre esses números foram feitas afirmações. Indique quais são verdadeiras (V) e quais são falsas (F).

I. 3,4716 tem 5 algarismos significativos; 4. I. V

II. 2,37 tem 3 algarismos significativos; 4. II. V

III. 4,600 tem apenas 2 algarismos significativos; 4. III. F

IV. 0,001 tem apenas 1 algarismo significativo; 4. IV. V

V. 0,00010 tem apenas 2 algarismos significativos; 4. V. V

VI. 2,9000 tem exatamente 5 algarismos significativos. 4. VI. V

5. A massa de um elefante adulto da savana pode chegar a 6 000 kg.

a) Transforme essa medida em notação científica. 5. a) $6 \cdot 10^3$ kg

b) Com base na notação científica, indique a quantidade de algarismos significativos. 5. b) 1

c) Informe a ordem de grandeza dessa medida com base na notação científica. 5. c) 10^4

6. Considere que em uma medição de uma grandeza obteve-se, na notação científica, o número $N = \alpha \cdot 10^{25}$. Responda:

a) Qual a condição para que a ordem de grandeza dessa medida seja 10^{25}? 6. a) $\alpha < 3{,}16$

b) Qual a condição para que a ordem de grandeza dessa medida seja 10^{26}? 6. b) $\alpha \geq 3{,}16$

7. O Northrop F-5EM da Força Aérea Brasileira é um avião supersônico que pode atingir uma velocidade máxima de 1 700 km/h.

Ariadne Barroso/Shutterstock.com

Northrop F-5EM.

a) Transforme essa medida em notação científica. 7. a) $1{,}7 \cdot 10^3$ km/h

b) Com base na notação científica, indique a quantidade de algarismos significativos. 7. b) 2

c) Informe a ordem de grandeza dessa medida com base na notação científica. 7. c) 10^3

8. Atualmente a soma da idade de um pai e de seu filho é 45 anos. A idade do pai está para a idade do filho assim como 7 está para 2. Determine a idade de cada um deles. 8. Pai: 35 anos; filho: 10 anos.

9. Responda:

a) Quando duas grandezas relacionadas A e B são ditas diretamente proporcionais? 9. a) Resposta no Manual do Professor.

b) Quando duas grandezas relacionadas A e B são ditas inversamente proporcionais? 9. b) Resposta no Manual do Professor.

Questões de vestibulares e Enem

10. (ESA) A nova sede da Escola de Sargentos do Exército (ESE) será construída na região metropolitana de Recife–PE. O marco zero dessa belíssima cidade encontra-se na região portuária denominada “Recife Antigo”. Ao realizar a medição em um mapa de escala 1 : 95 000 cm, a distância entre o marco zero de Recife e o local de construção da nova sede da ESE, encontramos 55 cm. A distância real, em quilômetros, entre esses dois pontos citados é de:

a) 42,2 km **b)** 42,5 km **c)** 52,25 km **d)** 5,225 km **e)** 42,25 km

10. Alternativa **c**.

11. (UEPG-PR) Considerando que $x = 23{,}75$ m, $y = 2{,}335$ kg, $z = 0{,}046$ cm, $w = 230{,}67$ g e $t = 366$ km, assinale o que for correto. 11. 06 (02+04)

01) $x + t$, em metros, tem 6 algarismos significativos.

02) x tem 4 algarismos significativos.

04) z tem 2 algarismos significativos.

08) $y + w$, em quilogramas, tem 5 algarismos significativos.

12. (UFPI) A nossa galáxia, a Via Láctea, contém cerca de 400 bilhões de estrelas. Suponha que 0,05% dessas estrelas possuam um sistema planetário onde exista um planeta semelhante à Terra. O número de planetas semelhantes à Terra, na Via Láctea, é:

a) $2 \cdot 10^4$ **b)** $2 \cdot 10^6$ **c)** $2 \cdot 10^8$ **d)** $2 \cdot 10^{11}$ **e)** $2 \cdot 10^{12}$

12. Alternativa **c**.

13. (IFCE) Se uma vela de 28 cm de altura diminui 1,4 mm por minuto, levará para se consumir 13. Alternativa **a**.

a) 3 horas e 20 minutos.

b) 3 horas e 15 minutos.

c) 3 horas e 10 minutos.

d) 3 horas e 5 minutos.

e) 4 horas.

14. (IFSC) A Federação Internacional de Atletismo (IAAF) divulgou, no início do ano de 2019, os índices olímpicos para as Olimpíadas de Tokyo em 2020.
O índice olímpico para a prova de Maratona Feminina, por exemplo, é de 2 h 29 min 30 s.
Assinale a alternativa que mais se aproxima deste índice olímpico, expresso apenas na unidade de tempo horas: 14. Alternativa **c**.

a) 2,5001 h
b) 2,4899 h
c) 2,4916 h
d) 2,2930 h
e) 2,5102 h

15. (Uerj) O sistema solar é formado por planetas que apresentam diferentes acelerações da gravidade. Admita que um corpo é solto em queda livre na Terra a uma altura *h* e atinge a superfície do planeta com velocidade de 5 m/s. Admita ainda um planeta P, também do sistema solar, em que o mesmo corpo é solto, à mesma altura *h*, e atinge velocidade final de 8 m/s. Sabe-se que o quadrado da velocidade com a qual um corpo em queda livre atinge a superfície é diretamente proporcional à aceleração da gravidade do planeta. Considere os valores aproximados apresentados na tabela:

PLANETA	ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE (m/s^2)
Júpiter	25
Marte	4
Netuno	11
Terra	10
Vênus	9

Com base nessas informações, o planeta que apresenta a aceleração da gravidade mais próxima à do planeta P é: 15. Alternativa **a**.

a) Júpiter
b) Marte
c) Netuno
d) Vênus

16. (Unifor-CE) Um professor de Matemática, que planejou uma viagem para participar de um Congresso Internacional de Matemáticos numa determinada cidade, onde há um hotel com acomodações A e B, pagou antecipadamente *x* reais pelas diárias na acomodação A, que cobrava R$ 110,00 por dia. Ao chegar no hotel, ele optou pela acomodação B, que cobrava R$ 100,00 pela diária, pois percebeu que, assim, ele poderia ficar mais 2 dias hospedado neste hotel. Sabendo que, além dos *x* reais já pagos, ele ainda gastou R$ 150,00 por dia com alimentação e que não houve outras despesas, a quantia que esse professor gastou neste hotel é um número compreendido entre 16. Alternativa **e**.

a) 2 100 e 2 400.
b) 2 400 e 3 900.
c) 3 900 e 4 500.
d) 4 500 e 5 300.
e) 5 300 e 5 900.

17. (Unicamp-SP) Um recipiente de 30 litros contém uma solução de 14 partes de álcool e 1 parte de água. Quantos litros de água devem ser adicionados para que se tenha uma solução com 70% de álcool? 17. Alternativa **b**.

a) 8 litros.
b) 10 litros.
c) 12 litros.
d) 14 litros.

18. (ESPM-SP) Um fabricante de bebidas pretende envasar 582 litros de refrigerantes em garrafas de 330 mL. Admitindo-se uma perda de 15% por garrafa durante o processo, a quantidade de garrafas que ele poderá envasar é de, aproximadamente:

a) 1 500
b) 1 700
c) 1 400
d) 1 300
e) 1 800

18. Alternativa **a**.

19. (Acafe-SC) IMC é a sigla para Índice de Massa Corpórea, um dos parâmetros adotados pela Organização Mundial da Saúde para calcular o peso ideal de cada pessoa. O IMC é calculado da seguinte maneira: divide-se a massa, em quilogramas, do paciente pela altura, em metros, elevada ao quadrado. Um nutricionista, utilizando um adipômetro, verificou que um paciente, com estatura 1,80 m e massa 120,00 kg, tem 20% de gordura corporal. Após uma análise, o nutricionista traçou como objetivo que esse homem tenha exatos 15% de gordura corporal, mas ressaltou a importância de manter a massa magra.
Assinale a alternativa que contém uma informação correta sobre o IMC desse paciente quando alcançar o objetivo traçado pelo nutricionista.

a) $34 < IMC < 35$
b) $35 < IMC < 36$
c) $36 < IMC < 37$
d) $33 < IMC < 34$

19. Alternativa **a**.

20. (Ufam) Um estudante tem, em sua residência, internet com velocidade de 20 MB/s. Ele precisa fazer o *download* de uma coletânea de exercícios, cujo arquivo zipado tem 1,5 GB. Considerando que 1 GB = 1024 MB, podemos afirmar que o intervalo de tempo necessário para que o arquivo zipado seja completamente baixado, caso a velocidade da internet se mantenha constante, será de:

a) 65,0 s
b) 75,0 s
c) 76,8 s
d) 80,8 s
e) 90,8 s

20. Alternativa **c**.

21. (Fatec-SP) João, preocupado com nosso planeta, irá instalar placas solares em sua residência. Para atender ao consumo de energia de sua casa, serão necessários 2 120 W de potência por dia. Após estudar o problema, adquiriu módulos solares fotovoltaicos com a forma retangular e as seguintes características:

- Potência diária gerada por módulo: 265 W; e
- Dimensão de cada módulo: 1,65 m por 1,00 m, com espessura desprezível.

Os módulos serão instalados no telhado, um ao lado do outro, sem sobreposição.
Despreze quaisquer formas de perda de energia.

a) 12,5
b) 13,2
c) 14,6
d) 15,3
e) 16,4

21. Alternativa **b**.

22. (Fuvest-SP) Um vídeo tem três minutos de duração. Se o vídeo for reproduzido, desde o seu início, com velocidade 1,5 vezes a velocidade original, o tempo de reprodução do vídeo inteiro será de

a) 1min30s. **c)** 2min00s. **e)** 2min50s.
b) 1min50s. **d)** 2min30s.

22. Alternativa **c**.

23. (UPE) A quantidade de calor Q transferido entre as duas extremidades de uma barra metálica cilíndrica (chamadas de planos isotérmicos) é diretamente proporcional à área S de uma seção da barra e à diferença da temperatura entre as duas extremidades e inversamente proporcional à distância D entre os dois planos isotérmicos.
Ao dobrar a área da superfície e quadruplicar a distância entre os planos isotérmicos, sem alterar a diferença de temperatura, a quantidade de calor transferido será 23. Alternativa **c**.

a) duplicada.
b) quadruplicada.
c) reduzida à metade.
d) reduzida à quarta parte.
e) invariável.

24. (Enem) Com o intuito de fazer bombons para vender, uma doceira comprou uma barra de 2 kg de chocolate e 1 L de creme de leite. De acordo com a receita, cada bombom deverá ter exatamente 34 g de chocolate e 12 mL de creme de leite.
Respeitando os critérios estabelecidos, quantos bombons a doceira poderá fazer utilizando o máximo que puder os ingredientes comprados? 24. Alternativa **c**.

a) 5 **b)** 8 **c)** 58 **d)** 71 **e)** 83

25. (Enem) Uma unidade de medida comum usada para expressar áreas de terrenos de grandes dimensões é o hectare, que equivale a 10 000 m². Um fazendeiro decide fazer um loteamento utilizando 3 hectares de sua fazenda, dos quais 0,9 hectare será usado para a construção de ruas e calçadas e o restante será dividido em terrenos com área de 300 m² cada um. Os 20 primeiros terrenos vendidos terão preços promocionais de R$ 20.000,00 cada, e os demais, R$ 30.000,00 cada.
Nas condições estabelecidas, o valor total, em real, obtido pelo fazendeiro com a venda de todos os terrenos será igual a 25. Alternativa **c**.

a) 700 000 **c)** 1 900 000 **e)** 2 800 000
b) 1 600 000 **d)** 2 200 000

26. (Enem) Um agricultor utilizava toda a área de uma região plana, em formato retangular, com 50 m de largura e 240 m de comprimento, para o plantio de mudas. Seguindo recomendações técnicas, cada muda é plantada no centro de uma pequena região retangular de 10 cm de largura por 20 cm de comprimento. Esse agricultor decidiu ampliar a área destinada ao plantio de mudas, utilizando agora um terreno, também plano, em formato retangular, com 100 m de comprimento por 200 m de largura. As mudas deverão ser plantadas respeitando-se as mesmas recomendações técnicas.
Com o aumento da área destinada ao plantio, a quantidade máxima de mudas que poderão ser plantadas a mais é 26. Alternativa **b**.

a) 100 000 **c)** 600 000 **e)** 1 600 000
b) 400 000 **d)** 1 000 000

27. (Enem) É comum as cooperativas venderem seus produtos a diversos estabelecimentos. Uma cooperativa láctea destinou 4 m³ de leite, do total produzido, para análise em um laboratório da região, separados igualmente em 4 000 embalagens de mesma capacidade.
Qual o volume de leite, em mililitro, contido em cada embalagem? 27. Alternativa **e**.

a) 0,1 **c)** 10,0 **e)** 1 000,0
b) 1,0 **d)** 100,0

28. (Enem) Os tempos gastos por três alunos para resolver um mesmo exercício de matemática foram: 3,25 minutos; 3,4 minutos e 191 segundos. O tempo gasto a mais, em segundo, pelo aluno que concluiu por último a resolução do exercício, em relação ao primeiro que o finalizou, foi igual a 28. Alternativa **a**.

a) 13 **b)** 14 **c)** 15 **d)** 21 **e)** 29

29. (Enem) Se a tartaruga, a lesma e o caramujo apostassem uma corrida, a lesma chegaria em último lugar, o penúltimo colocado seria o caramujo e a primeira seria a tartaruga. Segundo o biólogo americano Branley Allan Branson, a velocidade "recorde" já registrada em pesquisas, por uma lesma, é de 16,5 centímetros por minuto.
Para uma reportagem, dispondo das velocidades recordes da tartaruga e do caramujo em metro por segundo, se faz necessário saber o fator de conversão da velocidade recorde da lesma para metro por segundo para divulgar uma comparação.
Com base nas informações, o fator de conversão da velocidade recorde da lesma para metro por segundo é 29. Alternativa **b**.

a) $10^{-2} \cdot 60^{-2}$ **c)** $10^{-2} \cdot 60$ **e)** $10^{-3} \cdot 60$
b) $10^{-2} \cdot 60^{-1}$ **d)** $10^{-3} \cdot 60^{-1}$

30. (Enem) Usando um computador construído com peças avulsas, o japonês Shigeru Kondo calculou o valor da constante matemática π com precisão de 5 trilhões de dígitos. Com isso, foi quebrado o recorde anterior, de dois trilhões de dígitos, estabelecido pelo francês Fabrice Bellard.
A quantidade de zeros que segue o algarismo 5 na representação do número de dígitos de π calculado pelo japonês é 30. Alternativa **d**.

a) 3 **b)** 6 **c)** 9 **d)** 12 **e)** 15

31. (Enem) Entre maratonistas, um parâmetro utilizado é o de economia de corrida (EC). O valor desse parâmetro é calculado pela razão entre o consumo de oxigênio, em mililitro (mL) por minuto (min), e a massa, em quilograma (kg), do atleta correndo a uma velocidade constante.

Um maratonista, visando melhorar sua performance, auxiliado por um médico, mensura o consumo de oxigênio por minuto à velocidade constante. Com base nesse consumo e na massa do atleta, o médico calcula o EC do atleta. A unidade de medida da grandeza descrita pelo parâmetro EC é

a) $\dfrac{\text{min}}{\text{mL} \cdot \text{kg}}$ **c)** $\dfrac{\text{min} \cdot \text{mL}}{\text{kg}}$ **e)** $\dfrac{\text{mL} \cdot \text{kg}}{\text{min}}$

31. Alternativa **b**.

b) $\dfrac{\text{mL}}{\text{min} \cdot \text{kg}}$ **d)** $\dfrac{\text{min} \cdot \text{kg}}{\text{mL}}$

32. (Enem) Em janeiro do ano passado, a direção de uma fábrica abriu uma creche para os filhos de seus funcionários, com 10 salas, cada uma com capacidade para atender 10 crianças a cada ano. As vagas são sorteadas entre os filhos dos funcionários inscritos, enquanto os não contemplados pelo sorteio formam uma lista de espera. No ano passado, a lista de espera teve 400 nomes e, neste ano, esse número cresceu 10%.

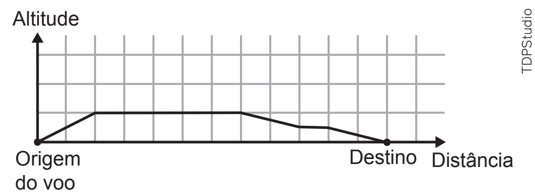
A direção da fábrica realizou uma pesquisa e constatou que a lista de espera para o próximo ano terá a mesma quantidade de nomes da lista de espera deste ano. Decidiu, então, construir, ao longo deste ano, novas salas para a creche, também com capacidade de atendimento para 10 crianças cada, de modo que o número de nomes na lista de espera no próximo ano seja 25% menor que o deste ano.

O número mínimo de salas que deverão ser construídas é 32. Alternativa **b**.

a) 10. **b)** 11. **c)** 13. **d)** 30. **e)** 33.

33. (Enem) Um controlador de voo dispõe de um instrumento que descreve a altitude de uma aeronave em voo, em função da distância em solo. Essa distância em solo é a medida na horizontal entre o ponto de origem do voo até o ponto que representa a projeção ortogonal da posição da aeronave, em voo, no solo. Essas duas grandezas são dadas numa mesma unidade de medida.

A tela do instrumento representa proporcionalmente as dimensões reais das distâncias associadas ao voo. A figura apresenta a tela do instrumento depois de concluída a viagem de um avião, sendo a medida de cada quadradinho da malha igual a 1 cm.



Essa tela apresenta os dados de um voo cuja maior altitude alcançada foi de 5 km. A escala em que essa tela representa as medidas é 33. Alternativa **e**.

a) 1 : 5 **c)** 1 : 55 **e)** 1 : 500 000

b) 1 : 11 **d)** 1 : 5 000

34. (Enem) O calendário maia apresenta duas contagens simultâneas de anos, o chamado ano Tzolkim, composto de 260 dias e que determinava o calendário religioso, e o ano Haab, composto de 365 dias e que determinava o calendário agrícola. Um historiador encontrou evidências de que gerações de uma mesma família governaram certa comunidade maia pelo período de 20 ciclos, sendo cada ciclo formado por 52 anos Haab.

De acordo com as informações fornecidas, durante quantos anos Tzolkim aquela comunidade maia foi governada por tal família? 34. Alternativa **c**.

a) 741 **c)** 1460 **e)** 5200

b) 1040 **d)** 2100

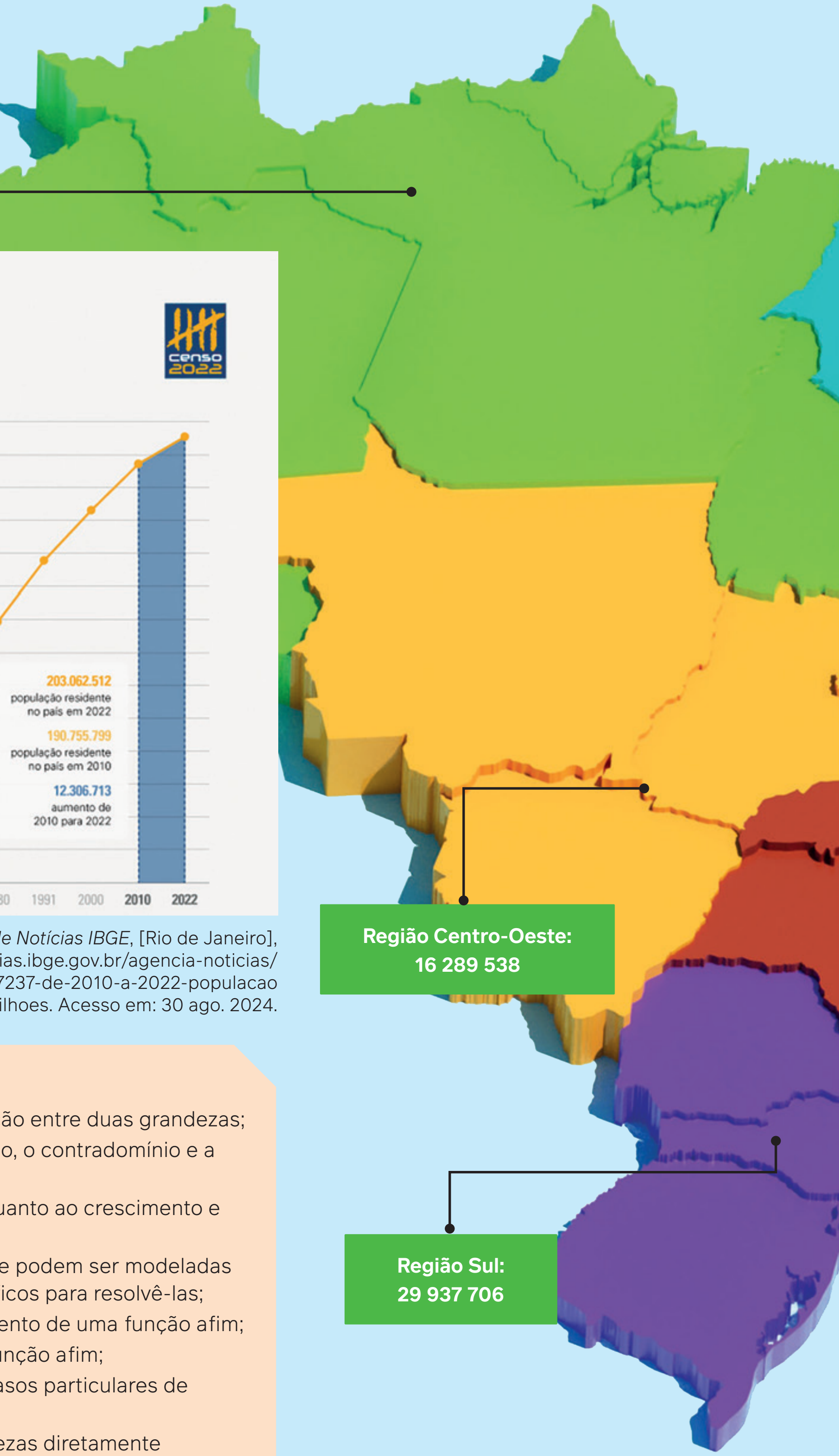
Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão dos assuntos e objetivos trabalhados ao longo do presente capítulo.

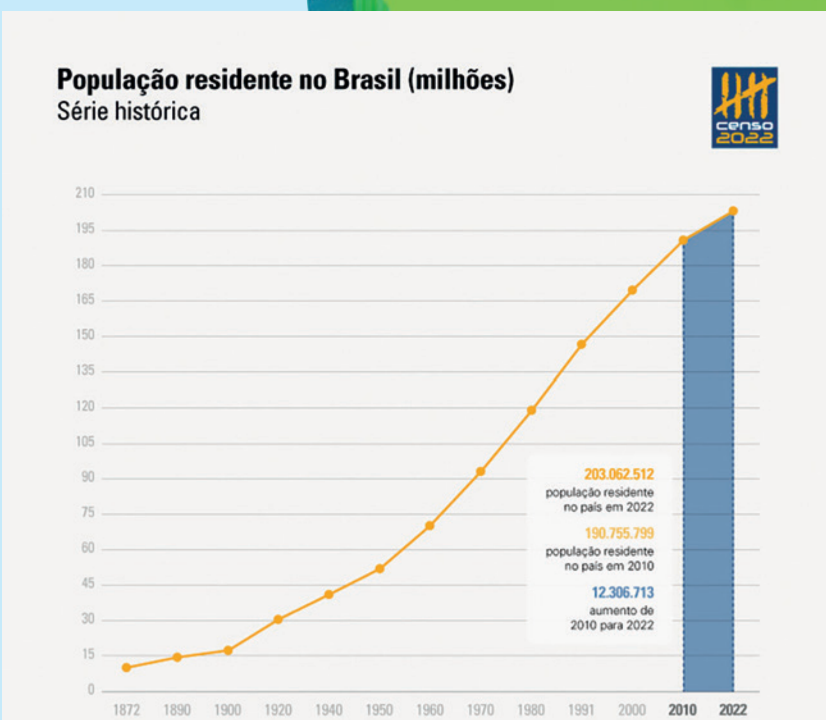
Objetivos de aprendizagem	Sim	É necessário retomar
Utilizo as unidades de medida adotadas no Sistema Internacional de Unidades.		
Relaciono grandezas fundamentais e derivadas com suas respectivas unidades de medida.		
Identifico algarismos significativos na representação de uma medida.		
Utilizo a notação científica para expressar a ordem de grandeza de uma medida.		
Compreendo os conceitos de razão e proporção.		
Identifico quando duas grandezas são direta ou inversamente proporcionais.		
Resolvo problemas relacionados às grandezas direta ou inversamente proporcionais.		

Fábio Nienow

A população brasileira segundo o Censo 2022



IBGE



Fonte: CABRAL, U. De 2010 a 2022 [...]. *Agência de Notícias IBGE*, [Rio de Janeiro], 27 out. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/37237-de-2010-a-2022-populacao-brasileiracresce-6-5-e-chega-a-203-1-milhoes. Acesso em: 30 ago. 2024.

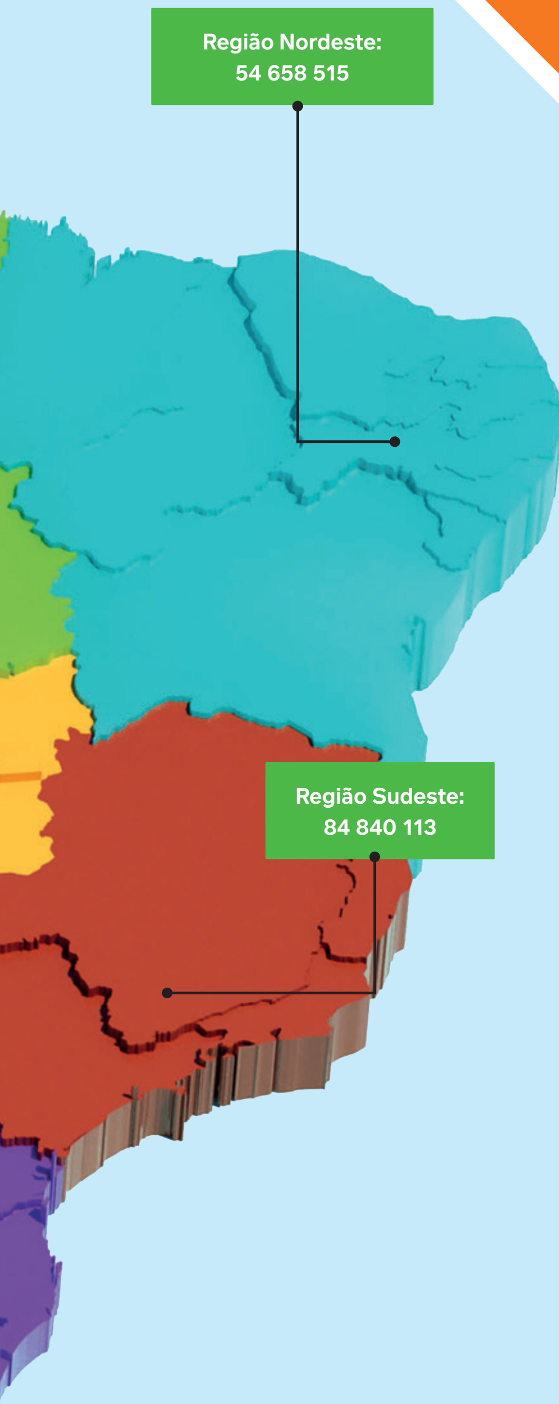
Neste capítulo, você vai:

- compreender o conceito de função como relação entre duas grandezas;
- identificar, em gráficos ou diagramas, o domínio, o contradomínio e a imagem de uma função;
- compreender e analisar gráficos de funções quanto ao crescimento e decrescimento;
- conhecer função afim, identificar situações que podem ser modeladas por ela e usar procedimentos algébricos e gráficos para resolvê-las;
- compreender o significado de taxa de crescimento de uma função afim;
- resolver e elaborar problemas que envolvem função afim;
- compreender que as funções do 1º grau são casos particulares de função afim;
- identificar que a função linear relaciona grandezas diretamente proporcionais;
- resolver inequações do 1º grau com base no estudo do sinal de uma função do 1º grau e também por procedimentos algébricos.

CAPÍTULO

4

Função afim



Representação gráfica do Brasil, com destaque para as cinco regiões.

O Censo Demográfico de 2022, realizado pelo IBGE, trouxe dados atualizados que possibilitam conhecer, por exemplo, qual é o tamanho da população brasileira, em que condições vive, como se distribui no Território Nacional, entre muitas outras questões que permitem planejar e executar ações que contribuam para o desenvolvimento do país. Com base nos dados coletados, foi possível calcular que a taxa de crescimento anual da população é de 0,52%. Neste capítulo, você vai ter a oportunidade de analisar gráficos de funções quanto ao crescimento de uma população, por exemplo, o que possibilitará resolver problemas em diversas áreas.

Fonte: CABRAL, U. De 2010 a 2022 [...]. *Agência de Notícias IBGE*, [Rio de Janeiro], 27 out. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/37237-de-2010-a-2022-populacao-brasileira-cresce-6-5-e-chega-a-203-1-milhoes. Acesso em: 30 ago. 2024.

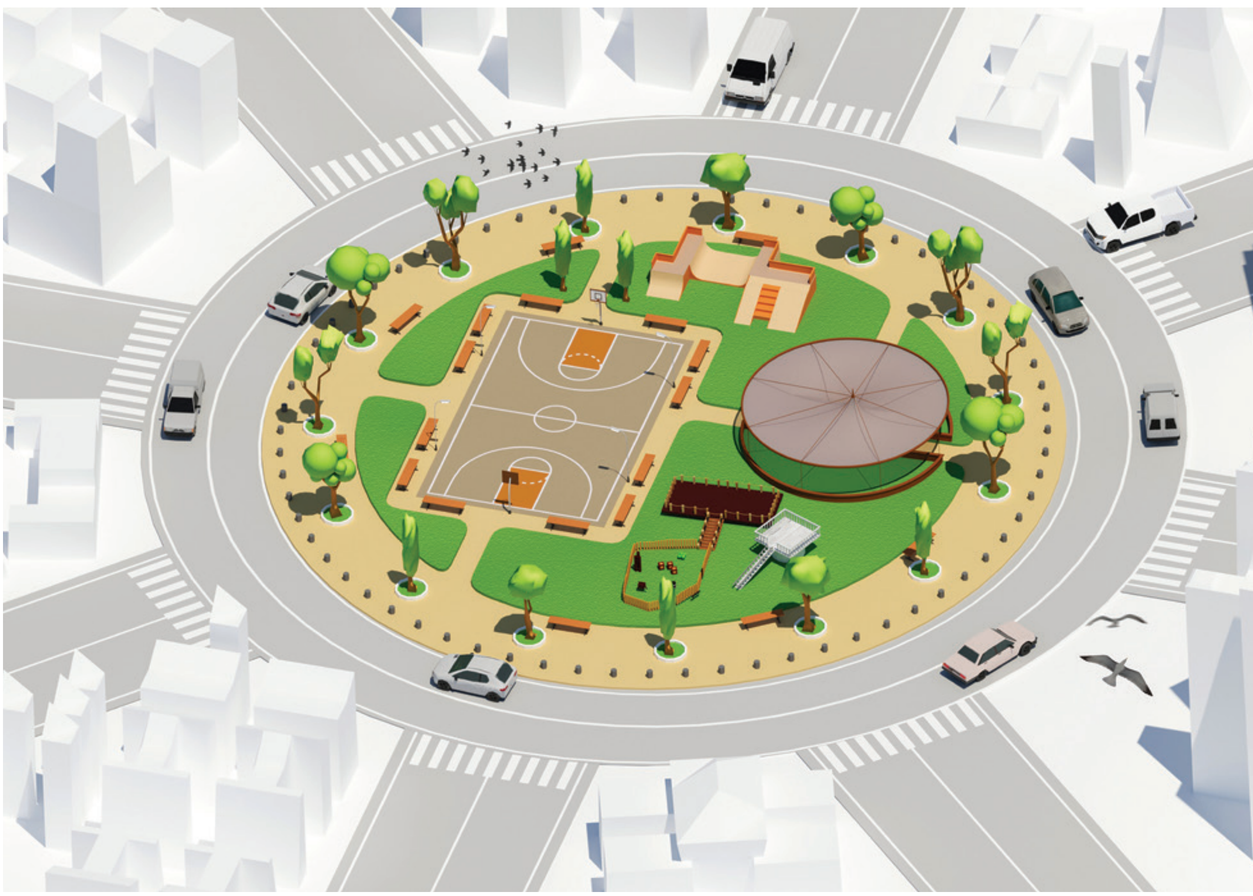
1. **Qual é a importância de conhecer o número de habitantes de cada região, conforme consta no infográfico?**
1. Resposta pessoal.

2. **Como você imagina que os dados obtidos pelo Censo Demográfico contribuem para o planejamento de ações voltadas para o desenvolvimento do país?** 2. Resposta pessoal.

1 A ideia de função

Nas grandes cidades, existe a preocupação de criar grandes áreas de lazer para a população. Pessoas que passam seus dias em prédios fechados, por exemplo, precisam de quadras esportivas, pistas para caminhar e outros locais que possibilitem a prática de atividades físicas ou descanso.

Considere que foi feito um projeto de uma praça circular com a finalidade de fornecer uma área de lazer aos moradores de determinado bairro. A seguir está uma maquete dessa praça.



Fábio Nienow

Maquete da praça circular.

Para pensar e discutir

1. O que você considera importante que exista em uma praça pública destinada ao lazer? 1. Resposta pessoal.
2. Qual é a grandeza que representa a superfície ocupada pela praça? 2. A área.
3. Do que depende a medida da superfície ocupada pela praça? Como calcular essa medida? 3. Resposta pessoal; πr^2.

Vimos anteriormente, relações entre grandezas. Nessas relações, podemos encontrar as que são diretamente proporcionais, as que são inversamente proporcionais ou as que não se classificam como nenhuma delas. Aqui, ampliaremos nosso estudo compreendendo melhor como duas grandezas estão relacionadas, observando o que acontece com uma delas quando a outra varia. Para isso, utilizaremos o conceito de função.

Conceito de função

A ideia de **função** pode ser associada à ideia de **dependência**. Quando uma situação envolve duas grandezas em que uma **depende** da outra, estamos diante da ideia de função. Vamos analisar algumas situações.

Situação 1

A tabela a seguir relaciona duas grandezas variáveis pelas suas medidas: a medida ℓ do lado de um quadrado e a medida A da superfície desse quadrado (área do quadrado).

Relação entre a medida do lado de um quadrado e a medida de sua superfície

Comprimento do lado (ℓ em cm)	Área do quadrado (A em cm²)
2	4
3,5	12,25
4,8	23,04
9	81
12	144
(...)	(...)
ℓ	ℓ^2

Fonte: Dados elaborados pelo autor.

Nessa situação, temos que:

- a área A do quadrado **depende** da medida ℓ do lado do quadrado.

ou, de forma equivalente

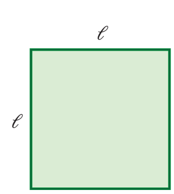
- a área A do quadrado **é função** da medida ℓ do lado do quadrado.

utilizando símbolos para representar

$$\underbrace{A = f(\ell)}_{\text{Lemos: } A \text{ é função de } \ell}$$

Atente-se às observações a seguir.

1. A área depende da medida do lado do quadrado.
2. Dizemos que A representa a variável dependente, enquanto ℓ é a variável independente.
3. Cada valor atribuído na tabela para a variável ℓ corresponde a um único valor para a variável A.



Acervo editora

Fórmula para a área A de um quadrado de lado ℓ:

$$A = \ell^2$$

4. A fórmula que relaciona A em função de ℓ é chamada **lei de formação da função** e, nessa situação, pode ser representada por:

$$A = f(\ell) = \ell^2 \text{ ou } \underbrace{f(\ell) = \ell^2}_{\text{Lei de formação da função}}$$

Situação 2

Em determinado município, foi adotada uma medida em que o preço P da conta mensal do consumo de água depende somente da quantidade x dos metros cúbicos consumidos. Para cada metro cúbico consumido de água, o valor a ser cobrado é de R$ 12,50.

Na tabela a seguir, temos a relação entre o valor da conta e a quantidade de água consumida em metros cúbicos.

Relação entre a quantidade de metros cúbicos e o valor a pagar

Volume de água consumido (x em m³)	Valor a pagar (P em reais)
8	100
9,2	115
13	162,5
20,3	253,75
30	375
⋮	⋮
x	$12{,}50x$

Fonte: Dados elaborados pelo autor.

Adene Sanchez/iStockphoto.com

A água é um bem precioso. É preciso usá-la com inteligência.

Nessa situação, temos que:

- o valor ***P*** a pagar **depende** do consumo ***x***.

↓ ou, de forma equivalente

- o valor ***P*** a pagar **é função** do consumo ***x***.

↓ utilizando símbolos para representar

$P = f(x)$ → Lemos: P é função de x

Para pensar e discutir

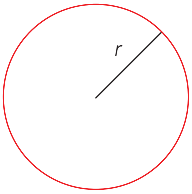
1. Nessa situação, qual é a variável dependente? E a variável independente? 1. Dependente: P; independente: x.
2. Qual é a lei de formação dessa função? 2. $f(x) = 12{,}50x$.
3. Para um consumo mensal de 23 m³ de água, qual é o valor a ser pago? 3. R$ 287,50.
4. Existe alguma restrição para valores da variável x? Qual? 4. $x \geq 0$.

Atividades resolvidas

1. O comprimento de uma circunferência C é uma função da medida de seu raio r. Obtenha a lei de formação dessa função, isto é, obtenha $C = f(r)$ e identifique qual é a variável dependente e qual é a variável independente.

- A figura a seguir representa uma circunferência de raio r e a fórmula que fornece o comprimento dessa circunferência.

Acervo editora



$\rightarrow C = 2\pi \cdot r$

- Essa fórmula representa a lei de formação da função. Utilizando o símbolo de função, podemos escrever:

$$C = f(r) = 2\pi \cdot r$$

Nessa função, a variável dependente é o comprimento C e a variável independente é a medida do raio r.

2. Considere que uma prestadora de serviços de manutenção de internet cobre R$ 40,00 pela visita e R$ 50,00 por hora trabalhada. Se V é o valor a ser pago pelo cliente e t é o tempo em horas gasto no serviço, escreva a lei de formação dessa função.

- Temos que a lei de formação da função é dada pela adição de uma parte fixa correspondente ao valor da visita e uma parte variável que depende do tempo dessa visita.

$$\text{Valor} = (\text{parte fixa}) + (\text{parte variável})$$

- Utilizando símbolos, obtemos a lei de formação da função:

$$V = f(t)$$
$$\underbrace{V = f(t) = 40 + 50t}_{\text{Lei de formação da função}}$$

3. Para calcular a média bimestral em Matemática, um estudante escreveu a seguinte lei de formação da função: $f(x) = \dfrac{7 + x}{2}$, em que 7 representa a primeira nota e x representa a segunda nota.

a) Qual é a média bimestral desse estudante em Matemática considerando que $x = 8$?

b) Explique como você calculou essa média.

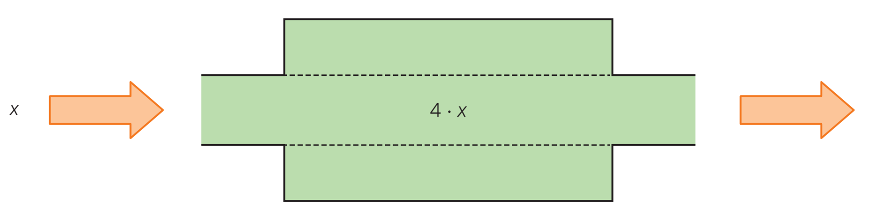
- Item **a)** Considerando que $x = 8$, temos que a média será:

$$f(8) = \frac{7 + 8}{2}$$
$$f(8) = \frac{15}{2} \Rightarrow f(8) = 7{,}5$$

Portanto, a média é 7,5.

- Item **b)** Para calcular $f(8)$ basta substituir x por 8 na lei de formação da função.

4. Para explicar como calcular o valor da variável dependente y em uma função que quadruplica um número x, o professor utilizou a representação de uma "máquina que transforma".



Acervo editora

a) Escreva a lei de formação dessa função expressando y em função de x.

b) Qual é o valor, nessa função, de $f(7)$?

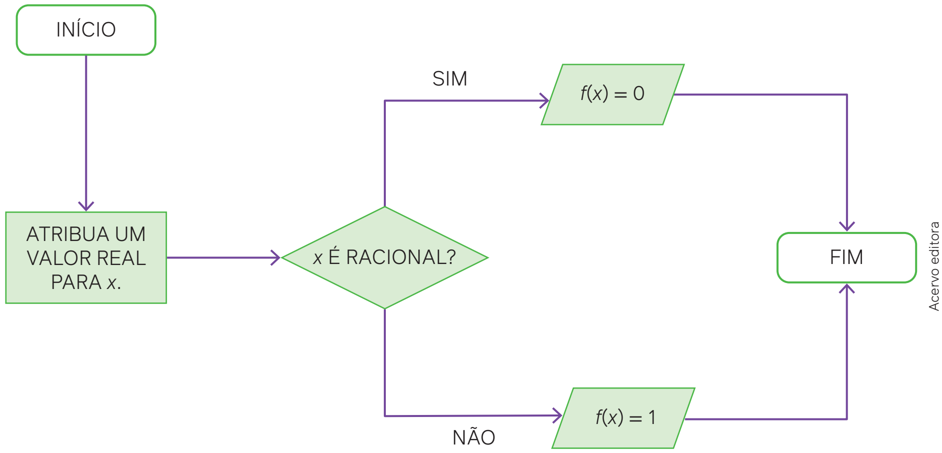
- Item **a)** Como o valor de y depende do valor de x e a máquina o quadruplica, temos que a lei de formação dessa função é:

$$y = f(x)$$
$$y = f(x) = 4 \cdot x$$

- Item **b)** Para calcular $f(7)$, basta substituir x na lei de formação da função por 7:

$$y = f(x) = 4 \cdot x$$
$$y = f(7) = 4 \cdot 7 \Rightarrow y = 28$$

5. Utilizando linguagem computacional, o professor elaborou o seguinte fluxograma para explicar o que uma determinada função *f* faz:



De acordo com o fluxograma, qual a imagem de 8,1? E de $\sqrt{2}$?

- Conforme o fluxograma, para cada número racional o resultado é 0 e, para cada número que não é racional (isto é, número irracional), o resultado é 1. Assim, temos:

$f(8{,}1) = 0$, pois 8,1 é um número racional;

$f\left(\sqrt{2}\right) = 1$, pois $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Para explorar

Junte-se a um colega para fazer estas atividades.

1. Tragam para a sala de aula uma conta de consumo de água e uma conta de consumo de energia elétrica. 1. Resposta pessoal.

2. Analisem e expliquem, em forma de função, de quais variáveis a conta do consumo de água é cobrada. 2. Resposta pessoal.

3. Elaborem um quadro e simulem alguns consumos de água e os correspondentes valores cobrados em reais. 3. Resposta pessoal.

4. Analisem e expliquem, em forma de função, de quais variáveis a conta do consumo de energia elétrica é cobrada. 4. Resposta pessoal.

5. Elaborem um quadro e simulem alguns consumos de energia elétrica e os correspondentes valores cobrados em reais. 5. Resposta pessoal.

6. Apresentem aos demais colegas suas conclusões da atividade. Observem atentamente o que os outros colegas apresentam. 6. Resposta pessoal.

7. Façam uma proposta de ações que levem à redução do consumo de energia elétrica na escola. 7. Resposta pessoal.

Atividades

1. Na função cuja lei de formação é $f(r) = \pi \cdot r^2$, *r* representa a medida do raio de um círculo.

a) O que fornece essa lei de formação da função? 1. a) A área do círculo de raio *r*.

b) Qual é o valor de *f*(10) e o que significa? 1. b) 100π. A área do círculo de raio 10 u.c.

c) Qual é o valor de *f*(20) e o que significa? 1. c) 400π. A área do círculo de raio 20 u.c.

d) Duplicando *r*, o que ocorre com o valor da variável dependente *f*(*r*)? 1. d) Quadruplica.

2. Escreva a lei de formação de uma função que transforma:

a) um número *x* no seu cubo. 2. a) $f(x) = x^3$

b) um número *x* no seu quadrado diminuído de 3. 2. b) $f(x) = x^2 - 3$

c) a medida *r* no seu quádruplo. 2. c) $f(r) = 4r$

d) o comprimento ℓ multiplicado pelo número irracional $\sqrt{2}$. 2. d) $f(\ell) = \ell\sqrt{2}$

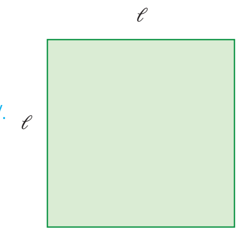
3. Considere que um *DJ* cobre, pelos seus serviços, uma taxa de R$ 300,00 e um adicional de R$ 45,00 por hora trabalhada. Sabendo que V representa o valor total cobrado pelo *DJ* em função do número de horas t trabalhadas, responda ao que se pede.

a) Qual é a lei de formação de V em função de t? 3. a) $V = f(t) = 300 + 45t$

b) Se o *DJ* trabalhar por 5 horas em uma festa, qual é o valor total que ele deve receber? 3. b) R$ 525,00

c) Se o *DJ* recebeu R$ 480,00 em uma festa, qual é o número de horas que ele trabalhou? 3. c) 4 horas

4. Em relação ao quadrado de lado medindo ℓ representado a seguir, indique as afirmações verdadeiras (V) e as afirmações falsas (F).



Acervo editora

I. A medida da diagonal do quadrado pode ser dada por uma função da medida do lado do quadrado. 4. I. V.

II. $f(\ell) = 4\ell$ é a função que representa o perímetro do quadrado de lado medindo ℓ. 4. II. V.

III. A função cuja lei de formação é $f(\ell) = 4\ell\sqrt{2}$ permite calcular a diagonal do quadrado de lado ℓ. 4. III. F.

5. A função $f(x) = |x|$ calcula o módulo do número real x. Diante disso, obtenha:

a) $f(-30)$; 5. a) 30

b) $f(2) + f(-2)$; 5. b) 4

c) o valor de x tal que $f(x) = 4$; 5. c) $x = 4$ ou $x = -4$

d) o valor de x tal que $f(x) = 7\sqrt{2}$ 5. d) $x = 7\sqrt{2}$ ou $x = -7\sqrt{2}$

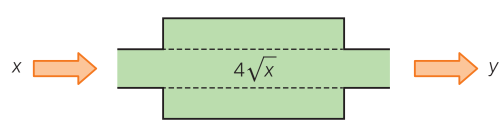
6. Rosa foi contratada como vendedora de produtos de *software*. Em seu contrato está registrado que ela receberá mensalmente um salário fixo de R$ 1.500,00 acrescido de uma comissão de 5% sobre o valor total de vendas feitas no mês.

a) Qual é o salário de Rosa no primeiro mês considerando que ela não vendeu nada? 6. a) R$ 1.500,00

b) No segundo mês de trabalho, Rosa conseguiu realizar um total de vendas de R$ 90.000,00. Qual é o salário recebido por ela nesse segundo mês? 6. b) R$ 6.000,00

c) Se representarmos por S o salário recebido em um mês por Rosa pela venda total de V reais, qual é a expressão que relaciona S em função de V? 6. c) $S = f(V) = 1\,500 + 0{,}05V$

7. Utilizando a "máquina que transforma" um número real não negativo x em outro número real y, o professor elaborou um novo exemplo representado a seguir:



Acervo editora

a) Escreva a lei de formação dessa função expressando y em função de x. 7. a) $y = f(x) = 4\sqrt{x}$

b) Qual é o valor nessa função de $f(4)$? Explique como calculou. 7. b) 8; resposta pessoal

c) Qual é o menor valor possível para x nessa função? 7. c) 0

d) Para quais valores de x tem-se y como um número inteiro? 7. d) Para valores inteiros que são quadrados perfeitos.

e) Se sair o número 40 na máquina, qual é o valor de x que entrou nela? Explique como calculou.
7. e) 100; resposta pessoal

8. Considerando n o número de lados de um polígono convexo e d o total de diagonais que ele admite ligando os vértices dois a dois, a fórmula a seguir fornece d em função de n:

$$d = f(n) = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

a) Calcule $f(4)$ e explique o que significa o valor obtido. 8. a) 2; o número de diagonais de um quadrilátero

b) Se o polígono tem 9 lados, qual é o número total de diagonais que ele admite? 8. b) 27

9. A velocidade média V de um automóvel pode ser obtida pelo quociente entre o espaço percorrido x e o tempo t.

a) Escreva V em quilômetros por hora em função de t em horas correspondentes ao trajeto de 500 km feito por um automóvel. 9. a) $V = f(t) = \frac{500}{t}$

b) Nessas mesmas condições, qual é a velocidade média V do automóvel considerando que ele levou 8 horas para concluir o trajeto? 9. b) 62,5 km/h

Função e teoria dos conjuntos

Vimos que a ideia de função está associada à ideia de relação entre duas grandezas. Utilizando a notação da teoria dos conjuntos, podemos formalizar o conceito de função.

Considere, por exemplo, que os conjuntos A e B sejam formados pelos seguintes elementos:

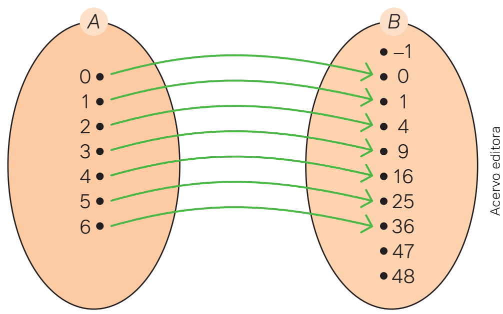
- $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{-1, 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 47, 48\}$

Agora, considere que o quadro a seguir relaciona os elementos desses dois conjuntos da seguinte maneira:

"Cada número do conjunto A está associado ao quadrado do próprio número que pertence a B".

A	0	1	2	3	4	5	6
B	0	1	4	9	16	25	36

Utilizando o diagrama de Venn, podemos representar essa relação da seguinte maneira:



Para pensar e discutir

1. No quadro apresentado, cada valor de B está relacionado ao respectivo valor de A. Qual é essa relação? 1. B é o quadrado do valor correspondente de A.
2. Conforme o diagrama, todo elemento de A está relacionado a algum elemento de B? 2. Sim.
3. Cada elemento de A corresponde a um único elemento em B? 3. Sim.
4. Sendo x um elemento de A e y o correspondente elemento em B, qual a relação matemática existente? 4. $y = x^2$
5. Todo elemento do conjunto B está relacionado algum elemento do conjunto A? 5. Não.

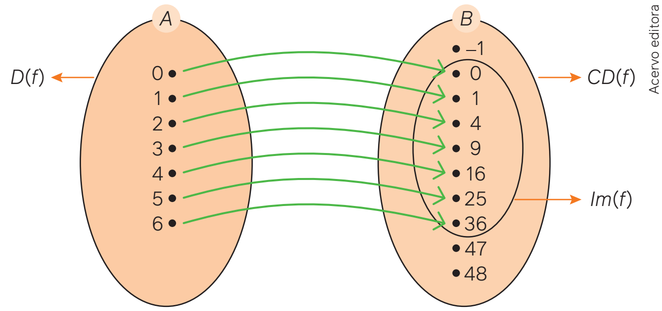
O exemplo apresentado representa uma **função de *A* em *B***, ou seja, uma função que relaciona elementos do conjunto A com elementos do conjunto B.

> Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma **função *f* de *A* em *B*** é uma relação que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Atente-se às observações a seguir.

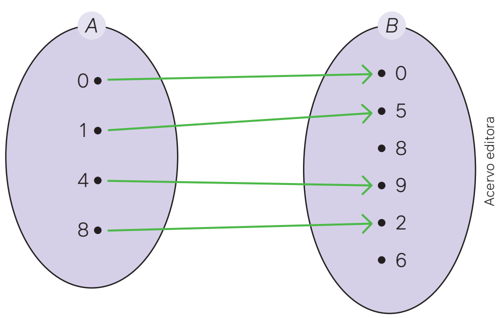
1. Para representar uma função f de A em B, utilizamos a notação: $f{:}A \to B$ (lemos: f é uma função de A em B).
2. Dizemos que y é uma função de x e utilizamos a notação $y = f(x)$, sendo y imagem por meio da função f de x.
3. Em uma função $f{:}A \to B$ o conjunto A é chamado de domínio da função, sendo representado por $D(f)$.
4. Em uma função $f{:}A \to B$ o conjunto B é chamado de contradomínio da função, sendo representado por $CD(f)$.
5. O subconjunto de B, formado apenas pelos valores de y que estão relacionados com os valores de x na função, é conhecido como conjunto imagem da função, sendo representado por $Im(f)$.

Assim, conforme o exemplo apresentado anteriormente, temos:



Atividades resolvidas

6. No diagrama a seguir está representada uma função $f\colon A \to B$. Identifique quais elementos do contradomínio da função pertencem ao conjunto imagem da função.



- O contradomínio é o conjunto $B = \{0, 5, 8, 9, 2, 6\}$. O conjunto imagem é formado apenas pelos valores de B que são imagens dos elementos de A. Assim, temos:

$$Im(f) = \{0, 5, 9, 2\}$$

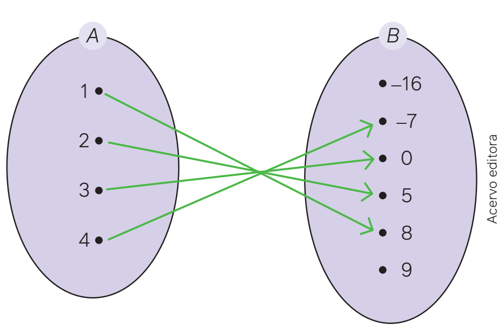
7. A função definida por $f(x) = 9 - x^2$ relaciona elementos de A em B, sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{-16, -7, 0, 5, 8, 9\}$. Represente essa função por meio de um diagrama e indique os elementos do conjunto imagem.

- Calculamos, inicialmente, as imagens dos elementos do conjunto A substituindo-o na lei de formação da função:

$f(1) = 9 - 1^2 = 8$ $\quad$ $f(3) = 9 - 3^2 = 0$

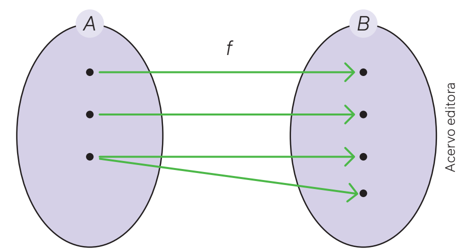
$f(2) = 9 - 2^2 = 5$ $\quad$ $f(4) = 9 - 4^2 = -7$

- Representando no diagrama, temos:



Assim, o conjunto imagem da função é $Im(f) = \{-7, 0, 5, 8\}$.

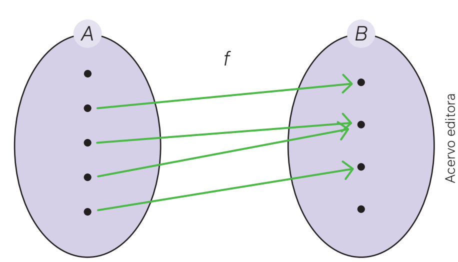
8. O diagrama representado a seguir relaciona elementos do conjunto A com elementos do conjunto B. Entretanto, essa relação não satisfaz o conceito de função. Justifique.



- Considerando, nessa representação, que os pontos são os elementos dos dois conjuntos, para ser função $f\colon A \to B$, conforme conceito, cada elemento de A deve estar relacionado com um único elemento em B.

Assim, a relação entre os elementos não é função, pois existe um elemento de A que está relacionado com dois elementos em B.

9. Explique o motivo de o diagrama a seguir não representar uma função $f\colon A \to B$.

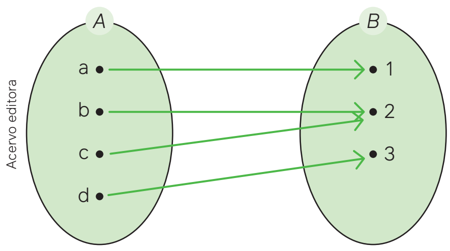


- Considerando, nessa representação, que os pontos são os elementos dos dois conjuntos, para ser função $f\colon A \to B$, conforme conceito, cada elemento de A deve estar relacionado com um único elemento em B.

A relação entre os elementos não é função, pois existe um elemento de A que não está relacionado com algum elemento em B.

Atividades

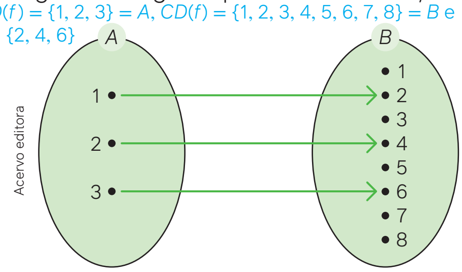
10. O diagrama a seguir representa uma relação entre elementos do conjunto A com elementos do conjunto B.



a) Todos os elementos de A estão relacionados com algum elemento em B? 10. a) Sim.

b) Essa relação representa uma função? Justifique. 10. b) Sim; resposta pessoal.

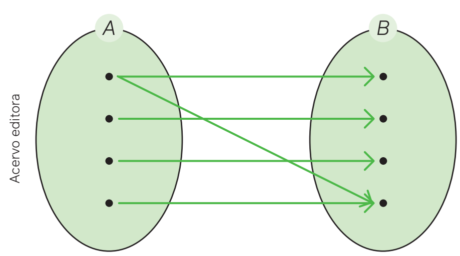
11. O diagrama a seguir representa uma função $f:A \rightarrow B$.
11. a) $D(f) = \{1, 2, 3\} = A$, $CD(f) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = B$ e $Im(f) = \{2, 4, 6\}$



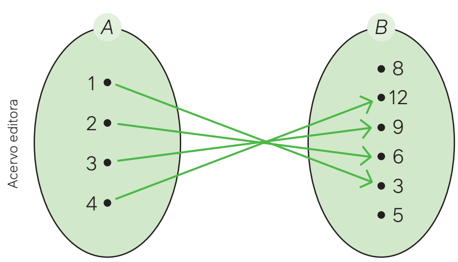
a) Escreva os conjuntos $D(f)$, $CD(f)$ e $Im(f)$.

b) Calcule $f(1) + f(2) + f(3)$. 11. b) 12

12. A relação de A em B abaixo, considerando que os pontos são seus elementos, representa uma função $f:A \rightarrow B$? Justifique. 12. Não; resposta pessoal.



13. O diagrama a seguir representa uma função $f:A \rightarrow B$.



a) Determine, de acordo com o diagrama, $f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$. 13. a) 30

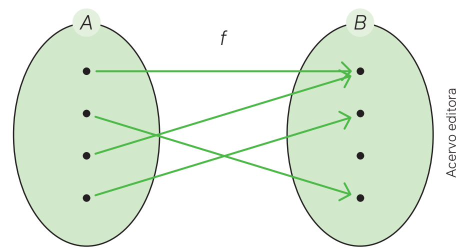
b) Sendo x um elemento de A, escreva a lei de formação dessa função. 13. b) $f(x) = 3x$

14. Existem algumas funções que, conforme suas características, recebem denominações especiais. Assim, temos que:

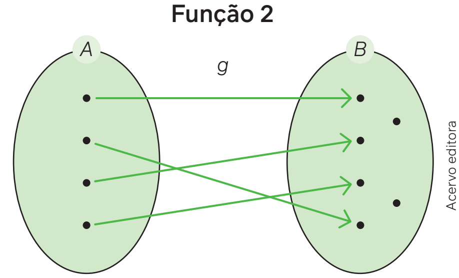
- uma função $f:A \rightarrow B$ é dita **função injetora** quando elementos distintos de A têm imagens distintas em B;
- uma função $f:A \rightarrow B$ é dita **função sobrejetora** quando todos os elementos do contradomínio são imagens de elementos do domínio;
- uma função $f:A \rightarrow B$ é dita **função bijetora** quando for simultaneamente injetora e sobrejetora.

Interpretando esses três conceitos, classifique cada uma das funções conforme os diagramas a seguir.
14. Injetoras: 2 e 4; sobrejetoras: 3 e 4 e bijetoras: 4.

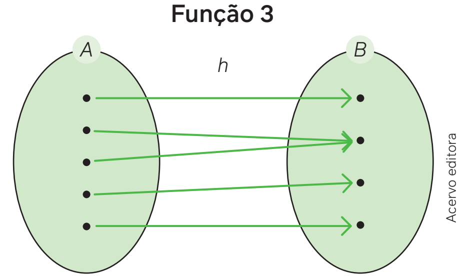
Função 1



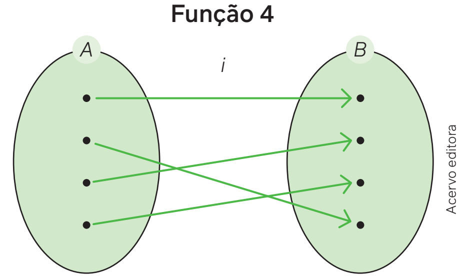
Função 2



Função 3

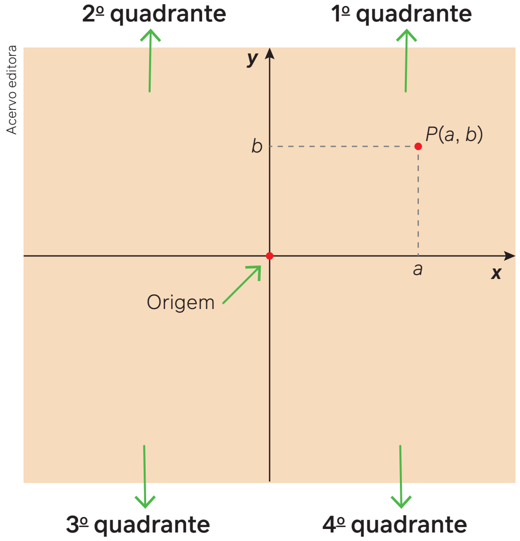


Função 4



Representação de função no plano cartesiano

Quando queremos determinar a localização de um ponto qualquer no plano, utilizamos o chamado **sistema cartesiano ortogonal**. Esse sistema é estabelecido por duas retas perpendiculares entre si que se encontram em um ponto. Esse ponto é denominado **origem** do sistema e as retas são os **eixos coordenados**. Na horizontal, temos o eixo das **abscissas** (valores de x) e, na vertical, o eixo das **ordenadas** (valores de y). Os eixos dividem o plano em quatro partes que são denominadas **quadrantes**. Qualquer ponto do plano pode ser localizado por meio de suas **coordenadas**. Assim, por exemplo, o ponto $P(a, b)$ abaixo tem **coordenadas *a*** e ***b***, em que ***a*** representa o valor da **abscissa** e ***b*** representa o valor da **ordenada**. A origem tem coordenadas (0, 0).



Para pensar e discutir

1. O número real a representa a abscissa do ponto P. Em quais quadrantes as abscissas são positivas? 1. 1º e 4º
2. O número real b representa a ordenada do ponto P. Em quais quadrantes as ordenadas são negativas? 2. 3º e 4º
3. Qual é a condição para que um ponto pertença ao eixo das abscissas? E ao eixo das ordenadas?
3. A ordenada deve ser igual a zero; a abscissa também deve ser igual a zero.

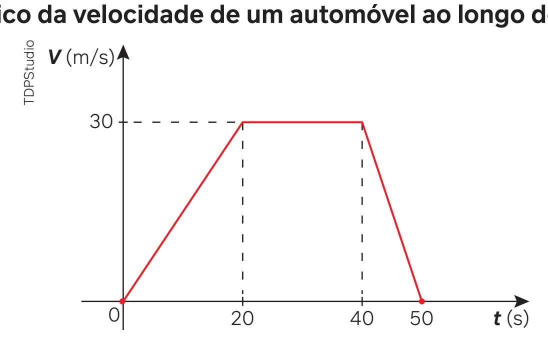
A representação acima deve ser compreendida como um plano que se estende indefinidamente em todas as direções.

Ao retomar, aqui, o conhecimento sobre o plano cartesiano, é importante que você observe que, se a todo par ordenado do plano cartesiano associamos um ponto, reciprocamente, a qualquer ponto do plano cartesiano, associamos um par ordenado.

Gráfico de uma função

A representação gráfica em um plano cartesiano da relação existente entre duas grandezas nos permite analisar com mais detalhes como elas se comportam; daí a importância dessa representação. Para exemplificar, o gráfico a seguir mostra o comportamento de um automóvel em uma rodovia reta nos primeiros 50 segundos.

Gráfico da velocidade de um automóvel ao longo do tempo



Fonte: Dados fictícios.

Para pensar e discutir

1. Quais grandezas estão relacionadas? 1. Velocidade e tempo.
2. Interprete graficamente o que aconteceu com o automóvel nos 20 s iniciais. 2. O automóvel partiu da velocidade zero e atingiu a velocidade de 30 m/s.
3. Em qual trecho o carro desacelerou até parar? 3. Entre 40 s e 50 s.
4. Durante quanto tempo esse carro ficou com a velocidade constante? 4. Durante 20 s.
5. Qual é a velocidade máxima que esse carro atingiu em km/h? Explique como calculou. 5. 108 km/h; resposta pessoal

No gráfico da página anterior, temos a velocidade em função do tempo, pois cada instante, em segundos, no intervalo considerado, corresponde a um único valor da velocidade em metros por segundo. No plano cartesiano, quando representamos o gráfico de uma função que relaciona duas grandezas, a análise do comportamento entre essas duas grandezas é favorecida.

E como se dá a construção do gráfico de uma função?

Se conhecemos a lei de formação da função e o seu domínio, isto é, seu campo de existência, a construção de um gráfico ou mesmo de um esboço do gráfico pode ser feita conforme os passos a seguir.

1. Elaboramos um quadro atribuindo valores de x pertencentes ao domínio da função e obtendo suas imagens em correspondência, isto é, valores de y conforme a lei de formação da função.

2. A cada par ordenado (x, y) obtido, associamos um ponto no plano cartesiano.

3. Se o domínio da função for o conjunto dos números reais e os pontos obtidos forem suficientes, ligamos esses pontos convenientemente conforme a tendência de suas posições.

4. Caso o número de pontos não seja suficiente, precisaremos atribuir mais valores para a variável x obtendo os valores correspondentes para a variável y.

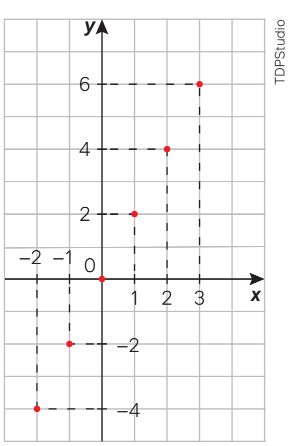
Exemplo:

Vamos construir o gráfico da função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(x) = 2x$.

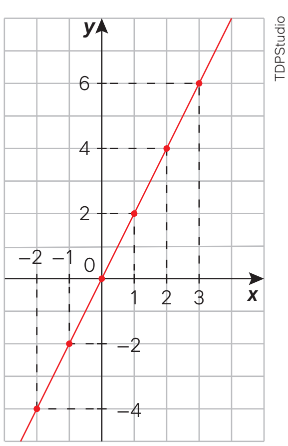
- Como o domínio é real, por comodidade atribuímos valores inteiros a x e dobramos esses valores para obter suas imagens.

x	–2	–1	0	1	2	3
$y = \mathbf{2}x$	–4	–2	0	2	4	6
(x, y)	(–2, –4)	(–1, –2)	(0, 0)	(1, 2)	(2, 4)	(3, 6)

- Então, localizamos os pontos no plano cartesiano:



- Observando que esses pontos estão alinhados e considerando que o domínio é o conjunto dos números reais, ligamos os pontos por meio de uma reta que, nesse caso, representa o gráfico dessa função.



Para pensar e discutir

1. Em relação ao exemplo apresentado, como seria o gráfico se a função fosse $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ com a mesma lei de formação? 1. Resposta no Manual do Professor.

2. E se a função fosse $f:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ com a mesma lei de formação? 2. Resposta no Manual do Professor.

A seguir apresentamos alguns esboços de gráficos de funções. Em todos eles, o domínio é o conjunto dos números reais ou intervalos reais. Por comodidade, os valores que atribuímos à variável x são inteiros, mas os pontos obtidos são ligados seguindo a tendência daqueles encontrados.

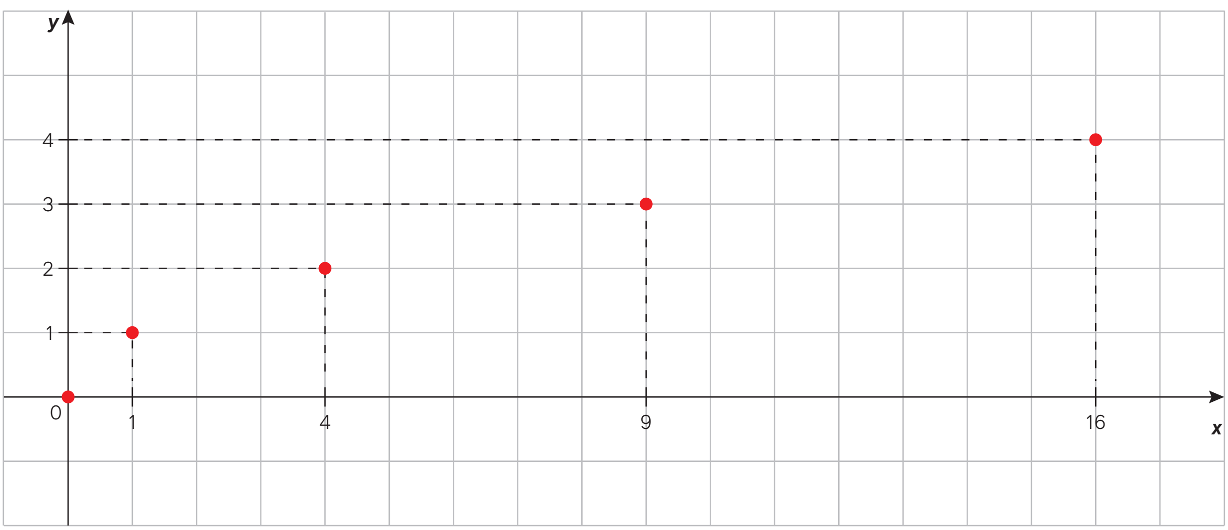
Atividades resolvidas

10. Considere uma função $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela lei de formação $g(x) = \sqrt{x}$. Esboce o gráfico dessa função no plano cartesiano.

- O domínio dessa função é $\mathbb{R}_+$, ou seja, x é um número real não negativo. Assim, devemos atribuir somente valores reais pertencentes ao intervalo $[0, +\infty[$. Como a função "calcula a raiz quadrada", por comodidade atribuímos apenas valores quadrados perfeitos. No quadro a seguir, os valores de y são tais que $y = \sqrt{x}$.

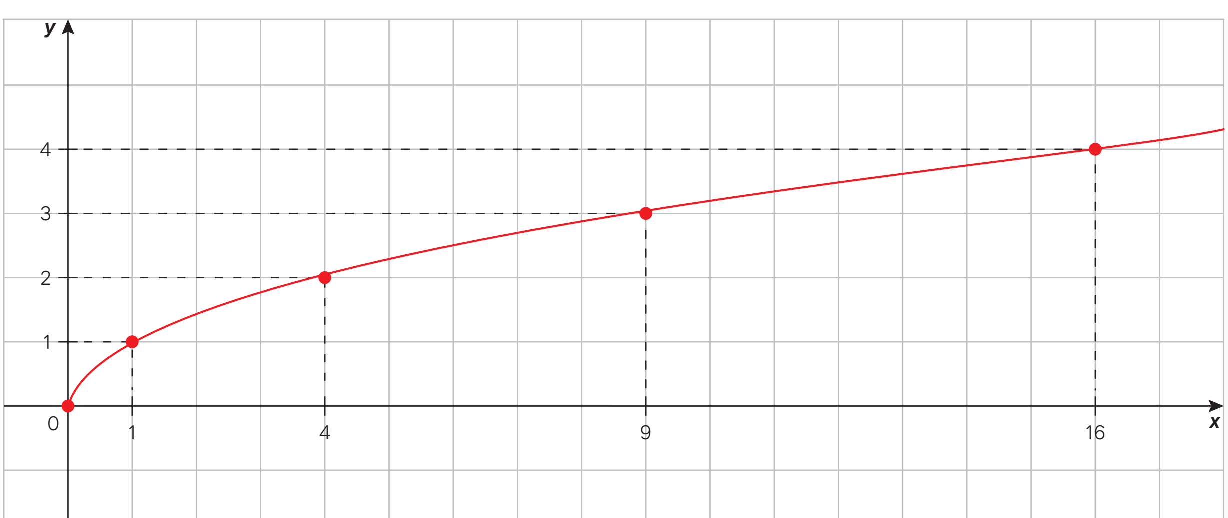
x	0	1	4	9	16
$\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$	0	1	2	3	4
(x, y)	(0, 0)	(1, 1)	(4, 2)	(9, 3)	(16, 4)

- Então, localizamos os pontos correspondentes no plano cartesiano:



TDPStudio

- Considerando que o domínio é formado pelos números reais não negativos e seguindo a tendência das posições ocupadas por esses pontos, traçamos uma curva para esboçar o gráfico da função:



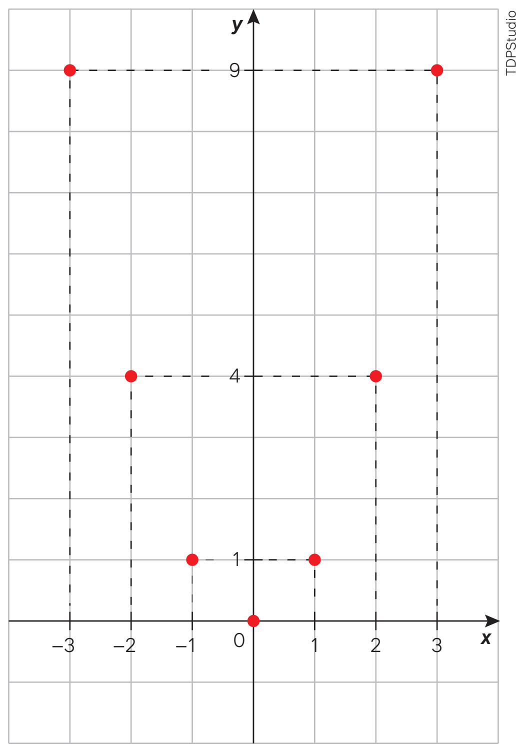
TDPStudio

11. Considere uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei de formação $h(x) = x^2$. Esboce o gráfico dessa função no plano cartesiano.

- O domínio dessa função é $\mathbb{R}$, ou seja, x é um número real. Conforme a lei de formação, a função "calcula o quadrado do valor de x". Assim, por comodidade, atribuímos alguns valores inteiros para x e calculamos os valores correspondentes de y.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = h(x) = x$	9	4	1	0	1	4	9
(x, y)	(–3, 9)	(–2, 4)	(–1, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(2, 4)	(3, 9)

- Então, localizamos os pontos correspondentes no plano cartesiano.



- Esse gráfico está incompleto. Para completá-lo, reproduza-o com os pontos indicados em uma malha quadriculada. Depois, ligue convenientemente os pontos para esboçar a curva correspondente ao gráfico da função.

Para pensar e discutir

Utilize os gráficos anteriores para responder às questões a seguir.

1. Sendo $Im(f)$ o conjunto imagem da função f, como você representa o conjunto imagem da função definida por $f(x) = 2x$? E pela função definida por $g(x) = \sqrt{x}$? E pela função definida por $h(x) = x^2$?
1. $f(x) = 2x$: $Im(f) = \mathbb{R}$; $g(x) = \sqrt{x}$: $Im(g) = \mathbb{R}_+$; $h(x) = x^2$: $Im(h) = \mathbb{R}_+$

2. Qual é imagem de $x = 2$ na função $g(x) = \sqrt{x}$? 2. $\sqrt{2}$

3. Qual é o domínio $D(f)$ da função definida por $f(x) = 2x$? E da função definida por $g(x) = \sqrt{x}$? E da função definida por $h(x) = x^2$? 3. $f(x) = 2x$: $D(f) = \mathbb{R}$; $g(x) = \sqrt{x}$: $D(g) = \mathbb{R}_+$; $h(x) = x^2$: $D(h) = \mathbb{R}$

4. Observando as três funções, $f(x) = 2x$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = x^2$, em quais delas quaisquer valores diferentes no domínio (valores de x) sempre correspondem a imagens diferentes (valores de y)? 4. $f(x) = 2x$ e $g(x) = \sqrt{x}$

Análise e contexto

Usando *software* de geometria dinâmica

Leia o texto a seguir para conhecer o *software* de geometria dinâmica.

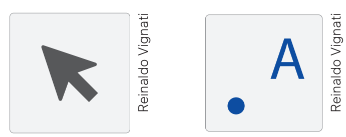
Os *softwares* de geometria dinâmica consistem em um programa que, em um ambiente virtual, possibilita o estudo da Geometria simulando o uso de régua e compasso. A principal característica desse ambiente é a possibilidade de movimentar as figuras representadas mantendo algumas características determinadas.

Existem diferentes programas que podem ser usados no trabalho com geometria dinâmica, e algumas versões estão disponíveis na internet sem necessidade de instalação do *software*. Apesar dessa variedade, todos eles têm funcionalidades comuns necessárias para as construções geométricas.

Apresentamos, a seguir, algumas ferramentas que permitem a construção de figuras geométricas bem como de gráficos de funções.

Duas ferramentas são básicas para qualquer construção. A ferramenta **seta** possibilita selecionar e mover pontos, retas, figuras ou construções inteiras. A ferramenta **ponto** pode ser usada para criar pontos diretamente no plano cartesiano, basta selecioná-la e clicar no lugar do plano em que o ponto deve ser criado; dessa maneira, automaticamente são atribuídos um nome e suas coordenadas ao ponto.

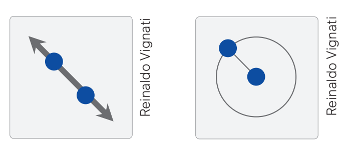
Exemplos de ícones para as ferramentas **seta** e **ponto**:



Reinaldo Vignati

Utilizando as ferramentas principais, **reta** e **círculo**, pode-se fazer qualquer construção geométrica, pois elas simulam a régua e o compasso. A ferramenta **círculo**, dependendo do *software* utilizado, também pode vir indicada como “circunferência” ou “compasso”.

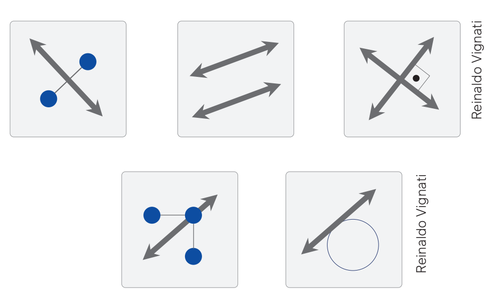
Exemplo de ícones para as ferramentas **reta** e **círculo**:



Reinaldo Vignati

Há, ainda, outras ferramentas que facilitam construções geométricas básicas, como **reta perpendicular**, **reta paralela**, **bissetriz**, **mediatriz**, **reta tangente** etc. Além dessas funcionalidades, outra categoria importante de ferramentas é a de medições de **ângulos**, **comprimentos** e **áreas**.

Exemplo de ícones das ferramentas **reta perpendicular**, **reta paralela**, **mediatriz**, **bissetriz** e **reta tangente**:

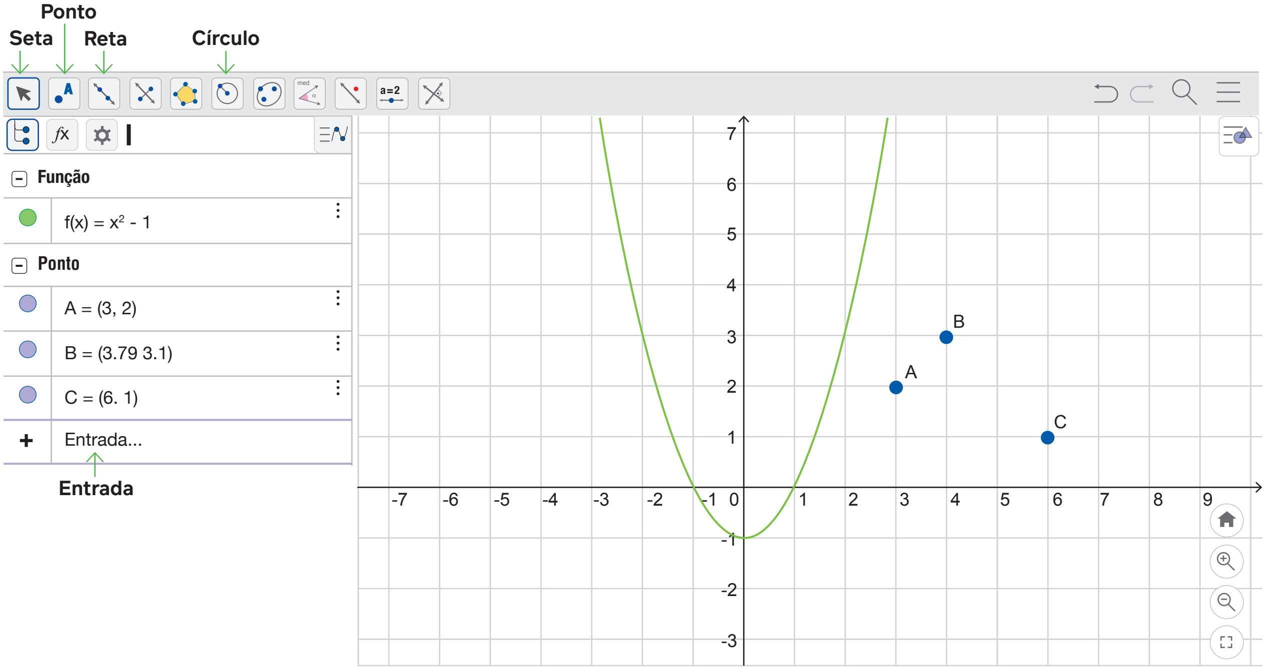


Reinaldo Vignati

Exemplo de ícones das ferramentas para **ângulo**, **comprimento** e **área**:

Reinaldo Vignati

O uso da caixa **entrada** também é relevante quando, por exemplo, é necessário determinar a localização de um ponto por meio de suas coordenadas. Nesse caso, é suficiente digitar na **entrada** o valor x da abscissa e o valor y da ordenada no formato (x, y). Além disso, pode-se obter a representação gráfica de funções no plano cartesiano com base em sua representação algébrica. Para representar o gráfico de $f(x) = x^2 - 1$, basta digitar a expressão = x^2 – 1 no campo **entrada**. Observe.



Reinaldo Vignati

Em geral, nos programas de computador, para indicar uma potência, utiliza-se o acento circunflexo (^). Assim, x^2 é indicado por x^2; 10^3 por 10^3 etc. A multiplicação é representada pelo asterisco (*) e a divisão pela barra (/).

1. Procure se ambientar com o *software* de geometria dinâmica escolhido. Depois, faça o que se pede.

Construção 1 1. Construção 1 Resposta no Manual do Professor.

A reta tangente a uma circunferência cujo raio tem 5 unidades de comprimento e o centro está no ponto (1, 5).

- Crie o ponto $A(1, 5)$ clicando no ponto (1, 5) do plano cartesiano com o botão **ponto** ativado.
- Com a ferramenta **círculo dados centro e raio**, clique no ponto A e insira o valor 5 na caixa que se abre.
- Para criar a reta tangente a essa circunferência, basta selecionar o botão **reta tangente** e clicar em um dos pontos da circunferência obtida anteriormente.

Construção 2 1. Construção 2 Resposta no Manual do Professor.

Construa o gráfico da função definida por $f(x) = 2x^2 - 1$ exemplificado no texto acima.

Construção 3

Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções que já foram esboçadas neste capítulo:

a) $f(x) = 2x$; 1. Construção 3 a) Resposta no Manual do Professor.

b) $g(x) = \sqrt{x}$; 1. Construção 3 b) Resposta no Manual do Professor.

c) $h(x) = x^2$. 1. Construção 3 c) Resposta no Manual do Professor.

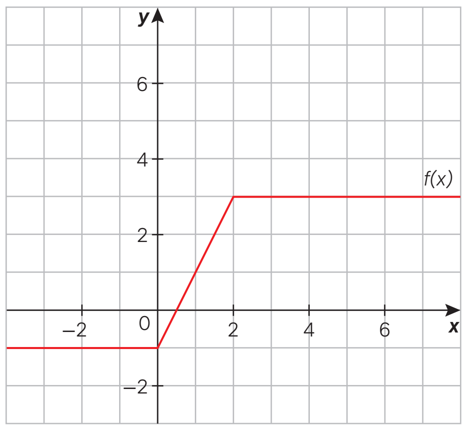
Faça comparações com os esboços gráficos apresentados no livro.

Construção 4 1. Construção 4 Resposta no Manual do Professor.

Elabore uma lei de formação de uma função e, depois, apresente-a a um colega. Solicite que ele construa, com o auxílio do *software* escolhido, o gráfico correspondente. Construa o gráfico da lei que seu colega elaborar.

Atividades

15. No plano cartesiano a seguir, foi representada parte de uma função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



TDPStudio

Determine:

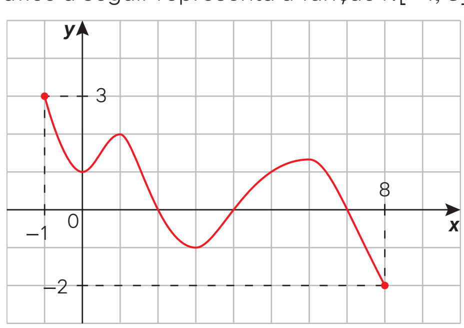
a) $f(0)$; 15. a) –1

b) $f(2)$; 15. b) 3

c) $f(-2)$; 15. c) –1

d) $f(3) + f(4) + f(-2) + f(-3)$. 15. d) 4

16. O gráfico a seguir representa a função $f:[-1, 8] \to \mathbb{R}$.



TDPStudio

a) Escreva, utilizando intervalo real, o conjunto imagem dessa função. 16. a) $Im(f) = [-2, 3]$

b) Conforme o gráfico, indique os valores de $f(-1)$, $f(0)$ e $f(8)$. 16. b) $f(-1) = 3$; $f(0) = 1$; $f(8) = -2$

c) Para quais valores de x tem-se, conforme o gráfico, que $f(x) = 0$? 16. c) $x = 2$, $x = 4$ e $x = 7$

d) Para quais valores de x tem-se, conforme o gráfico, $f(x) < 0$? 16. d) $x \in]2, 4[$ ou $x \in]7, 8]$

17. Em uma malha quadriculada, faça o esboço gráfico da função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(x) = x$. Em seguida, responda ao que se pede.

a) Como você descreveria todos os pontos que pertencem ao gráfico dessa função? 17. a) Resposta pessoal.

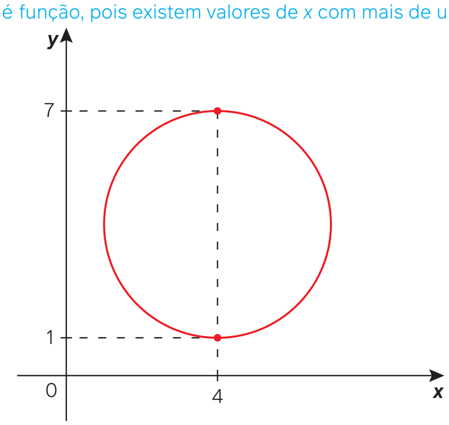
b) Quantas vezes o gráfico dessa função intercepta o eixo das ordenadas? 17. b) Uma vez.

c) Para qual valor de x tem-se $f(x) = 0$? 17. c) $x = 0$

d) Para quais valores de x tem-se $f(x) > 0$? 17. d) $x > 0$

e) Para quais valores de x tem-se $f(x) < 0$? 17. e) $x < 0$

18. Conforme a definição de função, para cada valor do domínio deve-se ter um só valor no contradomínio. Avalie, justificando, se a relação representada no plano cartesiano a seguir é uma função $y = f(x)$.
18. Não é função, pois existem valores de x com mais de uma imagem.



TDPStudio

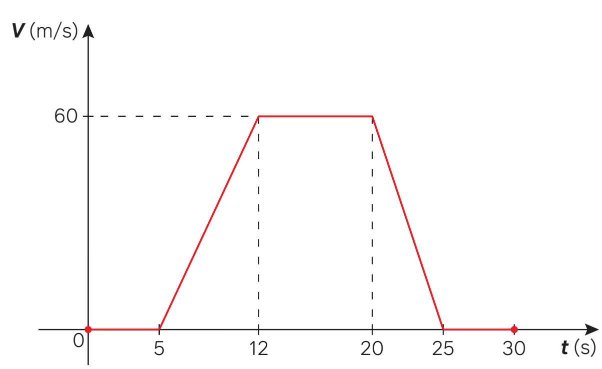
19. Considere que uma função real $f:[-2, 2] \to \mathbb{R}$ tenha a lei de formação $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

a) Indique qual é o domínio dessa função. 19. a) $D(f) = [-2, 2]$

b) Esboce o gráfico dessa função em um plano cartesiano. 19. b) Resposta no Manual do Professor.

c) Indique qual é o conjunto imagem dessa função. 19. c) $Im(f) = [0, 2]$

20. Um professor de Física elaborou o esboço de um gráfico da velocidade de um automóvel em função do tempo no intervalo de 30 s. Veja o gráfico que ele esboçou.



TDPStudio

Sobre essa situação, indique, entre as afirmações a seguir, quais são verdadeiras e quais são falsas.

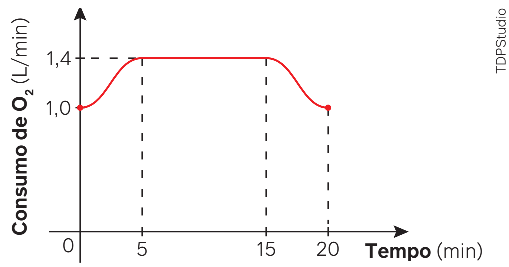
I. O automóvel permaneceu parado nos primeiros 5 segundos analisados. 20. I. Verdadeira.

II. A velocidade que o automóvel atingiu no instante 10 s voltou a ser atingida entre os instantes 20 s e 25 s. 20. II. Verdadeira.

III. Entre os instantes 12 s e 20 s a velocidade do automóvel variou. 20. III. Falsa.

IV. O automóvel não se movimentou entre os instantes 12 s e 20 s. 20. IV. Falsa.

21. Considere que o gráfico abaixo representa, de forma aproximada, o consumo de oxigênio de uma pessoa que se exercita, em condições aeróbicas, em uma bicicleta ergométrica.

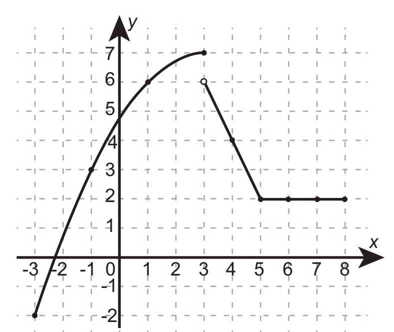


Considerando que o organismo dessa pessoa libera, em média, 4,8 kcal para cada litro de oxigênio absorvido, calcule a energia liberada no período entre 5 e 15 minutos, em kcal. 21. 67,2 kcal

22. (UFJF-MG) No plano cartesiano está representado o gráfico da função f:[–3,8] → [–2,7], no qual os pontos pretos destacados são os pontos em que o gráfico passa sobre os cruzamentos da malha.

Seja $k = f(-3) + f(-1) + f(3) - f(4) + f(5)$. O valor de x para o qual $f(x) = k$ é

22. Alternativa **e**.



a) 7

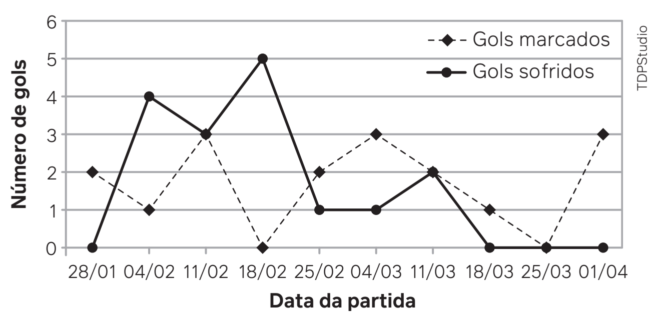
b) 6

c) 3

d) 2

e) 1

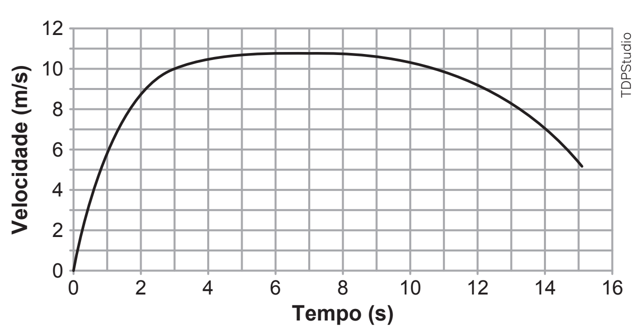
23. (Enem) No gráfico a seguir estão representados os gols marcados e os gols sofridos por uma equipe de futebol nas dez primeiras partidas de um determinado campeonato.



Considerando que, neste campeonato, as equipes ganham 3 pontos para cada vitória, 1 ponto por empate e 0 ponto em caso de derrota, a equipe em questão, ao final da décima partida, terá acumulado um número de pontos igual a: 23. Alternativa **c**.

a) 15 **b)** 17 **c)** 18 **d)** 20 **e)** 24

24. (Enem) Em uma prova de 100 m rasos, o desempenho típico de um corredor padrão é representado pelo gráfico a seguir:



Baseado no gráfico, em que intervalo de tempo a velocidade do corredor é aproximadamente constante?

24. Alternativa **c**.

a) Entre 0 e 1 segundo.

b) Entre 1 e 5 segundos.

c) Entre 5 e 8 segundos.

d) Entre 8 e 11 segundos.

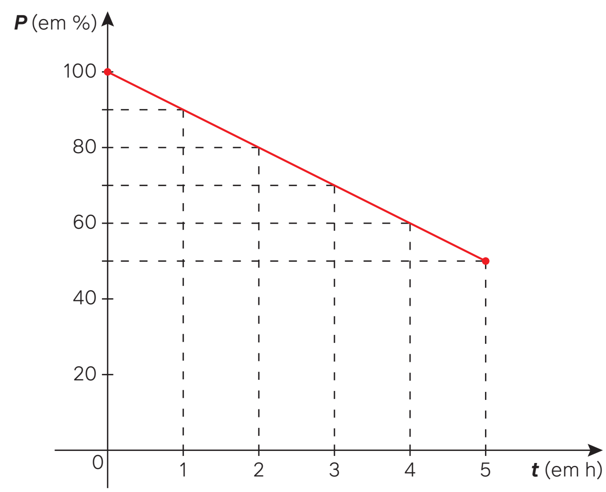
e) Entre 12 e 15 segundos.

Função afim

2

Um técnico percebeu que a bateria de um determinado aparelho elétrico descarrega percentualmente em função do tempo, conforme representação por meio de função. Examinando os percentuais durante um período de cinco horas, notou que o gráfico correspondente seguia uma linha reta, segundo o esboço que ele fez da função *P* (percentual) dependente do tempo *t* (em horas):

Reinaldo Vignati



TDPStudio

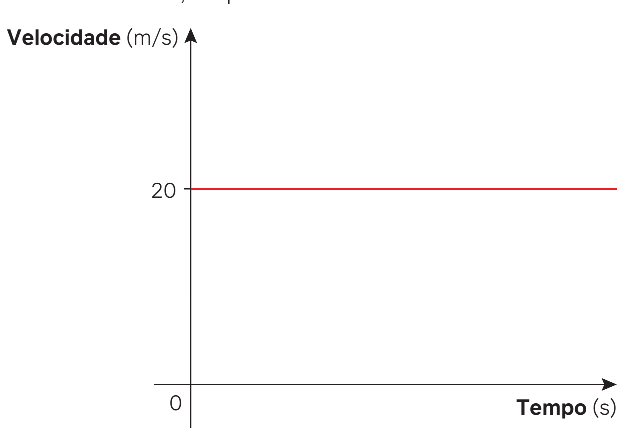
Para pensar e discutir

1. Para $t = 0$, segundo o gráfico, qual é o percentual de bateria existente? 1. 100%
2. Em quanto tempo a bateria passa a ter a carga de 80%? 2. 2 h
3. A cada duas horas o que acontece, conforme o gráfico, com o nível de bateria? E a cada hora? 3. A cada duas horas é reduzido em 20 pontos percentuais; a cada hora é reduzido em 10 pontos percentuais.
4. Mantendo as condições do gráfico, em quanto tempo a bateria estará descarregada? Explique. 4. 10 h; resposta pessoal

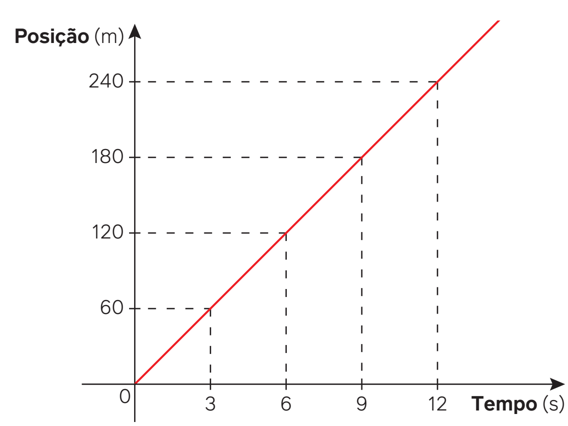
Existem situações em que as grandezas envolvidas têm o comportamento gráfico descrito por meio de pontos alinhados ou por semirretas ou, ainda, quando o domínio é o conjunto dos números reais, por retas representadas no plano cartesiano.

Exemplo:

Em um movimento uniforme, um móvel se desloca a uma velocidade constante de 20 m/s. Os gráficos da velocidade em função do tempo, e da posição desse móvel em função do tempo, são descritos no plano cartesiano por duas semirretas, respectivamente. Observe.



TDPStudio



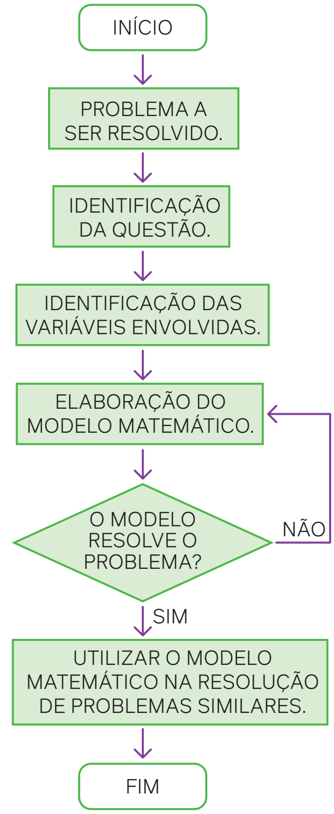
TDPStudio

Tais situações fazem parte do estudo de função afim que aqui iniciamos.

Conceito de função afim

Você já ouviu falar em modelagem matemática?

De forma simplificada, tudo se inicia com uma situação-problema a ser resolvida. A partir dessa situação, a Matemática procura interpretar criando modelos que a descrevem. Observe o fluxograma.



Acervo editora

A situação descrita anteriormente, sobre a diminuição da carga da bateria em função do tempo, pode ser modelada por meio de uma função afim.

> Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada função afim quando existem dois números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$ para todo x real.

Atente-se às observações a seguir.

1. Na função afim, x é a variável independente e y é a variável dependente, tal que $y = f(x) = ax + b$.

2. Os números reais a e b são chamados de coeficientes da função.

3. Convencionamos, aqui, que a função afim é definida como $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, domínio e contradomínio sendo o conjunto dos reais. Em situações diferentes, especificaremos quais são o domínio e o contradomínio.

Exemplos:

- $f(x) = 2x - 10 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -10 \end{cases}$
- $f(x) = 8x \rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 0 \end{cases}$
- $f(x) = -4x + 15 \rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 15 \end{cases}$
- $f(x) = 20 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 20 \end{cases}$

Atividades resolvidas

12. Dada a função afim definida por $f(x) = 3x - 2$, calcule o valor da expressão $E = f(4) + f(11)$.

- O valor numérico em uma função é obtido substituindo a variável x na lei de formação da função:

$$E = f(4) + f(11)$$
$$E = (3 \cdot 4 - 2) + (3 \cdot 11 - 2)$$
$$E = 12 - 2 + 33 - 2 \Rightarrow E = 41$$

13. Determine a lei de formação de uma função afim considerando que $f(1) = 5$ e $f(-2) = 15$.

- Inserimos os dois valores dados na lei de formação $f(x) = ax + b$ para obter duas equações nas incógnitas a e b:

$$f(x) = ax + b$$
$$f(1) = a \cdot 1 + b$$
$$5 = a + b$$
$$f(-2) = a \cdot (-2) + b \Rightarrow 15 = -2a + b$$

- Resolvemos o sistema formado pelas duas equações isolando b em função de a na primeira equação, e substituindo-o na segunda equação para obter o valor de a:

$$\begin{cases} 5 = a + b \Rightarrow 5 - a = b \\ 15 = -2a + b \end{cases}$$

$$15 = -2a + 5 - a$$
$$10 = -3a \Rightarrow a = -\frac{10}{3}$$

- Para obter o valor de b, substituímos o valor de a em uma das duas equações (aqui, optamos pela primeira):

$$5 - a = b$$
$$5 - \left(-\frac{10}{3}\right) = b \Rightarrow \frac{15 + 10}{3} = b \Rightarrow b = \frac{25}{3}$$

Portanto, a lei de formação da função é $f(x) = -\frac{10}{3}x + \frac{25}{3}$

14. (Enem) Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$ 1.200,00 por hectare plantado, e vendia por R$ 50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg, e todas as sacas foram vendidas.

Qual é a expressão que determinou o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano?

a) $L(x) = 50x - 1\,200$

b) $L(x) = 50x - 12\,000$

c) $L(x) = 50x + 12\,000$

d) $L(x) = 500x - 1\,200$

e) $L(x) = 1\,200x - 500$

- O lucro L é a receita menos o custo. A receita é a quantia arrecadada com a venda de x sacas ao preço de R$ 50,00. Como o custo por hectare é de R$ 1 200,00 e são 10 hectares:

$$\text{Lucro} = \text{Receita} - \text{Custo}$$
$$L(x) = 50 \cdot x - 10 \cdot 1\,200$$
$$L(x) = 50x - 12\,000$$

Portanto, o lucro é modelado pela lei de formação $L(x) = 50x - 12\,000$. Alternativa **b**.

Para pensar e discutir

1. Como você resolveria, de outra maneira, o sistema apresentado na resolução da **atividade 13**? 1. Resposta pessoal.

2. Na expressão obtida na **atividade 14**, que fornece o lucro $L(x)$, qual é o valor mínimo de x para que não haja prejuízo? 2. 240

Atividades

25. Dada a função afim definida no conjunto dos números reais por $f(x) = -2x + 5$, obtenha:

a) $f(4)$. 25. a) –3

b) $f(0)$. 25. b) 5

c) o valor de x tal que $f(x) = 0$. 25. c) 2,5

d) o valor de x tal que $f(x) = 2$. 25. d) 1,5

26. Obtenha a lei de formação de cada função afim $f(x) = ax + b$ em cada caso.

a) A função é tal que $f(3) = 10$ e $f(5) = 10$. 26. a) $f(x) = 10$

b) A função é tal que $f(4) = 15$ e $f(8) = 30$. 26. b) $f(x) = 3{,}75x$

c) A função é tal que $f(0) = 7$ e $f(2) = 21$. 26. c) $f(x) = 7x + 7$

27. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = 4x$. Sobre essa função, considere as afirmações a seguir.

I. Triplicando o valor de x, também triplica-se, em correspondência, o valor de y, imagem de x. 27. I. Verdadeira.

II. Duplicando o valor de x, também duplica-se, em correspondência, o valor de y, imagem de x. 27. II. Verdadeira.

III. Para $x = 0$ tem-se $f(x) = 0$. 27. III. Verdadeira.

Indique quais afirmações são verdadeiras e quais são falsas.

28. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = 4x - 3$. Sobre essa função, considere as afirmações a seguir.

I. Triplicando o valor de x, também triplica-se, em correspondência, o valor de y, imagem de x. 28. I. Falsa.

II. Duplicando o valor de x, também duplica-se, em correspondência, o valor de y, imagem de x. 28. II. Falsa.

III. Para $x = 0$ tem-se $f(x) = 0$. 28. III. Falsa.

Indique quais afirmações são verdadeiras e quais são falsas.

29. Uma função afim tem a lei de formação $f(x) = ax + b$. Para exemplificar, o professor escreveu na lousa a lei de formação da seguinte função afim: $f(x) = 25$.

a) Conforme essa lei de formação da função, quais são os valores de a e b? 29. a) $a = 0$ e $b = 25$

b) O que acontece nessa função com os valores de $y = f(x)$ à medida que atribuímos quaisquer valores reais a x? 29. b) y é sempre igual a 25

30. Um reservatório de água tem capacidade para 10 000 L e está completamente cheio. Um ralo é aberto para esvaziá-lo. A quantidade de água no reservatório diminui a uma taxa de 200 L por minuto. Com base nessas informações, faça o que se pede.

a) Sendo $Q(t)$ a quantidade de água em litros no reservatório em função do tempo t em minutos, obtenha a lei de formação dessa função. 30. a) $Q(t) = 10\,000 - 200t$

b) Calcule em quanto tempo o reservatório estará com 5 000 L após a abertura do ralo. 30. b) 25 min

c) Após a abertura do ralo, em quanto tempo o reservatório estará completamente vazio? 30. c) 50 min

31. Luana comprou um carro novo no valor de R$ 150.000,00. Com 4 anos de uso, esse carro passou a ser avaliado por R$ 90.000. Considerando que o valor do carro V (em reais) em função do tempo de uso t (em anos) pode ser modelado por uma função afim, determine:

a) a lei de formação dessa função. 31. a) $V(t) = 150.000 - 15.000t$

b) o valor desse carro 5 anos após ser comprado. 31. b) R$ 75.000,00

32. Em uma pequena confecção de roupas, o custo fixo mensal com contas de água, energia elétrica e salário de funcionários é de R$ 21.000,00. Além desse custo fixo, cada peça de roupa produzida tem um custo de R$ 16,00. Considerando que cada peça é vendida por R$ 30,00, determine o que se pede.

a) Escreva a lei de formação da função que fornece o lucro mensal L (valor total de venda menos o custo total) na confecção e venda de x peças de roupa. 32. a) $L(x) = 14x - 21\,000$

b) Se forem fabricadas e vendidas 1 000 peças no mês, haverá lucro ou prejuízo? De qual valor? 32. b) Prejuízo; R$ 7.000,00

c) Qual é o número de peças de roupas produzidas a partir do qual não haverá prejuízo? 32. c) 1 500

33. (UEA-AM) Uma pequena empresa que fabrica camisetas verificou que o lucro obtido com a venda de seus produtos obedece à função $L(x) = 75x - 3\,000$, sendo $L(x)$ o lucro em reais e x o número de camisetas vendidas $40 < x \leqslant 120$. Para que o lucro da empresa chegue a R$ 4.000,00, o menor número de camisetas a serem vendidas é: 33. Alternativa **d**.

a) 97

b) 96

c) 95

d) 94

e) 93

34. (Cefet-MG) Um motorista de táxi cobra, para cada corrida, uma taxa fixa de R$ 5,00 e mais R$ 2,00 por quilômetro rodado. O valor total arrecadado R em um dia é função da quantidade total x de quilômetros percorridos e calculado por meio da função $R(x) = ax + b$, em que a é o preço cobrado por quilômetro e b, a soma de todas as taxas fixas recebidas no dia. Se, em um dia, o taxista realizou 10 corridas e arrecadou R$ 410,00, então a média de quilômetros rodados por corrida foi de: 34. Alternativa **c**.

a) 14

b) 16

c) 18

d) 20

35. (IFPE) Os alunos do curso de mecânica e química do Campus Recife estão juntos desenvolvendo um novo combustível. Matheus ficou encarregado de observar o consumo no uso de um motor. Para isso, ele registrou a seguinte tabela:

Rotações do motor por minuto	2000	3000	4000	5000	6000
Quantidade de combustível consumida (mL)	30	35	40	45	50

A expressão algébrica que representa a quantidade Q de combustível consumido para um número R de rotações por minuto é 35. Alternativa **a**.

a) $Q = \dfrac{1}{200}R + 20$

b) $Q = \dfrac{1}{1000}R + 30$

c) $Q = 30R + 2\,000$

d) $Q = R + 1\,970$

e) $Q = 0{,}5R + 20$

36. (Ifal) Os pontos do plano cartesiano de coordenadas (2, 2) e (4, −2) pertencem ao gráfico de uma função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$. Qual o valor de $a + b$? 36. Alternativa **c**.

a) 0

b) 2

c) 4

d) 6

e) 8

37. (Ulbra-RS) Uma empresa gasta R$ 2,60 para produzir uma unidade de um produto. Além disso, possui uma despesa fixa de R$ 8.000,00, independente do número de unidades produzidas. Sabendo que o preço de venda de cada unidade é R$ 5,10, quantas unidades, no mínimo, a empresa deve vender para começar a obter lucro? 37. Alternativa **a**.

a) 3 200

b) 3 077

c) 1 569

d) 1 039

e) 1 100

38. (Enem) Ao alugar um carro, o locatário precisa pagar R$ 60,00 por dia, e mais R$ 1,50 por quilômetro rodado. Para facilitar, as locadoras podem fazer uma relação entre o valor a ser pago P, em reais, em função dos quilômetros rodados, representado por x.
Qual das expressões abaixo representa o valor pago pelos locatários em função dos quilômetros rodados? 38. Alternativa **c**.

a) $P = 61{,}50 + 1{,}5x$

b) $P = 60x + 1{,}50$

c) $P = 60 + 1{,}5x$

d) $P = 61{,}50x$

e) $P = 1{,}50x$

Gráfico de uma função afim

Vimos que, para construir o gráfico de uma função f dada a partir da lei de formação da função, atribuímos valores a x e obtemos valores para y. Considerando que cada par ordenado (x, y) corresponde a um ponto no plano, podemos obter o gráfico correspondente se conhecermos alguns pontos.

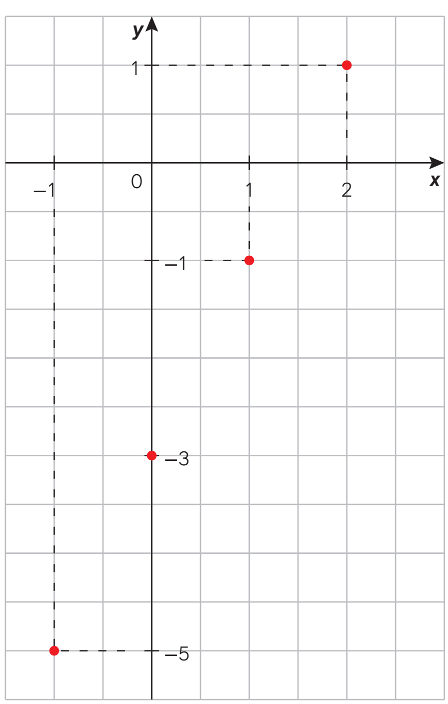
Exemplo:

Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(x) = 2x - 3$, para obter um esboço do gráfico, basta seguir as etapas abaixo.

Elaboramos um quadro atribuindo valores inteiros (por comodidade) à variável x e obtendo, conforme a lei de formação da função, os correspondentes valores de y:

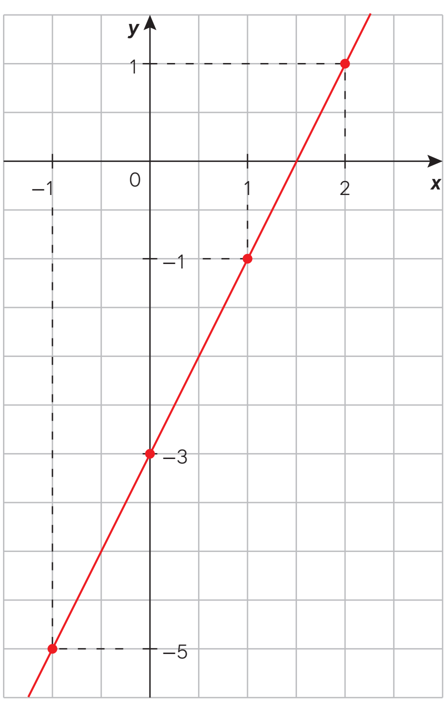
x	$y = 2x - 3$	(x, y)
–1	–5	(–1, –5)
0	–3	(0, –3)
1	–1	(1, –1)
2	1	(2, 1)

- Como cada par ordenado corresponde a um ponto no plano cartesiano, indicamos esses pontos conforme os pares ordenados obtidos.



TDPStudio

- Como o domínio é o conjunto dos números reais, ligamos esses pontos convenientemente, observando a tendência de suas posições.



TDPStudio

Para pensar e discutir

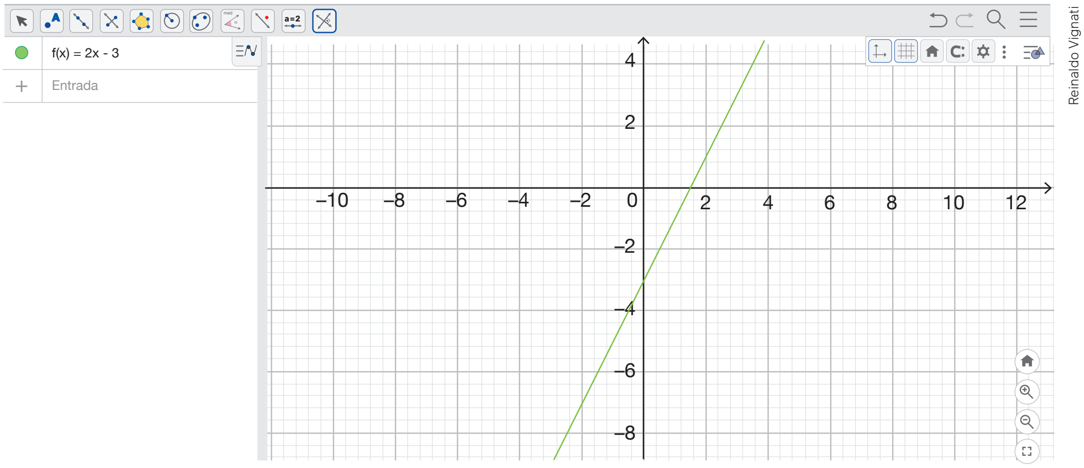
1. No quadro anterior, os valores atribuídos a x aumentam de 1 em 1. O que ocorre com suas imagens em correspondência? 1. Aumentam de 2 em 2.

2. Na função, conforme gráfico, aumentando-se x é correto afirmar que y aumenta também? 2. Sim.

3. E se diminuirmos os valores de x nessa função, o que ocorrerá com os correspondentes valores de y? 3. Diminuirão.

Outra maneira de construirmos o gráfico de uma função afim é utilizando um *software* de geometria dinâmica. Observe, a seguir, o mesmo exemplo da página anterior.

- O gráfico da função real definida por $f(x) = 2x - 3$ foi construído com auxílio do *software*.



Justificaremos mais adiante, ainda neste capítulo, como os gráficos das funções afim, com o domínio no conjunto dos números reais, são “retas”. Agora, observe como são construídos alguns esboços gráficos de funções na forma $f(x) = ax + b$. Para isso, encontramos dois pontos no plano cartesiano e construímos uma reta contendo os dois.

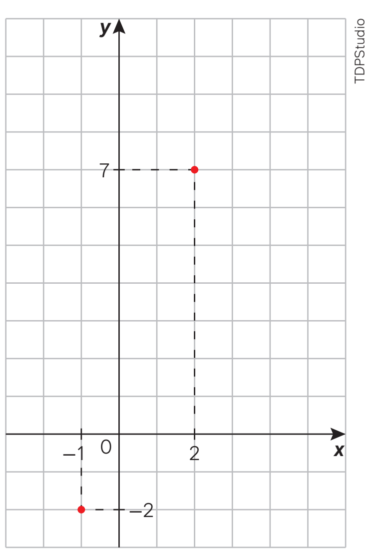
Atividades resolvidas

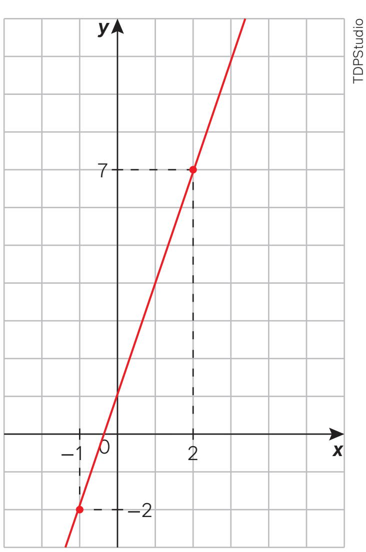
15. Construa o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(x) = 3x + 1$.

- Elaboramos um quadro atribuindo dois valores inteiros (por comodidade) à variável x para obter, conforme a lei de formação da função, os correspondentes valores de y:

x	$y = 3x + 1$	(x, y)
–1	–2	(–1, –2)
2	7	(2, 7)

- Localizamos os dois pontos correspondentes aos pares ordenados e, depois, traçamos a reta passando por eles:



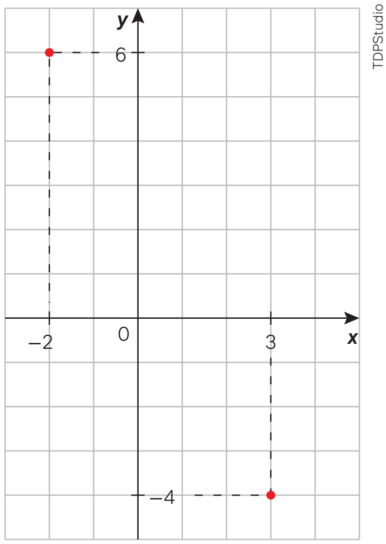


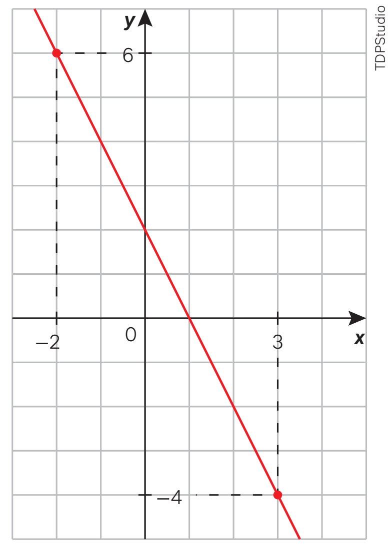
16. Construa o gráfico da função $g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $g(x) = -2x + 2$.

- Elaboramos um quadro atribuindo dois valores inteiros (por comodidade) à variável x para obter, conforme a lei de formação da função, os correspondentes valores de y:

x	$y = -2x + 2$	(x, y)
–2	6	(–2, 6)
3	–4	(3, –4)

- Localizamos os dois pontos correspondentes aos pares ordenados e, depois, traçamos a reta passando por eles:



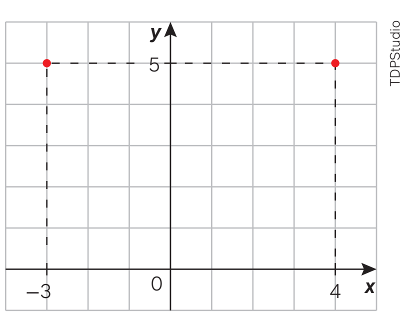


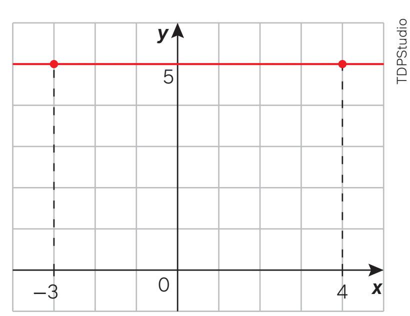
17. Construa o gráfico da função $h:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $h(x) = 5$.

- Elaboramos um quadro atribuindo dois valores inteiros (por comodidade) à variável x para obter, conforme a lei de formação da função, os correspondentes valores de y:

x	$y = 5$	(x, y)
–3	5	(–3, 5)
4	5	(4, 5)

- Localizamos os dois pontos correspondentes aos pares ordenados e, depois, traçamos a reta passando por eles:





Para pensar e discutir

Em relação às funções e gráficos apresentados nas atividades 15, 16 e 17, responda ao que se pede.

1. Em qual função, ao aumentarmos o valor de x, os valores correspondentes de y sempre aumentam? 1. $f(x) = 3x + 1$
2. Em qual delas, ao aumentarmos o valor de x, os valores correspondentes de y diminuem? 2. $g(x) = -2x + 2$
3. Em qual delas o conjunto imagem é formado por um só valor de y? 3. $h(x) = 5$

Para explorar

Junte-se a um colega para estas atividades e usem um *software* de geometria dinâmica como auxílio.

1. Em um mesmo plano cartesiano, construam os gráficos das funções f, g e h definidas por: $f(x) = x$; $g(x) = x + 2$ e $h(x) = x - 2$.
1. Resposta no Manual do Professor.

a) O que caracteriza esses três gráficos?
1. a) São três retas paralelas.

b) O que muda de um gráfico para outro?
1. b) O deslocamento na vertical.

c) Qual é a relação entre os valores do termo independente de x (0, 2 e -2) e as alterações nos gráficos? 1. c) Os pontos em que os gráficos interceptam o eixo das ordenadas.

2. Resposta no Manual do Professor.

2. Em um mesmo plano cartesiano, construam os gráficos das funções f, g e h definidas por: $f(x) = -2x$; $g(x) = -2x + 3$ e $h(x) = -2x - 3$.
Depois, respondam ao que se pede.

a) Os gráficos obtidos são retas paralelas entre si?
2. a) Sim.

b) Em cada função, o que indica graficamente o termo independente de x?
2. b) O ponto em que a reta intercepta o eixo das ordenadas.

c) Nessas três funções, aumentando o valor de x, o que ocorre com o valor de y em correspondência? 2. c) Diminui.

Atividades

39. c) Resposta no Manual do Professor.

39. Esboce, no plano cartesiano, os gráficos das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é:
39. a) Resposta no Manual do Professor.

a) $f(x) = -3$;

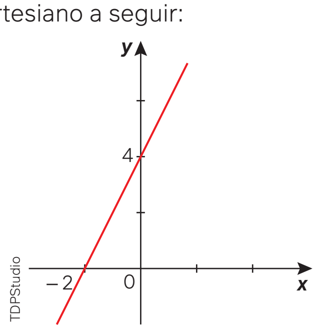
b) $f(x) = -3x$;
39. b) Resposta no Manual do Professor.

c) $f(x) = 2x - 5$;
39. d) Resposta no Manual do Professor.

d) $f(x) = -2x + 5$.

40. Para cada função da atividade anterior, forneça as coordenadas do ponto em que seus gráficos interceptam o eixo das ordenadas.
40. a) (0, –3); b) (0, 0); c) (0, –5) e d) (0, 5).

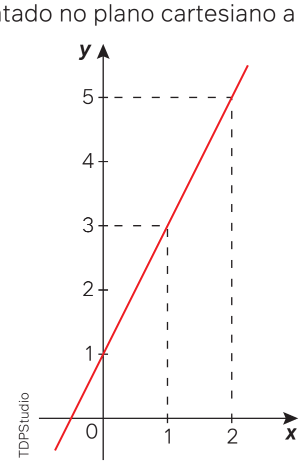
41. O gráfico de uma função afim está esboçado no plano cartesiano a seguir:



a) Obtenha a lei de formação dessa função.
41. a) $f(x) = 2x + 4$

b) Quais são as coordenadas dos pontos em que o gráfico intercepta os eixos coordenados?
41. b) Eixo das abscissas: (–2 ,0); eixo das ordenadas (0, 4).

42. O gráfico de uma função afim com domínio real está representado no plano cartesiano a seguir:

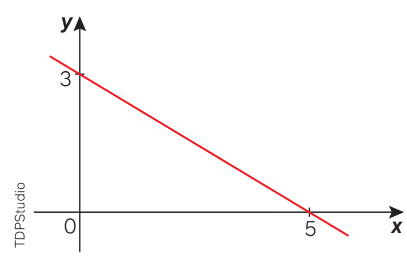


a) Obtenha a lei de formação da função.
42. a) $f(x) = 2x + 1$

b) Explique, a partir da lei de formação da função, como é possível obter as coordenadas do ponto em que o gráfico intercepta o eixo das ordenadas. 42. b) Resposta pessoal.

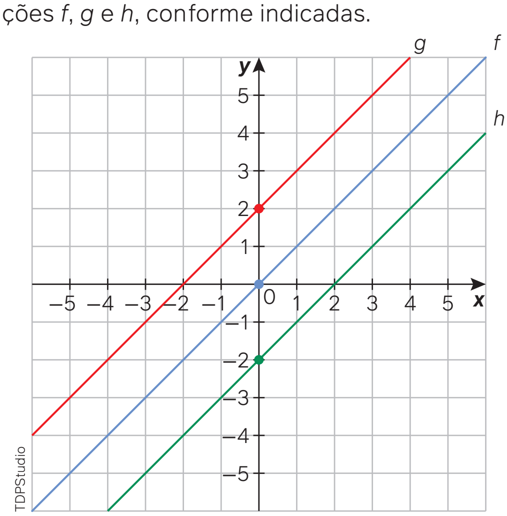
c) O zero de uma função é o valor de x para o qual tem-se $y = 0$. Determine o zero dessa função a partir da lei de formação da função. 42. c) $x = -\frac{1}{2}$

43. No plano cartesiano a seguir está representado o gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei de formação $f(x) = ax + b$.



Determine o valor de $a + b$. 43. $\frac{12}{5}$

44. As três retas paralelas entre si, representadas no plano cartesiano a seguir, são os gráficos das funções f, g e h, conforme indicadas.



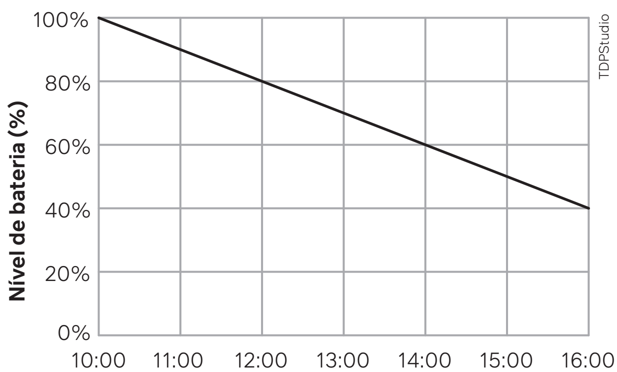
a) Escreva a lei de formação dessas três funções. 44. a) $f(x) = x$, $g(x) = x + 2$, $h(x) = x - 2$

b) Em qual dessas funções, aumentando uma unidade para x, o y também aumenta uma unidade? 44. b) Nas três funções.

c) A partir do gráfico da função f, como você pode obter o gráfico da função g? 44. c) Resposta no Manual do Professor.

d) A partir do gráfico da função f, como você pode obter o gráfico da função h? 44. d) Resposta no Manual do Professor.

45. (UFPR) O gráfico abaixo representa o consumo de bateria de um celular entre as 10 h e as 16 h de um determinado dia.



Supondo que o consumo manteve o mesmo padrão até a bateria se esgotar, a que horas o nível da bateria atingiu 10%? 45. Alternativa **b**.

a) 18 h.

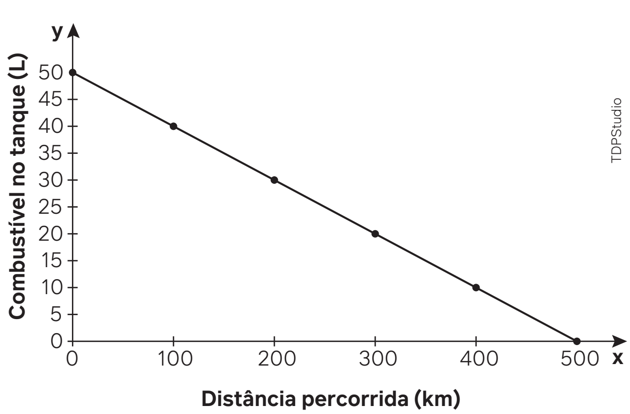
b) 19 h.

c) 20 h.

d) 21 h.

e) 22 h.

46. (Enem) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).



A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é 46. Alternativa **b**.

a) $y = -10x + 500$

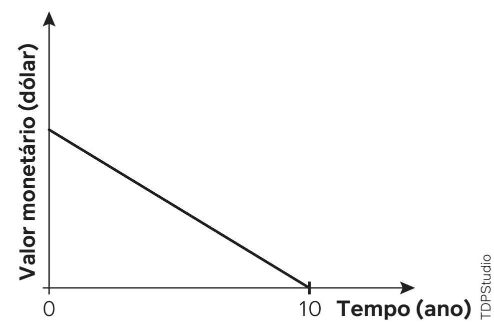
b) $y = \dfrac{-x}{10} + 50$

c) $y = \dfrac{-x}{10} + 500$

d) $y = \dfrac{x}{10} + 50$

e) $y = \dfrac{x}{10} + 500$

47. (Enem) Um sistema de depreciação linear, estabelecendo que após 10 anos o valor monetário de um bem será zero, é usado nas declarações de imposto de renda de alguns países. O gráfico ilustra essa situação.



Uma pessoa adquiriu dois bens, A e B, pagando 1 200 e 900 dólares, respectivamente. Considerando as informações dadas, após 8 anos, qual será a diferença entre os valores monetários, em dólar, desses bens? 47. Alternativa **b**.

a) 30

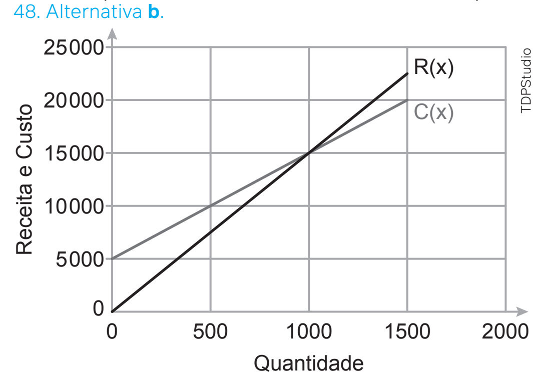
b) 60

c) 75

d) 240

e) 300

48. (FGV-SP) Os gráficos abaixo representam as funções receita mensal $R(x)$ e custo mensal $C(x)$ de um produto fabricado por uma empresa, em que x é a quantidade produzida e vendida. Qual o lucro obtido ao se produzir e vender 1 350 unidades por mês? 48. Alternativa **b**.



a) 1 740

b) 1 750

c) 1 760

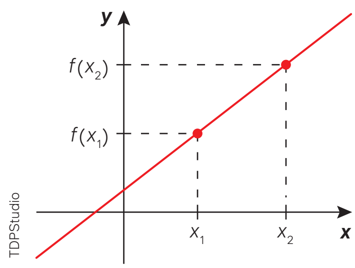
d) 1 770

e) 1 780

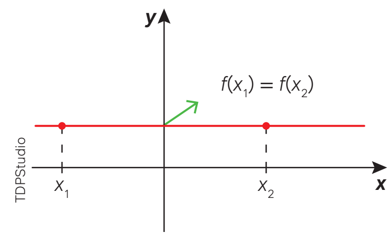
Taxa de variação de uma função afim

Vimos, anteriormente, como construir o gráfico de uma função afim atribuindo valores à variável x e obtendo os valores correspondentes à variável y. Considerando o domínio de uma função afim o conjunto dos números reais, como resultado geral podemos chegar a três tipos de gráficos de uma função afim, conforme o seu crescimento. Veja a seguir.

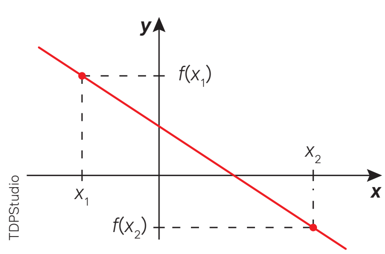
Função afim crescente: quanto maior o valor de x, maior sua imagem y; ou quanto menor o valor de x, menor sua imagem y.



Função afim constante: variando o valor de x, sua imagem y não se altera.



Função afim decrescente: quanto maior o valor de x, menor sua imagem y; ou quanto menor o valor de x, maior sua imagem y.



Para pensar e discutir

1. Qual é a denominação para uma função afim, em que $x_1 < x_2$ quaisquer do domínio tem-se $f(x_1) > f(x_2)$?
2. Qual é a denominação para uma função afim, em que $x_1 < x_2$ quaisquer do domínio tem-se $f(x_1) < f(x_2)$?
3. A partir da lei de formação da função afim $f(x) = ax + b$, sendo a e b números reais quaisquer, como saber se a função é crescente, decrescente ou constante?

1. Função decrescente.
2. Função crescente.
3. Resposta pessoal.

Vimos que o comportamento gráfico de uma função afim é linear, ou seja, os pontos estão alinhados. Isso pode ser explicado com base no conceito de taxa de variação média de uma função.

Considerando uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dados dois números reais x_1 e x_2, tais que $x_1 < x_2$, a taxa de variação média da função no intervalo $[x_1, x_2]$ é dada por:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

A partir desse conceito, podemos determinar a taxa de variação média de uma função afim da forma $f(x) = ax + b$ para quaisquer que sejam os números reais a e b:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

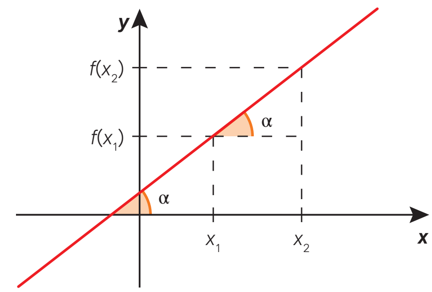
a = taxa de variação média da função afim

Observações:

1. A taxa de variação média de uma função afim da forma $f(x) = ax + b$ é o coeficiente de x.
2. Como a taxa de variação média de uma função afim é constante, vamos denominá-la simplesmente de taxa de variação da função.
3. Na função afim $f(x) = ax + b$, pode ser justificado que:
   - se $a > 0$, a função é crescente;
   - se $a < 0$, a função é decrescente;
   - se $a = 0$, a função é constante.

A **taxa de variação da função afim** (coeficiente de x) também é denominada de **coeficiente angular** ou **declividade da reta** correspondente ao gráfico da função afim, pois ela está relacionada diretamente com a inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas.

Esse coeficiente angular pode ser definido como a tangente do ângulo que a reta forma, no sentido anti-horário, com o eixo das abscissas. Assim, no triângulo retângulo formado no gráfico, tem-se:



TDPStudio

$$\boldsymbol{a = \text{tg}\,\alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

Com base nesse conceito de tangente (no estudo de Trigonometria voltaremos a abordá-lo), podemos justificar que o gráfico da função afim é uma reta. Observe a atividade a seguir.

Atividades resolvidas

18. Utilizando o conceito de tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo, conforme discutido na última seção, justifique por que o gráfico da função afim é uma reta.

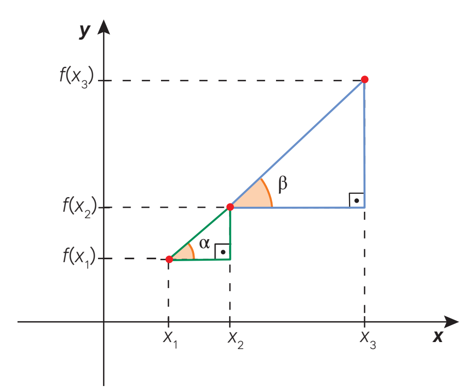
- Vamos considerar, apenas para justificar que o gráfico será uma reta, que a função afim é definida por $f(x) = ax + b$, $x_1 < x_2 < x_3$ e $a > 0$. Assim, temos:

$$f(x_1) = ax_1 + b$$

$$f(x_2) = ax_2 + b$$

$$f(x_3) = ax_3 + b$$

- Em um esboço gráfico, localizamos os pontos correspondentes no plano cartesiano (supondo que não estão alinhados), representamos dois triângulos retângulos e indicamos dois ângulos agudos α e β formados pelas hipotenusas e os catetos paralelos ao eixo das abscissas.



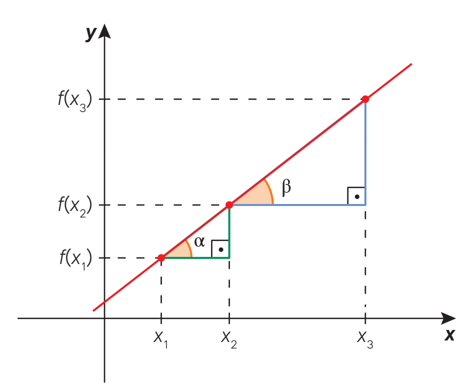
TDPStudio

- Com base nessa construção, calculamos as tangentes dos dois ângulos formados.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{(ax_3 + b) - (ax_2 + b)}{x_3 - x_2} = \frac{a(x_3 - x_2)}{x_3 - x_2} = a$$

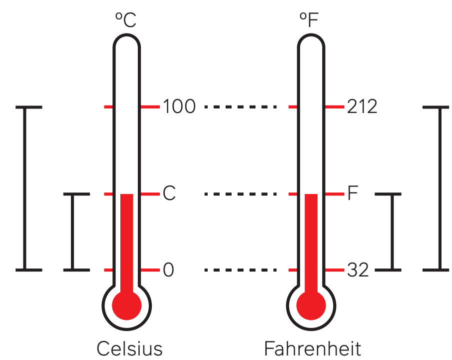
- Como as tangentes são iguais, temos que os ângulos agudos são tais que $\alpha = \beta$, isto é, os três pontos estão alinhados. Assim, traçamos no gráfico a reta que passa por esses pontos.



TDPStudio

19. As escalas termométricas Celsius e Fahrenheit são empregadas, por exemplo, no Brasil e na Inglaterra, respectivamente. Na escala Celsius temos a temperatura 0 grau para fusão do gelo e a temperatura 100 graus para a ebulição da água no nível do mar. Já na escala Fahrenheit, essas temperaturas são 32 e 212 graus, respectivamente.

Assim, nessas escalas temos que: 0 °C = 32 °F e 100 °C = 212 °F, como representado na imagem. Obtenha a função que fornece a temperatura *F* na escala Fahrenheit em função da correspondente temperatura *C* na escala Celsius.



Reinaldo Vignati

- As diferenças das temperaturas indicadas acima são proporcionais, ou seja:

$$\frac{F-32}{212-32}=\frac{C-0}{100-0}$$
$$\frac{F-32}{180}=\frac{C}{100}$$
$$\frac{F-32}{9}=\frac{C}{5}$$
$$F-32=\frac{9}{5}C$$
$$F-32=1{,}8C \Rightarrow F=1{,}8C+32$$

Para pensar e discutir

1. Na função $F = 1{,}8C + 32$, obtida ao lado e que relaciona a escala termométrica Fahrenheit em função da escala Celsius, o que acontece com a medida *F* quando se aumenta 1 grau na medida *C*?

2. Na função $f(x) = 10x - 5$, fazendo os valores de *x* aumentarem de 1 em 1, o que acontece com os valores de $y = f(x)$ em correspondência?

1. A cada 1 grau a mais na medida *C*, *F* aumenta 1,8 grau.
2. Aumentam de 10 em 10.

20. Determine a lei de formação de uma função afim considerando que sua taxa de crescimento é igual a 10 e o gráfico correspondente passa pelo ponto *A*(2, 15).

- Como a taxa de crescimento da função afim é 10, a lei de formação da função é

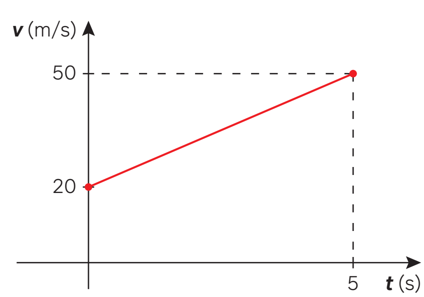
$$f(x) = 10x + b$$

- Se o ponto *A*(2, 15) pertence ao gráfico da função, podemos determinar o termo independente de *x* (também denominado coeficiente linear):

$$y = 10x + b$$
$$\downarrow (2,\ 15)$$
$$15 = 10 \cdot 2 + b$$
$$15 - 20 = b \Rightarrow b = -5$$

Portanto, a lei de formação da função é $f(x) = 10x - 5$.

21. O gráfico representa a velocidade em metros por segundo de um carro em função do tempo em segundos.
Obtenha a taxa de crescimento dessa função e explique qual é seu significado no movimento desse carro.



TDPStudio

- Como o gráfico é representado por meio de pontos alinhados, o cálculo da taxa de crescimento pode ser feito a partir dos dois pontos conhecidos:

$$a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$
$$a=\frac{50-20}{5-0}$$
$$a=\frac{30}{5} \Rightarrow a=6$$

- A variação da velocidade pela variação do tempo fornece aceleração:

$$\frac{\frac{m}{s}}{s}=\frac{m}{s}\cdot\frac{1}{s}=\frac{m}{s^2}$$

Portanto, nessa situação, a taxa de crescimento da função corresponde à aceleração do carro.

Para explorar

Junte-se a um colega para fazer estas atividades.

1. Elaborem a lei de formação de três funções afim, f, g e h, de acordo com os critérios a seguir.
   a) A função f deve ser crescente. 1. a) Resposta pessoal.
   b) A função g deve ser decrescente. 1. b) Resposta pessoal.
   c) A função h deve ser constante. 1. c) Resposta pessoal.
2. Para cada uma dessas funções, examinem o que ocorre com a imagem quando o valor da variável independente x aumenta de 1 em 1. 2. Resposta pessoal.
3. Para cada uma dessas funções, examinem o que ocorre com a imagem quando o valor da variável independente x aumenta de 2 em 2. 3. Resposta pessoal.
4. Para cada uma dessas funções, examinem o que ocorre com a imagem quando o valor da variável independente x aumenta de 5 em 5. 4. Resposta pessoal.
5. Com base nos itens anteriores, apresentem suas respostas para os outros colegas e façam uma interpretação desses resultados. 5. Resposta pessoal.

Atividades

49. Denomina-se zero de uma função o valor de x para o qual a função se anula. Diante disso, em cada função a seguir, determine o zero correspondente, caso admita.

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(x) = 7x - 2$. 49. a) $x = \frac{2}{7}$

b) $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(x) = 7x - 2$. 49. b) Não admite x inteiro.

c) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(x) = -7x$. 49. c) $x = 0$

d) $f:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(x) = -7x$. 49. d) $x = 0$

e) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(x) = 10$. 49. e) Não admite, pois $f(x) = 10$ para todo x real.

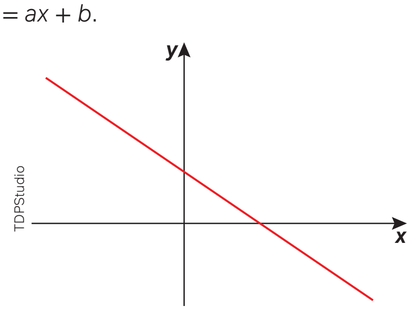
50. Considere a região A do plano cartesiano limitada pelos dois eixos coordenados e pelo gráfico da função real cuja lei de formação é: $f(x) = -x + 10$.

a) Esboce o gráfico no caderno e identifique a região correspondente. 50. a) Triângulo retângulo isósceles com vértices (0, 0), (0, 10) e (10, 0).

b) Obtenha a medida do perímetro dessa região. 50. b) $20 + 10\sqrt{2}$ u.c.

c) Obtenha a área dessa região. 50. c) 50 u.a.

51. No plano cartesiano a seguir está representado o gráfico da função afim $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(x) = ax + b$.



Indique quais afirmações abaixo são verdadeiras (V) e quais são falsas (F).

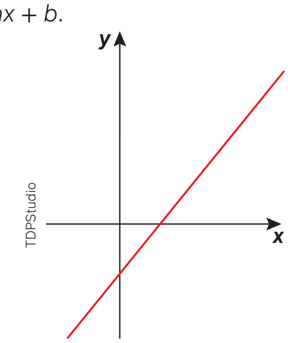
I. Nessa função, aumentando-se os valores de x, suas imagens aumentam também. 51. I. F

II. Essa função é decrescente para todo x pertencente ao seu domínio. 51. II. V

III. $a < 0$ e $b > 0$ 51. III. V

IV. $a < 0$ e $b < 0$ 51. IV. F

52. No plano cartesiano a seguir está representado o gráfico da função afim $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(x) = ax + b$.



Indique quais afirmações abaixo são verdadeiras (V) e quais são falsas (F).

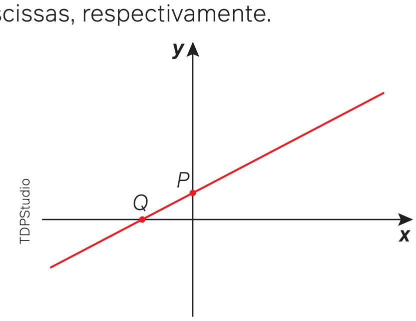
I. A função é crescente para todo x pertencente ao seu domínio. 52. I. V

II. O ponto $(0, b)$ pertence ao gráfico da função. 52. II. V

III. Nessa função, tem-se que $b > 0$. 52. III. F

IV. O ponto (0, 0) pertence ao gráfico da função. 52. IV. F

53. A função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ está representada no plano cartesiano a seguir por meio de uma reta. Os pontos P e Q indicam as intersecções da reta com o eixo das ordenadas e o eixo das abscissas, respectivamente.



A partir da lei de formação da função, obtenha as coordenadas desses dois pontos e explique como obtê-las. 53. $P(0, b)$ e $Q\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$; resposta pessoal.

54. Admitindo que a variação da temperatura seja linear entre 100 m e 500 m de profundidade nas águas do Oceano Atlântico (ao nível da Linha do Equador) e conforme dados do quadro a seguir, determine a taxa de crescimento da temperatura em função da profundidade, dentro do intervalo considerado, e interprete o resultado.

Profundidade	Temperatura
100 m	20 °C
500 m	8 °C

54. $-\frac{3}{100}$ grau; a cada 100 m a temperatura diminui 3 °C

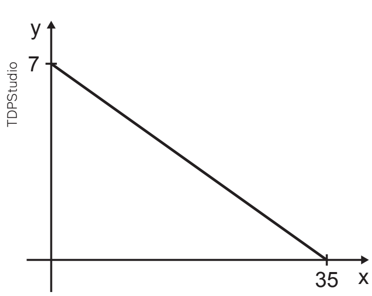
55. (UPE) Everton criou uma escala E de temperatura, com base na temperatura máxima e mínima de sua cidade durante determinado período. A correspondência entre a escala E e a escala Celsius C é a seguinte:

°E	°C
0	16
80	41

Em que temperatura, aproximadamente, ocorre a solidificação da água na escala E? 55. Alternativa **d**.

a) –16 °E
b) –32 °E
c) –38 °E
d) –51 °E
e) –58 °E

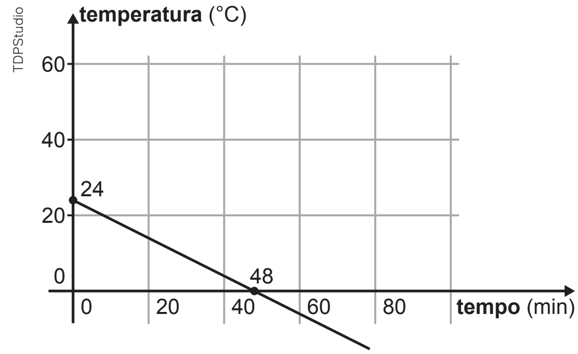
56. (UCS-RS) No gráfico abaixo, está representada a relação que estabelece qual deve ser o preço *y*, em reais, para que sejam vendidas *x* unidades de determinado produto por dia.



Qual deve ser o preço, em reais, para que sejam vendidas 28 unidades por dia? 56. Alternativa **e**.

a) 2,40
b) 2,00
c) 1,80
d) 1,60
e) 1,40

57. (ESPM-SP) O gráfico a seguir mostra a variação da temperatura no interior de uma câmara frigorífica desde o instante em que foi ligada. Considere que a variação seja linear nas primeiras 2 horas.



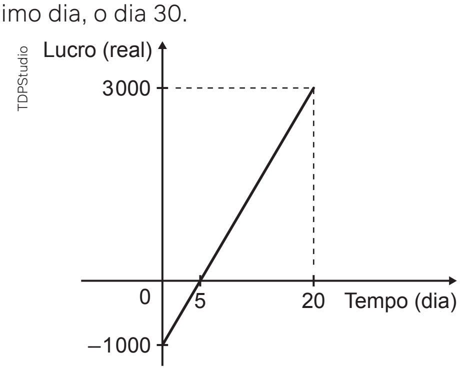
O tempo necessário para que a temperatura atinja –18 °C é de: 57. Alternativa **b**.

a) 90 min
b) 84 min
c) 78 min
d) 88 min
e) 92 min

58. (Cefet-MG) Um economista observa os lucros das empresas *A* e *B* do primeiro ao quarto mês de atividades e chega à conclusão que, para este período, as equações que relacionam o lucro, em reais, e o tempo, em meses, são $L_A(t) = 3t - 1$ e $L_B(t) = 2t + 9$. Considerando-se que essas equações também são válidas para o período do quinto ao vigésimo quarto mês de atividades, o mês em que as empresas terão o mesmo lucro será o 58. Alternativa **d**.

a) vigésimo.
b) décimo sétimo.
c) décimo terceiro.
d) décimo.

59. (Enem) Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (*L*) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.



A representação algébrica do lucro (*L*) em função do tempo (*t*) é 59. Alternativa **d**.

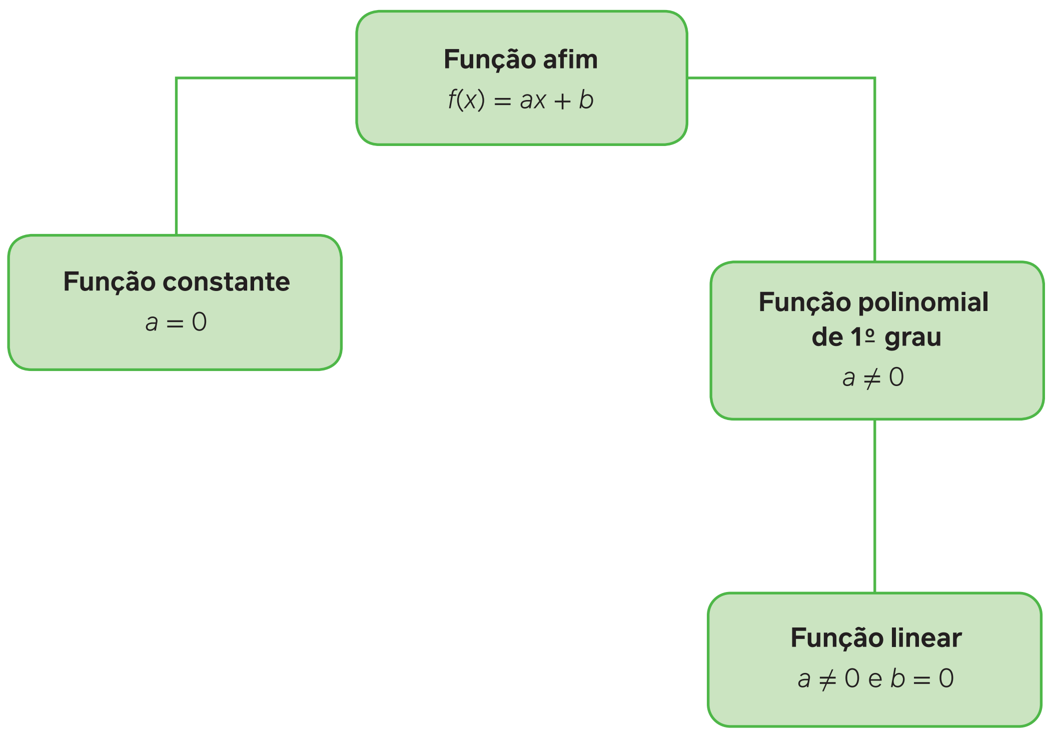
a) $L(t) = 20t + 3\,000$
b) $L(t) = 20t + 4\,000$
c) $L(t) = 200t$
d) $L(t) = 200t - 1\,000$
e) $L(t) = 200t + 3\,000$

Função afim e consequências

3

No estudo de funções afim, em que o domínio é o conjunto dos números reais, vimos que existem três possibilidades quanto à taxa de crescimento da função. Se essa taxa de crescimento é igual a zero, a função afim é chamada de **função constante**. Entretanto, quando é diferente de zero, ela recebe a denominação de **função polinomial do primeiro grau**, que também pode ser chamada de **função linear** em determinados casos.

O esquema a seguir resume a forma de classificação que utilizamos aqui.



Acervo editora

Para pensar e discutir

1. Na função afim $f(x) = ax + b$, qual é o significado no plano cartesiano do valor do termo independente de x? 1. É o ponto em que o gráfico intercepta o eixo y.
2. Observando o esquema, é correto afirmar que toda função linear é também função afim? E que toda função linear é também função do 1º grau? 2. Sim; sim.

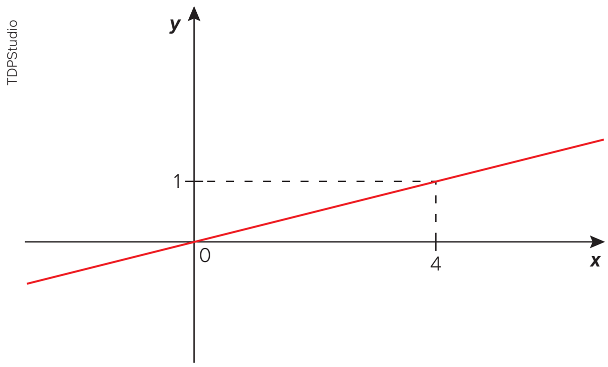
As denominações acima particularizam um pouco mais algumas características do estudo de função afim. Assim, por exemplo, uma função do 1º grau ou é crescente (quando $a > 0$) ou é decrescente (quando $a < 0$). No caso da função linear, nosso interesse está na análise de grandezas proporcionais que podem ser modeladas por meio desse tipo de função, como veremos na sequência.

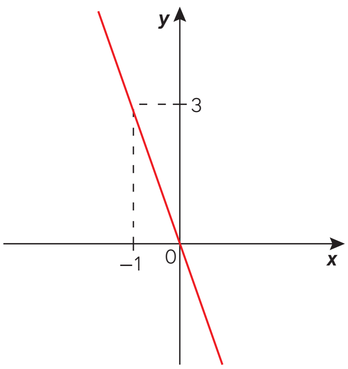
Observações:

1. A denominação **função linear** refere-se à função cuja lei de formação é da forma $f(x) = ax$, sendo $a \neq 0$.
2. A expressão **crescimento linear** refere-se a todas as funções reais cujos gráficos são pontos alinhados. Nesse caso, todas as funções afim têm crescimento linear.

Função linear e proporcionalidade

Observe a seguir a representação de duas funções lineares.





Denominamos **função linear** as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Observações:

1. Excluímos dessa definição o caso de $a = 0$, pois teríamos a função nula, isto é, $f(x) = 0$ para qualquer x real. Note que, nesse caso, a função já faz parte de função constante com $b = 0$.
2. Quando $a > 0$, se duas grandezas estiverem relacionadas por meio da função linear, elas serão ditas diretamente proporcionais e a será a constante de proporcionalidade, isto é:

$$f(x) = ax$$

$$\downarrow y = f(x)$$

$$y = ax$$

$$\frac{y}{x} = a \longrightarrow \text{constante de proporcionalidade}$$

Considere que, na função $y = 7{,}5x$, a grandeza x representa a quantidade de combustível consumido em litros por um automóvel em função da grandeza distância y percorrida por ele dentro de uma cidade. No quadro a seguir, estão representados alguns valores para essas grandezas.

***x* (em L)**	***y* (em km)**
1	7,5
2	15
3	22,5
4	30
(...)	(...)
20	150

Para pensar e discutir

1. Ao duplicarmos a grandeza x, o que acontece com a grandeza y? 1. Duplica.
2. Se triplicarmos ou quadruplicarmos a grandeza x, o que acontece, em correspondência, com a grandeza y? 2. Triplica ou quadruplica.
3. As duas grandezas envolvidas são diretamente proporcionais? 3. Sim.
4. Qual é o significado de 7,5 na lei de formação da função linear $y = 7{,}5x$?
   4. Constante de proporcionalidade. Representa o consumo de 1 L por km percorrido.

Atividades resolvidas

22. Mostre que, em uma função linear da forma $f(x) = ax$ para $k \in \mathbb{R}$, vale a relação $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$.

- Substituindo na lei de formação da função:

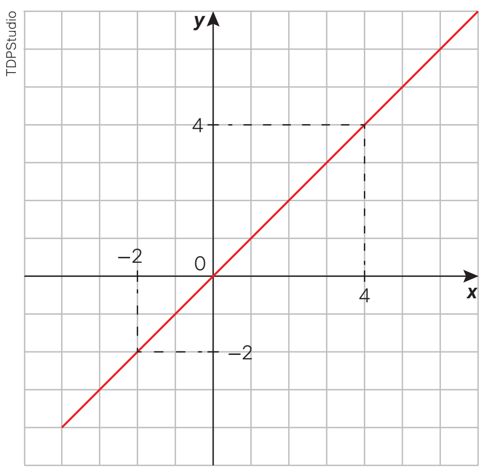
$$f(x) = ax$$
$$f(k \cdot x) = a \cdot (k \cdot x)$$
$$f(k \cdot x) = a \cdot k \cdot x$$
$$f(k \cdot x) = k \cdot (a \cdot x) \Rightarrow f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$$

Observe que, para $k = 2$, por exemplo, estamos duplicando o valor de x e, em correspondência, duplicando o valor de $f(x)$.

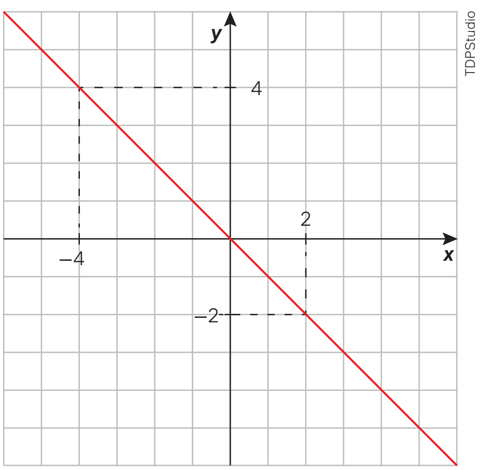
23. Obtenha a lei de formação da função linear que graficamente representa a bissetriz dos quadrantes ímpares e a lei de formação da função linear que representa a bissetriz dos quadrantes pares.

- Representando as duas bissetrizes no plano cartesiano, temos:

Bissetriz dos quadrantes ímpares



Bissetriz dos quadrantes pares



- Os pontos pertencentes à bissetriz dos quadrantes ímpares têm suas coordenadas iguais, enquanto os pontos pertencentes à bissetriz dos quadrantes pares têm coordenadas opostas, isto é:

Bissetriz dos quadrantes ímpares $\rightarrow y = f(x) = x$

Bissetriz dos quadrantes pares $\rightarrow y = f(x) = -x$

24. Em uma rodovia plana, um motorista dirigia seu automóvel a uma velocidade média constante de 80 km/h. Ele pediu para um colega registrar alguns valores dos tempos t (em horas) e das distâncias percorridas d (em km), que foram organizados no quadro a seguir.

***t* (em h)**	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
***d* (em km)**	20	40	80	160	240

Obtenha a lei de formação que expressa a distância em função do tempo. Depois, verifique se elas são diretamente proporcionais.

- Utilizando a expressão matemática que representa a velocidade V (km/h) como relação entre a distância d (em km) e o tempo t (em h), temos:

$$V = \frac{d}{t}$$
$$80 = \frac{d}{t}$$
$$80t = d$$
$$d = f(t) = 80t$$

Portanto, a lei de formação dessa função é $d = f(t) = 80t$, o que significa que as grandezas distância e tempo são diretamente proporcionais.

Atividades

60. Retomando a lei de formação $d = f(t) = 80t$ (conforme situação resolvida anteriormente) e mantendo as condições estabelecidas, responda ao que se pede.

a) Qual é a distância percorrida em 4 horas? 60. a) 320 km

b) A distância de 400 km é percorrida em quanto tempo? 60. b) 5 h

c) Na situação, as grandezas distância percorrida em quilômetros e tempo em horas são diretamente proporcionais. Qual é a constante de proporcionalidade? 60. c) Velocidade: 80 km/h.

61. Em relação à função real definida por $f(x) = 5x - 1$, em que $y = f(x)$, responda ao que se pede.

a) Duplicando o valor de x, duplica-se também o valor de y? Justifique. 61. a) Não; resposta pessoal.

b) Triplicando o valor de x, triplica-se também o valor de y? Justifique. 61. b) Não; resposta pessoal.

c) Para k sendo um número real qualquer, é válida a relação $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$? Justifique. 61. c) Não; resposta pessoal.

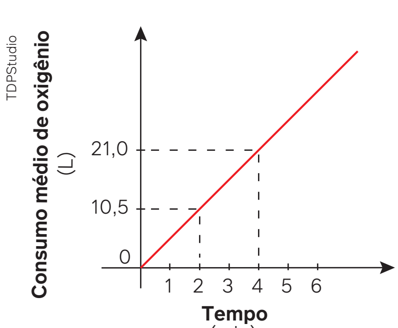
d) É correto afirmar que y é diretamente proporcional a x? 61. d) Não.

62. Ao analisar o fluxo de acessos ao perfil recém-criado em uma rede social da empresa na qual trabalha, o funcionário responsável pelo *marketing* das redes sociais observou que o número de inscritos variava em função do número de semanas passadas desde a inauguração do perfil, de acordo com uma função cujo gráfico no plano cartesiano correspondia a pontos pertencentes à bissetriz do 1º quadrante. Sabendo disso, responda ao que se pede.

a) Sendo N o número de inscritos e x o número de semanas passadas, obtenha a lei de formação da função correspondente. 62. a) $N(x) = x$

b) Qual é a taxa de variação da quantidade de acessos por semana, em porcentagem? 62. b) 100%

63. O gráfico a seguir representa o consumo médio de oxigênio, em função do tempo, de um atleta com massa 70 kg ao praticar natação.

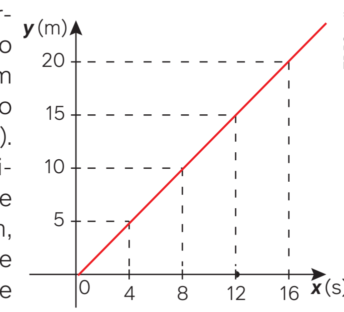


a) Sendo C o consumo médio de oxigênio em função do tempo t em minutos, as grandezas C e t são diretamente proporcionais? 63. a) Sim.

b) Qual é a lei de formação dessa função? 63. b) $C(t) = 5{,}25t$

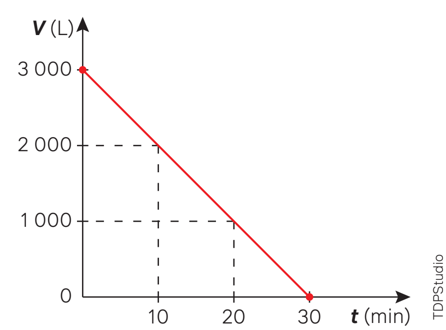
c) Qual é a constante de proporcionalidade? 63. c) 5,25 L/min

64. O gráfico ao lado fornece o deslocamento y (em metros) de um objeto em função do tempo x (em segundos). As grandezas envolvidas são diretamente proporcionais? Se sim, indique a constante de proporcionalidade e seu significado.



64. Sim; 1,25 e representa a velocidade em m/s.

65. Analise as afirmações a respeito do gráfico a seguir que indica a variação da quantidade V de litros de água em uma caixa-d'água em função do tempo t em minutos. No instante $t = 0$, a caixa-d'água estava com 3 000 litros de água.



Diante disso, indique quais afirmações a seguir são verdadeiras e quais são falsas.

I. As grandezas V e t são inversamente proporcionais. 65. I. Falsa.

II. As grandezas V e t são tais que, aumentando uma delas, a outra diminui. 65. II. Verdadeira.

III. A lei de formação que relaciona as grandezas V e t é $V = 3\,000\,t$. 65. III. Falsa.

IV. A lei de formação que relaciona as grandezas V e t é $V = 3\,000 - 100\,t$ 65. IV. Verdadeira.

66. O professor propôs aos estudantes que analisassem as grandezas y e x conforme os dois gráficos a seguir.

Gráfico 1

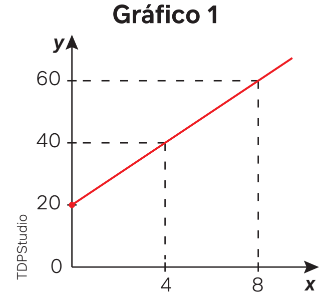
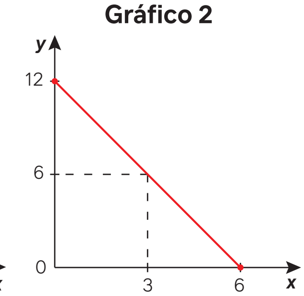


Gráfico 2

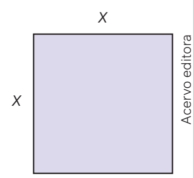


Paula fez as seguintes afirmações:

- as grandezas y e x, relacionadas no **Gráfico 1**, são diretamente proporcionais, pois quando uma grandeza aumenta a outra também aumenta;
- as grandezas y e x, relacionadas no **Gráfico 2**, são inversamente proporcionais, pois quando uma grandeza aumenta, a outra diminui e vice-versa.

Você concorda com as afirmações feitas por Paula? Justifique. 66. Não; resposta pessoal.

67. O professor propôs algumas afirmações sobre a medida do perímetro y de um quadrado em função da medida x de seu lado. Indique quais afirmações são verdadeiras e quais são falsas.



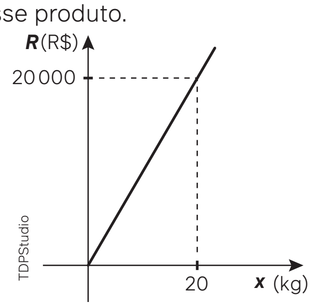
I. A lei de formação da função $y = f(x)$ é tal que $f(x) = 4x$. 67. I. Verdadeira.

II. O domínio dessa função é o conjunto dos números reais. 67. II. Falsa.

III. As grandezas relacionadas são diretamente proporcionais. 67. III. Verdadeira.

IV. Triplicando-se o valor de x, triplica-se também o valor de y. 67. IV. Verdadeira.

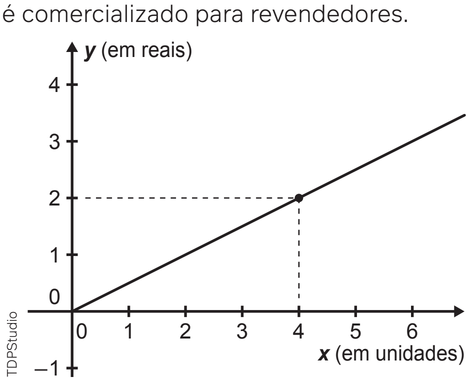
68. (UCS-RS) O custo total C, em reais, de produção de x kg de certo produto é dado pela expressão $C(x) = 900x + 50$. O gráfico abaixo é o da receita R, em reais, obtida pelo fabricante, com a venda de x kg desse produto.



Qual porcentagem da receita obtida com a venda de 1 kg do produto é lucro? 68. Alternativa **a**.

a) 5%
b) 10%
c) 12,5%
d) 25%
e) 50%

69. (IFSP) O gráfico abaixo apresenta informações sobre a relação entre a quantidade comprada (x) e o valor total pago (y) para um determinado produto que é comercializado para revendedores.



Um comerciante que pretende comprar 2 350 unidades desse produto para revender pagará, nessa compra, o valor total de 69. Alternativa **e**.

a) R$ 4.700,00
b) R$ 2.700,00
c) R$ 3.175,00
d) R$ 8.000,00
e) R$ 1.175,00

70. (Enem) O pacote de salgadinho preferido de uma menina é vendido em embalagens com diferentes quantidades. A cada embalagem é atribuído um número de pontos na promoção: "Ao totalizar exatamente 12 pontos em embalagens e acrescentar mais R$ 10,00 ao valor da compra, você ganhará um bichinho de pelúcia." Esse salgadinho é vendido em três embalagens com as seguintes massas, pontos e preços:

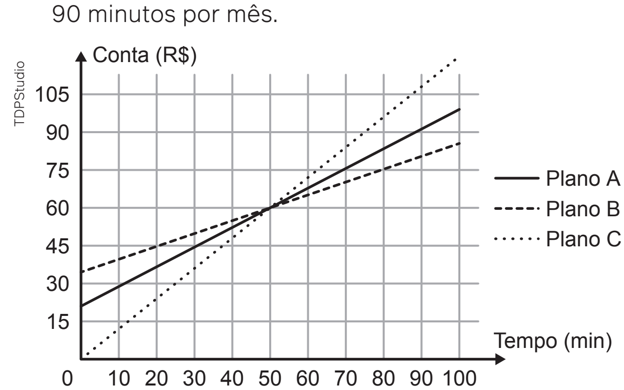
Massa da embalagem (g)	Pontos da embalagem	Preço (R$)
50	2	2,00
100	4	3,60
200	6	6,40

A menor quantia a ser gasta por essa menina que a possibilite levar o bichinho de pelúcia nessa promoção é:

a) R$ 10,80
b) R$ 12,80
c) R$ 20,80
d) R$ 22,00
e) R$ 22,80

70. Alternativa **c**.

71. (Enem) Na intenção de ampliar suas fatias de mercado, as operadoras de telefonia apresentam diferentes planos e promoções. Uma operadora oferece três diferentes planos baseados na quantidade de minutos utilizados mensalmente, apresentados no gráfico. Um casal foi à loja dessa operadora para comprar dois celulares, um para a esposa e outro para o marido. Ela utiliza o telefone, em média, 30 minutos por mês, enquanto ele, em média, utiliza 90 minutos por mês.



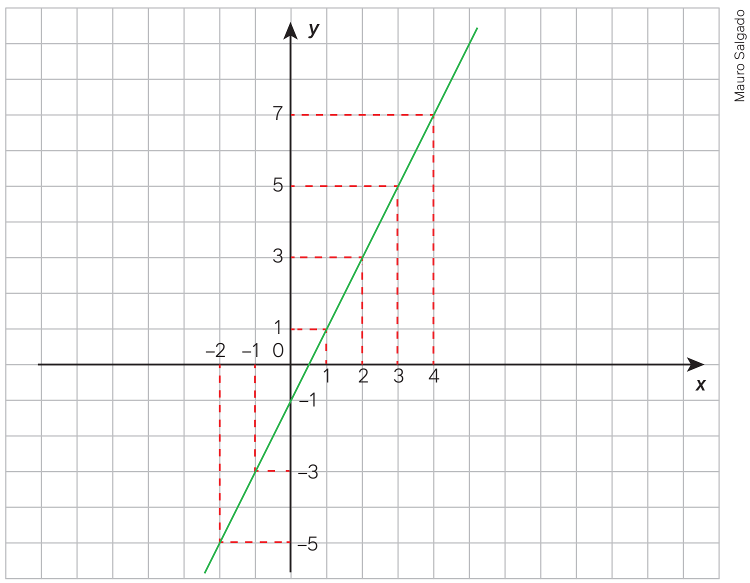
Com base nas informações do gráfico, qual é o plano de menor custo mensal para cada um deles?

a) O plano A para ambos. 71. Alternativa **e**.
b) O plano B para ambos.
c) O plano C para ambos.
d) O plano B para a esposa e o plano C para o marido.
e) O plano C para a esposa e o plano B para o marido.

Para explorar

Junte-se a um colega para realizar estas atividades e sigam as instruções.

1. No plano cartesiano a seguir está representado o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(x) = 2x - 1$.



a) Copiem no caderno e completem o quadro a seguir, conforme informações do gráfico. 1. a) –5; –3; –1; 1; 5; 7.

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y = f(x)							

b) Expliquem, conforme dados do quadro, como a sequência formada pelos valores de x está construída da esquerda para a direita. 1. b) Resposta pessoal.

c) Analogamente, expliquem como a sequência formada pelos valores de y foi construída. 1. c) Resposta pessoal.

d) Comparem o padrão de crescimento da sequência formada pelos valores de y com a taxa de crescimento da função afim. Qual é a conclusão? 1. d) Resposta pessoal.

2. A partir da função $f: \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 7x - 2$, façam o que se pede.

a) Construam a sequência representada por $(f(1), f(2), f(3), f(4), ..., f(n),...)$, sendo $f(1)$ o 1º termo, $f(2)$ o 2º termo, $f(3)$ o 3º termo, $f(4)$ o 4º termo, ..., $f(n)$ o n-ésimo termo. 2. a) $(5, 12, 19, 26, ..., 7n - 2, ...)$

b) Expliquem como é possível obter o 100º termo dessa sequência. 2. b) Resposta pessoal.

c) A partir do 2º termo, como essa sequência é construída? 2. c) Cada termo, a partir do 2º, é o termo imediatamente anterior acrescido da razão constante 7.

d) O que indica, na sequência, a taxa de crescimento da função afim? 2. d) A razão constante.

3. A partir da função $f: \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -10x + 15$, façam o que se pede.

a) Construam a sequência representada por $(f(1), f(2), f(3), f(4), ... f(n),...)$, sendo $f(1)$ o 1º termo, $f(2)$ o 2º termo, $f(3)$ o 3º termo, $f(4)$ o 4º termo, ..., $f(n)$ o n-ésimo termo. 3. a) $(5, -5, -15, -25, ..., -10n + 15, ...)$

b) Expliquem como é possível obter o 50º termo dessa sequência. 3. b) Resposta pessoal.

c) A partir do 1º termo, como essa sequência é construída? 3. c) Cada termo, a partir do 2º, é o termo imediatamente anterior acrescido da razão constante –10.

d) O que indica, na sequência, a taxa de crescimento da função afim? 3. d) A razão constante.

Qualquer sequência de números reais em que, a partir do segundo termo, cada termo seguinte é obtido do anterior pelo acréscimo de uma constante é denominada de **progressão aritmética**.

A lei de formação de uma função afim, tendo o domínio no conjunto dos números naturais diferentes de zero, descreve os termos da progressão aritmética representada por $(f(1), f(2), f(3), f(4), ... f(n),...)$.

Funções e inequações

4

Você sabe o que é uma microempresa? É comum ouvirmos que o brasileiro é muito criativo. Devido a inúmeras pressões e dificuldades do mundo contemporâneo, muitas pessoas estão usando a criatividade para abrir pequenas empresas. A partir de uma boa ideia e muito trabalho, acabam conseguindo uma fonte de renda.

Um exemplo disso está ligado à alimentação. Pequenas empresas familiares iniciam seus negócios alimentícios, por exemplo, com uma receita de trufa de chocolate. Porém, não basta saber fazer uma saborosa trufa de chocolate para que o empreendimento dê certo. É necessário buscar apoio, principalmente no que diz respeito à questão financeira. Para isso, existem órgãos públicos que fornecem orientações de como a empresa deve ser organizada e mantida.

Vamos considerar, por exemplo, que alguém de sua família resolva produzir trufas de chocolate para vender. Algumas questões iniciais precisariam ser respondidas diretamente.

Fernando Favoretto/Criar Imagem

Trufas de chocolate produzidas artesanalmente.

Para pensar e discutir

1. Quais são os ingredientes necessários para fazer uma trufa de chocolate? 1. Resposta pessoal.
2. Quais são os custos desses ingredientes? 2. Resposta pessoal.
3. Em que ambiente essas trufas serão produzidas? 3. Resposta pessoal.
4. Como armazenar as trufas? 4. Resposta pessoal.
5. Qual é o valor de venda de cada trufa? 5. Resposta pessoal.
6. Utilizando esse exemplo, que outras questões você faria? 6. Resposta pessoal.

O planejamento prévio e o conhecimento do tipo de produto que se deseja vender ou produzir ajudam a aumentar as chances de um empreendimento ter sucesso. Assim, estimar orçamento, gastos e valores evita que o empreendedor tenha frustrações nos primeiros meses de atuação.

Segundo o Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas (Sebrae), cerca de **82% das empresas são encerradas com até 6 meses de operação**. Você pode ler mais sobre estes dados e sobre fatores que influenciam no sucesso e fracasso de empresas no artigo publicado pelo Sebrae.

(CAUSA mortis: o sucesso e o fracasso das empresas nos primeiros 5 anos de vida. *In*: SEBRAE. SãoPaulo, jul. 2024. Disponível em: https://bit.ly/3U74N3A. Acesso em: 31 ago. 2024).

A Matemática pode auxiliar na questão do levantamento de custos e nos cálculos de valor de venda para a determinação de lucros que possibilitem que empresas sobrevivam e não tenham suas portas fechadas. Vamos considerar a situação a seguir, que envolve uma pequena empresa de trufas de chocolate.

Situação

Marta iniciou uma pequena empresa para produzir trufas de chocolate. Ela observou que o custo de fabricação era dividido em duas partes. A primeira era independente da quantidade de chocolates produzidos e tinha um valor mensal aproximado de R$ 1.600,00. Já a segunda parte era constituída pelo custo de R$ 0,90 para a produção de cada trufa. Marta resolveu vender por R$ 3,50 a unidade.

Para pensar e discutir

1. Se, em uma situação de comércio, L representa lucro, V representa valor de venda e C representa o custo, como você relaciona esses valores por meio de uma igualdade? 1. $L = V - C$
2. Marta terá lucro se produzir e vender 200 trufas no mês? Justifique. 2. Não; resposta pessoal.
3. E se Marta produzir e vender 800 trufas no mês? Justifique. 3. Sim; resposta pessoal.
4. Quantas trufas, no mínimo, ela deverá vender no mês para ter lucro? 4. 616

Na situação apresentada, Marta observou que, além do custo variável, ou seja, aquele que depende da quantidade de trufas produzidas e vendidas, havia um custo fixo mensal. Esse custo fixo normalmente pode ser o consumo de energia, de água, o valor do aluguel etc.

A equação $L = V - C$ representa a relação entre lucro, valor de venda e custo. Para ser considerado lucro, devemos ter L positivo. Se L for negativo, dizemos que há prejuízo e, quando L for igual a zero, não há nem lucro nem prejuízo.

Vamos analisar essa situação apresentando uma forma alternativa de resolução.

Como desconhecemos a quantidade de trufas que Marta deverá produzir e vender, vamos representá-la por meio de uma variável. Com base nisso, podemos obter expressões algébricas que representem L, V e C:

- trufas: x
- custo total da produção considerando x a quantidade de trufas: $C(x) = 0{,}90 \cdot x + 1\,600$
- valor de venda em função de x: $V(x) = 3{,}50 \cdot x$
- cálculo do lucro em função de x:

$$L(x) = V(x) - C(x)$$

$$L(x) = 3{,}50x - (0{,}90x + 1\,600)$$

$$L(x) = 3{,}50x - 0{,}90x - 1\,600$$

$$L(x) = 2{,}60x - 1\,600$$

Para que haja lucro, $L(x)$ deverá assumir apenas valores positivos, isto é:

$$L(x) > 0$$
$$2{,}60x - 1\,600 > 0$$

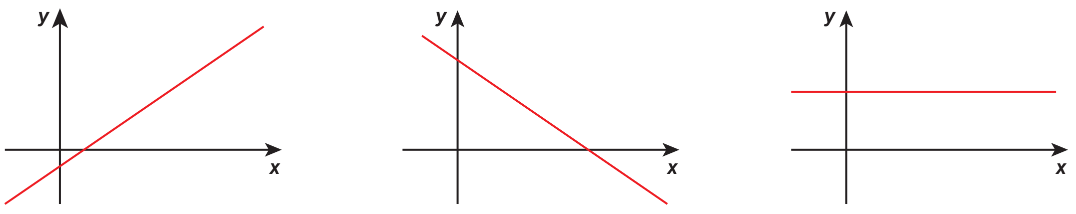
Essa desigualdade é chamada de inequação polinomial do 1º grau na incógnita x.

A resolução de uma inequação polinomial do 1º grau envolve o conhecimento do sinal de uma função afim. A seguir, vamos compreender como resolver esse tipo de inequação e, depois, voltaremos a essa situação.

Estudo dos sinais de uma função afim

Ampliaremos, agora, o estudo de função afim desenvolvido anteriormente. Essa ampliação nos possibilitará enfrentar matematicamente situações que envolvem inequações. Lembre-se de que uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é representada pela lei $f(x) = ax + b$, com a e b números reais. O gráfico de uma função afim, no plano cartesiano, quando a variável x é real, é uma reta. Existem três situações possíveis para o comportamento do gráfico quanto ao crescimento.

Tarcisio Garbellini



Função crescente em todo seu domínio.

Função decrescente em todo seu domínio.

Função constante em todo seu domínio.

Para pensar e discutir

1. Considerando $f(x) = ax + b$, qual é a condição para o gráfico representar uma função constante? 1. $a = 0$
2. E uma função crescente? E decrescente? 2. $a > 0$; $a < 0$.
3. Qual é a condição para que uma função afim seja denominada função do 1º grau? 3. $a \neq 0$
4. Quantos pontos em comum com o eixo das abscissas pode ter o gráfico de uma função do 1º grau? 4. Um ou nenhum (função constante).
5. Sendo x a variável real, como é o gráfico da função $f(x) = ax + b$ em que a e b são ambos iguais a zero? Quantos pontos em comum haverá com o eixo das abscissas? 5. O gráfico é o próprio eixo das abscissas; infinitos.

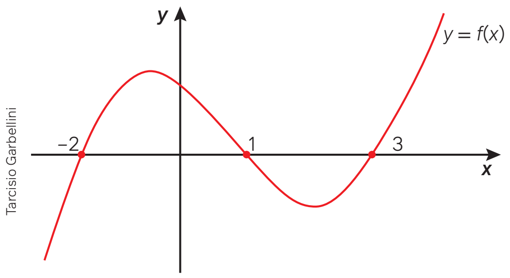
O comportamento gráfico de uma função nos auxilia a compreender melhor como as grandezas envolvidas estão relacionadas. Além de observarmos o crescimento ou decrescimento de uma grandeza em função da outra, podemos analisar o **sinal da função**.

Estudar o **sinal de uma função**, de modo geral, significa obter respostas para as seguintes questões:
- Para quais valores de x a função f se anula?
- Para quais valores de x a função f assume imagens positivas?
- Para quais valores de x a função f assume imagens negativas?

A seguir, nosso interesse nas atividades resolvidas é evidenciar o estudo do sinal de uma função do 1º grau. Na primeira dessas atividades, observe que o estudo de sinal de uma função pode ser feito não apenas para função afim, mas para outras funções.

Atividades resolvidas

25. Considere que, no plano cartesiano, esteja representado o gráfico de determinada função com o domínio e o contradomínio reais.



Ao observar esse gráfico, sabemos que existem pontos em comum com o eixo das abscissas, assim como existem valores de x para os quais as imagens em correspondência são positivas ou negativas, isto é, os pontos estão acima ou abaixo do eixo das abscissas, respectivamente. Diante disso, responda:

a) Para quais valores de x tem-se $y = 0$?

b) Para quais valores de x tem-se $y > 0$?

c) E para quais valores de x tem-se $y < 0$?

- Item **a**. Inicialmente, determinamos os valores de x que anulam a função, isto é, os zeros da função. De acordo com o gráfico, temos:

$$y = f(x) = 0 \text{ para três valores de } x\text{: } x = -2,\ x = 1 \text{ e } x = 3$$

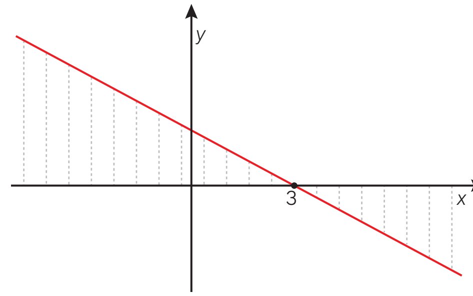
- Item **b**. Os valores de x que tornam positiva a função são tais que:

$$y = f(x) > 0, \text{ para } -2 < x < 1 \text{ ou para } x > 3$$

- Item **c**. Os valores de x que tornam negativa a função são tais que:

$$y = f(x) < 0, \text{ para } x < -2 \text{ ou para } 1 < x < 3$$

26. Estude o sinal da função afim cujo gráfico está esboçado no plano cartesiano.

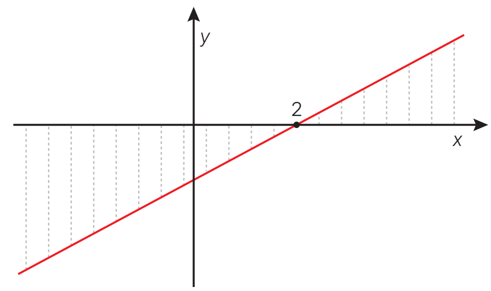


Tarcisio Garbellini

- No caso de função do 1º grau (como é decrescente, significa $a < 0$), o estudo do sinal da função é simplificado, pois há apenas uma raiz (apenas um valor de x que anula a função). Assim, temos:

$$y = 0 \text{ para } x = 3$$
$$y > 0 \text{ para } x < 3$$
$$y < 0 \text{ para } x > 3$$

27. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do 1º grau definida por $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$. Estude o sinal dessa função.



Tarcisio Garbellini

- Para esboçar o gráfico da função, observando que é crescente pela taxa de crescimento da função, podemos obter o valor de x que anula a função (zero da função):

$$f(x) = 0$$
$$\frac{1}{2}x - 1 = 0$$
$$\frac{1}{2}x = 1 \Rightarrow x = 2$$

- Assim, temos o seguinte esboço gráfico (já indicamos algumas imagens positivas e algumas imagens negativas):
- Esse esboço gráfico nos permite estudar o sinal da função, isto é:

$$y = 0 \text{ para } x = 2$$
$$y > 0 \text{ para } x > 2$$
$$y < 0 \text{ para } x < 2$$

Para explorar

Junte-se a dois colegas para realizar as atividades a seguir.

Vocês irão utilizar um *software* de geometria dinâmica para o estudo do sinal de uma função do 1º grau. Sigam as instruções.

1. Tracem, no plano cartesiano, o gráfico das seguintes funções: 1. Resposta no Manual do Professor.

- $f_1(x) = -2x + 3$
- $f_2(x) = 4x$
- $f_3(x) = 5x - 10$
- $f_4(x) = -3x$

2. Em cada um dos gráficos, indiquem:

a) os valores de x que anulam a função; 2. a) $\frac{3}{2}$; 0, 2; 0

b) os valores de x para os quais a função tem imagem positiva; 2. b) $x < \frac{3}{2}$; $x > 0$; $x > 2$; $x < 0$

c) os valores de x para os quais a função tem imagem negativa. 2. c) $x > \frac{3}{2}$; $x < 0$; $x < 2$; $x > 0$

3. Elaborem outras três leis de formação de funções do 1º grau. Para cada uma delas:

a) tracem os gráficos correspondentes no plano cartesiano; 3. a) Resposta pessoal.

b) estudem o sinal de cada uma dessas funções a partir dos gráficos obtidos; 3. b) Resposta pessoal.

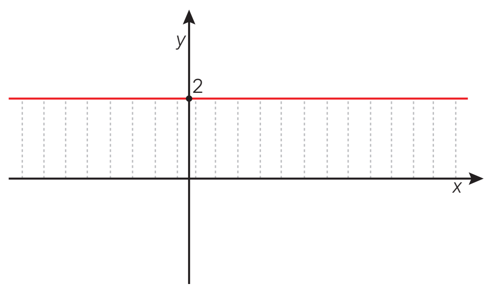
c) resumam, por meio de um texto, as conclusões sobre o estudo do sinal dessas funções e apresentem esse texto para os demais colegas. 3. c) Resposta pessoal.

Observação:

A construção de gráficos utilizando recursos de um *software* de geometria dinâmica facilita o estudo do sinal de uma função, conhecendo-se sua lei de formação. Sem utilizar esse recurso, para o caso de funções afim, basta fazer um esboço gráfico, verificar em que ponto intercepta o eixo das abscissas, analisar o crescimento e observar o sinal. Em uma função constante (que é um caso de função afim), essa análise de sinal também pode ser feita. Pense nisso para resolver as duas primeiras atividades a seguir.

Atividades

72. No plano cartesiano a seguir está representado o gráfico da função constante $f(x) = 2$.



Observando o gráfico, responda ao que se pede.

a) Para quais valores reais de x tem-se $y = 0$? 72. a) Nenhum.

b) Para quais valores reais de x tem-se $y > 0$? 72. b) Todos.

c) Para quais valores reais de x tem-se $y < 0$? 72. c) Nenhum.

73. Esboce, no plano cartesiano, o gráfico da função real definida por $f(x) = -3$. Depois, responda: 73. Resposta no Manual do Professor.

a) para quais valores reais de x tem-se $y = 0$? 73. a) Nenhum.

b) para quais valores reais de x tem-se $y > 0$? 73. b) Nenhum.

c) para quais valores reais de x tem-se $y < 0$? 73. c) Todos.

74. Esboce, no plano cartesiano, o gráfico da função real definida por $f(x) = 2x - 8$. Depois, responda: 74. Resposta no Manual do Professor.

a) para quais valores reais de x tem-se $y = 0$? 74. a) $x = 4$

b) para quais valores reais de x tem-se $y > 0$? 74. b) $x > 4$

c) para quais valores reais de x tem-se $y < 0$? 74. c) $x < 4$

75. Estude o sinal de cada função real a seguir de acordo com sua lei de formação.

a) $f(x) = -2x - 10$ 75. a) Resposta no Manual do Professor.

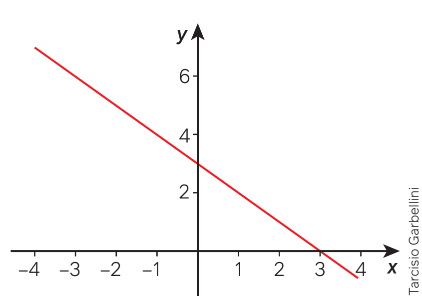
b) $f(x) = 4x$ 75. b) Resposta no Manual do Professor.

c) $f(x) = -10$ 75. c) Resposta no Manual do Professor.

d) $f(x) = 4x + 9$ 75. d) Resposta no Manual do Professor.

76. Elabore a lei de formação de uma função do 1º grau, esboce o gráfico correspondente e, depois, faça o estudo do sinal dessa função. Em seguida, apresente essa lei de formação para algum colega para que ele também possa fazer esse estudo. Ao final, confrontem os resultados obtidos. 76. Resposta pessoal.

77. Mateus utilizou um *software* de geometria dinâmica e obteve o seguinte gráfico de uma função afim.



Analise o gráfico e faça o que se pede.

a) Escreva dois valores inteiros de x que têm imagens positivas. 77. a) Resposta pessoal.

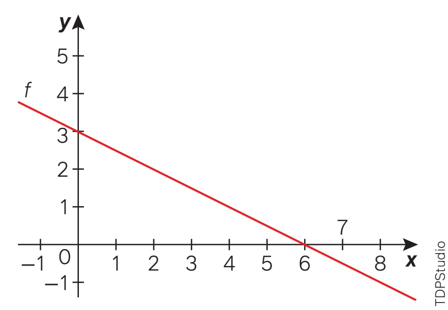
b) Escreva dois valores naturais de x que têm imagens negativas. 77. b) Resposta pessoal.

c) Determine todos os valores reais de x para os quais as imagens são positivas. 77. c) $x < 3$

d) Determine todos os valores reais de x para os quais as imagens são negativas. 77. d) $x > 3$

e) Qual é o zero dessa função? 77. e) $x = 3$

78. Em uma avaliação diagnóstica, o professor esboçou, na lousa, o gráfico de uma função afim. Depois, fez afirmações para que cada estudante identificasse quais eram verdadeiras e quais eram falsas. A seguir, estão o gráfico e as afirmações:



Quais das afirmações a seguir são verdadeiras?

I. $f(0) = 0$ 78. I. Falsa.

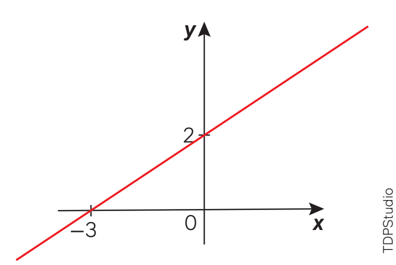
II. $f(\pi) > 0$ 78. II. Verdadeira.

III. $f(10) < 0$ 78. III. Verdadeira.

IV. Para $x > 6$ tem-se $f(x) < 0$ 78. IV. Verdadeira.

V. Para $x < 0$ tem-se $f(x) > 0$ 78. V. Verdadeira.

79. Considere, no plano cartesiano, o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é da forma $f(x) = ax + b$.



a) Obtenha a lei de formação dessa função. 79. a) $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

b) Calcule $f(-1) + f(1)$. 79. b) 4

c) Determine todos os valores de x para os quais a função tem imagens positivas. 79. c) $x > -3$

d) Determine todos os valores de x para os quais a função tem imagens negativas. 79. d) $x < -3$

Resolução de inequações do 1º grau

Na página 162 apresentamos uma situação relacionada com o lucro e chegamos à seguinte expressão numérica:

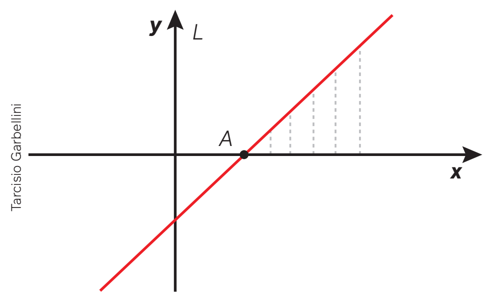
$$L(x) = V(x) - C(x)$$
$$L(x) = 3{,}50x - (0{,}90x + 1\,600)$$
$$L(x) = 3{,}50x - 0{,}90x - 1\,600$$
$$L(x) = 2{,}60x - 1\,600$$

Para que tenhamos lucro, devemos ter L assumindo apenas valores positivos, isto é:

$$L(x) > 0$$
$$2{,}60x - 1\,600 > 0$$

A desigualdade obtida é denominada de **inequação do 1º grau** na incógnita x.

Um procedimento para a resolução dessa inequação é analisar graficamente o comportamento da função lucro por meio de um esboço gráfico. Como a taxa de crescimento da função (coeficiente de x) é positiva, essa função é crescente. Assim, temos o esboço:



Para pensar e discutir

1. Qual é a abscissa do ponto A? 1. 615,38
2. As linhas pontilhadas no gráfico são traçadas indicando valores de x positivos ou negativos? E o que se pode dizer dos valores de L associados a esses valores de x? 2. Positivos; também são positivos.
3. Nessa situação, o que representa a variável x? 3. A quantidade de trufas produzidas e vendidas.
4. Qual é o valor mínimo de x para que haja lucro? 4. 616

Há um procedimento algébrico para a resolução de uma inequação do 1º grau que consiste em isolar a incógnita x em um dos dois membros da desigualdade. Observe como poderíamos resolver a inequação proposta sem fazer a análise de sinal.

$$L(x) > 0$$
$$2{,}60x - 1\,600 > 0$$
$$\Big\downarrow \text{ Isolamos } x$$
$$2{,}60x > 1\,600$$
$$x > \frac{1\,600}{2{,}60}$$
$$x > 615{,}38 \text{ (valor aproximado)}$$

Assim, como x é um número natural (quantidade de trufas produzidas e vendidas), para que haja lucro é necessário que sejam produzidas e vendidas, no mínimo, 616 trufas.

O que você achou do procedimento algébrico em relação ao que propõe o estudo do sinal da função correspondente? Provavelmente deve considerá-lo mais simples, pois basta isolar x em um dos dois membros da desigualdade. Esse procedimento algébrico possibilita transformar uma inequação em outra inequação sem que o resultado seja alterado. Dizemos que tais inequações são equivalentes.

Por meio das três situações resolvidas a seguir, vamos ampliar essas ideias.

Atividades resolvidas

28. Resolva algebricamente a inequação $5x - 7 \geq 2 + 2x$ no conjunto dos números reais.

- Na resolução algébrica a seguir, indicamos por (I), (II) e (III) algumas passagens especiais. Discuta essas passagens com os colegas:

$$5x - 7 \geq 2 + 2x$$
$$\downarrow \text{(I)}$$
$$5x - 7 - 2x \geq 2 + 2x - 2x$$
$$3x - 7 \geq 2$$
$$\downarrow \text{(II)}$$
$$3x - 7 + 7 \geq 2 + 7$$
$$3x \geq 9$$
$$\downarrow \text{(III)}$$
$$\frac{3x}{3} \geq \frac{9}{3}$$
$$x \geq 3$$

- Na passagem (I), subtraímos $2x$ membro a membro; na passagem (II), adicionamos 7 membro a membro; na passagem (III), dividimos membro a membro por 3.

Existem duas transformações (por meio de operações) que podem ser feitas em uma inequação para se obter outra equivalente, isto é, outra com o mesmo conjunto-solução.

- 1. Adicionando-se ou subtraindo-se um mesmo número ou uma mesma expressão algébrica em ambos os membros de uma inequação, obtemos outra inequação equivalente à primeira.
- 2. Multiplicando-se ou dividindo-se os dois membros de uma inequação por um número positivo ou por uma expressão positiva, obtemos outra inequação equivalente à primeira.

29. Uma empresa de planos de saúde elaborou duas propostas de pagamentos mensais para seus clientes. Analise os dois planos para determinar em quais condições um ou outro é mais vantajoso em um mesmo período.

Reinaldo Vignati

- Lei de formação das funções correspondentes aos planos, sendo x o número de consultas e y o valor pago correspondente:

$$\text{Plano A: } y = 220 + 40x$$
$$\text{Plano B: } y = 260 + 30x$$

- Cálculo de x em que os dois planos cobram o mesmo valor:

$$220 + 40x = 260 + 30x$$
$$40x - 30x = 260 - 220$$
$$10x = 40 \rightarrow x = 4$$

Se o número de consultas for 4 no período, os dois planos cobram valores iguais.

- Número de consultas em que o plano A é mais vantajoso (cliente paga menos) do que o plano B:

$$220 + 40x < 260 + 30x$$
$$40x - 30x < 260 - 220$$
$$10x < 40 \rightarrow x < 4$$

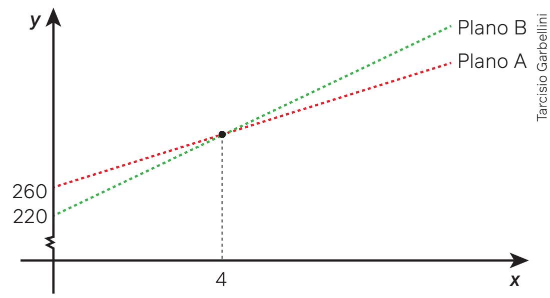
Se o número de consultas for menor que 4 no período, o plano A cobra menos que o plano B.

- Número de consultas em que o plano B é mais vantajoso (cliente paga menos) do que o plano A:

$$220 + 40x > 260 + 30x$$
$$40x - 30x > 260 - 220$$
$$10x > 40$$
$$x > 4$$

Se o número de consultas for maior que 4 no período, o plano B cobra menos que o plano A.

Essa situação poderia ser analisada, também, com base no esboço gráfico das funções correspondentes, isto é:



Embora o gráfico acima seja apenas esboço, é importante destacar que, nessa representação, devemos considerar que x é um número natural, uma vez que se refere ao número de consultas. Sendo assim, os gráficos devem ser formados por pontos alinhados, não por semirretas contínuas.

30. Quatro unidades do produto A, com massa total de 1 kg, custam 480 reais. Sete unidades do produto B, com massa total de 1 kg, custam 300 reais. Sabendo que 10 unidades do produto A e x unidades do produto B, juntas, têm a massa total de no mínimo 5 kg e não ultrapassam 2 000 reais, determine os valores correspondentes para x.

- Cálculo da massa de cada unidade dos produtos.

$$\text{Produto A: } \frac{1\,000}{4} = 250 \rightarrow 250 \text{ g}$$
$$\text{Produto B: } \frac{1\,000}{7} \rightarrow \frac{1\,000}{7} \text{ g}$$

- Cálculo do custo de cada unidade dos produtos.

$$\text{Produto A: } \frac{480}{4} = 120 \rightarrow 120 \text{ g}$$
$$\text{Produto B: } \frac{300}{7} \rightarrow \frac{300}{7} \text{ reais}$$

- De acordo com os dados do enunciado, temos que os valores de x devem verificar duas condições simultâneas:

$$\begin{cases} 10 \cdot 250 + x \cdot \dfrac{1\,000}{7} \geq 5\,000 \\ 10 \cdot 120 + x \cdot \dfrac{300}{7} \leq 2\,000 \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \text{ Passagem 1}$$

$$\begin{cases} 17\,500 + 1\,000x \geq 35\,000 \\ 8\,400 + 300x \leq 14\,000 \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \text{ Passagem 2}$$

$$\begin{cases} 1\,000x \geq 17\,500 \\ 300x \leq 5\,600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 17{,}5 \\ x \leq 18{,}666... \end{cases}$$

Para pensar e discutir

Analise a situação e a resolução (incompleta) apresentada na atividade anterior para responder às questões abaixo.

1. Foram utilizados os sinais $\leq$ e $\geq$. O que diferencia, por exemplo, $x \geq 20$ de $x > 20$? E $x \leq 20$ de $x < 20$? 1. Resposta no Manual do Professor.
2. O que foi feito na passagem 1 da resolução? 2. Os dois membros foram multiplicados por 7.
3. E na passagem 2? 3. Isolou-se o *x*.
4. Qual é a solução da situação apresentada? Justifique. 4. $x = 18$; resposta pessoal.

Atividades

80. Sendo x um número real, resolva, pelo estudo do sinal de uma função afim, as seguintes inequações:

a) $-2x + 5 \geq 0$ 80. a) $x \leq \frac{5}{2}$

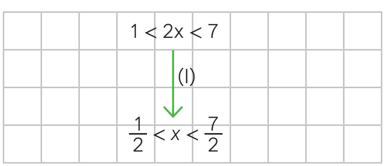
b) $3x + 10 < 0$ 80. b) $x < -\frac{10}{3}$

c) $x + 15 \leq 0$ 80. c) $x \leq -15$

d) $-6x - 18 < 0$ 80. d) $x > -3$

81. Observe como Juliana resolveu, na malha quadriculada, a inequação $1 < 2x < 7$ fazendo apenas a passagem (I) indicada:

Acervo editora



a) Explique o que ela fez na passagem (I) para obter a resposta. 81. a) Dividiu todos os termos por 2.

b) Represente, na forma de intervalo, as soluções dessa inequação.1 81. b) $\left]\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right[$

c) Essa inequação apresenta quantas soluções reais? 81. c) Infinitas.

d) Escreva todos os números inteiros que são soluções da inequação. 81. d) 1, 2 e 3

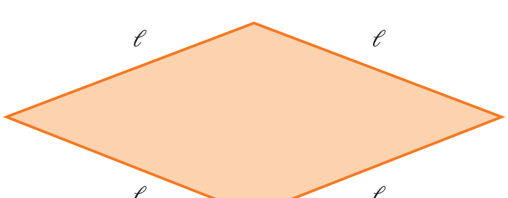
82. Considere a inequação $-3 \leq 4x \leq 8$ em que x representa um número real. Resolva essa inequação e, depois, faça o que se pede. 82. a) $\left[\frac{-3}{4}, 2\right]$

a) Represente as soluções na forma de intervalo.

b) Essa inequação tem quantas soluções inteiras? Quais são elas? 82. b) Três; 0, 1 e 2.

83. Resolva o problema a seguir.

Uma indústria de lajotas pretende lançar no mercado uma peça em formato de losango, porém não decidiu ainda qual será o tamanho dessa peça. Assim, representou-se por ℓ, em centímetros, a medida do lado desse losango.



Reinaldo Vignati

Após alguns estudos, decidiu-se que a peça deveria ter, no mínimo, 20 cm de perímetro e, no máximo, 80 cm. Determine os valores possíveis para ℓ. 83. [5; 20]

84. (EEAR) Dado o sistema, um valor que não o satisfaz é 84. Alternativa **d**.

$$\begin{cases} 3 - 2x \leq 2 \\ x - 5 < 1 - x \end{cases}$$

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) $\sqrt{5}$

d) $\sqrt{10}$

85. (IFCE) Renato trabalha contratando bandas de forró para animar festas nos finais de semana, cobrando uma taxa fixa de R$ 150,00, mais R$ 20,00 por hora. Raimundo, na mesma função, cobra uma taxa fixa de R$ 120,00, mais R$ 25,00 por hora. O tempo máximo para contratarmos a festa de Raimundo, de tal forma que não seja mais cara que a de Renato, será, em horas, igual a 85. Alternativa **a**.

a) 6

b) 5

c) 4

d) 3

e) 2

86. (Enem) Uma empresa produz painéis solares de energia elétrica, com a forma de retângulo, que geram 5 MWh (megwatts-hora) por metro quadrado. Cada painel tem 3 m de largura e 6 m de comprimento. O selo verde de eficiência é obtido se cada painel solar gerar, no mínimo, 150 MWh de energia solar. Para obter o selo verde, a empresa decide alterar apenas a largura dos seus painéis solares.

O número mínimo, em metro, que a empresa deve aumentar na largura dos seus painéis solares é 86. Alternativa **a**.

a) 2

b) 4

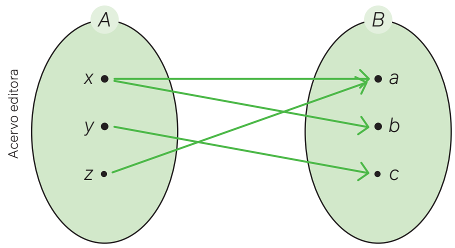
c) 5

d) 10

e) 12

Atividades finais

1. A relação $f:A \to B$ abaixo não representa uma função. Explique o motivo.



1. O elemento x de A corresponde a 2 elementos distintos de B.

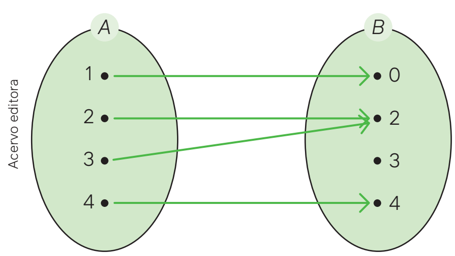
2. A lei de formação da função $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = (x - 2)^2 - (x + 2)^2$. Calcule:

a) $f(0)$; 2. a) 0

b) $f(2)$; 2. b) –16

c) $f(-2)$. 2. c) 16

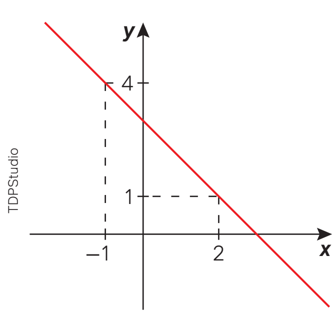
3. Em relação à função f: $A \to B$ abaixo, determine o que se pede em cada item.



a) O conjunto imagem da função. 3. a) $Im(f) = \{0, 2, 4\}$

b) $f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$. 3. b) 8

4. No plano cartesiano está representado o gráfico de uma função afim da forma $f(x) = ax + b$.



a) Determine os valores de a e b. 4. a) $a = -1$ e $b = 3$

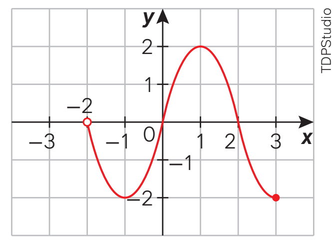
b) Calcule $f(0)$. 4. b) 3

c) Determine x tal que $f(x) = 0$. 4. c) $x = 3$

d) Para quais valores reais de x tem-se $f(x) > 0$? 4. d) $x < 3$

e) Para quais valores reais de x tem-se $f(x) < 0$? 4. e) $x > 3$

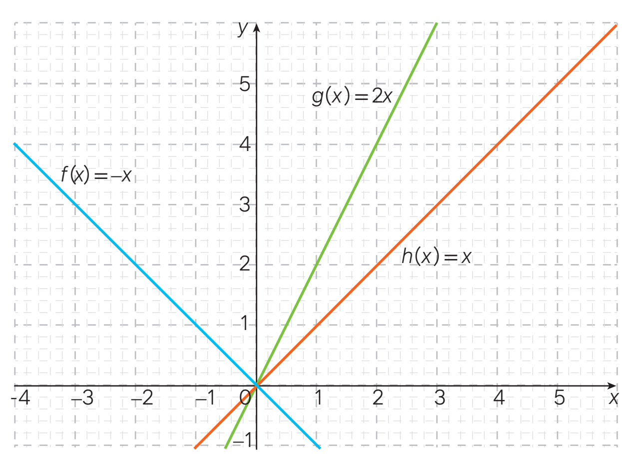
5. A função $f:A \to \mathbb{R}$ está definida conforme o gráfico a seguir.



a) Obtenha o conjunto domínio da função conforme o gráfico. 5. a) $D(f) =]-2, 3]$

b) Determine o conjunto imagem da função. 5. b) $Im(f) = [-2, 2]$

6. Utilizando um *software* de geometria dinâmica, Márcia representou os gráficos de três funções lineares f, g e h. Qual é a taxa de crescimento de cada uma dessas funções? 6. f: –1; g: 2; h: 1.



7. Considere as funções reais f e g definidas por $f(x) = 7x$ e $g(x) = 7x + 3$. Sobre elas, foram feitas as afirmações a seguir. Indique quais são verdadeiras e quais são falsas.

I. As duas funções são crescentes. 7. I. Verdadeira.

II. Nas duas funções, ao duplicarmos o valor de x, a imagem também duplica. 7. II. Falsa.

III. Na função g tem-se que $y = g(x)$ é diretamente proporcional a x. 7. III. Falsa.

IV. Na função f tem-se que $y = f(x)$ é diretamente proporcional a x. 7. IV. Verdadeira.

Questões de vestibulares e Enem

8. (Ufscar-SP) Um comerciante paga R$ 7,00 por 3 unidades de uma mercadoria, e revende por R$ 18,00 cada 5 unidades. Na comercialização dessa mercadoria, ele obtém um lucro de R$ 342,00 quando vende um total de unidades igual a 8. Alternativa **c**.

a) 210

b) 240

c) 270

d) 300

e) 330

9. (Uece) Um equipamento eletrônico utilizado por uma indústria tem seu valor monetário continuamente reduzido em função do uso e do surgimento de novas tecnologias, dentre outros fatores. Se o valor monetário do equipamento decresce linearmente com o tempo, sabendo-se que foi adquirido há três anos pelo valor de R$ 180.000,00 e que hoje está avaliado em R$ 135.000,00, é correto afirmar que o valor monetário do equipamento daqui a dois anos será

a) R$ 105.000,00
b) R$ 115.000,00
c) R$ 108.000,00
d) R$ 112.000,00

9. Alternativa **a**.

10. (UFPR) O Índice de Massa Corporal (IMC) de uma pessoa adulta é dado pela fórmula:

$$IMC = \frac{massa}{(altura)^2} \quad \begin{matrix} \textit{(massa medida em quilogramas)} \\ \textit{(altura medida em metros)} \end{matrix}$$

Admitindo-se que a altura de uma pessoa adulta é constante, se, durante um ano, ela aumentar sua massa, então é correto afirmar que nesse período o gráfico de seu IMC em função de sua massa é parte de uma:

10. Alternativa **b**.

a) reta horizontal.
b) reta crescente.
c) curva crescente côncava para cima.
d) parábola.
e) senoide.

11. (UEG-GO) No centro de uma cidade, há três estacionamentos que cobram da seguinte maneira:

11. Alternativa **d**.

Estacionamento A	Estacionamento B	Estacionamento C
R$ 5,00 pela primeira hora R$ 3,00 por cada hora subsequente	R$ 4,00 por hora	R$ 6,00 pela primeira hora R$ 2,00 por cada hora subsequente

Será mais vantajoso, financeiramente, parar

a) no estacionamento A, desde que o automóvel fique estacionado por quatro horas.
b) no estacionamento B, desde que o automóvel fique estacionado por três horas.
c) em qualquer um, desde que o automóvel fique estacionado por uma hora.
d) em qualquer um, desde que o automóvel fique estacionado por duas horas.
e) no estacionamento C, desde que o automóvel fique estacionado por uma hora.

12. (Uerj) Um professor precisou ajustar as notas de x de seus alunos, transformando-as em y, por meio da equação $y = ax + b$. Dessa forma, a maior nota alcançada, que foi 60, passou a ser 100, e a menor, que foi 10, passou a ser 60. O aluno que alcançou 30 teve a nota alterada para: 12. Alternativa **c**.

a) 72
b) 74
c) 76
d) 78

13. (UEA-AM) Considere as funções polinomiais do 1º grau $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -x + 6$. Sobre essas funções, afirma-se que 13. Alternativa **d**.

a) possuem pontos de máximo.
b) são crescentes.
c) possuem domínios diferentes.
d) têm o ponto (1, 5) em comum.
e) suas representações gráficas não se intersectam.

14. (Unifor-CE) O gerente de uma padaria observou que o gráfico da relação entre a quantidade de fatias de bolo de chocolate vendidas por dia e o preço cobrado por cada uma delas era uma reta. Ele notou que quando cobrava R$ 6,00 por fatia eram vendidas 55 fatias e quando cobrava R$ 8,00 por fatia eram vendidas apenas 25. Certo dia, ele resolveu fazer uma promoção, vendendo cada fatia por R$ 5,00. A quantidade de fatias de bolo de chocolate vendidas naquele dia foi de

a) 70
b) 75
c) 80
d) 85
e) 90

14. Alternativa **a**.

15. (Fatec-SP) Os aplicativos de entrega modificaram o consumo e os hábitos de trabalho. Por exemplo, no que se refere aos valores recebidos pelos entregadores, um aplicativo paga, na cidade de São Paulo, R$ 3,20 para cada retirada de alimento, R$ 1,40 por entrega realizada e, para cada quilômetro rodado, o entregador ganha R$ 1,10.

De acordo com o texto, a função que relaciona a quantidade de quilômetros percorridos (x) com o valor em reais (y) pago pelo aplicativo a um entregador que executou um único processo completo, descrito no texto, é 15. Alternativa **b**.

a) $y = 0{,}70x$
b) $y = 4{,}60 + 1{,}10x$
c) $y = 4{,}30 + 1{,}40x$
d) $y = 2{,}50 + 3{,}20x$
e) $y = 5{,}70x$

16. (UPF-RS) A equação $F = \frac{9}{5}C + 32$ mostra a relação entre a temperatura na escala Celsius, C, e a temperatura na escala Fahrenheit, F. Baseado na equação dada, analise as afirmativas a seguir.

I. Um aumento na temperatura de 1 grau na escala Fahrenheit equivale a um aumento na temperatura de $\frac{5}{9}$ graus na escala Celsius.

II. Um aumento na temperatura de 1 grau na escala Celsius equivale a um aumento na temperatura de 1,8 graus na escala Fahrenheit.

III. Um aumento na temperatura de $\frac{5}{9}$ graus na escala Fahrenheit equivale a um aumento de 1 grau na escala Celsius.

É correto o que se afirma em: 16. Alternativa **b**.

a) I, II e III.
b) I e II, apenas.
c) I, apenas.
d) II, apenas.
e) III, apenas.

17. (Uece) Uma caixa-d´água, cuja capacidade é 5 000 litros, tem uma torneira no fundo que, quando aberta, escoa água a uma vazão constante. Se a caixa está cheia e a torneira é aberta, depois de t horas o volume de água na caixa é dado por $V(t) = 5000 - kt$, k constante. Certo dia, estando a caixa cheia, a torneira foi aberta às 10 horas. Às 18 horas do mesmo dia, observou-se que a caixa continha 2 000 litros de água. Assim, pode-se afirmar corretamente que o volume de água na caixa era 2 750 litros, exatamente, às 17. Alternativa **c**.

a) 15 h
b) 15 h 40
c) 16 h
d) 16 h 40

18. (Unicamp-SP) Uma empresa que instala cercas de arame em terrenos trabalha com os seguintes preços: R$ 160,00 de custo inicial mais R$ 15,00 por metro de arame utilizado. A função que nos fornece o custo de cercamento de um terreno com x metros de perímetro, passando duas voltas de arame ao redor do referido terreno, é: 18. Alternativa **d**.

a) $f(x) = 120 + 15x$
b) $f(x) = 160 + 15x$
c) $f(x) = 120 + 30x$
d) $f(x) = 160 + 30x$

19. (IFMT) Após passar por um procedimento cirúrgico, Jacó foi aconselhado pela junta médica a fazer, durante os dois primeiros meses, uma dieta alimentar que lhe garanta uma nutrição mínima diária e sem sobrecarregar seu organismo, nesta fase pós-cirúrgica. Jacó deve ingerir 9 miligramas de vitamina C e 50 microgramas de vitamina, alimentando-se exclusivamente dos alimentos A e D. Cada pacote do alimento A fornece 2 miligramas de vitamina C e 4 microgramas de vitamina B. Cada pacote do alimento D fornece 7 miligramas de vitamina C e 10 microgramas de vitamina B. Consumindo x pacotes do alimento A e y pacotes do alimento D, o paciente terá certeza de estar cumprindo a dieta recomendada corretamente se: 19. Alternativa **b**.

a) $2x + 7y \leq 9$ e $4x + 10y \leq 50$
b) $2x + 7y \geq 9$ e $4x + 10y \geq 50$
c) $2x + 4y \geq 9$ e $7x + 10y \geq 50$
d) $2x + 4y \leq 9$ e $7x + 10y \leq 50$
e) $2x + 10y \geq 9$ e $7x + 4y \geq 50$

20. (ESPM-SP) Em uma fábrica, o custo de produção de x unidades é dado pela função: $C(x) = 30 + \frac{x}{2}$ e a receita obtida com a venda dessas x unidades é dada pela função $R(x) = \frac{7x}{6}$, sendo $C(x)$ e $R(x)$ em reais. O número mínimo de unidades produzidas e vendidas para que essa fábrica tenha lucro deve ser:

a) 46 **b)** 52 **c)** 37 **d)** 42 **e)** 57

20. Alternativa **a**.

21. (Uepa) Segundo a Organização das Nações Unidas (ONU) a população da Terra atingiu a marca de 7,2 bilhões de habitantes em 2013, dados publicados no estudo "Perspectivas de População Mundial". De acordo com as projeções de crescimento demográfico, seremos 8,1 bilhões de habitantes em 2025 e 9,6 bilhões de habitantes em 2050. Supondo que, a partir de 2025, a população mundial crescerá linearmente, a expressão que representará o total de habitantes (H), em bilhões de pessoas, em função do número de anos (A) é:

a) $H = 0{,}060 \cdot A + 8{,}1$
b) $H = 0{,}036 \cdot A + 7{,}2$
c) $H = 0{,}060 \cdot A + 9{,}6$
d) $H = 0{,}036 \cdot A + 8{,}1$
e) $H = 0{,}060 \cdot A + 7{,}2$

21. Alternativa **a**.

22. (Enem) Os sistemas de cobrança dos serviços de táxi nas cidades A e B são distintos. Uma corrida de táxi na cidade A é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R$ 3,45, mais R$ 2,05 por quilômetro rodado. Na cidade B, a corrida é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R$ 3,60, mais R$ 1,90 por quilômetro rodado. Uma pessoa utilizou o serviço de táxi nas duas cidades para percorrer a mesma distância de 6 km.
Qual o valor que mais se aproxima da diferença, em reais, entre as médias do custo por quilômetro rodado ao final das duas corridas? 22. Alternativa **e**.

a) 0,75
b) 0,45
c) 0,38
d) 0,33
e) 0,13

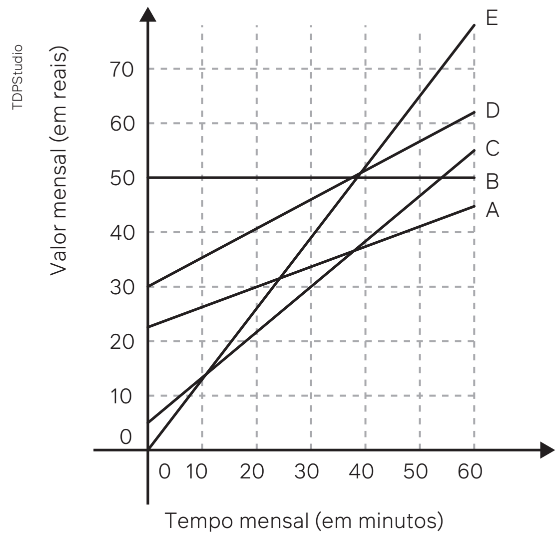
23. (Enem) Para concretar a laje de sua residência, uma pessoa contratou uma construtora. Tal empresa informa que o preço y do concreto bombeado é composto de duas partes: uma fixa, chamada de taxa de bombeamento, e uma variável, que depende do volume x de concreto utilizado. Sabe-se que a taxa de bombeamento custa R$ 500,00 e que o metro cúbico do concreto bombeado é de R$ 250,00. A expressão que representa o preço y em função do volume x, em metro cúbico, é 23. Alternativa **d**.

a) $y = 250x$
b) $y = 500x$
c) $y = 750x$
d) $y = 250x + 500$
e) $y = 500x + 250$

24. (Enem) Provedores de conteúdos postam anúncios de empresas em seus *websites*. O provedor A cobra R$ 0,10 por clique feito no anúncio, além do pagamento de uma taxa de contratação de R$ 50,00. O provedor B cobra uma taxa de contratação por anúncio mais atrativa, no valor de R$ 20,00, mais um valor por clique feito no anúncio. Para um anúncio que receberá 100 cliques, o provedor B fixará uma proposta com um valor a ser cobrado por clique, de modo que venha a receber, pelo menos, o mesmo total que receberia o provedor A. O gerente do provedor B deve avaliar os valores por clique a serem fixados.
O valor mínimo que o gerente do provedor B deverá escolher é 24. Alternativa **d**.

a) R$ 0,11
b) R$ 0,14
c) R$ 0,30
d) R$ 0,40

25. (Enem) No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês com telefone. Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

25. Alternativa **c**.

a) A

b) B

c) C

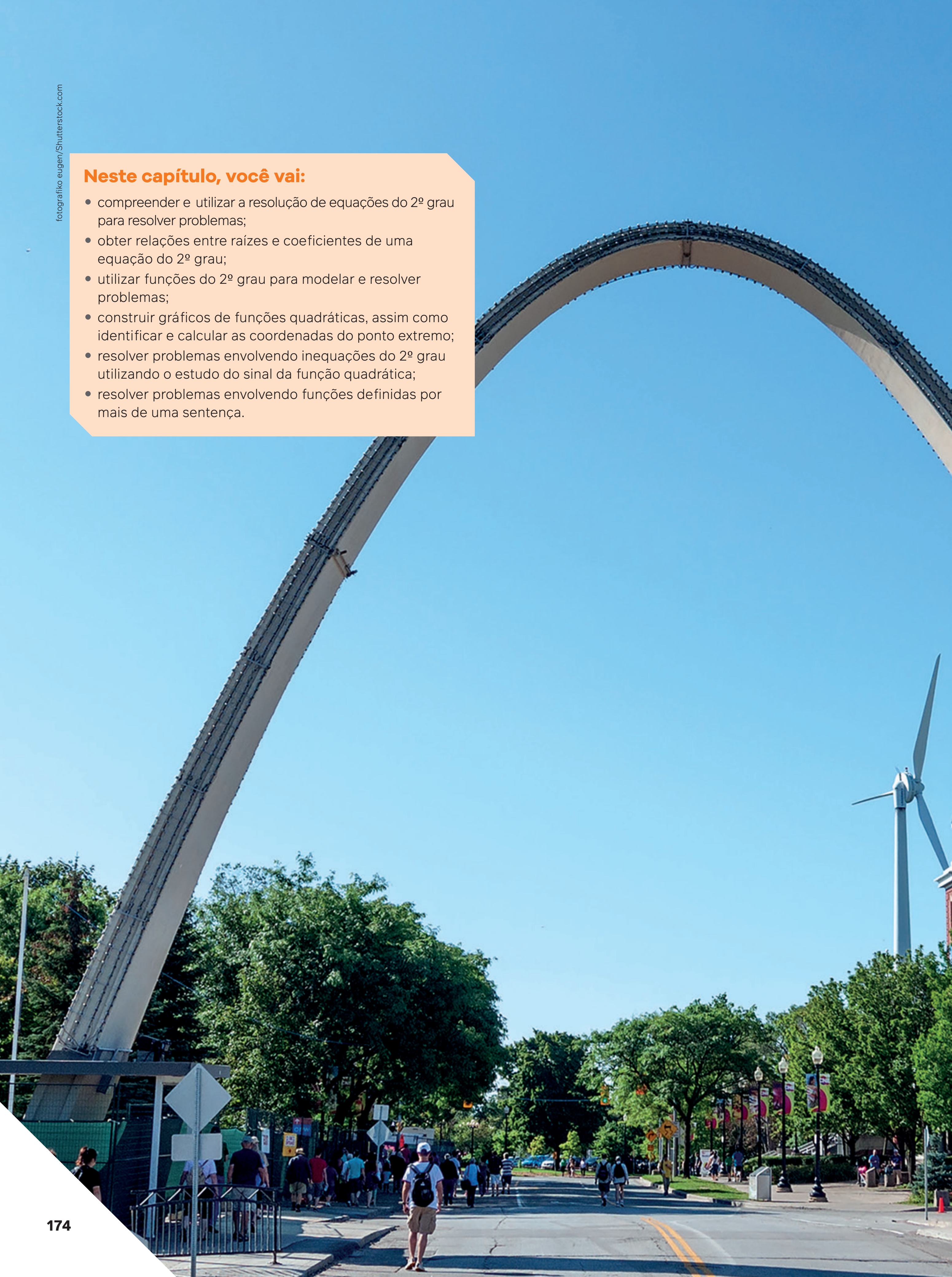
d) D

e) E

Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão em relação aos assuntos e objetivos trabalhados ao longo do presente capítulo.

Objetivos de aprendizagem	Sim	Preciso retomar
Compreendo o conceito de função como relação entre duas grandezas.		
Identifico, em gráficos ou diagramas, o domínio, o contradomínio e a imagem de uma função.		
Compreendo e analiso gráficos de funções quanto ao crescimento e decrescimento.		
Conheço função afim, identifico situações que podem ser modeladas por ela e utilizo procedimentos algébricos e gráficos para resolvê-las.		
Compreendo o significado de taxa de crescimento de uma função afim.		
Resolvo e elaboro problemas que envolvem função afim.		
Compreendo que as funções do 1º grau são casos particulares de função afim.		
Identifico que a função linear relaciona grandezas diretamente proporcionais.		
Resolvo inequações do 1º grau com base no estudo do sinal de uma função do 1º grau e também por procedimentos algébricos.		



fotografiko eugen/Shutterstock.com

Neste capítulo, você vai:

- compreender e utilizar a resolução de equações do 2º grau para resolver problemas;
- obter relações entre raízes e coeficientes de uma equação do 2º grau;
- utilizar funções do 2º grau para modelar e resolver problemas;
- construir gráficos de funções quadráticas, assim como identificar e calcular as coordenadas do ponto extremo;
- resolver problemas envolvendo inequações do 2º grau utilizando o estudo do sinal da função quadrática;
- resolver problemas envolvendo funções definidas por mais de uma sentença.

CAPÍTULO

5

Função quadrática

Dufferin Gate, arco modernista projetado por *Philip R. Brook* e construído em 1956. Toronto, Canadá, 2015.

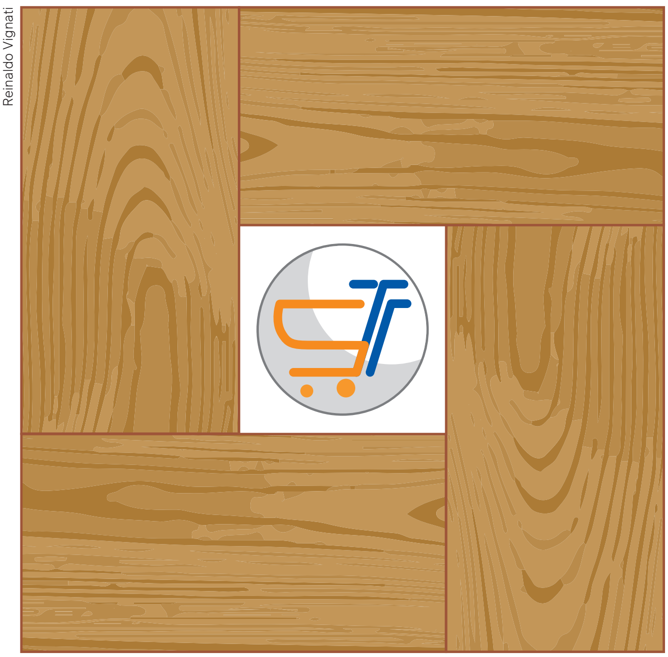
Na arquitetura de muitas construções – como prédios, praças e museus –, o elemento principal é a criatividade do profissional, que em geral utiliza fortes elementos da Matemática em seus projetos. Neste capítulo, você vai estudar a parábola, curva utilizada no projeto do arco *Dufferin Gate* em Toronto, Ontário, no Canadá.

1. **Observe as construções de sua cidade e procure identificar os elementos matemáticos que estão presentes nelas.** 1. Resposta pessoal.
2. **Faça uma lista das construções que você observou e dos respectivos elementos matemáticos. Compartilhe com os colegas.** 2. Resposta pessoal.

1 O estudo de equações do 2º grau

Uma reforma estava sendo planejada para o calçamento de um grande supermercado. Bruna era a arquiteta responsável por apresentar uma peça para a composição do piso. Entre várias sugestões, os donos do supermercado decidiram por uma peça formada de 4 retângulos iguais e um quadrado ao centro com o símbolo do supermercado, como ilustrado a seguir.

Reinaldo Vignati



Ficou estabelecido que cada peça teria 900 cm^2 de área. Considerando que as medidas de cada retângulo eram $(10 + x)$ cm por 10 cm e que a medida do lado do quadrado era x cm, qual é a medida desconhecida x?

Para pensar e discutir

1. A forma da peça, como ilustrada, será a de um quadrado? Justifique. 1. Sim; resposta pessoal.
2. Qual é a equação que representa a situação para a determinação da medida x? 2. $(20 + x)^2 = 900$
3. Como você determina a medida x? 3. Resposta pessoal.

A situação descrita acima pode ser representada por meio de uma equação do 2º grau com uma incógnita x. Voltaremos a essa situação ainda neste capítulo, pois nosso objetivo é retomar e ampliar seu conhecimento a respeito da resolução de problemas que envolvam equações do 2º grau.

Toda equação na incógnita x (poderia ser outra letra) que puder ser escrita na forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, com a, b e c números reais e com $a \neq 0$, é chamada equação do 2º grau.

São exemplos de equações do 2º grau:

- $x^2 + 7x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 7 \\ c = -3 \end{cases}$
- $3x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$
- $2x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}$
- $5x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Equações do 2º grau

Qual é o procedimento para resolver uma equação do 2º grau?

Um dos métodos de resolução está relacionado com os chamados produtos notáveis, estudados no final do Ensino Fundamental.

$$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, adicionado a duas vezes o primeiro termo multiplicado pelo segundo, adicionado ao quadrado do segundo termo.

$$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, subtraído de duas vezes o primeiro termo multiplicado pelo segundo, adicionado ao quadrado do segundo termo.

Nesses dois casos, é importante observar que o segundo membro deles são trinômios que podem ser transformados ou em quadrado da soma ou em quadrado da diferença, isto é:

trinômio quadrado perfeito ← $\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$ pode ser transformado em $\boldsymbol{(a + b)^2}$ → **quadrado da soma**

e

$\boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2}$ pode ser transformado em $\boldsymbol{(a - b)^2}$

trinômio quadrado perfeito ← → **quadrado da diferença**

Acervo editora

Para pensar e discutir

1. $x^2 + 14x + 49$ e $x^2 - 14x + 49$

1. Qual é o trinômio correspondente ao desenvolvimento de $(x + 7)^2$? E de $(x - 7)^2$?

2. O trinômio $x^2 - 10x + 25$ é um trinômio quadrado perfeito? Justifique. 2. Sim; resposta pessoal.

3. O trinômio $4x^2 + 12x + 9$ pode ser transformado no quadrado da soma de dois termos? Justifique. 3. Sim; resposta pessoal.

Quando temos uma equação do 2º grau na forma $ax^2 + bx + c = 0$, o trinômio que aparece no primeiro membro nem sempre é um trinômio quadrado perfeito, porém podemos transformá-lo. Isso nos permite resolver equações completas do 2º grau.

Para exemplificar, vamos verificar a seguinte equação:

$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

O primeiro membro dessa equação não é um trinômio quadrado perfeito; porém, observe as transformações:

$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

$$\underbrace{x^2 - 2 \cdot x \cdot 32 + 32^2} - 32^2 + 768 = 0$$

$$\underbrace{(x - 32)^2} - 32^2 + 768 = 0$$

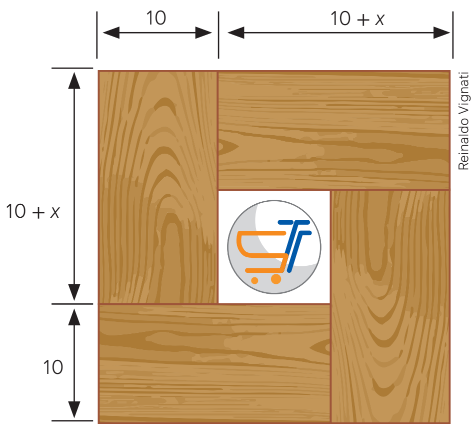
$$(x - 32)^2 = 1\,024 - 768$$

$$(x - 32)^2 = 256 \Rightarrow \begin{cases} x - 32 = 16 \Rightarrow x = 48 \\ x - 32 = -16 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$

O procedimento utilizado nessa resolução é conhecido como **completar trinômio do quadrado perfeito**. Aqui é fundamental conhecer os dois casos de produtos notáveis mencionados anteriormente.

Atividades resolvidas

1. Vamos retomar a situação apresentada no início do capítulo envolvendo o quadrado a seguir:



- Observe que a figura formada pelos quatro retângulos e pelo quadrado central resulta em um quadrado cuja medida do lado é o comprimento maior do retângulo adicionado à largura do retângulo. Assim, como a área deve ser igual a 900 cm², escrevemos:

$$(10 + x + 10)^2 = 900$$
$$(20 + x)^2 = 900$$

- Os quadrados dos números 30 e –30 resultam 900, ou seja:

$$(20 + x)^2 = 900 \Rightarrow \begin{cases} 20 + x = 30 \Rightarrow x = 10 \\ 20 + x = -30 \Rightarrow x = -50 \end{cases}$$

Embora 10 e –50 representem as soluções da equação, apenas 10 deve ser considerado, pois, no contexto, x é uma medida de comprimento.

2. Utilizando o procedimento de completar trinômio para ser trinômio quadrado perfeito, resolva a equação $x^2 - 10x + 24 = 0$.

- Conforme o quadrado da diferença de dois termos, a equação dada pode ser transformada em:

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$
$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 - 5^2 + 24 = 0$$
$$(x - 5)^2 - 25 + 24 = 0$$
$$(x - 5)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 1 \Rightarrow x = 6 \\ x - 5 = -1 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Portanto, $S = \{6, 4\}$.

3. Utilizando o procedimento de completar trinômio para ser trinômio quadrado perfeito, resolva a equação $x^2 - 2x + 99 = 0$.

- Conforme o quadrado da soma de dois termos, a equação dada pode ser transformada em:

$$x^2 - 2x + 99 = 0$$
$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 99 = 0$$
$$(x - 1)^2 - 1 + 99 = 0$$
$$(x - 1)^2 = -98$$

A equação não apresenta solução real, isto é, $S = \{\ \}$.

4. Resolva a equação $x^2 - 7x + 1 = 0$

- Conforme o quadrado da diferença de dois termos, a equação dada pode ser transformada em:

$$x^2 - 7x + 1 = 0$$
$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 1 = 0$$
$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 1 = 0$$
$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{45}{4} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{7}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \\ x - \frac{7}{2} = -\frac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Portanto, $S = \left\{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}, \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Para pensar e discutir

1. Na **atividade resolvida 3**, em uma passagem há a expressão $(x - 1)^2 = -98$. Qual é o motivo dessa equação não apresentar solução real? 1. Não existe número real cujo quadrado seja negativo.
2. Como você explica que $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$? 2. Resposta pessoal.

Atividades

1. Resolva cada uma das seguintes equações do 2º grau.

a) $(x - 3)^2 = 25$ 1. a) $S = \{8, -2\}$

b) $(3x - 2)^2 = 1$ 1. b) $S = \left\{1, \frac{1}{3}\right\}$

c) $(x + 5)^2 = 100$ 1. c) $S = \{5, -15\}$

d) $(4x - 1)^2 = 49$ 1. d) $S = \left\{2, -\frac{3}{2}\right\}$

2. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.

Em cada expressão a seguir, adicionando-se um número, obtém-se um trinômio quadrado perfeito. Determinem o número que deve ser adicionado e, depois, escrevam o trinômio como quadrado de uma soma ou quadrado de uma diferença.

a) $x^2 - 10x$ 2. a) 25; $(x - 5)^2$

b) $x^2 + 30x$ 2. b) 225; $(x + 15)^2$

c) $x^2 - 8x$ 2. c) 16; $(x - 4)^2$

d) $x^2 + 3x$ 2. d) $\frac{9}{4}$; $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$

e) $x^2 - 7x$ 2. e) $\frac{49}{4}$; $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2$

f) $4x^2 - 4x$ 2. f) 1; $(2x - 1)^2$

g) $9x^2 + 12x$ 2. g) 4; $(3x + 2)^2$

3. Para cada expressão a seguir, adicione ou subtraia algum termo para torná-la um trinômio quadrado perfeito.

a) $4x^2 - 4x$ 3. a) $+1$

b) $x^2 + 10x$ 3. b) $+25$

c) $y^2 + 16$ 3. c) $+8y$ ou $-8y$

d) $9y^2 + 16$ 3. d) $+24y$ ou $-24y$

4. Junte-se a um colega para fazer esta atividade. Utilizando o procedimento de completar o trinômio para obter um trinômio quadrado perfeito, determinem o conjunto-solução de cada equação do 2º grau a seguir no conjunto dos números reais.

a) $x^2 - 4x + 4 = 0$ 4. a) $S = \{2\}$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ 4. b) $S = \{3\}$

c) $x^2 + 2x - 3 = 0$ 4. c) $S = \{-3, 1\}$

d) $x^2 - 10x + 21 = 0$ 4. d) $S = \{3, 7\}$

e) $x^2 + 10x + 16 = 0$ 4. e) $S = \{-8, -2\}$

f) $x^2 + 12x + 46 = 0$ 4. f) $S = \{\ \}$

g) $x^2 + 16x + 100 = 0$ 4. g) $S = \{\ \}$

5. Júlia, ao se deparar com a equação $x^2 - 10x + 9 = 0$, utilizou o procedimento de fatoração descrito a seguir. Observe e faça o que se pede.

$$x^2 - 10x + 9 = 0 \xrightarrow{\text{Etapa 1}} x^2 - x - 9x + 9 = 0 \xrightarrow{\text{Etapa 2}} x(x - 1) - 9(x - 1) = 0 \xrightarrow{\text{Etapa 3}} (x - 1)(x - 9) = 0$$

a) Descreva cada uma das três etapas desenvolvidas por Júlia. 5. a) Resposta pessoal.

b) Escreva o conjunto-solução da equação. 5. b) $S = \{1, 9\}$

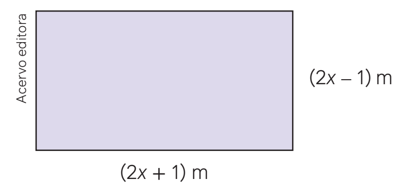
6. Utilizando o procedimento descrito na atividade anterior, para resolver a equação $x^2 + 13x + 36 = 0$, temos a seguinte etapa:

$$x^2 + 13x + 36 = 0 \xrightarrow{\text{Etapa 1}} x^2 + 9x + 4x + 36 = 0$$

a) Complete a fatoração descrevendo as duas etapas que faltam. 6. a) Resposta no Manual do Professor.

b) Escreva o conjunto-solução dessa equação. 6. b) $S = \{-9, -4\}$

7. Observe abaixo as medidas, em metros, dos lados de um terreno em forma retangular cuja área é igual a 899 m².



a) Escreva uma equação do 2º grau na forma reduzida que representa a situação. 7. a) $4x^2 - 900 = 0$

b) Determine o valor de x. 7. b) $x = 15$

c) Informe as medidas em metros dos lados desse terreno. 7. c) 31 m e 29 m

8. Junte-se a um colega para resolver as situações a seguir.

Situação 1

Pedro, em seu antigo emprego, trabalhava uma quantidade x de horas por semana e ganhava R\$ 600,00 pela semana trabalhada. Em seu novo emprego, Pedro ganha R\$ 960,00 por semana, entretanto, trabalha 4 horas a mais por semana e recebe R\$ 4,00 a menos por hora trabalhada. Qual o valor de x? 8. Situação 1. $x = 6$

Situação 2

(UFF-RJ) Na divisão dos lucros com seus 20 acionistas, uma empresa distribuiu R\$ 600,00 entre os preferenciais e R\$ 600,00 entre os ordinários. Sabe-se que cada acionista preferencial recebeu R\$ 80,00 a menos do que cada acionista ordinário. Determine quantos acionistas preferenciais essa empresa possui. 8. Situação 2. 15

Situação 3

Determinado terreno tem a forma de um retângulo cuja área é 875 m². Sabe-se que o lado maior tem 10 m a mais que a medida do lado menor. Determine as medidas dos lados desse retângulo. 8. Situação 3. 25 m e 35 m

9. Em janeiro de 2024, Marta gastou R\$ 192,00 na compra de algumas peças iguais de certo produto. No mês seguinte, o preço unitário dessas peças aumentou R\$ 16,00 e, com a mesma quantia que gastou em janeiro, ela pôde comprar duas peças a menos. Quanto custou cada peça que Marta comprou em fevereiro de 2024? 9. R\$ 48,00.

A fórmula resolutiva

Utilizando o procedimento de completar um trinômio para ser um trinômio quadrado perfeito, podemos obter uma fórmula resolutiva que nos possibilita determinar as soluções de uma equação do 2º grau na forma $ax^2 + bx + c = 0$ com base em seus coeficientes a, b e c.

Observe e analise algumas passagens que destacamos para obter a fórmula resolutiva:

$ax^2 + bx + c = 0$

↓ multiplicamos por $4a$

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

↓ subtraímos $4ac$ de ambos os membros

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

↓ adicionamos b^2 a ambos os membros

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

↓ quadrado da soma

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

↓ isolando x

$$\underbrace{\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}_{\text{fórmula resolutiva}}$$

Para pensar e discutir

1. Na demonstração, qual é o trinômio quadrado perfeito?

2. Utilizando a fórmula, quais são as soluções da equação $x^2 + 4x + 3 = 0$?

3. Haverá solução real para uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que $b^2 - 4ac$ é um número negativo? Justifique.

1. $4a^2x^2 + 4abx + b^2$
2. $S = \{-1, -3\}$
3. Não; resposta pessoal.

Atividades resolvidas

5. Utilize a fórmula resolutiva vista anteriormente para resolver a equação $x^2 - 8x + 7 = 0$.

- Conforme a equação, temos os seguintes coeficientes:

$$x^2 - 8x + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 7 \end{cases}$$

- Fórmula resolutiva.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Substituindo na fórmula resolutiva:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8 + 6}{2} \Rightarrow x = 7 \\ x = \frac{8 - 6}{2} \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Portanto, $S = \{7, 1\}$.

6. Utilize a fórmula resolutiva vista anteriormente para resolver a equação incompleta $x^2 - 9x = 0$.

- Conforme a equação, temos os seguintes coeficientes:

$$2x^2 - 9x = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -9 \\ c = 0 \end{cases}$$

- Substituindo na fórmula resolutiva:

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81}}{4}$$

$$x = \frac{9 \pm 9}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9 + 9}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{2} \\ x = \frac{9 - 9}{4} \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Portanto, $S = \left\{\frac{9}{2}, 0\right\}$.

Para pensar e discutir

1. Como você resolveria a equação $x^2 - 8x + 7 = 0$ sem a fórmula resolutiva? 1. Resposta pessoal.

2. E a equação $x^2 - 9x = 0$? 2. Resposta pessoal.

7. A medida dos lados de um quadrado é aumentada em 6 unidades de comprimento e sua área fica multiplicada por 16. Determine a medida do quadrado original.

- Considerando x a medida do quadrado original, temos:

$$A_{final} = 16 \cdot A_{inicial}$$
$$(x + 6)^2 = 16 \cdot x^2$$
$$x^2 + 12x + 36 = 16x^2$$
$$-15x^2 + 12x + 36 = 0$$
$$\Big\downarrow \div (-3)$$
$$5x^2 - 4x - 12 = 0$$

Lembre-se:
Multiplicando ou dividindo ambos os membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, o resultado não se altera.

- Utilizando a fórmula resolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-12)}}{2 \cdot 5}$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{10}$$
$$x = \frac{4 \pm 16}{10} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4 + 16}{10} \Rightarrow x = 2 \\ x = \frac{4 - 16}{10} \Rightarrow x = -1{,}2 \rightarrow \text{(não convém)} \end{cases}$$

Como x representa a medida do lado do quadrado, temos que o lado tem 2 unidades de comprimento.

Atividades

10. Utilizando a fórmula resolutiva, obtenha o conjunto-solução de cada equação do 2º grau a seguir.

a) $x^2 - x - 12 = 0$ 10. a) $S = \{4, -3\}$

b) $9x^2 - 63x + 54 = 0$ 10. b) $S = \{6, 1\}$

c) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ 10. c) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$

d) $9x^2 - 4x + 3 = 0$ 10. d) $S = \{\ \}$

e) $x^2 + 3x - 10 = 0$ 10. e) $S = \{-5, 2\}$

f) $3x^2 - x - 1 = 0$ 10. f) $S = \left\{\frac{1 + \sqrt{13}}{6}, \frac{1 - \sqrt{13}}{6}\right\}$

g) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ 10. g) $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

11. As equações a seguir não estão escritas na forma reduzida. Obtenha o conjunto-solução de cada uma delas. Atenção: inicialmente você deverá escrevê-las na forma reduzida.

a) $x^2 = \frac{4x}{5} + \frac{1}{5}$ 11. a) $S = \left\{1, -\frac{1}{5}\right\}$

b) $\frac{2x + 11}{3} - 1 = \frac{x^2 - 5x}{6}$ 11. b) $S = \left\{\frac{9 + \sqrt{145}}{2}, \frac{9 - \sqrt{145}}{2}\right\}$

c) $(x - 1)(x - 2) = 6$ 11. c) $S = \{4, -1\}$

d) $(x - 8)(2x - 3) = 34$ 11. d) $S = \left\{10, -\frac{1}{2}\right\}$

e) $(x - 2)^2 = x + 1$ 11. e) $S = \left\{\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right\}$

12. Apresentamos a seguir pequenas situações para serem equacionadas e, então, resolvidas no conjunto dos números reais.

Veja, no quadro, as etapas sugeridas para a resolução dos problemas (das situações).

Lembre-se de que, ao equacionar uma situação, você utilizará operações e símbolos para representar os dados presentes no enunciado. Outro ponto importante: na 4ª etapa do quadro, verificar a validade de uma solução significa que, além de substituir o valor encontrado na equação, é necessário analisar o contexto.

1ª) Leia cada enunciado e represente pela letra x a incógnita do problema.
2ª) Escreva a equação correspondente.
3ª) Escolha procedimentos e resolva cada equação.
4ª) Verifique a validade da(s) solução(ões) encontrada(s) analisando o contexto do problema.

Problema 1
A soma de um número com seu quadrado é 30. Obtenha esse número. 12. Problema 1. 5 ou – 6

Problema 2
O quadrado de um número positivo diminuído de seu dobro é igual a 15. Qual é esse número? 12. Problema 2. 5

Problema 3
O quadrado da altura de um prédio, aumentada de seu dobro, é igual a 35 metros. Qual é a altura do prédio? 12. Problema 3. 5 m

Problema 4
A área de um retângulo é 84 cm². Sabendo que a medida de um dos lados supera em 5 cm a medida do outro lado, determine as medidas dos lados desse retângulo. 12. Problema 4. 7 cm e 12 cm

13. A expressão matemática $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ fornece o número de jogos de futebol de salão que devem ser disputados por n times em que cada um se enfrenta apenas uma vez. De acordo com essas condições, faça o que se pede.

a) Determine o número de jogos que serão disputados por quatro times A, B, C e D. Escreva todos os confrontos.
13. a) 6 jogos: A × B, A × C, A × D, B × C, B × D e C × D

b) Determine o número de jogos que serão disputados por cinco times A, B, C, D e E. Escreva todos os confrontos.
13. b) 10 jogos: A × B, A × C, A × D, A × E, B × C, B × D, B × E, C × D, C × E e D × E

14. Ainda em relação à situação anterior, faça o que se pede.

a) Escreva uma equação do 2º grau na forma reduzida que possibilite calcular o número de times que participarão de uma competição de futebol de salão considerando que, ao todo, serão disputados 28 jogos em confronto único, isto é, cada time joga com o outro apenas uma vez. Depois, resolva a equação e apresente a solução.
14. a) Resposta no Manual do Professor.

b) Escreva uma equação do 2º grau na forma reduzida que possibilite calcular o número de times que participarão de uma competição de futebol de salão considerando que ao todo serão disputados 66 jogos. Depois, resolva a equação e apresente a solução.
14. b) Resposta no Manual do Professor.

15. A tabela a seguir contém, com base no Índice de Massa Corpórea (IMC), a classificação de uma pessoa quanto à obesidade.

Classificação do IMC

IMC	Classificação
16 a 16,9 kg/m²	Muito abaixo do peso
17 a 18,4 kg/m²	Abaixo do peso
18,5 a 24,9 kg/m²	Peso normal
25,0 a 29,9 kg/m²	Acima do peso
30,0 a 34,9 kg/m²	Obesidade grau I
35 a 40 kg/m²	Obesidade grau II
maior que 40,0 kg/m²	Obesidade grau III

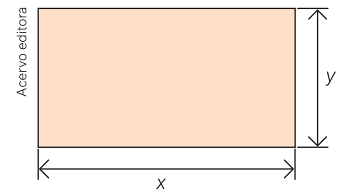
Fonte: CORTEZ, D. IMC é confiável? Entenda o cálculo e como melhorar sua Saúde. *VivaBem UOL*, 17 maio 2022. Disponível em: https://www.uol.com.br/vivabem/faq/imc-como-calcular-tabela-dicas-como-melhorar-e-mais.htm. Acesso em: 4 set. 2024.

A equação $IMC = \frac{m}{h^2}$ possibilita obter o IMC de uma pessoa conhecidos sua massa m (em quilograma) e sua altura h (em metros).

a) Escreva uma equação na forma reduzida na incógnita h em que o IMC seja 40 e a massa da pessoa, 80 kg. Depois, resolva essa equação determinando a altura da pessoa.
15. a) $40h^2 - 80 = 0$; $h \cong 1{,}41$ m

b) Uma pessoa tem IMC = 30 e sua altura é 1,60 m. Qual é sua massa em quilogramas? 15. b) 76,8 kg

16. O desenho a seguir representa um terreno de área 600 m². Para demarcar esse terreno, Pedro utilizou exatamente 100 metros de corda em seu perímetro.



a) Escreva uma equação do 2º grau na incógnita x que represente a situação. 16. a) $x^2 - 50x + 600 = 0$

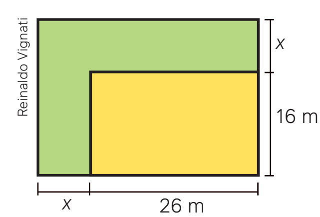
b) Determine as dimensões do terreno, sendo x a maior medida. 16. b) $x = 30$ m e $y = 20$ m

17. Um grupo de n amigos programou uma viagem cujo custo total de R$ 10.800,00 seria repartido igualmente entre todos que iriam participar. Por questões pessoais, dois dos amigos não puderam comparecer. Os cálculos foram refeitos e descobriram que, entre os que viajaram, cada amigo pagaria um adicional de R$ 32,00.

a) Escreva uma equação do 2º grau em função de n que represente a situação que possibilita calcular o número total de amigos. 17. a) $n^2 - 2n - 675 = 0$

b) Qual é a solução do problema? 17. b) $S = \{27\}$

18. A ilustração a seguir representa um terreno retangular cujas medidas são 26 m por 16 m. O proprietário conseguiu uma ampliação em dois lados do terreno, com o acréscimo de duas faixas de mesma largura (representadas por x). Com a nova ampliação, o terreno terá ao todo 816 m² de área. Qual deverá ser a largura dessas faixas?



a) Escreva uma equação do 2º grau que represente a situação. 18. a) $x^2 + 42x - 400 = 0$

b) Resolva a situação e apresente a largura das faixas.
18. b) 8 m

19. Considere a seguinte situação geométrica:

> Aumentando-se a medida do lado de um quadrado em 5 cm, obtém-se um novo quadrado cuja área é quatro vezes a área do quadrado original. Qual é a medida do lado do quadrado original?

a) Sendo x a medida do lado original, faça um desenho para representar essa situação.
19. a) Resposta no Manual do Professor.

b) Escreva uma equação do 2º grau, na forma reduzida, que represente a situação.
19. b) $3x^2 - 10x - 25 = 0$

c) Determine a medida x do lado do quadrado original. 19. c) 5 cm

O discriminante e as raízes de uma equação do 2º grau

Até aqui você resolveu situações diversas que envolviam equações do 2º grau. Entre as equações resolvidas, você deve ter percebido que existem três possibilidades quanto às soluções no conjunto dos números reais.

Possibilidade 1

A equação admite duas soluções que são números reais distintos. Nesse caso, o conjunto-solução será formado por dois elementos.

Possibilidade 2

A equação admite duas soluções que são números reais iguais. Nesse caso, o conjunto-solução será formado por apenas um elemento.

Possibilidade 3

A equação não admite solução real. Nesse caso, considerando o conjunto dos números reais, dizemos que o conjunto-solução não tem elemento.

Observação:

Dada uma equação do 2º grau na forma $ax^2 + bx + c = 0$, temos a fórmula resolutiva $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Nessa relação, vamos representar o radicando por $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$, que também é conhecido por **discriminante**.

Junte-se a um colega para analisar o quadro anterior tendo como referência as questões a seguir.

Para pensar e discutir

1. Qual é o conjunto-solução da equação $x^2 - 4x + 5 = 0$? Resolvam a equação e observem o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$. 1. $S = \{\ \}$; $\Delta < 0$

2. E da equação $4x^2 - 12x + 9 = 0$? Resolvam a equação e observem o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$. 2. $x = \frac{3}{2}$; $\Delta = 0$

3. E da equação $2x^2 - 5x + 3 = 0$? Resolvam a equação e observem o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$. 3. $x = 1$ ou $x = \frac{3}{2}$; $\Delta > 0$

A qual conclusão você chega analisando os valores de $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$ e as possibilidades quanto às soluções no conjunto dos números reais?

Vamos retomar a fórmula resolutiva e observar com um pouco mais de atenção o chamado discriminante. Assim, dada a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Big\downarrow \; \Delta = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Com base no valor do discriminante $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$ de uma equação do 2º grau na forma $ax^2 + bx + c = 0$, obtemos as seguintes possibilidades quanto às soluções:

- $\boldsymbol{\Delta > 0}$ → a equação admite duas soluções reais e distintas;
- $\boldsymbol{\Delta = 0}$ → a equação admite duas soluções reais e iguais;
- $\boldsymbol{\Delta < 0}$ → a equação não admite raiz real.

Atividades resolvidas

8. Verifique se a equação $2x^2 - x + 5 = 0$ admite: 2 raízes reais e distintas, 2 raízes reais e iguais ou não admite raiz real.

- Sem resolver a equação, podemos examinar o valor do discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5$$
$$\Delta = -39$$

Como o discriminante é negativo, a equação não admite raízes reais.

9. Considere a equação do 2º grau na incógnita x dada por $x^2 + 5x - 3k = 0$, sendo k um número real. Para quais valores de k a equação admite duas raízes reais e distintas?

- Para que essa equação admita duas raízes reais e distintas, o discriminante correspondente deve ser positivo, isto é:

$$\Delta > 0$$
$$b^2 - 4ac > 0$$
$$5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3k) > 0$$
$$25 + 12k > 0$$
$$12k > -25 \Rightarrow k > -\frac{25}{12}$$

Portanto, para qualquer valor de k tal que $k > -\frac{25}{12}$.

10. Sabe-se que a equação do 2º grau $9x^2 - mx + 1 = 0$ admite duas raízes reais iguais. Nessas condições, determine os valores de m.

- Para que essa equação admita duas raízes reais e iguais, o discriminante correspondente deve ser igual a zero, isto é:

$$\Delta = 0$$
$$(-m)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$$
$$m^2 = 36 \Rightarrow m = \pm 6$$

Portanto, m pode ser -6 ou m pode ser 6.

Atividades

20. Discuta outro procedimento para a determinação de m na equação $9x^2 - mx + 1 = 0$, de tal forma que ela admita duas raízes reais e iguais sem a utilização do discriminante. 20. Resposta pessoal.

21. Utilizando o cálculo do discriminante Δ, analise cada equação classificando-a em: tem duas raízes reais e distintas, tem duas raízes reais e iguais, ou, ainda, não tem raiz real.

a) $x^2 - 4x + 5 = 0$ 21. a) Não tem raiz real.

b) $3x^2 - x + 2 = 0$ 21. b) Não tem raiz real.

c) $-2x^2 + 2x + 3 = 0$ 21. c) Tem duas raízes reais e distintas.

d) $4x^2 - 0{,}5x + 0{,}1 = 0$ 21. d) Não tem raiz real.

e) $x^2 + 25 = 0$ 21. e) Não tem raiz real.

f) $x^2 - 12x + 36 = 0$ 21. f) Tem duas raízes reais e iguais.

g) $x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 0$ 21. g) Tem duas raízes reais e iguais.

22. Considere a equação do 2º grau na incógnita x dada por $x^2 + 7x + 7k = 0$. Determine os valores de k para os quais essa equação:

a) tenha duas raízes reais e iguais; 22. a) $k = \frac{7}{4}$

b) não tenha raízes reais; 22. b) $k > \frac{7}{4}$

c) tenha duas raízes reais e distintas. 22. c) $k < \frac{7}{4}$

23. Ao considerar a equação do 2º grau na incógnita x dada por $ax^2 + 2x + 3 = 0$, sendo a um número real diferente de zero, Carlos calculou o discriminante Δ como indicado a seguir:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot a \cdot 3$$
$$\Delta = 4 \cdot 12 \cdot a$$

Com base nesse discriminante, responda:

a) Para $a = 5$, essa equação admitirá raiz real? 23. a) Não.

b) Se $a = -5$, essa equação admitirá raízes reais e distintas? 23. b) Sim.

c) Qual será o valor de a para que essa equação admita duas raízes reais e iguais? 23. c) $\frac{1}{3}$

d) Se a for um número negativo qualquer, o que será correto afirmar sobre as raízes dessa equação?
23. d) Admitirá sempre duas raízes reais e distintas.

24. Na equação $5x^2 + mx - 2 = 0$, a letra m representa um número real qualquer. Faça o que se pede.

a) Calcule o discriminante Δ em função de m.
24. a) $\Delta = m^2 + 40$

b) Responda: Essa equação sempre admitirá duas raízes reais e distintas para qualquer valor real m? Justifique. 24. b) Sim; resposta pessoal.

25. Qual deverá ser o valor de k para que a equação $x^2 + (k - 1)x + k - 2 = 0$, na incógnita x, admita duas raízes reais e iguais? 25. $k = 3$

26. Observe a equação abaixo e, na sequência, sinalize quantas raízes ela possui. 26. Alternativa **a**.

$$3x^2 - 3x + 3 = 0$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

27. Ao resolver uma equação do 2º grau ou discutir as possibilidades quanto às raízes, um procedimento é inicialmente obter o valor do discriminante. Observe, no exemplo a seguir, como podemos obter o discriminante da equação $x^2 - 2x + k = 0$.
Equação: $x^2 - 2x + k = 0$

- Cálculo do discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k$$
$$\Delta = 4 - 4k$$

Faça o que se pede.

a) Informe quatro valores reais de k para que a equação não apresente solução real.
27. a) Resposta pessoal.

b) Informe quatro valores reais de k para que a equação apresente soluções reais.
27. b) Resposta pessoal.

28. Considere agora a equação do 2º grau na incógnita x dada por $x^2 + kx + 2 = 0$. Faça o que se pede.

a) Determine, em função de k, o discriminante.
28. a) $\Delta = k^2 - 8$

b) Escreva três valores inteiros de k para que a equação não admita solução real.
28. b) Resposta pessoal.

c) Escreva três valores inteiros de k para que a equação admita solução real.
28. c) Resposta pessoal.

29. Todos os estudantes da turma do Ensino Médio se comunicam por meio de mensagens em aparelhos de *smartphone*. Considere que cada um dos n estudantes da turma mandou exatamente uma mensagem para cada colega, em separado.

Reinaldo Vignati

Exemplo de envio de mensagens em *smartphone*.

a) Como calcular o número total de mensagens?
29. a) $n(n - 1)$

b) Se o número de estudantes for 10, quantas foram as mensagens? 29. b) 90

c) Se o número de estudantes for 12, quantas foram as mensagens? 29. c) 132

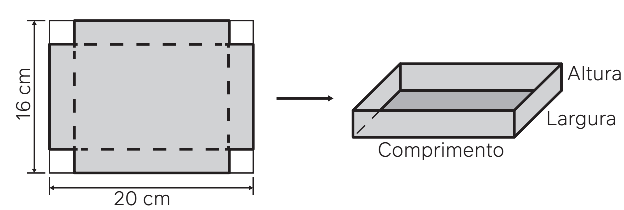
d) Se foram enviadas ao todo 420 mensagens, quantos são os estudantes dessa turma? Explique como você resolveu. 29. d) 21; resposta pessoal

30. Junte-se a um colega para esta atividade.

a) É possível que sejam enviadas exatamente 7 mensagens para um grupo n de estudantes? Justifiquem. 30. a) Não; resposta pessoal.

b) É possível que sejam enviadas exatamente 20 mensagens para um grupo n de estudantes? Justifiquem. 30. b) Sim; resposta pessoal.

31. Uma folha de papelão é utilizada para formar uma caixa, como indicam as figuras a seguir, em que 20 cm e 16 cm representam as medidas da folha retangular. Considere que x representa a medida do lado dos quadradinhos dos quatro cantos e observe ainda que esses quatro quadradinhos da folha devem ser retirados para que se possa fazer a dobra.



Acervo editora

Parte 1

A área da base da caixa é calculada multiplicando-se comprimento e largura (ver ilustração à direita), na mesma unidade de medida. Assim, determine a área da base da caixa considerando que:

a) $x = 1$ cm; 31. Parte 1 a) 252 cm²

b) $x = 2$ cm. 31. Parte 1 b) 192 cm²

Parte 2

31. Parte 2 a) $(20 - 2x)(16 - 2x)$

a) Escreva a área da base da caixa em função de x.

b) Responda: Se a área da base da caixa for 60 cm², quais serão as dimensões (comprimento, largura e altura) da caixa?
31. Parte 2 b) Comprimento: 10 cm, largura: 6 cm e altura: 5 cm.

Infográfico clicável
Arco e flecha

Arco e flecha

O arco e flecha é um dos artefatos de longo alcance mais antigos da humanidade. Veja a seguir algumas curiosidades sobre ele e sua relação com a Matemática.

A prática do tiro com arco e flecha é uma prova dos Jogos Olímpicos desde a segunda edição do evento, em 1900, na cidade de Paris, e o nome da modalidade esportiva é tiro com arco.

A maioria dos povos originários brasileiros, como os do Xingu e do Alto Amazonas, costuma usar o caule de uma palmeira chamada tucum para fazer o arco, bambu para as flechas e estopa de embira para as cordas. O motivo de a flecha ter penas na parte posterior é que, quando ela atravessa o ar, sua ponta tende a se erguer, criando atrás dela uma zona de turbulência que interfere no trajeto. A função das penas é justamente diminuir esse efeito.

Os jovens da etnia ashaninka, que habitam o sudeste do Acre, praticam o *apañare*, um ritual em que demonstram habilidade ao pegar com a mão uma flecha lançada. Outras etnias, como gavião kyikatejê e parkatêjê, da Terra Indígena Mãe Maria, no estado do Pará, também praticam esse ritual.

O tiro com arco e flecha não é tão simples, exige paciência, precisão e estabilidade. Com o tempo e o desenvolvimento da técnica, as flechas e os arcos foram se aperfeiçoando.

O primeiro indígena brasileiro a participar da competição de arco e flecha em uma olimpíada foi Dream Braga, da etnia kambeba do Amazonas, nos Jogos Olímpicos de 2016, no Rio de Janeiro.

A origem do arco e flecha é discutida, mas está associada à caça. No Período Mesolítico, era utilizado como recurso de sobrevivência. Também foi utilizado como instrumento de guerra, por ser um artefato de longo alcance.

Para atingir um alvo, deve-se conhecer muito bem, mesmo intuitivamente, o comportamento da flecha na trajetória, desde o instante em que é lançada até acertar o alvo.

1. Considere que a altura *h* de uma flecha lançada quando o arqueiro está rente ao chão possa ser descrita pela relação $h = -40 \cdot t^2 + 200 \cdot t$, sendo *t* o tempo em segundos. Determine o tempo que esse projétil permaneceu no ar. Explique como resolveu. 1. 5 s; resposta pessoal

2. Faça uma pesquisa sobre as etnias de povos originários do seu estado. Escreva um pequeno texto com base na pesquisa feita e compartilhe com a turma. 2. Resposta pessoal.

Fonte: A FÍSICA do arco e flecha. *A Física Ontem e Hoje*, Espírito Santo, ed. 13, jun. 2015. Disponível em: http://www.fisica.alegre.ufes.br/sites/fisica.alegre.ufes.br/files/jornal_online_13a_edicao_.pdf. Acesso em: 28 jun. 2024.

Soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau

Ao resolvermos uma equação do 2º grau na incógnita x na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, utilizamos a fórmula resolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

em que $\Delta = b^2 - 4ac$. Dependendo do valor assumido pelo discriminante Δ, temos as seguintes possibilidades:

- $\Delta > 0$: a equação admite duas raízes reais e distintas;
- $\Delta = 0$: a equação admite duas raízes reais e iguais;
- $\Delta < 0$: a equação não admite raízes reais.

Neste último caso, a equação admitirá raízes ditas imaginárias. Independentemente de as raízes serem reais distintas, reais iguais ou mesmo não serem reais, podemos calcular a soma e o produto delas sem resolver a equação, apenas conhecendo os coeficientes a, b e c.

Exemplo:

Na equação $2x^2 - 5x - 3 = 0$, temos que:

- soma das raízes $= \frac{5}{2}$
- produto das raízes $= \frac{-3}{2}$

Para pensar e discutir

1. Quais são as raízes da equação $2x^2 - 5x - 3 = 0$? 1. $-\frac{1}{2}$ e 3
2. Quais os valores da soma e do produto dessas raízes? 2. Soma: $\frac{5}{2}$, produto: $-\frac{3}{2}$.
3. Qual relação você estabelece entre os valores obtidos para a soma e para o produto em relação aos coeficientes da equação? 3. Resposta pessoal.

Utilizando a fórmula resolutiva e considerando que x_1 e x_2 são as raízes da equação (reais distintas, reais iguais ou mesmo não reais), podemos obter a soma e o produto delas em função dos coeficientes, isto é:

- equação: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$
- fórmula resolutiva: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- soluções: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Obtendo a soma das raízes:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a}$$

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

$\longrightarrow$ A soma das raízes é o oposto do coeficiente de x dividido pelo coeficiente de x^2.

Obtendo o produto das raízes:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

$\longrightarrow$ O produto das raízes é o quociente entre o termo independente de x e o coeficiente de x^2.

Essas relações obtidas possibilitam o cálculo tanto da soma quanto do produto das raízes de uma equação do 2º grau com base no conhecimento de seus coeficientes, isto é, não há a necessidade de resolvermos a equação se desejarmos obter esses dois valores (soma e produto).

Atividades resolvidas

11. Dada a equação do 2º grau $2x^2 - 8x - 15 = 0$ e considerando que suas raízes são x_1 e x_2, obtenha a soma e o produto delas, sem resolver a equação.

- Utilizando a relação da soma das raízes, temos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$x_1 + x_2 = -\frac{-8}{2}$$
$$x_1 + x_2 = 4$$

- Utilizando a relação do produto das raízes, temos:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-15}{2}$$
$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{15}{2}$$

12. Considere a equação $x^2 + bx + c = 0$, com o coeficiente do termo do 2º grau igual a 1. Mostre que, se a soma das raízes é S e o produto é P, essa equação pode ser escrita como $x^2 - Sx + P = 0$.

- Conforme relações entre as raízes e os coeficientes, temos para a soma:

$$S = x_1 + x_2$$
$$S = -\frac{b}{1} \Rightarrow S = -b$$

- E para o produto:

$$P = x_1 \cdot x_2$$
$$P = \frac{c}{1} \Rightarrow P = c$$

- Assim, a equação pode ser escrita como:

$$x^2 + bx + c = 0$$
$$x^2 - (-b)x + c = 0$$
$$x^2 - Sx + P = 0$$

Quando uma equação da forma $x^2 + bx + c = 0$ admite somente raízes inteiras, elas são tais que a soma é o oposto do coeficiente de x e o produto é igual ao termo independente de x.

13. Com base na relação anterior, obtenha mentalmente as raízes inteiras da equação $x^2 - 8x + 7 = 0$.

- Como a equação é da forma $x^2 - Sx + P = 0$, temos, por comparação, que:

$$S = 8 \text{ e } P = 7$$

- Assim, temos que encontrar dois inteiros tais que a soma é 8 e o produto é igual a 7. Os números são 7 e 1, isto é:

$$x^2 - Sx + P = 0$$
$$x^2 - 8x + 7 = 0$$
$$x^2 - (1 + 7)\,x + 1 \cdot 7 = 0$$

14. Dada a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, mostre que ela pode ser escrita na forma fatorada $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, sendo x_1 e x_2 suas raízes.

- Com base nas relações entre as raízes e os coeficientes, podemos escrever:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Big\downarrow \text{ dividindo por } a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - x_1x - x_2x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\Big\downarrow \text{ fatorando}$$

$$x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = 0$$

$$\Big\downarrow \text{ fatorando novamente}$$

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Portanto, a forma fatorada da equação $ax^2 + bx + c = 0$, sendo x_1 e x_2 suas raízes, é $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$.

Atividades

32. Dada a equação $4x^2 - 2x - 1 = 0$, faça o que se pede a seguir.

a) Utilize a fórmula resolutiva para obter suas soluções. 32. a) $S = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right\}$

b) Obtenha a soma e o produto das raízes. 32. b) $S = \frac{1}{2}$ e $P = -\frac{1}{4}$

c) Utilizando as soluções encontradas no item **a**, obtenha a soma e o produto das raízes. 32. c) $S = \frac{1}{2}$ e $P = -\frac{1}{4}$

33. Utilizando a forma fatorada de uma equação do 2º grau, obtenha a forma polinomial dessa equação considerando que −10 e 5 são suas raízes. 33. $x^2 + 5x - 50 = 0$

34. Considere a equação $2x^2 + 4x - 1 = 0$. Sem resolvê-la, determine:

a) a soma de suas raízes; 34. a) −2

b) o produto de suas raízes. 34. b) $-\frac{1}{2}$

35. Considere que a soma de dois números é 19 e o produto desses mesmos dois números é 88. Qual equação do 2º grau possibilita determinar esses dois números? 35. $x^2 - 19x + 88 = 0$

36. Em cada equação abaixo, as raízes são números inteiros. Determine-as mentalmente.

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ 36. a) $S = \{3, 1\}$

b) $x^2 + 9x - 10 = 0$ 36. b) $S = \{-10, 1\}$

c) $x^2 + 13x + 36 = 0$ 36. c) $S = \{-9, -4\}$

d) $x^2 - 13x + 36 = 0$ 36. d) $S = \{9, 4\}$

37. (FGV-RJ) Na resolução de um problema que recaía em uma equação do 2º grau, um aluno errou apenas o termo independente da equação e encontrou como raízes os números 2 e −14. Outro aluno, na resolução do mesmo problema, errou apenas o coeficiente do termo de primeiro grau e encontrou como raízes os números 2 e 16. As raízes da equação correta eram: 37. Alternativa **b**.

a) −2 e −14

b) −4 e −8

c) −2 e 16

d) −2 e −16

e) 4 e 14

38. (ESPM-SP) As raízes da equação $3x^2 + 7x - 18 = 0$ são a e b. O valor da expressão $a^2b + ab^2 - a - b$ é: 38. Alternativa **b**.

a) $\frac{29}{3}$

b) $\frac{49}{3}$

c) $\frac{31}{3}$

d) $\frac{53}{3}$

e) $\frac{26}{3}$

Função quadrática

2

Você conhece um esporte praticado na areia das praias chamado futevôlei?

Ele geralmente é praticado em uma quadra bem parecida com a quadra de vôlei de praia. As medidas da quadra são 9 m de largura e 18 m de comprimento e ela é dividida ao meio por uma rede de 2,20 m de altura.

Os jogadores costumam usar uma fita colorida para demarcar a quadra.

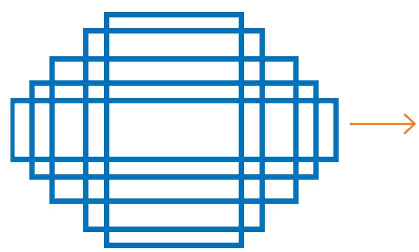

Juana Nunez/Shutterstock.com

Partida de futevôlei sendo jogada em uma praia.

Para pensar e discutir

1. Conforme as medidas da quadra, que comprimento mínimo a fita colorida deve ter para demarcá-la? 1. 54 m
2. Nessas condições, qual é a área do retângulo limitado pela fita colorida? 2. 162 m²
3. É possível conseguir, com o mesmo comprimento da fita, um retângulo de área maior? 3. Sim.

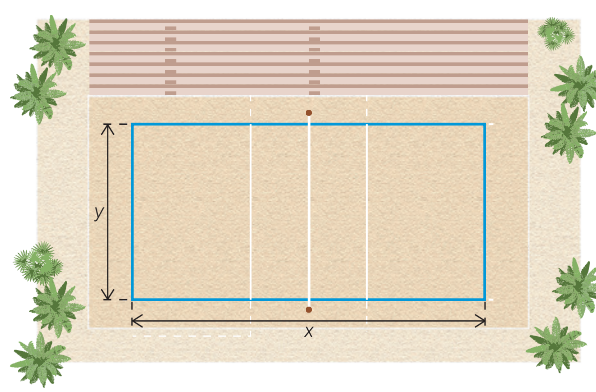
Observe que a quadra da imagem anterior tem a forma de um retângulo. Utilizando o mesmo comprimento do contorno (o comprimento da fita), podemos demarcar diversas regiões retangulares na areia. Assim, teríamos retângulos de mesmo perímetro, como ilustrado, mas com áreas variáveis.


Retângulos de mesmo perímetro.

Reinaldo Vignati

Mas qual teria a maior área, fixando o perímetro?

Vamos determinar o retângulo de área máxima que pode ser construído na areia utilizando 54 metros de fita. Como não sabemos quais são as medidas dos lados do retângulo, vamos representá-las por x e y, veja a seguir.



Reinaldo Vignati

O perímetro é igual a 54 m, isto é:

$$2x + 2y = 54$$

$$x + y = 27 \Rightarrow y = 27 - x$$

Como queremos obter o retângulo de maior área possível, vamos expressar a área A em função de x:

$$A = x \cdot y$$

$$A = x \cdot (27 - x)$$

$$\underbrace{A = -x^2 + 27x}$$

Temos a área A do retângulo em função da medida x.

Essa função é chamada de **função quadrática**. Precisamos compreender o que é uma função quadrática, seus elementos e seu comportamento gráfico para resolver essa situação.

Conceito e gráfico de função quadrática

O que é uma função quadrática?
Como é o comportamento gráfico de uma função quadrática no plano cartesiano?

Denomina-se função quadrática ou função polinomial do 2º grau qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$ em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$.

Observe a seguir alguns exemplos de funções quadráticas em que identificamos os coeficientes correspondentes.

- $y = f(x) = 2x^2 - 4x + 7 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 7 \end{cases}$
- $y = f(x) = x^2 - 1\,000x - 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1\,000 \\ c = -1 \end{cases}$
- $y = f(x) = -3x^2 + 91 \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 91 \end{cases}$
- $y = f(x) = -0{,}5x^2 + 250x \Rightarrow \begin{cases} a = -0{,}5 \\ b = 250 \\ c = 0 \end{cases}$

Nesses exemplos, as funções estão escritas na forma polinomial.

Nosso interesse no estudo das funções quadráticas está relacionado à construção de modelos matemáticos que as utilizem em contextos diversos. É importante compreender como é o comportamento gráfico de uma função quadrática.

Você pode investigar o comportamento gráfico de uma função quadrática do modo que sugerimos a seguir, usando recursos digitais.

Para explorar

Junte-se a um colega e formem uma dupla. Vocês irão obter o gráfico de algumas funções quadráticas utilizando um *software* de geometria dinâmica.

Construam os gráficos das funções quadráticas a seguir, de acordo com sua lei de formação. Concluídas as construções, imprimam-nas para apresentá-las em sala de aula.

Construção 1 Construção 1. Resposta no Manual do Professor.
Em um mesmo plano cartesiano, as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$.

Construção 2 Construção 2. Resposta no Manual do Professor.
Em um mesmo plano cartesiano, as funções $f(x) = x^2 - 3x$ e $g(x) = -x^2 + 3x$.

Construção 3 Construção 3. Resposta no Manual do Professor.
Em um mesmo plano cartesiano, as funções $f(x) = x^2 + 6x + 9$ e $g(x) = -x^2 - 6x - 9$.

Construção 4 Construção 4. Resposta no Manual do Professor.
Em um mesmo plano cartesiano, as funções $f(x) = 2x^2 + 5$ e $g(x) = -2x^2 - 5$

Observando os gráficos obtidos nas quatro construções sugeridas aqui, respondam:

1. Qual é a diferença entre o gráfico de uma função quadrática e o de uma função afim? 1. Na função afim, o gráfico é uma linha reta e na função quadrática é uma linha curva.
2. Você sabe qual é a denominação do gráfico de uma função quadrática? 2. Parábola.
3. Em cada construção, o que mudou no gráfico da função $f(x)$ e $g(x)$? 3. Respostas pessoais.
4. Quais são as possibilidades da intersecção do gráfico de uma função quadrática com o eixo x? 4. Intersecta em 1 ponto, intersecta em 2 pontos ou não intersecta.

Você utilizou um *software* para obter o gráfico de uma função quadrática. Entretanto, podemos esboçá-lo também em uma folha de papel. Para tanto, siga a lei de formação da função e proceda como sugere o algoritmo (passo a passo) a seguir.

1. Represente o plano cartesiano com dois eixos perpendiculares.
2. Atribua valores à variável x.
3. Obtenha os valores correspondentes para a variável y conforme a lei de formação.
4. A cada par ordenado $(x; y)$ obtido, localize um ponto no plano cartesiano.
5. Ligue os pontos convenientemente seguindo a “tendência”; considere que entre dois pontos quaisquer obtidos haverá outros pontos.

Caso queira, esboce em folhas quadriculadas os gráficos das funções quadráticas que estão sugeridas anteriormente em **Para explorar**. A seguir, apresentamos dois exemplos de como proceder para a construção dos gráficos de funções quadráticas.

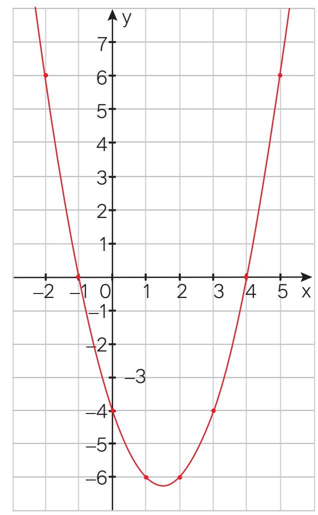
Atividades resolvidas

15. Considerando a função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 3x - 4$, construa um esboço gráfico no plano cartesiano.

- No quadro a seguir, atribuímos valores à variável x, obtemos os valores correspondentes para y e formamos pares ordenados.

x	$y = f(x) = x^2 - 3x - 4$	(x, y)
-2	$y = f(x) = (-2)^2 - 3(-2) - 4 = 6$	$(-2, 6)$
-1	$y = f(x) = (-1)^2 - 3(-1) - 4 = 0$	$(-1, 0)$
0	$y = f(x) = 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = -4$	$(0, -4)$
1	$y = f(x) = 1^2 - 3 \cdot 1 - 4 = -6$	$(1, -6)$
2	$y = f(x) = 2^2 - 3 \cdot 2 - 4 = -6$	$(2, -6)$
3	$y = f(x) = 3^2 - 3 \cdot 3 - 4 = -4$	$(3, -4)$
4	$y = f(x) = 4^2 - 3 \cdot 4 - 4 = 0$	$(4, 0)$
5	$y = f(x) = 5^2 - 3 \cdot 5 - 4 = 6$	$(5, 6)$

- Localizamos esses pontos no plano cartesiano e os ligamos convenientemente.



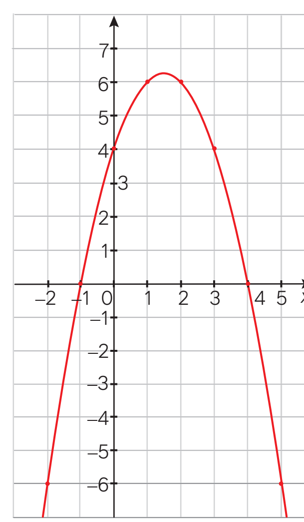
Acervo editora

16. Considerando a função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2 + 3x + 4$, obtemos um esboço gráfico no plano cartesiano.

- No quadro a seguir atribuímos valores à variável x, obtemos os valores correspondentes para y e formamos pares ordenados.

x	$y = f(x) = -x^2 + 3x + 4$	(x, y)
-2	$y = f(x) = -(-2)^2 + 3(-2) + 4 = -6$	$(-2, -6)$
-1	$y = f(x) = -(-1)^2 + 3(-1) + 4 = 0$	$(-1, 0)$
0	$y = f(x) = -0^2 + 3 \cdot 0 + 4 = 4$	$(0, 4)$
1	$y = f(x) = -1^2 + 3 \cdot 1 + 4 = 6$	$(1, 6)$
2	$y = f(x) = -2^2 + 3 \cdot 2 + 4 = 6$	$(2, 6)$
3	$y = f(x) = -3 + 3 \cdot 3 + 4 = 4$	$(3, 4)$
4	$y = f(x) = -4^2 + 3 \cdot 4 + 4 = 0$	$(4, 0)$
5	$y = f(x) = -5^2 + 3 \cdot 5 + 4 = -6$	$(5, -6)$

- Localizamos esses pontos no plano cartesiano e os ligamos convenientemente.



Acervo editora

Nas duas atividades anteriores, observem que atribuímos valores inteiros à variável x. Fizemos isso por uma questão de comodidade de cálculo. Como o domínio considerado é o conjunto dos números reais, os pontos foram ligados convenientemente (seguindo a tendência dos pontos e imaginando outros pontos intermediários) para obtermos a parábola. Entretanto, a **parábola** é uma curva construída em um plano cartesiano em que os pontos satisfazem a uma condição específica.

Parábola é uma curva formada pelo conjunto de pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo e de uma reta dada. O ponto fixo é chamado **foco da parábola** e a reta é a **diretriz**.

Veremos ainda neste capítulo que a curva denominada parábola corresponde ao gráfico de uma função quadrática.

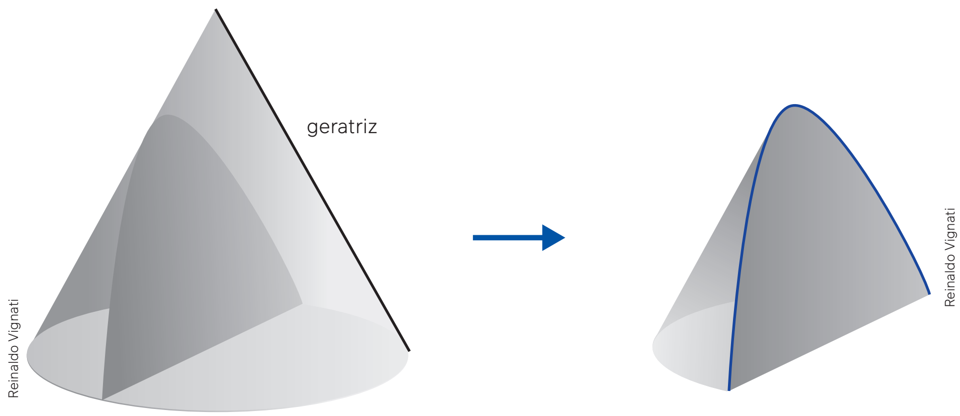
Análise e contexto

Uma curva chamada parábola

Embora esse seja o conceito de parábola para nosso estudo, necessitaremos fazer um esboço da parábola correspondente, sem identificar elementos como o foco ou a diretriz da parábola. Mesmo assim, sugerimos a você que leia o texto a seguir para compreender um pouco melhor o que é uma parábola e sua construção.

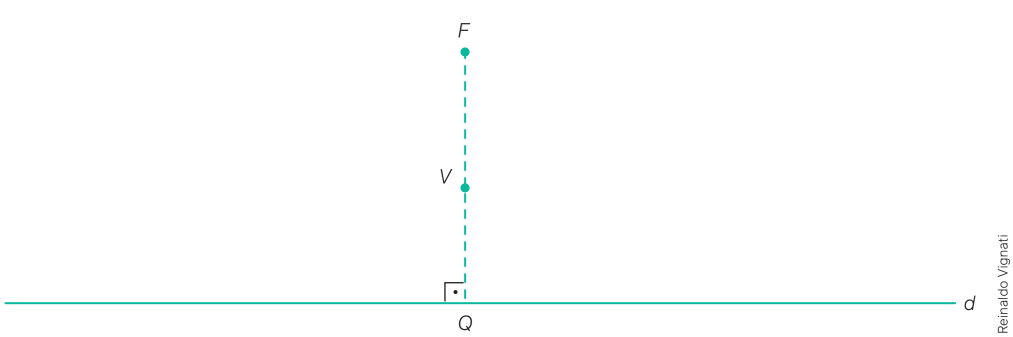
O que é uma parábola e como podemos obtê-la?

Parábola é uma curva que pode ser observada em uma seção feita em um cone (um sólido geométrico). Na representação a seguir, temos um cone e uma seção no cone determinada com base em um plano que corta esse sólido paralelamente a um segmento que une o vértice do cone à circunferência da base (a geratriz do cone, como mostra a figura).

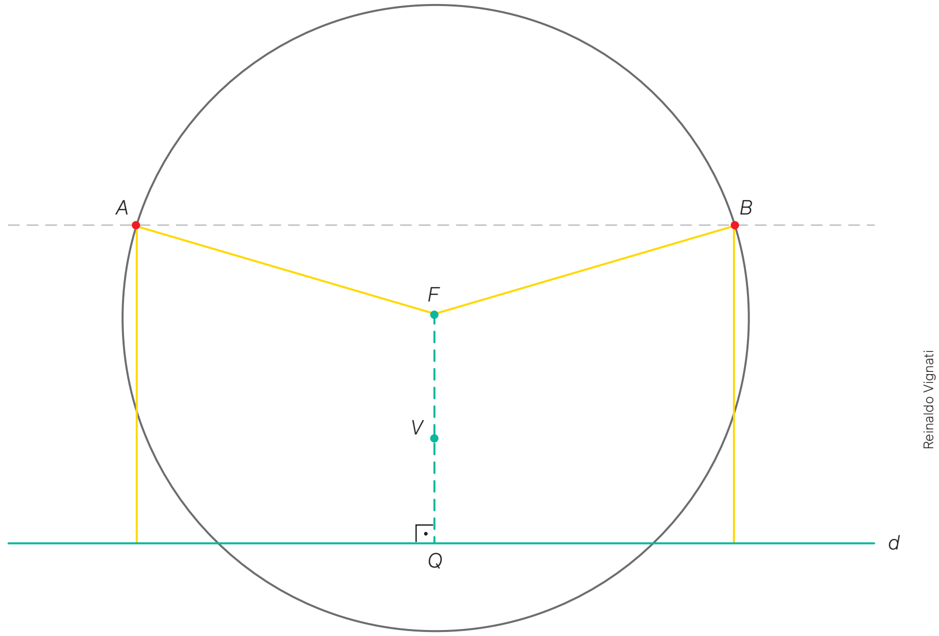


Você pode obter uma parábola usando instrumentos geométricos (régua, compasso e esquadro). O algoritmo a seguir descreve essa construção.

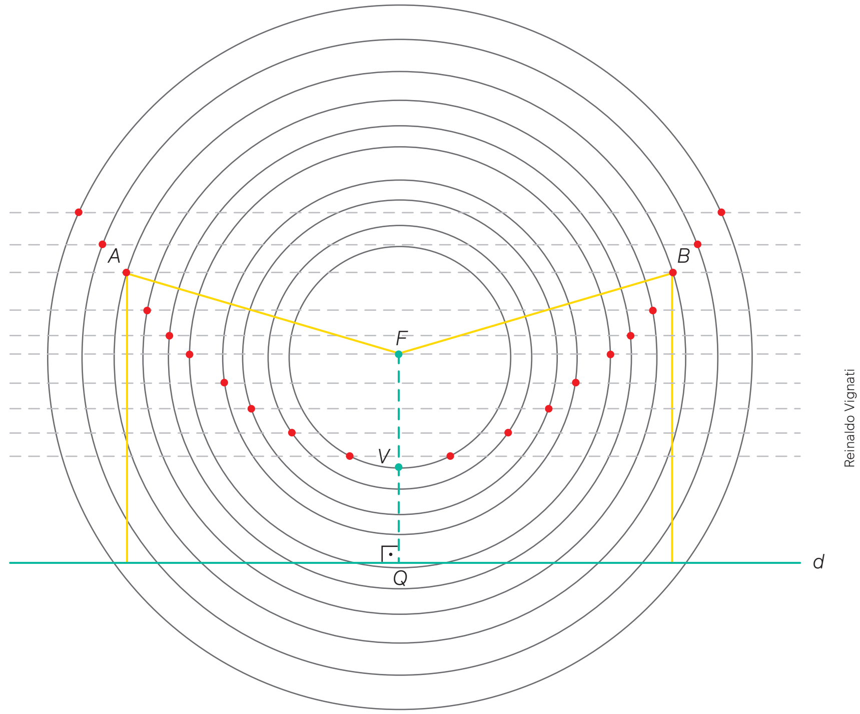
1. Desenhe uma linha para representar a reta diretriz da parábola (*d*).
2. Fora dessa reta, escolha um ponto fixo *f* (foco da parábola).
3. Ligue o ponto *F* com a reta *d* por meio de uma linha tracejada perpendicular à reta *d*. Represente por *Q* o ponto obtido na reta *d*.
4. Determine o ponto médio do segmento obtido indicando-o por *V* (vértice da parábola).



5. Desenhe uma linha tracejada, paralela à reta *d*, com uma distância *k* em relação à reta *d* maior que o comprimento do segmento *VQ*.
6. Com o auxílio de um compasso, desenhe uma circunferência com a ponta-seca no ponto *F* (foco) e abertura correspondente à distância *k*, obtendo, assim, dois pontos *A* e *B* pertencentes à parábola. A reta que contém os pontos *F*, *V* e *Q* representará o eixo de simetria da parábola.



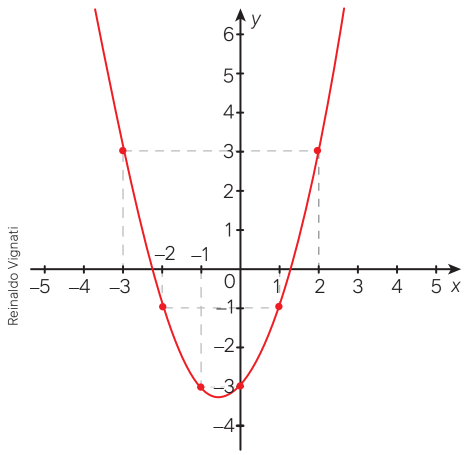
7. Desenhe outras retas paralelas à diretriz *d* e faça outras circunferências com raios iguais às distâncias dessas retas à diretriz. Obtêm-se assim outros pares de pontos, como indicado a seguir.
Repare que os pontos destacados pertencem à parábola de foco *F* e diretriz *d.*



1. Junte-se a dois colegas. Desenhem em uma folha de papel uma parábola seguindo os passos do algoritmo apresentado. Utilizem apenas os instrumentos régua, compasso e esquadro. Em seguida, apresentem o resultado do trabalho de vocês aos demais colegas.

Atividades

39. Observe a representação no plano cartesiano de uma parábola correspondente ao gráfico de uma função quadrática $y = f(x)$.



De acordo com os pontos indicados no gráfico, responda:

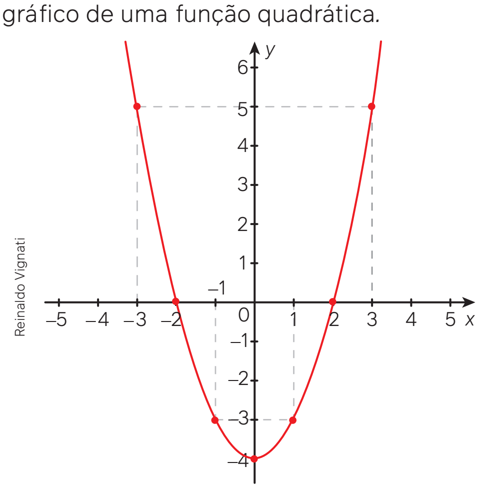
a) Qual é o valor de $f(0)$? 39. a) –3

b) O eixo de simetria dessa parábola corta o eixo das abscissas em que ponto? 39. b) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

c) Quais são as coordenadas do ponto da parábola que é simétrico ao ponto (–2, –1) em relação ao eixo de simetria da parábola? 39. c) (1, –1)

d) Para quais valores de x tem-se $y = 3$? 39. d) –3 e 2

40. No plano cartesiano a seguir está representado o gráfico de uma função quadrática.



De acordo com os pontos indicados no gráfico, responda:

a) Qual é o valor de $f(0)$? 40. a) –4

b) O eixo de simetria dessa parábola corta o eixo das abscissas em que ponto? 40. b) (0, 0)

c) Quais são as coordenadas do ponto da parábola que é simétrico ao ponto (–3, 5) em relação ao eixo de simetria da parábola? 40. c) (3, 5)

d) Para quais valores de x tem-se $y = 0$? 40. d) –2 e 2

41. Em uma folha de papel, construa em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 4x$ e $g(x) = -x^2 + 4x$. Apresente o resultado aos colegas e responda às questões a seguir. 41. Resposta no Manual do Professor.

a) As parábolas obtidas têm quantos pontos em comum? 41. a) Dois.

b) Quais são as coordenadas desses pontos? 41. b) (0, 0) e (4, 0)

c) Como você poderia obter as coordenadas desses pontos sem representá-los no plano cartesiano? 41. c) Resposta pessoal.

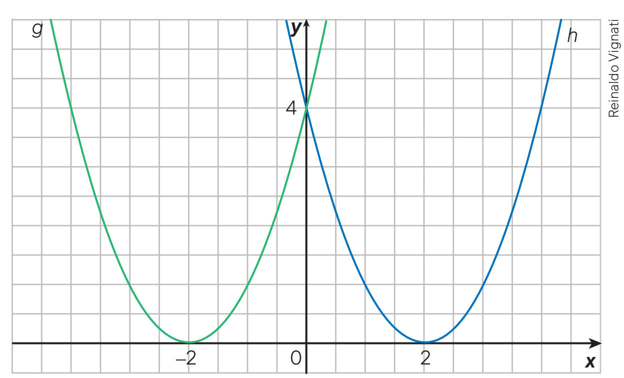
42. Construa em um mesmo plano cartesiano, representado em uma folha de papel, os gráficos das funções reais definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = (x - 2)^2$. Apresente o resultado aos colegas e, então, responda às questões. 42. Resposta no Manual do Professor.

a) As parábolas correspondentes têm o mesmo eixo de simetria? 42. a) Não.

b) Elas intersectam o eixo das abscissas no mesmo ponto? 42. b) Não.

c) É possível obter o gráfico da função g com base no gráfico da função f? Explique. 42. c) Sim; resposta pessoal.

43. Ana desenhou duas parábolas iguais em um papel quadriculado, mas em uma delas o eixo de simetria passa pelo ponto de abscissa $x = -2$ (função g) e na outra o eixo de simetria passa pelo ponto de abscissa $x = 2$ (função h), veja a seguir.



As duas funções quadráticas são da forma $f(x) = (x + k)^2$, sendo k um número real.

a) Determine o valor de k para a função g. 43. a) $k = 2$

b) Determine o valor de k para a função h. 43. b) $k = -2$

c) Algebricamente, de acordo com a lei de formação dessas duas funções, mostre como obter as coordenadas do ponto em comum (0, 4) representado no gráfico. 43. c) Resposta no Manual do Professor.

44. Forme dupla com um colega e façam, juntos, algumas construções com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica.

Construção 1 44. Construção 1. Resposta no Manual do Professor.

Desenhem em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções definidas por:

$$f(x) = x^2;\ f_1(x) = x^2 + 1;\ f_2(x) = x^2 + 2;\ f_3(x) = x^2 + 3$$

Construção 2 44. Construção 2. Resposta no Manual do Professor.

Desenhem em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções definidas por:

$$f(x) = x^2;\ f_1(x) = x^2 - 1;\ f_2(x) = x^2 - 2;\ f_3(x) = x^2 - 3$$

a) Na construção 1, o que vocês perceberam dos gráficos das funções $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ em comparação à construção do gráfico da função $f(x)$? 44. a) Resposta pessoal.

b) Na construção 2, o que vocês perceberam dos gráficos das funções $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ em comparação à construção do gráfico da função $f(x)$? 44. b) Resposta pessoal.

45. Individualmente, faça as construções a seguir com auxílio do *software* de geometria dinâmica.

Construção 1 45. Construção 1. Resposta no Manual do Professor.

Desenhe em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções definidas por:

$$f(x) = x^2; f_1(x) = (x - 1)^2; f_2(x) = (x - 2)^2; f_3(x) = (x - 3)^2$$

Construção 2 45. Construção 2. Resposta no Manual do Professor.

Desenhe em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções definidas por:

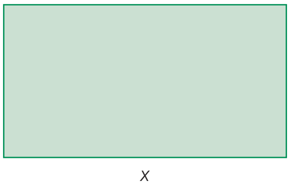
$$f(x) = x^2; f_1(x) = (x + 1)^2; f_2(x) = (x + 2)^2; f_3(x) = (x + 3)^2$$

Após as construções, responda:

a) Na construção 1, o que você percebeu dos gráficos das funções $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ em comparação à construção do gráfico da função $f(x)$? 45. a) Resposta pessoal.

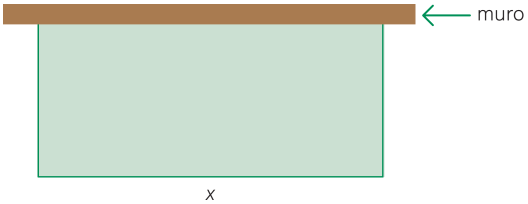
b) Na construção 2, o que você percebeu dos gráficos das funções $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ em comparação à construção do gráfico da função $f(x)$? 45. b) Resposta pessoal.

46. Um fazendeiro pretende construir um pequeno cercado retangular utilizando 60 metros lineares de cerca. Sendo x a medida de um de seus lados, obtenha a lei de formação da função que expressa a área $A(x)$, isto é, a área em função da medida x de um de seus lados. Observe, na figura, que ele irá cercar os 4 lados. Nessa situação, x representa uma medida de comprimento, assim, será representado por um número real positivo (se for igual a zero, não teremos o retângulo). 46. $A(x) = -x^2 + 30x$



Acervo editora

47. Com base na atividade anterior, obtenha a lei de formação que expressa a área $A(x)$ em função da medida x de um de seus lados, como representado, sabendo que o fazendeiro cercará apenas três lados, porque utilizará um muro como um dos quatro lados e ainda os mesmos 60 metros lineares de cerca. 47. $A(x) = -0{,}5x^2 + 30x$



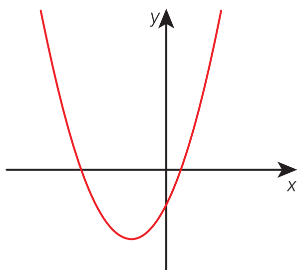
Acervo editora

Esboço de uma parábola

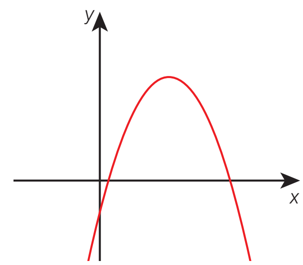
São poucos elementos da parábola que nos auxiliam a fazer um esboço gráfico suficiente para a resolução de situações envolvendo função quadrática. Você já deve ter identificado esses elementos nas construções que fez usando *softwares*. Agora, vamos identificá-los.

Concavidade da parábola

Em uma parábola podemos ter duas situações em relação à concavidade.



Concavidade para cima.



Concavidade para baixo.

Reinaldo Vignati

Se você construir os gráficos de funções quadráticas atribuindo valores aos números reais *a*, *b* e *c*, observará que essas são as duas possibilidades de concavidade das parábolas correspondentes que resumimos a seguir, sem justificar.

> A parábola correspondente ao gráfico da função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, terá:
> - concavidade voltada para cima quando $a > 0$;
> - concavidade voltada para baixo quando $a < 0$.

Zeros da função

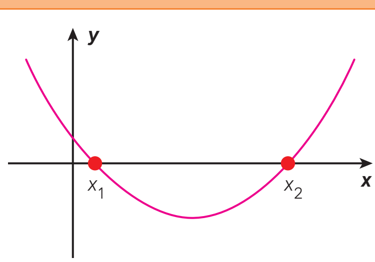
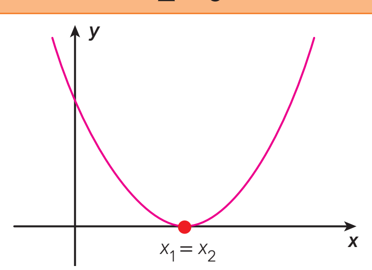
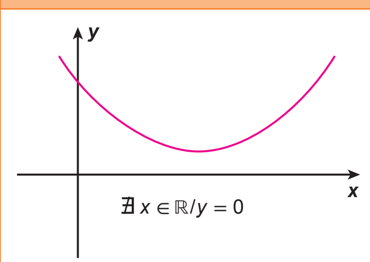
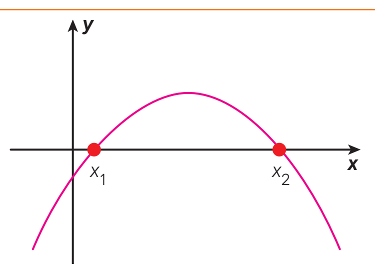
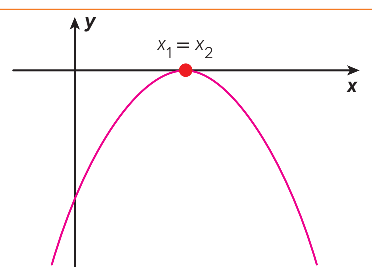
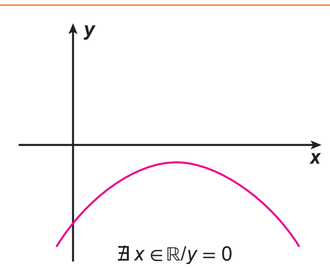
Os valores de *x* para os quais uma função se anula são chamados de **zeros da função**. Assim, considerando que em uma função quadrática a variável *y* é dada por meio de uma sentença do 2º grau, temos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\downarrow \text{ Fazendo: } f(x) = 0$$

$$\underbrace{0 = ax^2 + bx + c}_{} \longrightarrow \text{Equação do 2º grau em x.}$$

Assim, como estamos diante de uma equação do 2º grau, os zeros da função quadrática são as raízes de uma equação do segundo grau em *x*. Há três possibilidades quanto aos zeros da função quadrática. Observando que a parábola pode ter a concavidade voltada para cima ou para baixo, veja no quadro a seguir as possibilidades de intersecção com o eixo das abscissas.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Reinaldo Vignati

Para pensar e discutir

1. Qual o número máximo de pontos que o gráfico de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ter em comum com o eixo das abscissas? 1. Dois.
2. Se uma parábola tem apenas o ponto (3; 0) em comum com o eixo das abscissas, qual o significado de $x = 3$ na função quadrática correspondente? 2. O valor que anula a função.
3. Se no gráfico de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a concavidade da parábola é voltada para cima e essa curva não tem ponto em comum com o eixo das abscissas, o que é possível afirmar sobre o sinal de $y = f(x)$? 3. É sempre positivo.

Intersecção com o eixo das ordenadas

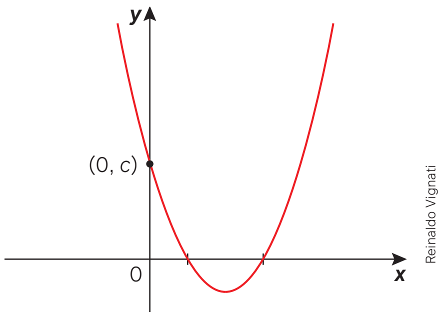
A intersecção de uma parábola com o eixo das ordenadas é um ponto em que conhecemos a abscissa, isto é, $x = 0$. Assim, para a função quadrática definida por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ precisamos obter apenas a ordenada desse ponto, ou seja:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

$\downarrow$ Para $x = 0$, temos:

$$y = f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$y = f(0) = c$$



Portanto, o termo independente de x indica a ordenada do ponto em que a parábola intersecta o eixo das ordenadas: o ponto (0; c), como no exemplo ilustrado.

Atividades resolvidas

17. Dada a função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, obtenha as coordenadas dos pontos em que a parábola intercepta os eixos coordenados, identifique a concavidade da parábola correspondente e esboce-a no plano cartesiano.

- Intersecção da parábola com o eixo das abscissas:

$$f(x) = 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Portanto, os pontos são (3, 0) e (1, 0).

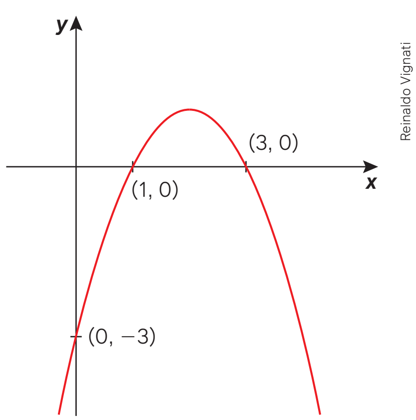
- Intersecção da parábola com o eixo das ordenadas:

$$x = 0$$

$$f(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 - 3 \Rightarrow f(0) = -3$$

Portanto, a parábola intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, –3).

- Como o coeficiente do termo do 2º grau é negativo, a parábola correspondente tem a concavidade voltada para baixo. Observe um possível esboço do gráfico.



18. Sabendo que o gráfico da função quadrática $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 + kx + 5$ tem apenas um ponto em comum com o eixo das abscissas, determine o valor real da constante k.

- A parábola correspondente tangencia o eixo das abscissas. Para que isso ocorra, devemos ter duas raízes reais e iguais para $f(x) = 0$, isto é:

$$\Delta = 0$$
$$b^2 - 4ac = 0$$
$$k^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 0$$
$$k^2 = 40 \Rightarrow k = \pm 2\sqrt{10}$$

Portanto, $k = 2\sqrt{10}$ ou $k = -2\sqrt{10}$.

Para pensar e discutir

1. Quais pontos em comum teriam os gráficos das funções $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ e $g(x) = -f(x)$? 1. (1, 0) e (3, 0)
2. No caso da função $f(x) = 2x^2 + kx + 5$ para quais valores de k^2 o gráfico correspondente não intercepta o eixo das abscissas? 2. $k^2 < 40$

Atividades

48. Use o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ para verificar a quantidade de vezes que o gráfico de cada função quadrática a seguir corta o eixo das abscissas.

a) $f(x) = x^2 + 5$ 48. a) Nenhuma.

b) $f(x) = x^2 + 10x + 25$ 48. b) Uma.

c) $f(x) = -x^2 + 10x + 10$ 48. c) Duas.

49. Considere que a lei de formação de uma função quadrática $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x^2 - 4x$. Sem construir seu gráfico no plano cartesiano, responda:

a) Quais são as coordenadas do ponto em que a parábola intersecta o eixo das ordenadas? 49. a) (0, 0)

b) Quais são as coordenadas dos pontos em que a parábola intersecta o eixo das abscissas? 49. b) (0, 0) e (4, 0)

50. Ainda sobre a função quadrática da atividade anterior, faça no caderno o esboço do gráfico correspondente. Nesse mesmo gráfico, represente por meio de uma linha tracejada o eixo de simetria da parábola. Depois, responda: 50. Resposta no Manual do Professor.

a) Quais são as coordenadas do ponto da parábola que intersecta o eixo de simetria? 50. a) (2, –4)

b) Como você fez para calcular a abscissa desse ponto? E a ordenada? 50. b) Respostas pessoais.

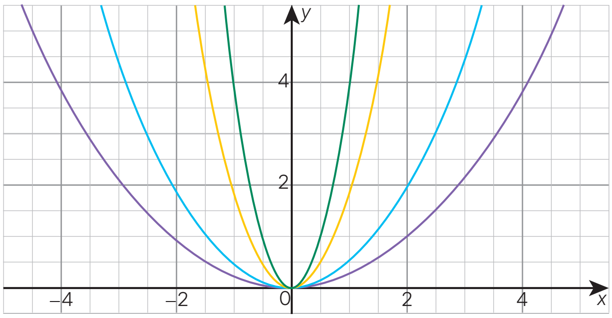
51. Obtenha as coordenadas dos pontos em que a parábola correspondente a cada função quadrática a seguir corta o eixo das ordenadas.

a) $f(x) = 4x^2 + 5$ 51. a) (0, 5)

b) $f(x) = x^2 + 10x + 25$ 51. b) (0, 25)

c) $f(x) = -x^2 + 10x + 10$ 51. c) (0, 10)

52. Utilizando um papel quadriculado, Pedro representou no plano cartesiano abaixo quatro parábolas com cores diferentes, todas passando pela origem do plano cartesiano.



Reinaldo Vignati

Pedro se esqueceu de associar cada gráfico a sua lei de formação. As funções que ele utilizou são definidas por:

$$f_1(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2;\ f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2;\ f_3(x) = 2 \cdot x^2;\ f_4(x) = 4 \cdot x^2$$

a) Relacione a lei de formação de cada função à parábola de cor correspondente e explique como você fez para relacioná-las. 52. a) Roxa, azul, laranja e verde respectivamente; resposta pessoal.

b) Nas funções, *y* é diretamente proporcional ao quadrado de *x*. Qual a constante de proporcionalidade em cada função? 52. b) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 2 e 4 respectivamente.

53. Faça esta atividade com um colega.

Juntos, observem a seguir este quadro de três colunas. Na primeira, estão valores dos lados de quadrados; na segunda coluna, os perímetros desses quadrados e, na terceira coluna, as áreas dos quadrados. Como é possível observar, o quadro está incompleto. Façam o que se pede. 53. a) Perímetro: 4; 5; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20. Área: 1; 2,25; 4; 6,25; 9; 12;25; 16; 20,25; 25.

Lado (cm)	Perímetro (cm)	Área (cm²)
1,0		
1,5		
2,0		
2,5		
3,0		
3,5		
4,0		
4,5		
5,0		

a) Copiem e completem o quadro com os valores que faltam.

b) Sendo *x* a medida do lado do quadrado, determinem a lei de formação da função que representa o perímetro *P* desse quadrado em função de *x*. 53. b) $P(x) = 4x$

c) Sendo *x* a medida do lado do quadrado, determinem a lei de formação da função que representa a área *A* desse quadrado em função de *x*. 53. c) $A(x) = x^2$

d) Representem em um plano cartesiano o gráfico da função do perímetro do quadrado em função da medida de seu lado. 53. d) Resposta no Manual do Professor.

e) Representem em um plano cartesiano o gráfico da função da área do quadrado em função da medida de seu lado. 53. e) Resposta no Manual do Professor.

f) O perímetro do quadrado é diretamente proporcional à medida do lado? E a área do quadrado é diretamente proporcional à medida do lado? 53. f) Sim; não.

g) Elaborem um pequeno texto explicando a relação (algébrica e gráfica) entre a medida do lado de um quadrado e seu perímetro e entre a medida do lado de um quadrado e sua área. Apresentem-no aos colegas.
53. g) Resposta pessoal.

54. Junte-se a dois ou três colegas para fazerem esta atividade, em duas partes.

Parte 1: triângulo equilátero

1. Descubram uma fórmula para obter a área e o perímetro de um triângulo equilátero com medida de lado *x*.
2. Atribuindo valores a *x* e utilizando um *software* de geometria dinâmica, construam o gráfico da função que representa o perímetro *P* de um triângulo equilátero em função da medida *x* de seu lado.
3. Atribuindo valores a *x* e utilizando o *software* de geometria dinâmica, construam o gráfico da função que representa a área *A* de um triângulo equilátero em função da medida *x* de seu lado.
4. A área *A* do triângulo equilátero é proporcional à medida do lado? E ao quadrado da medida do lado?

Parte 2: hexágono regular

1. Descubram uma fórmula para obter a área e o perímetro de um hexágono regular com medida de lado *x*.
2. Atribuindo valores a *x* e utilizando o *software* de geometria dinâmica, construam o gráfico da função que representa o perímetro *P* de um hexágono regular em função da medida *x* de seu lado.
3. Atribuindo valores a *x* e utilizando o *software* de geometria dinâmica, construam o gráfico da função que representa a área *A* de um hexágono regular em função da medida *x* de seu lado.
4. A área *A* do hexágono regular é proporcional à medida do lado? E ao quadrado da medida do lado?

54. Parte 1 – 1. Resposta no Manual do Professor.
54. Parte 1 – 2. Resposta no Manual do Professor.
54. Parte 1 – 3. Resposta no Manual do Professor.
54. Parte 1 – 4. Resposta no Manual do Professor.
54. Parte 2 – 1. Resposta no Manual do Professor.
54. Parte 2 – 2. Resposta no Manual do Professor.
54. Parte 2 – 3. Resposta no Manual do Professor.
54. Parte 2 – 4. Resposta no Manual do Professor.

Análise e contexto

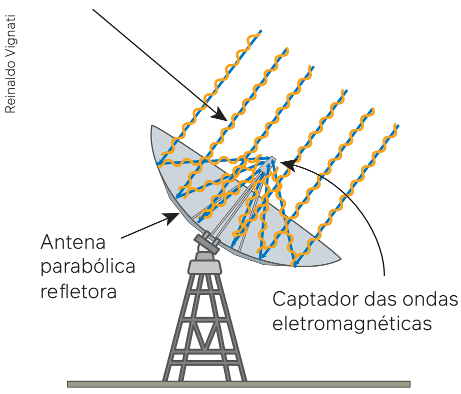
Junte-se a um colega para esta atividade. Iniciem com a leitura do texto a seguir.

Utilizando parábolas

Neste capítulo, você viu que uma parábola pode ser construída com instrumentos geométricos, como régua, compasso e esquadro, ou, de maneira mais sofisticada, utilizando *software*. Entretanto, resta uma pergunta simples: Onde utilizar parábolas?

A parábola pode ser usada como motivação estética, mas cumpre funções estruturais em diversas construções, como pontes, por exemplo. Se você pesquisar informações sobre construções e parábolas, encontrará diversos outros belíssimos exemplos da utilização da forma dessa interessante curva matemática.

O exemplo mais difundido do emprego da "forma parabólica" está relacionado à captação de sinais de televisão que chegam nas residências: é a antena parabólica (a antena é um paraboloide).

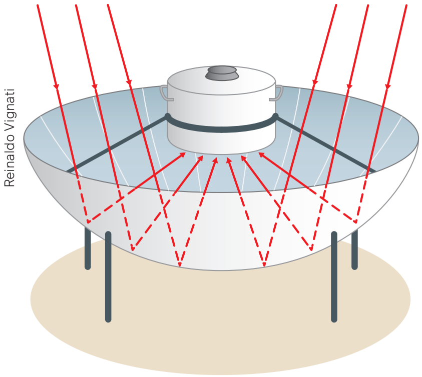


Esquema ilustrado do funcionamento de uma antena parabólica.

O satélite emite um conjunto de ondas eletromagnéticas (representadas pelas linhas amarelas no esquema) que são captadas pela antena. Esse feixe de ondas, que são paralelas ao eixo da antena, atinge a antena e é refletido exatamente para um único lugar, o foco da parábola. Nesse foco é colocado um aparelho receptor que converte as ondas eletromagnéticas em um sinal de TV. Aqui fica uma sugestão para você, caso queira ampliar seu conhecimento: pesquise como são as ondas eletromagnéticas e como elas são transformadas em um sinal de TV pelo aparelho receptor da antena parabólica.

Você já viu um **fogão solar**? Observe a foto de um tipo de fogão solar.

Fogão solar.



Na representação desse fogão, a luz incide em um painel parabólico feito com material especial e é refletida na panela. Você sabe dizer em que ponto correspondente da parábola a panela está localizada?

Representação do comportamento dos raios de luz incidentes em um fogão solar ao meio-dia.

Agora que vocês leram o texto, façam o que se pede a seguir.

1. Pesquisem o funcionamento de um fogão solar. Uma sugestão de pesquisa é o artigo, que trata desse tema, publicado na revista *Holos* (MACEDO NETO, M. C. de; GOMES, I. R. B.; GONDIM, P. C.; SOUZA, L. G. M. de. Desenvolvimento de um fogão solar [...]. *Holos*, [s. l.], v. 5, p. 117-135, dez. 2011. Disponível em: https://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/653. Acesso em: 31 ago. 2024. 1. Resposta pessoal.
2. Produzam um texto resumindo a pesquisa da Universidade Federal do Rio Grande do Norte sobre o fogão solar e suas vantagens. Apresentem o texto à turma, evidenciem os resultados da pesquisa e troquem ideias a respeito das informações encontradas. 2. Resposta pessoal.

Lei de formação com base na parábola

Há situações em que é preciso determinar a lei de formação da função quadrática usando a parábola construída. Esse procedimento é importante para a modelagem algébrica de situações que envolvam o uso dessa curva. Vamos exemplificar!

A Ponte da Arrábida, sobre o Rio Douro, liga a cidade do Porto e Vila Nova de Gaia, em Portugal. Ela é formada por um arco que se assemelha a uma parábola.

Considere que essa ponte tem 270 m do ponto *A* até o ponto *B* (usamos aqui medidas próximas às medidas reais da ponte), indicados na imagem a seguir. Considere também que a altura dos dois pilares maiores é a mesma: 52 m (do ponto *A* ao ponto *D* ou do ponto *B* ao ponto *C*).

StockPhotosArt/iStockphoto.com

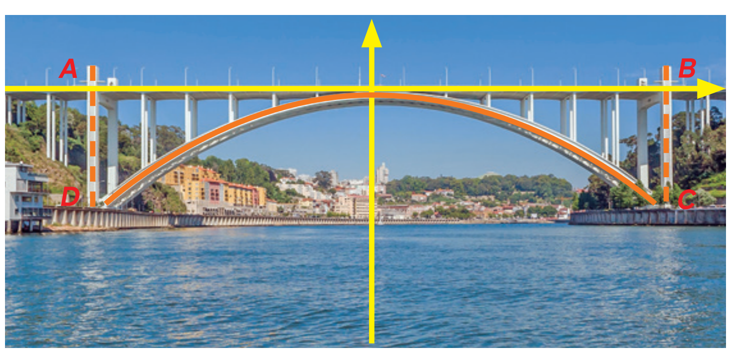
Ponte da Arrábida, Porto, Portugal, 2017.

Para pensar e discutir

1. Você acha que o arco se assemelha a uma parábola? 1. Resposta pessoal.
2. De acordo com as medidas dos dois pilares maiores, como você pode determinar as medidas aproximadas dos demais pilares? 2. Resposta pessoal.

Uma forma de obter o comprimento dos pilares é pela determinação da função quadrática da parábola. Considere o plano cartesiano representado na fotografia a seguir.

Conforme informações dadas, nessas condições temos as coordenadas dos pontos *C* e *D* pertencentes à parábola destacada na fotografia: $D(-135, -52)$ e $C(135, -52)$.



StockPhotosArt/iStockphoto.com

Ponte da Arrábida, Porto, Portugal, 2017.

Além disso, como a parábola passa pela origem do sistema cartesiano desenhado sobre a imagem, a função quadrática tem a lei de formação como $y = ax^2$. Para calcular o valor de a, basta considerar o ponto *C*, ou seja:

$$y = ax^2$$
$$-52 = a \cdot 135^2$$
$$-52 = 18\,225a \Rightarrow a \cong -0{,}00285$$

Portanto, a função quadrática que modela aproximadamente o arco de parábola da situação é:

$$y = -0{,}00285 \cdot x^2.$$

Uma ferramenta interessante, quando precisamos determinar a lei de formação de uma função quadrática pela parábola correspondente, é usar a forma fatorada da função quadrática. Observe que podemos obter a forma fatorada de uma função quadrática por sua forma polinomial – lembre-se de como calculamos a soma e o produto das raízes de uma equação do 2º grau usando seus coeficientes.

$y = a^2 + bx + c$

$\downarrow$ Colocando a em evidência

$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

$y = a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right]$

$\downarrow$ Utilizando $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$:

$y = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right]$

$\downarrow$ (I)

$y = a\left[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2\right]$

$\downarrow$ (II)

$y = a\left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right]$

$\downarrow$ (III)

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$ → Forma fatorada

Para pensar e discutir

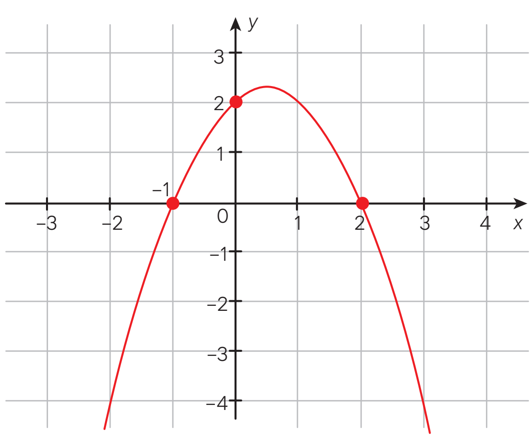
1. O que ocorreu na passagem (I)? 1. Resposta no Manual do Professor.
2. E na passagem (II)? E na passagem (III)? 2. Respostas no Manual do Professor.
3. Qual é o significado de x_1 e de x_2, que aparecem na forma fatorada em relação ao gráfico da função quadrática? 3. Resposta no Manual do Professor.

A forma fatorada de uma função quadrática $\boldsymbol{y = a^2 + bx + c}$, com $a \neq 0$, é dada por $\boldsymbol{y = a(x - x_1)(x - x_2)}$, sendo x_1 e x_2 os zeros da função correspondente.

Observe, nas situações resolvidas a seguir, como usar a forma fatorada para obtenção da lei de formação de uma função quadrática quando conhecemos seu gráfico.

Atividades resolvidas

19. Uma função quadrática foi esboçada no plano cartesiano indicado a seguir. São conhecidos os pontos em que o gráfico intersecta os eixos coordenados. Determine a lei de formação dessa função.



Reinaldo Vignati

- Se optarmos pela forma polinomial $y = a^2 + bx + c$, teremos de obter os três coeficientes (a, b e c) utilizando as coordenadas dos três pontos dados. Como conhecemos os zeros da função, na forma fatorada só não temos o coeficiente de maior grau:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x + 1)(x - 2)$$

- Como o ponto (0, 2) pertence ao gráfico,

$$2 = a(0 + 1)(0 - 2)$$
$$2 = -2a \Rightarrow a = -1$$

- Chegamos, assim, na lei de formação da função quadrática:

$$y = -1(x + 1)(x - 2)$$
$$y = -(x^2 - 2x + x - 2)$$
$$y = -(x^2 - x - 2) \Rightarrow y = -x^2 + x + 2$$

20. Escreva a forma fatorada da função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- Obtemos inicialmente os zeros da função quadrática:

$$f(x) = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Para pensar e discutir

1. Sem a utilização dos zeros da função, obtenha outra maneira de fatorar o segundo membro da lei de formação da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. $f(x) = (x - 3)(x - 1)$

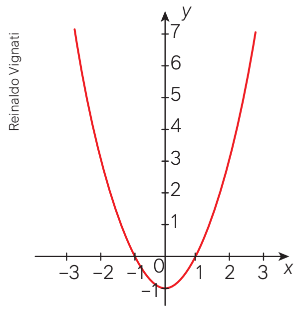
- Escrevendo a forma fatorada:

$$y = f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$
$$y = 1 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$$
$$y = (x - 1) \cdot (x - 3)$$

Atividades

55. No plano cartesiano a seguir, está esboçado o gráfico de uma função quadrática f.

55. a) $f(x) = (x + 1)(x - 1)$; $f(x) = x^2 - 1$



a) Obtenha a lei de formação dessa função f na forma fatorada e, também, na forma polinomial.

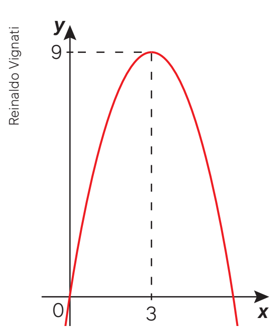
b) Escreva a lei de formação na forma polinomial da função g considerando que $g(x) = -f(x)$.

55. b) $g(x) = -x^2 + 1$

c) Graficamente, o que representa a função g em relação à função f?

55. c) Resposta no Manual do Professor.

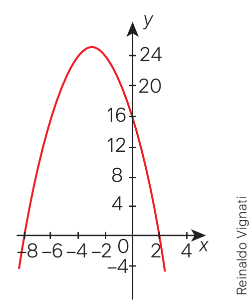
56. Na parábola a seguir, conhecemos as coordenadas do vértice V e sabemos que ela passa pela origem do sistema de coordenadas cartesianas.



a) Obtenha os zeros da função quadrática correspondente. 56. a) $x = 0$ e $x = 6$

b) Determine a lei de formação dessa função na forma fatorada. 56. b) $f(x) = -x(x - 6)$

57. No plano cartesiano a seguir, está representada a parábola correspondente ao gráfico de uma função quadrática. Observe que as representações dos eixos x e y não estão na mesma escala.

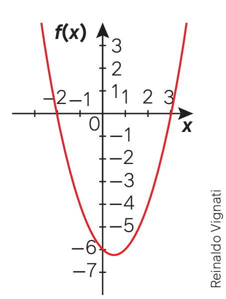


Obtenha a lei de formação dessa função.

57. $y = -x^2 - 6x + 16$

58. Elabore quatro leis de formação de funções quadráticas que sejam diferentes, porém que tenham os mesmos zeros $x = 1$ e $x = 8$. 58. Resposta pessoal.

59. No plano cartesiano a seguir, está representada a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



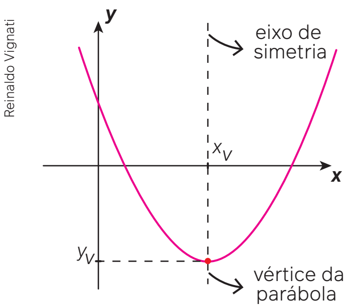
Obtenha a lei de formação dessa função na forma polinomial utilizando a forma fatorada.

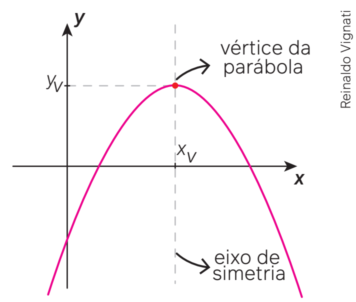
59. $f(x) = x^2 - x - 6$

60. Elabore a lei de formação de uma função quadrática considerando que a concavidade da parábola correspondente é voltada para baixo e tem −2 e 3 como zeros. 60. Resposta pessoal.

3 Coordenadas do vértice da parábola

Observe nas duas parábolas representadas a seguir que há um ponto extremo, chamado **vértice da parábola**. Por meio desse ponto, cujas coordenadas são (x_v, y_v), é possível traçar o eixo de simetria. Veja nas imagens.

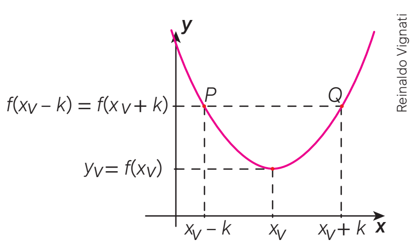




Para pensar e discutir

1. Nos dois gráficos, o que significa o resultado de $f(x_V)$ em relação à parábola? 1. A ordenada do vértice.
2. O que é eixo de simetria? 2. Reta que divide o gráfico em duas partes simétricas.
3. O que você pode dizer sobre os valores de $f(x_V - 1)$ e $f(x_V + 1)$ em qualquer das funções anteriores? Justifique. 3. São iguais; resposta pessoal.
4. E sobre os valores $f(x_V - 7)$ e $f(x_V + 7)$? Justifique. 4. São iguais; resposta pessoal.

O nosso interesse aqui é o cálculo das coordenadas do vértice da parábola. Você deve ter observado, na discussão anterior, que os pontos de abscissas simétricas em relação à abscissa do vértice têm imagens iguais. Assim, vamos considerar dois pontos simétricos P e Q em uma função quadrática genérica definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, como representado no gráfico, sendo k um número real positivo.



Como os pontos P e Q são simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola, eles têm a mesma imagem, ou seja:

$$f(x_V - k) = f(x_V + k)$$

$$\Big\downarrow \text{ Como } f(x) = ax^2 + bx + c\text{, temos:}$$

$$a(x_v - k)^2 + b(x_v - k) + c = a(x_v + k)^2 + b(x_v + k) + c$$

$$a(x_v)^2 - 2akx_v + ak^2 + bx_v - bk + c = a(x_v)^2 + 2akx_v + ak^2 + bx_v + bk + c$$

$$-4akx_v = 2bk$$

$$2ax_v = -b$$

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Agora, podemos obter a ordenada do vértice:

$$y_v = f(x_V)$$

$$y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

$$\Big\downarrow f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$\Big\downarrow b^2 - 4ac = \Delta$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Dada uma função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, temos que as coordenadas do vértice $V(x_v; y_v)$ podem ser obtidas pelas relações:

$$\boldsymbol{x_v = -\frac{b}{2a}} \text{ e } \boldsymbol{y_v = -\frac{\Delta}{4a}}$$

Observe que a ordenada do vértice poderia ser obtida simplesmente substituindo a variável x na lei de formação pelo valor encontrado para a abscissa do vértice, ou seja:

$$y_V = f(x_V)$$

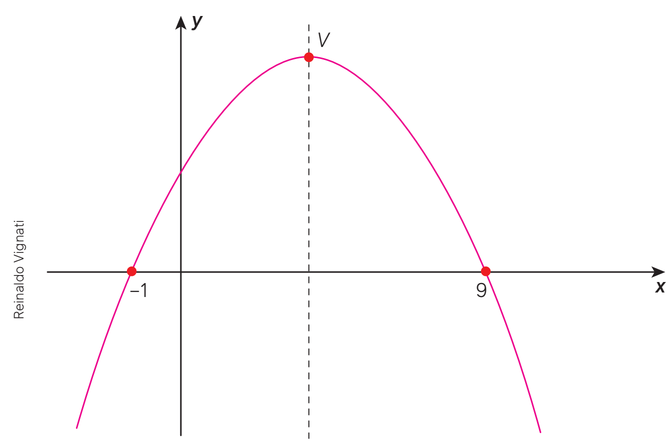
Mas qual é a importância de se calcular as coordenadas do vértice de uma parábola?

Uma resposta imediata é o fato de que o vértice representa o ponto extremo da parábola. Assim, dependendo da concavidade, ele pode indicar um ponto de máximo ou um ponto de mínimo. Como veremos no próximo tópico, podemos resolver problemas de máximo e problemas de mínimo em diversas situações.

Uma observação importante sobre o cálculo da abscissa do vértice da parábola: demonstramos que é possível calcular essa abscissa ao usar uma fórmula envolvendo os coeficientes de x e de x^2 da lei de formação da função quadrática. Entretanto, caso tenhamos os zeros da função quadrática (as raízes), há uma maneira mais simples. Para conhecê-la, analise e discuta o exemplo a seguir.

Exemplo:

A linha tracejada indica o eixo de simetria da parábola. Os zeros da função quadrática definida no conjunto dos números reais correspondente são $x = -1$ e $x = 9$, como indicado na figura.



Para pensar e discutir

1. Qual é a abscissa do vértice da parábola? 1. $x_V = 4$
2. Como você justifica o valor encontrado? 2. Resposta pessoal.
3. Sendo x_1 e x_2 os valores de x que anulam uma função quadrática e sendo x_V a abscissa do vértice, como obter essa abscissa em função dos zeros da função? 3. Pela média aritmética entre os zeros da função.

Observação:

Quando resolvemos uma equação do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, utilizamos a fórmula resolutiva $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$ para encontrar as raízes. Em uma função quadrática, essas raízes representam os zeros da função. Geometricamente, a abscissa do vértice está situada no ponto médio entre as raízes. Assim, temos:

$$x_V = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$x_V = \frac{1}{2}\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$x_V = \frac{1}{2}\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$x_V = \frac{1}{2}\left(\frac{-2b}{2a}\right) \Leftrightarrow x_v = -\frac{b}{2a}$$

Na demonstração indicada, obtivemos a abscissa do vértice da parábola independentemente do valor do discriminante Δ, isto é, não importa se ele é positivo, igual a zero ou mesmo negativo.

Atividades resolvidas

21. Obtenha as coordenadas do vértice da parábola correspondente ao gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 + 6x$.

- Cálculo da abscissa do vértice:

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

$$x_V = -\frac{6}{2 \cdot 2} \Rightarrow x_V = -\frac{3}{2}$$

- Cálculo da ordenada do vértice:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y_v = -\frac{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0}{4 \cdot 2}$$

$$y_v = -\frac{36}{8} \Rightarrow y_v = -\frac{9}{2}$$

Portanto, as coordenadas do vértice da parábola são $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.

22. Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + k$, obtenha o valor de k considerando que o vértice da parábola correspondente ao gráfico da função é $V\left(\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right)$.

- Utilizando a relação matemática que fornece a ordenada do vértice, temos:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$-\frac{9}{4} = -\frac{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k}{4 \cdot 1}$$

$$9 = 25 - 4k$$

$$4k = 16 \Rightarrow k = 4$$

Para pensar e discutir

1. Mostre outro procedimento para calcular a abscissa do vértice da parábola da função definida por $f(x) = 2x^2 + 6x$, conforme **atividade 25**. 1. Resposta pessoal.

2. Como você faria para obter o valor de k na **atividade 26** sem utilizar a fórmula para obter o valor da ordenada do vértice? 2. Resposta pessoal.

Atividades

61. Em uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, tem-se que $f(x + 1) = f(x - 1)$. Utilizando essa igualdade, determine o valor de x. 61. $-\frac{b}{a}$

a) O que representa esse valor de x em relação à parábola? 61. a) A abscissa do vértice.

b) O resultado seria alterado se você utilizasse a igualdade $f(x + 5) = f(x - 5)$? 61. b) Não.

62. Considere a função quadrática cuja lei de formação é dada por $f(x) = -2x^2 + 8x - 1$. 62. a) Voltada para baixo.

a) Qual é a concavidade da parábola correspondente?

b) Qual é a abscissa do vértice da parábola? 62. b) $x_v = 2$

c) Qual é o valor da ordenada do vértice da parábola? 62. c) $y_v = 7$

63. Dada a função quadrática $f(x) = 4x - x^2$, determine:

a) os zeros dessa função quadrática; 63. a) $x = 0$ e $x = 4$

b) a abscissa do vértice da parábola correspondente; 63. b) $x_v = 2$

c) a ordenada do vértice da parábola. 63. c) $y_v = 4$

64. Esboce o gráfico de uma parábola no plano cartesiano de acordo com as seguintes informações:

I. o eixo de simetria passa pelo ponto (2, 0);

II. uma das raízes (zeros da função) é igual a 5;

III. o maior valor que y assume nessa função é igual a 9.

64. Resposta no Manual do Professor.

Em seguida, responda:

a) A concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo? 64. a) Para baixo.

b) Qual é o valor da outra raiz dessa função? 64. b) –1

65. Esboce o gráfico e determine a lei de formação de uma função quadrática considerando que o eixo de simetria passa pelo ponto (4; 0), suas raízes distam 10 unidades entre si e a parábola passa pelo ponto (0, –18). 65. Respostas no Manual do Professor.

66. Escreva a lei de formação da função quadrática de maneira que: 66. $y = -\frac{10}{9}(x - 2)(x - 8)$.

I. os zeros da função sejam 2 e 8;

II. o valor da ordenada do vértice da parábola seja 10.

67. De modo semelhante à atividade anterior, elabore o enunciado para obter a lei de formação de duas funções quadráticas de forma que:

a) os zeros sejam iguais e a parábola correspondente passe pelo ponto (2, 4);

b) os zeros sejam diferentes e a parábola correspondente passe pelo ponto (0, –3).

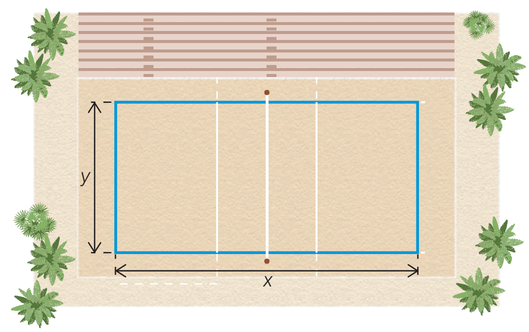
Depois, peça a um colega que obtenha essas funções quadráticas. 67. a) Resposta pessoal. 67. b) Resposta pessoal.

Problemas de máximo ou de mínimo

Vamos retomar a situação apresentada no início do tema "Função quadrática", na página 191. Nela, como ilustrado a seguir, foi concluído que o perímetro da quadra era igual a 54 m, e a área A do retângulo em função de x era dada por:

$$A = -x^2 + 27x$$

Temos a área A do retângulo em função da medida x.



Reinaldo Vignati

Como a área do retângulo é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, a ordenada do vértice representará o máximo da função, ou seja, a área máxima procurada.

$$A_{\text{máx}} = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow A_{\text{máx}} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$A_{\text{máx}} = -\frac{27^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)} \Rightarrow A_{\text{máx}} = \frac{729}{4} \rightarrow \frac{729}{4}\,\text{m}^2$$

Para determinar as dimensões do retângulo, podemos obter o valor de x que torna a área máxima, isto é, a abscissa do vértice:

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

$$x_V = -\frac{27}{2(-1)}$$

$$x_V = \frac{27}{2}$$

Calculando o valor de y (a medida do outro lado do retângulo),

$$y = 27 - x \Rightarrow y = 27 - \frac{27}{2}$$

$$y = \frac{27}{2}$$

Assim, o retângulo de área máxima será um quadrado de lado medindo $\frac{27}{2}$ m.

Para pensar e discutir

1. Um quadrado é também um retângulo? 1. Sim.

2. Se a área é uma função quadrática, a área máxima representa que elemento da parábola correspondente?
2. A ordenada do vértice.

A situação que acabamos de resolver representa um problema de cálculo de **máximo** ou de **mínimo** de uma função quadrática. Existem outras situações envolvendo esse tipo de cálculo, analise as atividades resolvidas a seguir.

Atividades resolvidas

23. Cinemática (parte da Física que descreve o movimento dos corpos)

Um móvel em movimento uniformemente variado (MUV) tem o espaço percorrido S em função do tempo t modelado pela seguinte função quadrática:

$$S = 2t^2 - 18t + 36$$

Sendo S dado em metros e t em segundos, em qual instante o móvel muda de sentido?

- Como a parábola correspondente ao gráfico de $S = f(t)$ é voltada para cima, o móvel muda de sentido quando a função mudar o tipo de crescimento, isto é, no tempo correspondente à abscissa do vértice. Nesse momento, ocorre uma inversão no sentido do crescimento:

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

$$t = -\frac{-18}{2 \cdot 2}$$

$$t = 4{,}5 \rightarrow 4{,}5\ s$$

Portanto, em 4,5 segundos o móvel muda de sentido.

Para explorar

Na disciplina de Física, a expressão que relaciona o espaço em função do tempo no movimento uniformemente variado é dada por:

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{a}{2}t^2$$

Em que a representa a aceleração, S_0 o espaço inicial, S o espaço em função do tempo e V_0 a velocidade inicial. Junte-se a um colega para resolver as atividades a seguir.

1. De acordo com a situação proposta e seus conhecimentos de Física, respondam:

a) Qual é o espaço inicial desse móvel? a) 35 m

b) Qual é a velocidade inicial desse móvel? b) –18 m/s

c) Na situação apresentada, qual é a aceleração do móvel? c) 4 m/s^2

2. Elaborem outro problema de cinemática envolvendo função quadrática e apresentem-no aos colegas.
2. Resposta pessoal.

24. Matemática Financeira

Roberta é proprietária de uma fábrica que produz sapatos ao custo de R$ 20,00 o par. Ela estimou que, se cada par for vendido por x reais, venderá por mês $80 - x$ pares de sapatos, sendo $0 \leq x \leq 80$. Assim, ela concluiu que o lucro mensal obtido é uma função do preço de venda. Determine o valor do preço de venda, nessas condições, de modo que a fábrica de Roberta tenha lucro mensal máximo.

- O lucro L é obtido fazendo $L = V - C$, sendo V o valor de venda e C o custo. Como não foram considerados outros custos, podemos obter a lei de formação da função L:

$$L = V - C$$
$$L = x(80 - x) - 20(80 - x)$$
$$L = 80x - x^2 - 1\,600 + 20x$$
$$L = -x^2 + 100x - 1\,600 \ (0 \leq x \leq 80)$$

- Como x representa o preço de venda, e a parábola correspondente tem a concavidade voltada para baixo, o lucro máximo irá ocorrer para a abscissa do vértice dessa parábola, isto é:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$
$$x_v = -\frac{100}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x_v = 50$$

Portanto, o preço de venda para se ter lucro máximo é R$ 50,00.

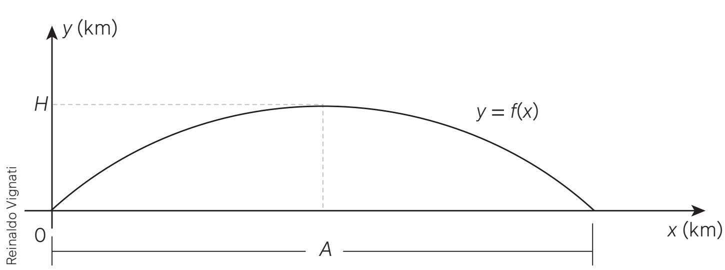
Para pensar e discutir

1. O lucro é dado por $L = V - C$, desde que essa diferença seja positiva. E se a diferença for negativa, qual é a denominação do lucro? 1. Prejuízo.

2. Na situação apresentada, qual deverá ser o lucro mensal máximo? Explique como você obteve esse valor.
2. R$ 900,00; resposta pessoal.

25. Movimento parabólico

(UFPB) O gráfico da função $y = f(x) = -\left(\frac{1}{200}\right)x^2 + \left(\frac{1}{5}\right)x$, representado na figura a seguir, descreve a trajetória de um projétil lançado a partir da origem.



Sabendo-se que x e y são dados em quilômetros, a altura máxima H e o alcance A do projétil são, respectivamente,

a) 2 km e 40 km **b)** 40 km e 2 km **c)** 2 km e 10 km **d)** 10 km e 2 km **e)** 2 km e 20 km

- A metade do alcance do projétil corresponde à abscissa do vértice da parábola:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$x_v = -\frac{\frac{1}{5}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{200}\right)}$$

$$x_v = \frac{1}{5} \cdot \frac{100}{1}$$

$$x_v = 20$$

Assim, o alcance do projétil é de 40 km (o dobro da abscissa do vértice da parábola).

- A altura máxima alcançada pelo projétil corresponde ao valor da ordenada do vértice, isto é:

$$H_{máx} = y_v = f(x_v) = f(20)$$

$$H_{máx} = y_v = -\frac{1}{200} \cdot 20^2 + \frac{1}{5} \cdot 20$$

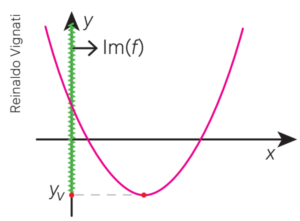
$$H_{máx} = -\frac{1}{200} \cdot 400 + 4$$

$$H_{máx} = 2$$

Portanto, a altura máxima atingida é de 2 km. Alternativa **a**.

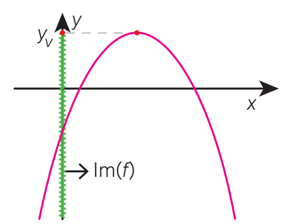
Observação:

Em uma função quadrática $y = f(x)$, os valores assumidos pela variável y constituem o conjunto imagem dessa função. Os intervalos representados no eixo vertical a seguir indicam o conjunto imagem Im(f). No gráfico da esquerda, dizemos que y_V representa o menor valor (**mínimo**) assumido pela função, enquanto no gráfico da direita y_V representa o maior valor (**máximo**) assumido pela função. Abaixo dos gráficos, aparecem as notações para representar os conjuntos imagem correspondentes em cada situação.



$\text{Im}(f) = [y_V, +\infty)$

$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_V\}$



$\text{Im}(f) = (-\infty, y_V]$

$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_V\}$

Atividades

68. Uma bola é lançada de modo que sua altura h, em metros, t segundos após o lançamento pode ser obtida pela função quadrática $h(t) = -t^2 + 4t + 6$.

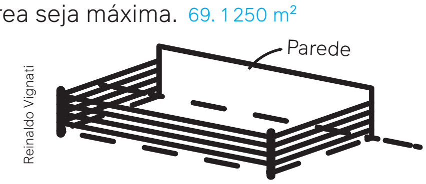
a) De que altura essa bola foi arremessada? 68. a) 6 m

b) Em qual instante a bola atinge altura máxima? 68. b) 2 s

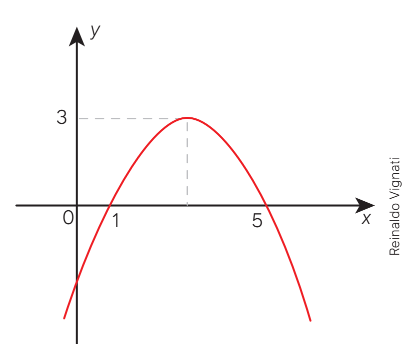
c) Qual é a altura máxima atingida pela bola? 68. c) 10 m

d) Quantos segundos após o lançamento essa bola atinge o solo? 68. d) Aproximadamente 5,16 s.

69. Um fazendeiro quer construir um curral retangular. Para cercá-lo, dispõe de 400 m de arame e de uma parede. Sabendo que a cerca de arame terá 4 voltas, determine as dimensões desse curral para que sua área seja máxima. 69. 1 250 m²



70. Considere a função quadrática cuja parábola correspondente está representada no plano cartesiano abaixo.



a) Qual é o valor máximo assumido pela função quadrática? 70. a) $y_v = 3$

b) Qual é o conjunto imagem dessa função quadrática? 70. b) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 3\}$

71. Sendo a função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 +$ $+ 8x - 1$, faça o que se pede.

a) Determine o valor da ordenada do vértice da parábola correspondente. 71. a) $y_V = -9$

b) Esse valor representa um máximo ou um mínimo assumido pela função? Justifique. 71. b) Mínimo; resposta pessoal.

c) Escreva o conjunto imagem dessa função. 71. c) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y \geq -9\}$

72. Escreva uma lei de formação para uma função quadrática de forma que a parábola correspondente tenha um valor máximo igual a 20 e os zeros da função sejam iguais a 5 e 15. 72. Resposta pessoal.

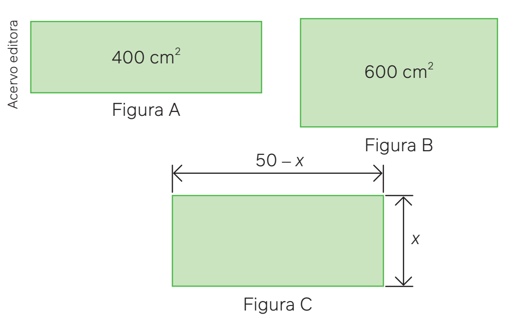
73. (Enem) Uma empresa vendia, por mês, 200 unidades de certo produto ao preço de R$ 40,00 a unidade. A empresa passou a conceder desconto na venda desse produto e verificou que cada real de desconto concedido por unidade do produto implicava na venda de 10 unidades a mais por mês. Para obter o faturamento máximo em um mês, o valor do desconto, por unidade do produto, deve ser igual a

a) R$ 5,00 **c)** R$ 12,00 **e)** R$ 20,00

b) R$ 10,00 **d)** R$ 15,00

73. Alternativa **b**.

74. (Unifesp) As figuras A e B representam dois retângulos de perímetros iguais a 100 cm, porém de áreas diferentes, iguais a 400 cm² e 600 cm², respectivamente. A figura C exibe um retângulo de dimensões $(50 - x)$ cm e x cm, de mesmo perímetro que os retângulos das figuras A e B.



a) Determine a lei, $f(x)$, que expressa a área do retângulo da figura C e exiba os valores de x que fornecem a área do retângulo da figura A. 74. a) $f(x) = -x^2 + 50x$ $(0 < x < 50)$

b) Determine a maior área possível para um retângulo nas condições da figura C. 74. b) 625 cm²

75. (UFSM-RS) A água é essencial para a vida e está presente na constituição de todos os alimentos. Em regiões com escassez de água, é comum a utilização de cisternas para captação e armazenamento da água da chuva. Ao esvaziar um tanque contendo água da chuva, a expressão $V(t) = -\dfrac{1}{43\,200}t^2 + 3$ representa o volume (em m³) de água presente no tanque no instante t (em minutos).

Qual o tempo, em horas, necessário para que o tanque seja esvaziado? 75. Alternativa **d**.

a) 360 **c)** 120 **e)** 3

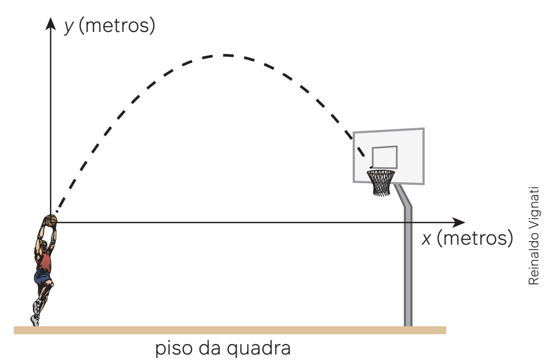
b) 180 **d)** 6

76. (UFSCar-SP) Uma bola, ao ser chutada num tiro de meta por um goleiro, numa partida de futebol, teve sua trajetória descrita pela equação $h(t) = -2t^2 + 8t$ $(t \geq 0)$, onde t é o tempo medido em segundos e $h(t)$ é a altura em metros da bola no instante t. Determine, após o chute:

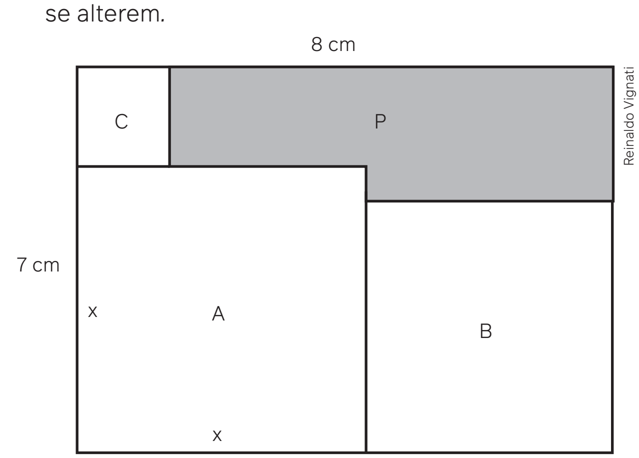
a) o instante em que a bola retornará ao solo;

b) a altura atingida pela bola. 76. a) 4 s 76. b) 8 m

77. Faça esta atividade com um colega. Observem, no desenho a seguir, um jogador de basquete lançando a bola exatamente a 2,00 m de altura em relação ao piso da quadra. A bola faz uma trajetória parabólica cuja lei de formação da função quadrática, no plano cartesiano representado, é $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x$. Com base nessas informações, elaborem e resolvam dois problemas. Em seguida, apresentem-nos aos colegas. 77. Resposta pessoal.



78. (ESPM-SP) A figura abaixo mostra um retângulo de lados 7 cm e 8 cm no qual estão contidos os quadrados A, B e C. A medida x pode variar entre 3,5 cm e 7 cm, fazendo com que os lados dos três quadrados se alterem.



Dentro desse intervalo, o maior valor que a área do polígono P pode ter é igual a: 78. Alternativa **a**.

a) 18 cm²

b) 15 cm²

c) 17 cm²

d) 19 cm²

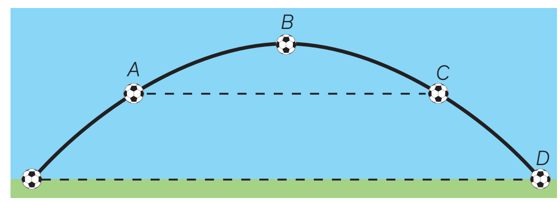
e) 16 cm²

4 Inequações do 2º grau

A imagem representa a trajetória de uma bola que foi chutada por um jogador.

Duas perguntas podem ser feitas a respeito dessa trajetória:

- Qual foi o alcance da bola, se nada impediu sua trajetória?
- Qual é a altura máxima atingida pela bola?



Reinaldo Vignati

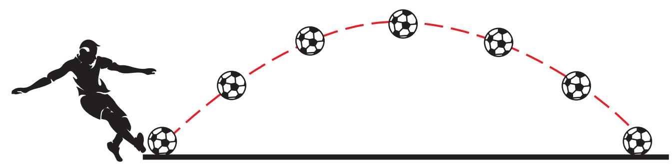
Observando que a trajetória da bola é em forma de parábola, você poderia utilizar o conhecimento de função quadrática para **modelar** a situação e, então, responder às duas questões propostas ou a outras que poderiam ser feitas.

Uma ideia seria obter a lei de formação de uma função que fornecesse a altura da bola em função do tempo. Ao obter essa lei, você fará o que se chama **modelagem matemática**.

Observe no exemplo a seguir a utilização de função quadrática para modelar uma situação.

Exemplo:

Pedro é o goleiro da escola e é conhecido pela potência de seu chute. Em uma partida de futebol, Pedro cobra um tiro de meta e a trajetória da bola é modelada pela equação $h(t) = -2t^2 + 12t$, sendo $0 \leq t \leq 6$, em que t é o tempo medido em segundos e $h(t)$ é a altura em metros da bola no instante t. Determine, após o chute:


TDPStudio

a) o instante em que a bola retornará ao solo;

b) a altura máxima atingida pela bola;

c) a quantidade de segundos que essa bola ficou na altura 10 m ou mais.

Vamos à resolução da situação apresentada:

- Item **a)** Há dois momentos em que a bola está em contato com o solo: o momento em que Pedro chutou a bola e o momento em que a bola retornou ao solo. Nesses dois momentos, a altura é igual a zero:

$$h(t) = 0$$

$$-2t^2 + 12t = 0$$

$$t^2 - 6t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 6 \end{cases}$$

Portanto, a bola retornará ao solo 6 segundos após o chute de Pedro. Note que o modelo descreve a situação para t variando apenas de zero a 6 segundos.

- Item **b)** Como a função que fornece a altura em função do tempo é quadrática, a altura máxima atingida pela bola pode ser obtida pelo cálculo da ordenada do vértice da parábola correspondente:

$$h_{\text{máxima}} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$h_{\text{máxima}} = -\frac{12^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0}{4 \cdot (-2)} \Rightarrow h_{\text{máxima}} = 18$$

Logo, a altura máxima atingida pela bola foi de 18 m.

- Item **c)** Como queremos o tempo em que a bola ficou a uma altura maior ou igual a 10 m, é dada a seguinte condição:

$$h(t) \geq 10$$

$$-2t^2 + 12t \geq 10$$

$$\underbrace{-2t^2 + 12t - 10 \geq 0}$$

Essa desigualdade é chamada de **inequação do 2º grau** na incógnita t.

A resolução de uma inequação do 2º grau envolve o conhecimento do sinal de uma função quadrática, o que veremos a seguir. Depois, sugerimos que você retome e resolva essa inequação.

Análise e contexto

Modelagem matemática

Para você compreender um pouco mais o tema abordado, sugerimos a leitura atenta do texto a seguir. Nele você terá a oportunidade de observar que a modelagem em matemática é amplamente utilizada.

Modelo matemático

Muitas situações do mundo real podem apresentar problemas que requeiram soluções e decisões. Alguns desses problemas contêm fatos matemáticos relativamente simples, envolvendo uma matemática elementar, como:

- o tempo necessário para percorrer uma distância de quarenta quilômetros, mantendo-se a velocidade do veículo a uma média de oitenta quilômetros por hora;
- o juro cobrado por uma instituição financeira a determinado empréstimo;
- a área de um terreno de forma retangular.

Outros, "camuflados" em determinada área do conhecimento, necessitam de uma análise mais acurada das variáveis envolvidas, como:

- a melhor forma para reduzir o "retrabalho" em uma fábrica;
- a quantidade permitida e o período apropriado para a caça de um animal predador sem que isso interfira no ecossistema.

Seja qual for o caso, a resolução de um problema, em geral quando quantificado, requer uma formulação matemática detalhada. Nessa perspectiva, um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real denomina-se **modelo matemático**.

Na ciência, a noção de modelo é fundamental. Em especial a Matemática, com sua arquitetura, permite a elaboração de modelos matemáticos, possibilitando melhor compreensão, simulação e previsão do fenômeno estudado.

Um modelo pode ser formulado em termos familiares, utilizando-se expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais etc. Por outro lado, quando se propõe um modelo, ele é proveniente de aproximações nem sempre realizadas para se entender melhor um fenômeno, e tais aproximações nem sempre condizem com a realidade. Seja como for, um modelo matemático retrata, ainda que em uma visão simplificada, aspectos da situação pesquisada.

Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa ótica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir qual é o conteúdo matemático que melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

A elaboração de um modelo depende do conhecimento matemático que se tem. Se o conhecimento matemático restringe-se a uma matemática elementar, como aritmética e/ou medidas, o modelo pode ficar delimitado a esses conceitos. [Quanto] maior o conhecimento matemático, maiores serão as possibilidades de resolver questões que exijam uma matemática mais sofisticada. Porém o valor do modelo não está restrito à sofisticação matemática.

A modelagem matemática é, assim, uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2000. p. 11-13.

Assim, uma função quadrática pode ser utilizada para modelar determinado fenômeno. Uma fórmula que você utiliza para calcular, por exemplo, o número de diagonais de um polígono em função do número de lados representa uma relação matemática que modela esse tipo de cálculo.

Junte-se a um colega para responder às questões a seguir.

1. Segundo o texto, o problema do cálculo da área de um terreno retangular pode ser resolvido por meio de um modelo matemático. Como é esse modelo? 1. $A = b \cdot h$

2. E se fosse estabelecida uma condição para que a área não pudesse passar de determinado valor, que modelo matemático poderia ser usado? 2. $A = b \cdot h \leq k$

3. Que modelo matemático a Física utiliza para descrever a trajetória parabólica de uma bola? 3. Resposta pessoal.

Estudo dos sinais de uma função quadrática

Ampliaremos aqui o estudo de função quadrática (função do 2º grau). Essa ampliação é no sentido de conhecer procedimentos que nos permitam resolver situações envolvendo desigualdades com sentenças do 2º grau em x, também conhecidas como inequações.

No ramo de alimentos em nosso país, existem tanto microempresas que produzem alimentos como também aquelas que os entregam nas residências. Podemos encontrar, por exemplo, pequenas panificadoras que produzem e vendem pães caseiros, semelhantes ao da imagem.


Matthew Bechelli/Shutterstock.com
Pão caseiro.

Em qualquer empreendimento, devem ser tomados cuidados especiais. E isso se aplica também no caso de uma panificadora. Não basta saber fazer um pão caseiro delicioso se as questões financeiras não forem bem resolvidas e planejadas.

Apenas para exemplificar, extraímos a seguir uma situação que foi objeto de avaliação do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), cuja solução recaiu em uma inequação do 2º grau. Leia atentamente!

Exemplo:

(Enem) Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação

$$q = 400 - 100p$$

na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais. A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção.

Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto.

O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

a) R\$ $0{,}50 < p <$ R\$ 1,50
b) R\$ $1{,}50 < p <$ R\$ 2,50
c) R\$ $2{,}50 < p <$ R\$ 3,50
d) R\$ $3{,}50 < p <$ R\$ 4,50
e) R\$ $4{,}50 \leq p \leq$ R\$ 5,50

Para pensar e discutir

1. Quantos pães são vendidos diariamente se o preço de venda de cada pão for R$ 0,80? 1. 320

2. E qual a quantia total arrecadada? 2. R$ 256,00

Você pode atribuir outros valores para o preço de cada pão e, então, obter os valores diários totais correspondentes arrecadados, de acordo com as condições da situação. Entretanto, vamos analisar a situação utilizando a função quadrática.

- Cálculo do valor total V a ser arrecadado diariamente em função do preço p de cada pão:

$$V = (\text{quantidade}) \cdot (\text{preço})$$
$$V = q \cdot p$$
$$V = (400 - 100p) \cdot p$$

- Queremos calcular o valor de p tal que o valor arrecadado V seja maior ou igual a R$ 300,00 e a quantidade q vendida seja a maior possível. Temos que:

$$V \geq 300$$
$$(400 - 100p) \cdot p \geq 300$$
$$-100p^2 + 400p \geq 300$$
$$-100p^2 + 400p - 300 \geq 0$$

$$\Big\downarrow \text{ Dividindo por } (-100)$$

$$p^2 - 4p + 3 \leq 0 \longrightarrow$$ Essa desigualdade é chamada de **inequação do 2º grau** na incógnita x.

A resolução de uma inequação do 2º grau envolve o conhecimento do sinal de uma função quadrática. Voltaremos a essa situação, mas, antes, retomaremos o gráfico de uma função quadrática por meio de exemplos resolvidos envolvendo o estudo do sinal de uma função quadrática.

Atividades resolvidas

26. Estude o sinal da função quadrática (função do 2º grau) cuja lei de formação é dada por $y = x^2 - 7x$.

- Para o esboço do gráfico, sabemos que a concavidade da parábola é voltada para cima. Além disso, podemos determinar os zeros da função:

$$y = 0$$
$$x^2 - 7x = 0$$
$$x(x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases}$$

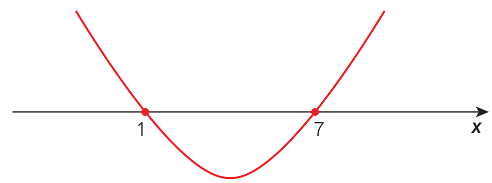
- Esboçamos a parábola conforme indicado (para simplificar, utilizamos apenas como referência o eixo das abscissas).

Observando o esboço do gráfico, podemos analisar o sinal da função, ou seja:

$y = 0$ para $x = 0$ ou $x = 7$

$y > 0$ para $x < 0$ ou $x > 7$

$y < 0$ para $0 < x < 7$



Reinaldo Vignati

27. Estude o sinal da função quadrática (função do 2º grau) cuja lei de formação é dada por $y = -x^2 + 5x - 4$.

- Para o esboço do gráfico, sabemos que a concavidade da parábola é voltada para baixo. Além disso, podemos determinar os zeros da função:

$$y = 0$$
$$-x^2 + 5x - 4 = 0$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

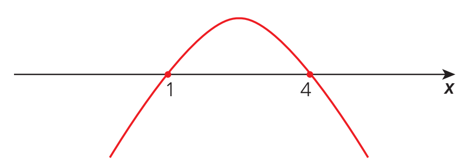
- Esboçamos a parábola conforme indicado (para simplificar, utilizamos apenas como referência o eixo das abscissas).

Observando o esboço do gráfico, podemos analisar o sinal da função, ou seja:

$y = 0$ para $x = 1$ ou $x = 4$

$y > 0$ para $1 < x < 4$

$y < 0$ para $x < 1$ ou $x > 4$



Reinaldo Vignati

28. Estude o sinal da função quadrática (função do 2º grau) cuja lei de formação é dada por $y = -x^2 + 2x - 4$.

- Para o esboço do gráfico, sabemos que a concavidade da parábola é voltada para baixo. Além disso, podemos determinar os zeros da função:

$$y = 0$$
$$-x^2 + 2x - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow \text{Não existe } x \text{ real.}$$

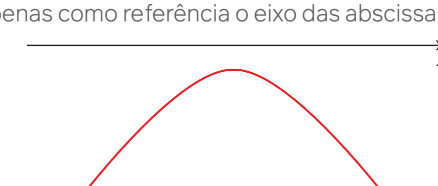
- Esboçamos a parábola conforme indicado (para simplificar, utilizamos apenas como referência o eixo das abscissas).

Observando o esboço do gráfico, podemos analisar o sinal da função, ou seja:

$y = 0$ para nenhum valor real de x;

$y > 0$ para nenhum valor real de x;

$y < 0$ para qualquer valor real de x.



Reinaldo Vignati

Para explorar

Junte-se a um colega para realizar as próximas atividades. Utilizem um *software* de geometria dinâmica para o estudo do sinal de uma função do 2º grau de acordo com as instruções a seguir.

1. Construam os gráficos no plano cartesiano das seguintes funções: 1. Resposta no Manual do Professor.

$$f_1(x) = x^2 - 6x$$
$$f_2(x) = -x^2 + 16$$
$$f_3(x) = x^2 - 10x + 25$$
$$f_4(x) = -x^2 + 2x - 5$$

2. Em cada gráfico, indiquem:

a) os valores reais de x que anulam a função, se é que existem; 2. a) Resposta no Manual do Professor.

b) os valores reais de x para os quais a função tem imagem positiva; 2. b) Resposta no Manual do Professor.

c) os valores reais de x para os quais a função tem imagem negativa. 2. c) Resposta no Manual do Professor.

3. Elaborem a lei de formação de três funções quadráticas e façam os gráficos correspondentes considerando as condições a seguir.

a) Função 1: para nenhum valor real de x, y é positivo. 3. a) Resposta pessoal.

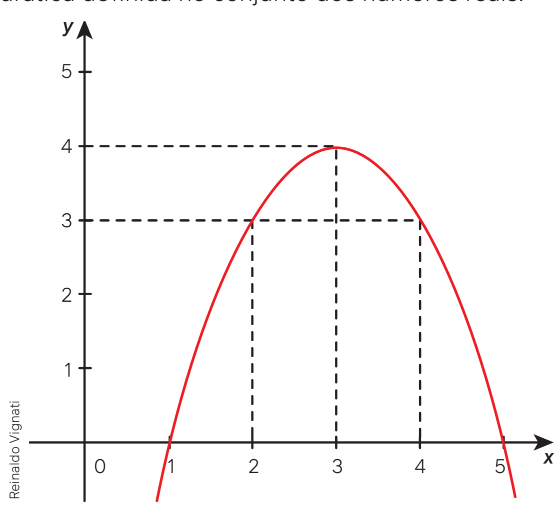
b) Função 2: para qualquer valor real de x, y é positivo. 3. b) Resposta pessoal.

c) Função 3: para qualquer valor real de x, y é negativo. 3. c) Resposta pessoal.

4. Elaborem um texto com as conclusões desta seção, comentando o estudo do sinal de uma função quadrática. 4. Resposta no Manual do Professor.

Atividades

79. O esboço do gráfico a seguir é de uma função quadrática definida no conjunto dos números reais.



a) Para quais valores reais de x tem-se $f(x) < 0$? 79. a) $x < 1$ ou $x > 5$

b) Para quais valores reais de x tem-se $f(x) > 0$? 79. b) $1 < x < 5$

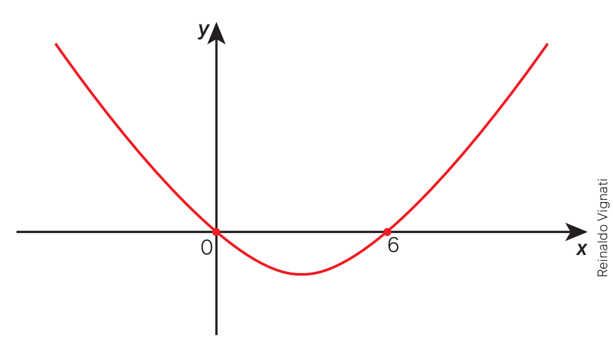
80. Considere a função quadrática definida no conjunto dos números reais por $f(x) = -x^2 + 16$.

a) Obtenha os valores de x que anulam essa função. 80. a) 4 e –4

b) Represente por meio de desigualdade todos os valores reais de x que tornam essa função negativa. 80. b) $x < -4$ ou $x > 4$

c) Represente por meio de desigualdade todos os valores reais de x que tornam essa função positiva. 80. c) $-4 < x < 4$

81. Abaixo está representado um esboço do gráfico de uma função quadrática $y = f(x)$ definida no conjunto dos números reais.



Escreva todos os valores de x para os quais se tem:

a) $f(x) = 0$ 81. a) $x = 0$ ou $x = 6$

b) $f(x) > 0$ 81. b) $x < 0$ ou $x > 6$

c) $f(x) < 0$ 81. c) $0 < x < 6$

82. Considere que a lei de formação de uma função quadrática f é dada por $f(x) = -x^2 + 6x$ para qualquer x real. Então, faça o que se pede.

a) Esboce no plano cartesiano o gráfico de f. 82. a) Resposta no Manual do Professor.

b) Faça o estudo completo do sinal dessa função, ou seja, informe os valores de x para os quais se tem: 82. b) Respostas no Manual do Professor.

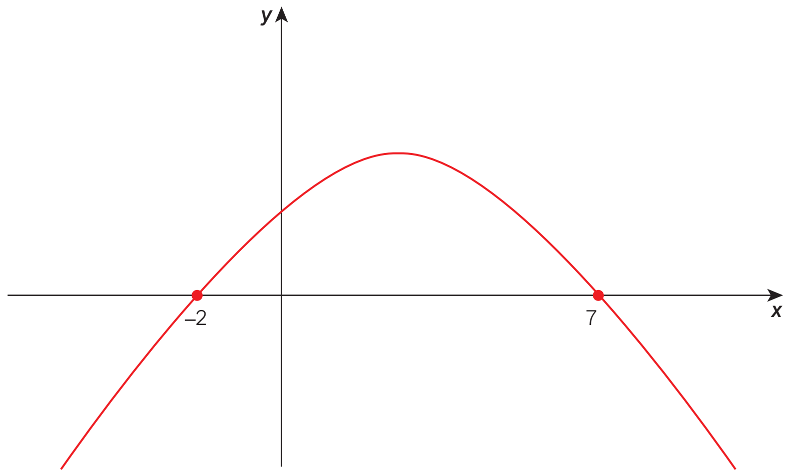
- $f(x) = 0$;
- $f(x) > 0$;
- $f(x) < 0$.

83. A função quadrática $y = f(x)$, definida no conjunto dos números reais, está representada graficamente por meio do seguinte esboço:

83. a) $f(x) = 0$ para $x = -2$ e $x = 7$

$f(x) > 0$ para $-2 < x < 7$

$f(x) < 0$ para $x < -2$ ou $x > 7$



Reinaldo Vignati

a) Com base nas informações desse esboço, faça um estudo do sinal dessa função.

b) Para quais valores naturais de x tem-se $f(x) < 0$? 83. b) $x > 7$

84. Resolva, com um colega, o problema a seguir.

A trajetória de um projétil foi representada em um plano cartesiano com base na função quadrática definida por:

$$y = -\frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{16}x$$

Nessa lei de formação, y e x representam, em quilômetros, o deslocamento na vertical e o deslocamento na horizontal, respectivamente. Para quais valores de x (deslocamento na horizontal) a altura do projétil será maior ou igual a 46,875 m e menor ou igual a 62,5 m? Sugestão: esbocem no plano cartesiano o gráfico correspondente. 84. Para $1 \leq x \leq 3$.

85. Esta é uma atividade para ser executada em três etapas e em dupla.

Etapa 1 85. Etapa 1. Resposta pessoal.

Elaborem a lei de formação de 4 funções quadráticas $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ e $f_4(x)$ de acordo com as características de seus gráficos descritas a seguir:

f_1 – deve ser uma parábola com a concavidade voltada para baixo e tendo apenas um ponto em comum com o eixo das abscissas;

f_2 – deve ser uma parábola com a concavidade voltada para cima e tendo apenas um ponto em comum com o eixo das abscissas;

f_3 – deve ser uma parábola com a concavidade voltada para baixo e que não tenha ponto em comum com o eixo das abscissas;

f_4 – deve ser uma parábola com a concavidade voltada para cima e que não tenha ponto em comum com o eixo das abscissas.

Etapa 2 85. Etapa 2. Resposta pessoal.

Utilizem um *software* de geometria dinâmica e, com base nessas quatro leis de formação, construam os gráficos dessas funções no plano cartesiano.

Etapa 3 85. Etapa 3. Resposta pessoal.

Façam o estudo do sinal de cada função analisando os gráficos correspondentes.

86. Um gerador de energia elétrica lança, em determinado circuito, uma potência (dada em watts) definida por meio da função $P(i) = -6i^2 + 24i$, sendo i a intensidade da corrente elétrica em amperes que atravessa o gerador. Determine os valores de i para os quais a potência nesse gerador seja maior que 18 watts. 86. $1 < i < 3$

87. Elabore uma situação similar à descrita na atividade anterior, porém alterando dados da lei de formação da função. Depois, apresente-a a um colega para que ele a resolva. 87. Resposta pessoal.

Resoluções de inequações do 2º grau

Podemos agora retomar a situação a respeito da terminação do valor de p, correspondente ao preço do pão, tal que o valor arrecadado V seja maior ou igual a R$ 300,00 e, além disso, a quantidade q de pães vendidos seja a maior possível. Na resolução, chegamos à seguinte inequação:

$$-100p^2 + 400p - 300 \geq 0$$

Dividindo por (–100)

$$p^2 - 4p + 3 \leq 0$$

Essa desigualdade é chamada de **inequação do 2º grau** na incógnita x.

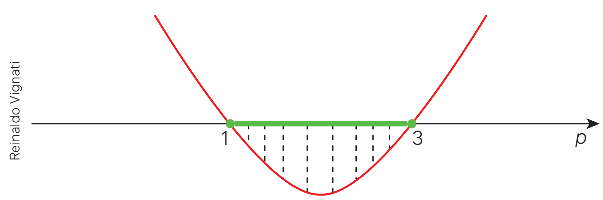
Observe que houve uma passagem em que dividimos membro a membro por –100. Quando multiplicamos ou dividimos uma desigualdade por um número negativo, invertemos o sinal dessa desigualdade. A resolução da inequação do 2º grau na incógnita p pode ser resolvida pela análise do sinal de uma função f correspondente a essa sentença, isto é:

$$\underbrace{p^2 - 4p + 3}_{f} \leq 0$$

- Zeros da função:

$$p^2 - 4p + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ p = 3 \end{cases}$$

Esboço do gráfico e análise do sinal para $p^2 - 4p + 3 \leq 0$.



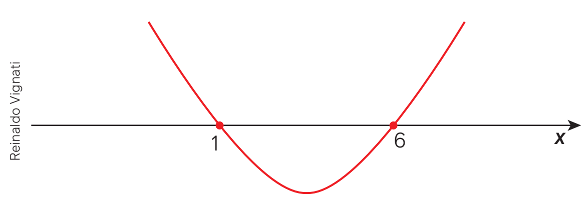
Portanto, os valores de p que satisfazem a condição estão no intervalo real [1, 3]. Como queremos que a quantidade q vendida de pão seja a máxima possível, sendo $q = 400 - 100p$, isso ocorrerá para o menor valor de p, ou seja, $p = 1$.

Uma **inequação do 2º grau** pode ser resolvida pela análise de sinal da função quadrática correspondente.

Ao resolver uma inequação do 2º grau, é importante que você compreenda quais valores farão parte da solução. Isso está ligado diretamente ao sinal da desigualdade. Para exemplificar, vamos considerar as seguintes inequações:

I. $x^2 - 7x + 6 \leq 0$; **II.** $x^2 - 7x + 6 < 0$; **III.** $x^2 - 7x + 6 \geq 0$; **IV.** $x^2 - 7x + 6 > 0$.

Essas quatro inequações podem ser resolvidas pela análise do sinal da função quadrática $f(x) = x^2 - 7x + 6$, esboçada a seguir.



Para pensar e discutir

1. Qual é o conjunto-solução das inequações (I) e (II)? Elas representam as mesmas soluções? Por que isso acontece? 1. (I) $S = [1, 6]$ e (II) $S =]1, 6[$; não; resposta pessoal.
2. Qual é o conjunto-solução das inequações (III) e (IV)? Elas representam as mesmas soluções? Por que isso acontece? 2. (III) $S =]-\infty, 1]$ ou $[6, \infty[$ e (IV) $S =]-\infty, 1[$ ou $]6, \infty[$; não; resposta pessoal.

Ao analisar e discutir as soluções reais de inequações, utilizamos a notação de **intervalos**. As formas de representação de um intervalo real são retomadas na atividade a seguir.

Atividades

88. Para cada intervalo real abaixo representado, utilize uma sentença matemática que o represente.

a)

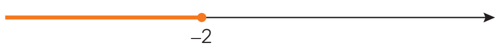
88. a) $[-2, 3]$

Acervo editora

b)

88. b) $]-2, 3[$

c)



88. c) $]-\infty, -2]$

d)

88. d) $]-\infty, -2[$

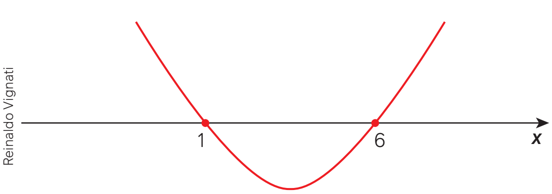
e)

88. e) $[-2, +\infty[$

f)

88. f) $]-2, +\infty[$

89. Considere a inequação do 2º grau em x dada por $x^2 - 7x + 6 \geq 0$. Ao resolver essa inequação, Pedro considerou a análise do sinal da função $f(x) = x^2 - 7x + 6$ e fez o seguinte esboço do gráfico:



Reinaldo Vignati

Com base nesse esboço, ele representou corretamente o conjunto-solução da inequação na forma de desigualdade. Qual foi o conjunto-solução obtido?

89. $x \leq 1$ ou $x \geq 6$

90. Determine todos os valores reais de x que verificam cada inequação a seguir.

a) $x^2 + 6 < 0$ 90. a) $S = \{\ \}$

b) $x^2 + 6 > 0$ 90. b) $S = \mathbb{R}$

c) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ 90. c) $S = \{3\}$

d) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ 90. d) $S = \mathbb{R}$

91. Forme dupla com um colega. Juntos, escrevam um algoritmo, passo a passo, para resolver a seguinte inequação do 2º grau:

$$x^2 - 9x + 8 \leq 0$$

Depois, apresentem esse algoritmo a outra dupla, que deverá verificar se, por ele, é possível resolver a inequação dada. 91. Resposta pessoal.

Observação:
Nesse caso, o algoritmo representa as etapas que precisam ser seguidas para chegar à solução da inequação.

92. Observe a inequação abaixo.

$$x^2 - 12x + 32 \leq 0$$

Quantas soluções inteiras ela possui? 92. Alternativa **c**.

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

93. (Cefet-MG) A diferença entre o comprimento x e a largura y de um retângulo é 2 cm. Se sua área é menor ou igual a 24 cm², então, o valor de x, em cm, será: 93. Alternativa **c**.

a) $0 < x < 6$

b) $0 < x \leq 4$

c) $2 < x \leq 6$

d) $2 < x < 6$

94. (UFGO) Duas empresas de transporte concorrentes adotaram diferentes políticas de preços para um determinado tipo de transporte, em função da distância percorrida. Na empresa A, o preço é de R$ 3,00 fixos, mais R$ 1,50 por quilômetro rodado. Já a empresa B cobra R$ 8,00 fixos, mais R$ 0,10 multiplicados pelo quadrado da quilometragem rodada. Tendo em vista as informações apresentadas,

a) Para um percurso de 20 km, qual das empresas tem o menor preço? 94. a) Empresa A.

b) Para quais distâncias a empresa B tem um preço menor do que a A? 94. b) Entre 5 km e 10 km.

95. Junte-se a um colega para fazer o que se pede.

a) Na situação anterior, vocês determinaram as leis de formação correspondentes ao valor cobrado pela empresa A e pela empresa B em função do número x de quilômetros percorridos. Utilizando um *software* de geometria dinâmica, construam em um mesmo plano cartesiano os gráficos correspondentes a essas funções. 95. a) Resposta pessoal.

b) Usem o gráfico para obter as respostas das duas questões da atividade anterior confirmando-as ou refutando-as. 95. b) As respostas deverão ser as mesmas.

c) Elaborem uma situação similar à anterior alterando alguns dados. Resolvam-na usando o *software* de geometria dinâmica e apresentem a solução a um colega para que também a resolva com os mesmos recursos. Ao final, verifiquem se as soluções encontradas são as mesmas. 95. c) Resposta pessoal.

5 Funções definidas por mais de uma sentença

Existem fenômenos que podem ser modelados por meio de uma função cuja lei de formação é apresentada por mais de uma sentença matemática. Você já trabalhou anteriormente com exemplos envolvendo função afim. Para retomar, vamos exemplificar usando uma conta de consumo de água de uma residência normal em São Paulo como base dos valores praticados em junho 2024, conforme quadro a seguir. Outros estados podem usar formas diferentes de cobrança.

Faixas de consumo	Volume (m^3)	Valor (R$ / m^3)	Totais	
		Água	Água	Esgoto
RES Mínimo	10	—	38,34	38,34
De 11 a 20 m^3	10	6,01	60,10	60,10
De 21 a 50 m^3	30	14,98	449,40	449,40
Acima de 50 m^3	9	16,50	148,50	148,50

SABESP. *Comunicado* – 1/24. São Paulo: Sabesp, 11 abr. 2024. Disponível em: https://www.sabesp.com.br/site/uploads/file/tabelas_tarif%C3%A1rias/Comunicado%201-24%20.pdf. Acesso em: 31 ago. 2024.

Faça dupla com um colega e, juntos, analisem os dados acima, extraídos de uma situação real. Em seguida, respondam às questões propostas para tirar conclusões.

Para pensar e discutir

1. Considerando apenas os dados apresentados, qual foi o consumo em metros cúbicos dessa residência naquele mês? 1. 59 m^3
2. Qual foi a conta total em reais, considerando água e esgoto? 2. R$ 1.392,68
3. Qual seria a conta de água e esgoto se o consumo fosse de 4 m^3 no mês? E 9 m^3? 3. Nos dois casos, seria o valor mínimo, R$ 76,68.
4. Se essa residência conseguisse economizar 9 m^3 no mês, em quantos reais a conta total (água + esgoto) diminuiria? 4. R$ 297,00
5. As grandezas volume de água e valor pago são diretamente proporcionais? Por quê? 5. Não; resposta pessoal.

Ao cobrar por faixa de consumo, há um “incentivo” à economia. Note que 1 m^3 acima dos 50 m^3 consumidos custa R$ 16,50, enquanto 1 m^3 na faixa imediatamente anterior custa R$ 14,98. Note também que, conforme a conta de água da residência mencionada, foram 59 m^3 em um mês. Lembrando que 1 m^3 corresponde a 1 000 L, temos que, em um mês, essa casa consumiu 59 000 L, isto é, mais de 1 900 L por dia:

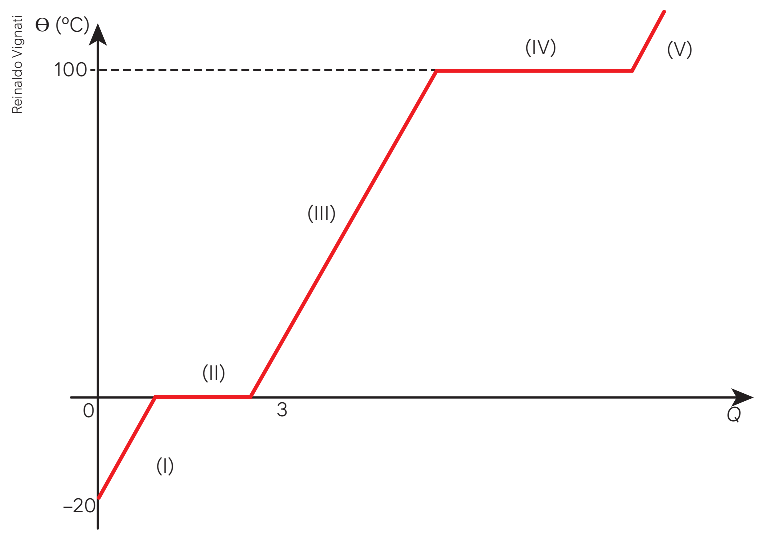
59 m^3 de água correspondem a 59 000 L de água

No final deste capítulo, abordaremos um pouco mais a respeito do consumo consciente de água.

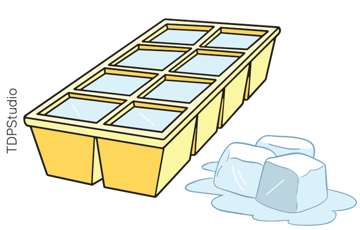
Lei de formação e gráficos

Nas contas de água e luz, as informações são dadas em uma tabela de valores.

Outra situação comum é analisar um fenômeno representado em um gráfico. Considere, por exemplo, um gráfico que evidencia a mudança do estado de uma massa de água. Abaixo, temos esse gráfico relacionando temperatura em função da quantidade de calor.



Observe que o gráfico está representado por meio de cinco segmentos indicados por (I), (II), (III), (IV) e (V). Essa situação envolve conhecimentos relacionados aos estados físicos da água.



sólido

líquido

gasoso

Para pensar e discutir

Junte-se a alguns colegas para analisar o gráfico. Vocês devem usar conhecimentos de Química para ampliar a análise e as questões a seguir para explorar o gráfico.

1. Qual é o estado físico da água nas partes (I), (III) e (V) do gráfico? 1. (I): sólido; (III): líquido; (V): gasoso.

2. Que mudança de estado físico da água ocorreu na parte (II) do gráfico? 2. De sólido para líquido.

3. E na parte (IV)? 3. De líquido para gasoso.

4. No eixo que indica a temperatura, qual é o significado desse fenômeno dos números 0 e 100, respectivamente? 4. Ponto de fusão e ponto de ebulição.

5. Na parte (II) e na parte (IV) a temperatura é constante. O que ocorre com a água nessas partes?

5. Resposta no Manual do Professor.

Note que as partes do gráfico estão representadas por meio de segmentos. Cada parte pode ser representada algebricamente por uma função. Pode haver também fenômenos representados algebricamente por mais de uma sentença, em funções com características gráficas diferentes.

Vamos exemplificar com uma questão resolvida, a seguir, extraída do Enem.

Atividades resolvidas

29. (Enem) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo. Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função

$$T(t) = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, \text{ para } 0 \le t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, \text{ para } t \ge 100 \end{cases}$$

em que T é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e t é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado.

Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48 °C e retirada quando a temperatura for 200 °C. O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a:

a) 100
b) 108
c) 128
d) 130
e) 150

Para explorar

Junte-se a um colega para realizar as atividades a seguir.

1. Antes de acompanharem a resolução da situação proposta, utilizem um *software* de geometria dinâmica ou, caso prefiram, uma folha de papel quadriculado (façam apenas o esboço) para construir o gráfico da função dada pela dupla sentença. Observem que, conforme os valores da variável t (tempo), teremos duas partes gráficas, porque são duas sentenças diferentes. 1. Resposta no Manual do Professor.

2. Respondam:

a) Qual é o valor de $T(0)$? 2. a) 20

b) Qual é o valor de $T(100)$? 2. b) 160

3. É possível, pelo gráfico, responder à situação proposta? Explique como vocês pensaram. 3. Sim; resposta pessoal.

- Para calcular $T(0)$ e $T(100)$, substituímos os valores na lei de formação da função, observando que existem duas sentenças matemáticas:

$$T(0) = \frac{7}{5} \cdot 0 + 20 \Rightarrow T(0) = 20$$

$$T(100) = \frac{2}{125} \cdot 100^2 - \frac{16}{5} \cdot 100 + 320 \Rightarrow T(100) = 160$$

Assim, o forno no instante igual a zero está à temperatura de 20 °C (temperatura ambiente). Após 100 minutos (tempo que divide as duas sentenças), a temperatura do forno estará em 160 °C.

- Substituímos na 1ª sentença a temperatura por 48 °C para determinar o momento em que devemos colocar a peça no forno:

$$48 = \frac{7}{5}t + 20$$

$$28 = \frac{7}{5}t \Rightarrow t = 20 \text{ (em minutos)}$$

- Substituímos na 2ª sentença a temperatura por 200 °C para determinar o momento em que devemos retirar a peça do forno:

$$200 = \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320$$

$$2t^2 - 400t + 15\,000 = 0$$

$$t^2 - 200t + 7\,500 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 50 \text{ min (não convém)} \\ t = 150 \text{ min} \end{cases}$$

Portanto, a peça deve permanecer no forno por 130 minutos (150 – 20 = 130).

Para pensar e discutir

1. Você faria de modo diferente alguma parte da resolução apresentada? Qual parte? De que modo? 1. Resposta pessoal.
2. Você não compreendeu alguma passagem dessa resolução? Qual? 2. Respostas pessoais.
3. As grandezas temperatura e tempo, na situação apresentada, são diretamente proporcionais? Justifique a resposta. 3. Não; resposta pessoal.

Atividades

96. Utilize uma folha de papel quadriculado e esboce o gráfico da função real f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 4, \text{ se } x < -2 \\ -2x, \text{ se } -2 \leq x \leq 2 \\ -4, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

Após, responda:

a) Para quais valores de x a função é decrescente? 96. a) Para x variando no intervalo $[-2, 2]$.

b) Para quais valores de x a função é constante? 96. b) Para $x < -2$ ou para $x > 2$.

c) Qual é o valor de $f(0,3)$? 96. c) $-0,6$

d) Qual é o valor de $f(200)$? 96. d) -4

e) E de $f(-500)$? 96. e) 4

97. Utilize uma folha de papel quadriculado e esboce o gráfico da função real f definida por:
97. Resposta no Manual do Professor.

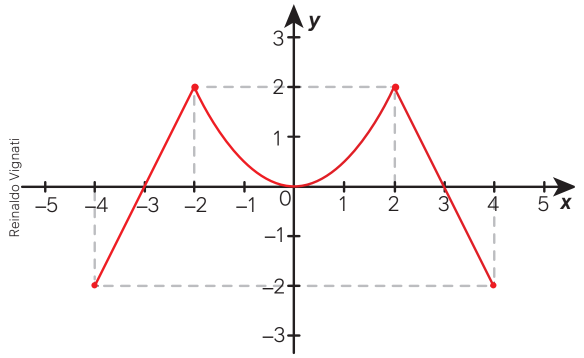
$$f(x) = \begin{cases} 4, \text{ se } x < -2 \\ x^2, \text{ se } -2 \leq x \leq 3 \\ 9, \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

a) Descreva com uma frase como é o comportamento gráfico dessa função. 97. a) Resposta pessoal.

b) Responda: Qual é o maior valor que y assume nessa função? 97. b) 9

c) Qual é o menor valor que y assume nessa função? 97. c) Zero.

98. Forme dupla com um colega para fazer esta atividade. Observem o gráfico a seguir, que representa uma função real definida dentro de certo intervalo real. Considerem que a parte central do gráfico é parte de uma função quadrática.

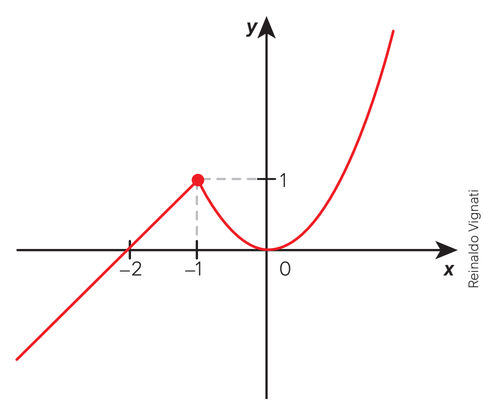


a) Qual é o domínio dessa função? Escreva na forma de intervalo. 98. a) $[-4, 4]$

b) Qual é a imagem dessa função? Escreva na forma de intervalo. 98. b) $[-2, 2]$

c) Obtenha a lei de formação dessa função; utilize três sentenças matemáticas. 98. c) Resposta no Manual do Professor.

99. O gráfico a seguir é de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação pode ser dada por meio de duas sentenças matemáticas. Considere que esse gráfico é composto de uma semirreta e parte de uma parábola correspondente a uma função quadrática. Obtenha a lei de formação dessa função.
99. Resposta no Manual do Professor.



100. Em uma folha quadriculada, esboce o gráfico da função real definida por:
100. Resposta no Manual do Professor.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 0 \\ -x^2, \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

a) Aumentando-se o valor de x nessa função, o que ocorre com o valor de y em correspondência? 100. a) Diminui.

b) Diminuindo-se o valor de x nessa função, o que ocorre com o valor de y em correspondência? 100. b) Aumenta.

101. Utilize o *software* de geometria dinâmica para obter o gráfico da função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3, \text{ se } x < -2 \\ 1, \text{ se } -2 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 4x - 3, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

Depois, apresente o gráfico aos colegas e responda:

a) Qual é o conjunto imagem dessa função? 101. a) $\text{Im}(f) =]-\infty, 1]$

b) Qual é a lei de formação da função g cujo gráfico é o da função f que se reflexiona simetricamente em relação ao eixo das abscissas? 101. b) Resposta no Manual do Professor.

Análise e contexto

Consumo consciente de água

Evidenciamos em parte deste capítulo a necessidade de uso consciente de água. No Brasil, o Departamento Nacional de Obras Contra as Secas (DNOCS) publicou um texto sobre o assunto em 2023, reproduzido parcialmente aqui.

Prefeitura Municipal de Rubineia

Consumo consciente da água é base para um futuro sustentável

A água é um recurso fundamental para a sobrevivência do ser humano. Ainda que 70% do planeta Terra seja coberto por água, apenas 1% desse volume é considerado potável. Da pequena parte hídrica que é adequada para consumo humano, 12% fica no Brasil, sendo 70% dessa água doce concentrada na Bacia Amazônica. O restante está distribuído de forma desigual – o Nordeste, por exemplo, possui somente 5% das reservas brasileiras de água doce, sendo que grande parte desse volume é subterrâneo e com alto teor de sal.

[...]

Faça sua parte: ações práticas para o uso consciente da água

1. Deixe a torneira fechada ao escovar os dentes, fazer a barba e ao passar sabão na louça. Ao escovar os dentes com ela aberta, você gasta cerca de 13,5 litros de água em apenas dois minutos.
2. Priorize banhos curtos. Cinco minutos são suficientes para fazer a limpeza do corpo e, enquanto você passa sabonete, o registro deve ser fechado. Isso permite uma economia de até 30 mil litros no ano.
3. Evite duchas de alta pressão. Elas possuem uma vazão de 20/30 litros por minuto. Um banho de 10 minutos em um chuveiro de 30 litros por minuto gasta em média 300 litros de água – a Organização Mundial da Saúde (OMS) diz que o consumo consciente por habitante é na ordem [de] 112 litros por dia.
4. Organize a louça antes de lavá-la. Utilize uma bacia para deixar os utensílios de molho, para amolecer a sujeira. Lave toda a louça e enxágue tudo de uma única vez. Isso e o uso de materiais biodegradáveis também ajudam na economia.
5. Espere juntar uma quantidade de roupas suficiente para lavar. Você também pode verificar se elas realmente precisam ser lavadas – várias peças, como calças jeans, podem ser usadas mais de uma vez antes de serem lavadas.
6. No jardim, evite regar as plantas nos horários de sol forte. Regar o gramado ou o jardim antes das 10 horas da manhã e depois das 7 horas da noite previne o excesso de evaporação. No inverno é possível regar as plantas dia sim, dia não. Com essas medidas, você pode economizar cerca de 96 litros de água diariamente só com as plantas.
7. Use vassoura para limpar o quintal, a calçada ou as áreas comuns de prédios e empresas – uma mangueira ligada por 15 minutos gasta 280 litros de água. Se precisar usar água, prefira equipamentos de limpeza a jato, que usam uma quantidade mínima de água aliada com uma forte pressão.
8. Use um balde e um pano para limpar o carro.
9. Use cisternas para fazer a captação e armazenar a água da chuva. Você pode reutilizar essa água em regas, na limpeza do quintal, dos pisos, dentre outros.

BRASIL. Ministério da Integração e do Desenvolvimento Regional. Consumo consciente da água é base para um futuro sustentáve.[Brasília, DF]: MIDR, 13 jan. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/dnocs/pt-br/assuntos/noticias/consumo-consciente-da-agua-e-base-para-um-futuro-sustentavel. Acesso em: 31 ago. 2024.

O texto traz ideias para economizar água. Em grupo, façam o que se pede a seguir.

1. Selecionem uma conta de água e uma de energia elétrica do último mês da residência de um integrante do grupo. 1. Resposta pessoal.
2. Analisem as contas e verifiquem qual seria o valor total se o consumo de água e o de energia elétrica dobrassem. 2. Resposta pessoal.
3. Verifiquem o que ocorreria se esses consumos caíssem pela metade. 3. Resposta pessoal.
4. Com base nas contas, criem duas situações-problema sobre redução de consumo para determinar o novo valor. Entreguem os problemas a outra equipe para resolver. 4. Resposta pessoal.
5. Cada grupo deve propor uma redução no consumo de água em casa. Após isso, a turma discutirá as ideias mais importantes das propostas apresentadas.

5. Resposta pessoal.

Atividades finais

1. Sobre o estudo de equações do 2º grau, responda:

a) Qual é o número máximo de elementos do conjunto-solução de uma equação do 2º grau? 1. a) Dois.

b) Pode o conjunto-solução de uma equação do 2º grau ter apenas um elemento? 1. b) Sim.

c) No conjunto dos números reais, uma equação do 2º grau sempre tem solução? 1. c) Não.

d) Se uma equação tem duas raízes reais e distintas, quais são os possíveis valores para o discriminante Δ dessa equação? 1. d) Qualquer número real positivo.

e) Qual é o valor do discriminante Δ de uma equação do 2º grau se ela apresenta duas raízes reais e iguais? 1. e) Zero.

f) Quais são as soluções da equação $x^2 - 10x = 0$? 1. f) 0 e 10

g) Quais são as soluções da equação $x^2 - 10 = 0$? 1. g) $\sqrt{10}$ e $-\sqrt{10}$

h) Quais são as soluções da equação $(x - 10)^2 = 25$? 1. h) 5 e 15

i) Qual é o procedimento para resolver a equação do 2º grau $x^2 + 4x = 0$ sem fórmula? 1. i) Resposta no Manual do Professor.

j) Qual é o procedimento para resolver a equação do 2º grau $x^2 - 144 = 0$ sem fórmula? 1. j) Resposta no Manual do Professor.

2. Sobre o estudo de funções quadráticas, responda:

a) Qual é a denominação do gráfico de uma função quadrática? 2. a) Parábola.

b) Qual é o nome do ponto extremo de uma parábola? 2. b) Vértice.

c) Quais são os tipos de concavidade de uma parábola? 2. c) Voltada para cima ou voltada para baixo.

d) Na função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, qual o significado gráfico de c? 2. d) Ordenada do ponto em que o gráfico intersecta o eixo y.

e) Se em uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, tem-se que $b^2 - 4ac = 0$ então a parábola correspondente intersecta o eixo das abscissas em quantos pontos distintos? 2. e) Em um ponto.

f) Se a função quadrática tem um ponto de máximo, qual é o tipo de concavidade da parábola correspondente? 2. f) Voltada para baixo.

g) Quantas soluções reais tem a inequação $x^2 < 0$? 2. g) Nenhuma.

h) Se tivermos $x^2 - 9 \geq 0$, então teremos $x \geq 3$? 2. h) Não.

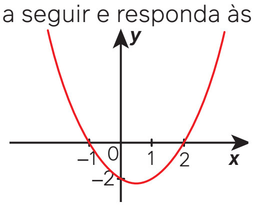
3. Considere o intervalo real $A = [-10, 10]$. Responda:

a) Quantos são os números reais pertencentes a esse intervalo? 3. a) Infinitos.

b) E quantos são os números inteiros? 3. b) 21

4. Considere o gráfico, no plano cartesiano, da função quadrática a seguir e responda às questões.

Reinaldo Vignati



a) Para quais valores de x tem-se $y = 0$? 4. a) $x = -1$ ou $x = 2$

b) Para quais valores de x tem-se $y > 0$? 4. b) Para $x < -1$ ou $x > 2$.

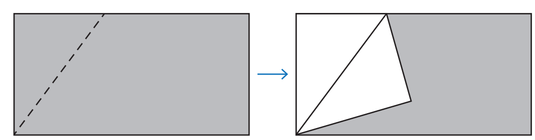
c) Para quais valores de x tem-se $y < 0$? 4. c) Para $-1 < x < 2$.

Questões de vestibulares e Enem

5. (Uece) Se o produto das raízes da equação $x^2 + n^2 - 2nx - 64 = 0$, onde x é a incógnita e n é constante, é igual a 36, então a soma dos quadrados destas raízes é igual a 5. Alternativa **c**.

a) 269 **b)** 296 **c)** 328 **d)** 382

6. (UEFS-BA) Uma folha de papel retangular de área 32 cm², colorida na frente e branca no verso, é dobrada ao longo de uma linha tracejada. Após essa dobra, a parte do verso da folha que fica visível tem a forma de um triângulo e a parte colorida que não ficou encoberta tem a forma de um pentágono, conforme mostra a figura.



TDPStudio

Dado que o perímetro desse pentágono é 24 cm, a diferença entre o maior e o menor lado dessa folha de papel é: 6. Alternativa **c**.

a) 2 cm **c)** 4 cm **e)** 6 cm

b) 3 cm **d)** 5 cm

7. (IFSC) Dada a equação quadrática $3x^2 + 9x - 120 = 0$ determine suas raízes.
Assinale a alternativa que contém a resposta **CORRETA**. 7. Alternativa **c**

a) –16 e 10 **c)** –8 e 5 **e)** –9 e 15

b) –5 e 8 **d)** –10 e 16

8. (IFPE) Um grupo de alunos do curso de mecânica decidiu comprar juntos um torno mecânico para montar uma oficina assim que se formassem. O valor de R$ 3.600,00 seria igualmente dividido por todos. Devido a alguns problemas financeiros, oito alunos que estavam no grupo desistiram, e a parte que cada um do grupo deveria pagar aumentou R$ 75,00.
Quantos alunos faziam parte do grupo inicialmente?

a) 20 alunos **c)** 18 alunos **e)** 12 alunos

b) 16 alunos **d)** 24 alunos

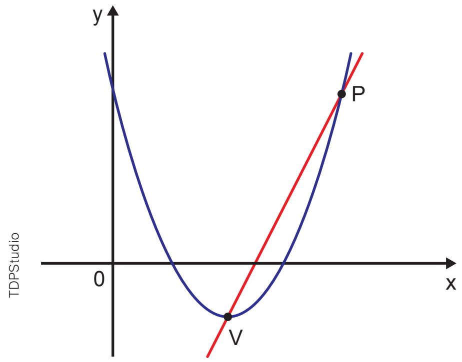
8. Alternativa **d**.

9. (Uerj) O lucro L de uma empresa, com a venda de camisetas, é modelado pela expressão $L(x) = 2\,500x + 10x^2$, sendo x a quantidade de lotes de 100 camisetas. De acordo com esse modelo, o lucro obtido com 4 000 camisetas, em reais, é igual a: 9. Alternativa **a**.

a) 116 000 **c)** 132 000

b) 124 000 **d)** 140 000

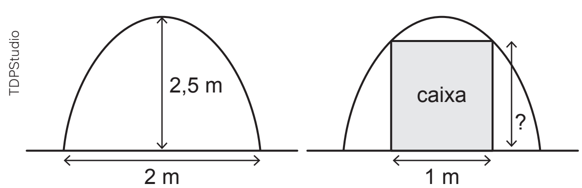
10. (UEA-AM) Em um plano cartesiano, a parábola descrita pela função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 3$ tem vértice no ponto V, de abscissa 2, e passa pelo ponto P de abscissa 4.



A reta que passa pelos pontos P e V intersecta o eixo y no ponto de ordenada igual a

a) –2 **c)** –4 **e)** –5
b) –1 **d)** –3 10. Alternativa **e**.

11. (Unicamp–SP) Laura é geóloga e está fazendo pesquisa numa caverna cuja entrada tem o formato de uma parábola invertida. Essa entrada, no nível do chão, tem 2 m de largura e seu ponto mais alto está a 2,5 m do chão, conforme figura a seguir.



Para realizar sua pesquisa, ela precisa entrar na caverna com um equipamento guardado em uma caixa de 1 m de largura. Qual é a altura máxima, em metros, que a caixa pode ter para passar pela entrada da caverna? 11. Alternativa **c**.

a) $\frac{11}{8}$ **b)** $\frac{13}{8}$ **c)** $\frac{15}{8}$ **d)** $\frac{17}{8}$

12. (UTFPR) Uma pequena empresa de desenvolvimento de software cria, testa e corrige diferentes tipos de sistemas, fornecendo soluções para indivíduos e organizações. O lucro da empresa é representado pela função $L(x) = -x^2 + 400x - 30\,000$, onde x é o número de clientes atendidos. Qual é o intervalo de valores de x para os quais a empresa é lucrativa?

a) (0, 100) **c)** (100, 300) **e)** (200, 400)
b) (50, 250) **d)** (150, 350) 12. Alternativa **c**.

13. (UEG-GO) Um lava-jato tem 50 clientes fixos por semana e cada lavagem custa R\$ 20,00. Sabe-se que a cada um real que o dono desse lava-jato aumenta no preço da lavagem, ele perde 2 clientes. O valor do aumento que maximiza a arrecadação semanal desse lava-jato é de:

a) R\$ 25,00 **c)** R\$ 2,50 **e)** R\$ 2,00
b) R\$ 20,00 **d)** R\$ 10,00 13. Alternativa **c**.

14. (UFPR) A distância que um automóvel percorre a partir do momento em que um condutor pisa no freio até a parada total do veículo é chamada de distância de frenagem. Suponha que a distância de frenagem d, em metros, possa ser calculada pela fórmula

$$d(v) = \frac{1}{120}\left(v^2 + 8v\right),$$

sendo v a velocidade do automóvel, em quilômetros por hora, no momento em que o condutor pisa no freio.

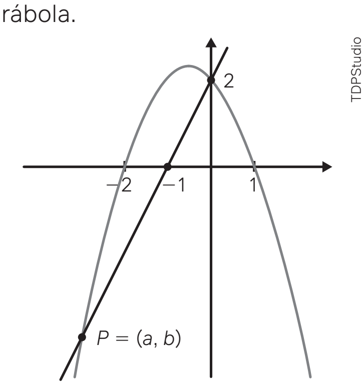
a) Qual é a distância de frenagem de um automóvel que se desloca a uma velocidade de 40 km/h? 14. a) 16 m

b) A que velocidade um automóvel deve estar para que sua distância de frenagem seja de 53,2 m? 14. b) 76 km/h

15. (Uerj) Um número N, inteiro e positivo, que satisfaz à inequação $N^2 - 17N + 16 > 0$ é: 15. Alternativa **d**.

a) 2 **b)** 7 **c)** 16 **d)** 17

16. (Unicamp-SP) Na figura abaixo estão representados os gráficos de uma parábola, de uma reta e o ponto $P(a,b)$, que é um dos pontos de interseção da reta com a parábola.



O valor de $a + b$ é 16. Alternativa **b**.

a) –7,5 **b)** –7 **c)** –6,5 **d)** –6

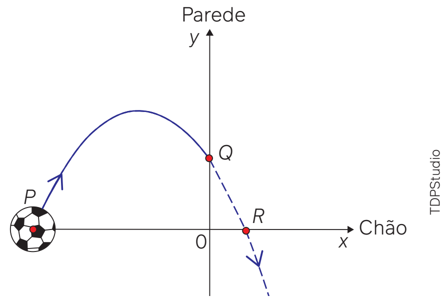
17. (UFSCar-SP) Sobre uma certa função $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$, sabe-se que $f(1) = 0$ e $f(-1) = 4$. O valor de $f(10)$ é 17. Alternativa **b**.

a) 100 **b)** 81 **c)** 64 **d)** 49

18. (Fempar-PR) Uma confecção produz calças jeans e conclui que a quantidade Q de unidades vendidas mensalmente depende do preço p cobrado por unidade conforme a função $Q(p) = 200 - p$. O custo de produção mensal dessas calças é composto de um valor fixo de R\$ 400,00 acrescido de R\$ 25,00 por unidade produzida, ou seja: $C(p) = 400 + 25 \cdot Q(p)$.
Para calcular o valor A arrecadado no mês com as vendas, multiplica-se o preço unitário p pela quantidade Q de unidades vendidas no período. O lucro mensal L apurado no mês é dado pela diferença entre a arrecadação A e o custo C.
Em um mês em que forem vendidas 150 unidades, o lucro será de 18. Alternativa **e**.

a) R\$ 3 000,00 **d)** R\$ 3 250,00
b) R\$ 3 050,00 **e)** R\$ 3 350,00
c) R\$ 3 150,00

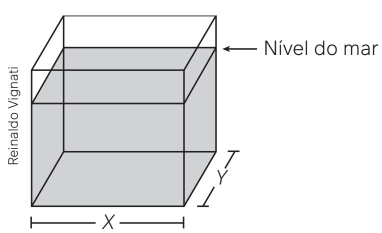
19. (Famema-SP) A figura representa, no plano cartesiano, a trajetória de uma bola que foi chutada a partir do ponto $P(-5, 0)$, localizado no chão, e seguiu em trajetória parabólica até bater na parede, no ponto $Q(0, 2)$. Se não houvesse parede, a bola seguiria sua trajetória até o ponto $R(1, 0)$, no chão.



Admitindo-se que a trajetória descrita pela bola é modelada pela função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, então $a + b + c$ é igual a 19. Alternativa **a**.

a) 0 **c)** 0,5 **e)** –0,5
b) 1 **d)** 1,5

20. (Enem) Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

a) 1 e 49 **c)** 10 e 10 **e)** 50 e 50
b) 1 e 99 **d)** 25 e 25

20. Alternativa **d**.

21. (Enem) Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola: $y = 9 - x^2$, sendo x e y medidos em metros.
Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual à $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

a) 18 **c)** 36 **e)** 54
b) 20 **d)** 45

21. Alternativa **c**.

22. (Enem) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.
A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no: 22. Alternativa **b**.

a) 19º dia **c)** 29º dia **e)** 60º dia
b) 20º dia **d)** 30º dia

23. (Enem) Analisando as vendas de uma empresa, o gerente concluiu que o montante diário arrecadado, em milhar de real, poderia ser calculado pela expressão $V(x) = \frac{x^2}{4} - 10x + 105$, em que os valores de x representam os dias do mês, variando de 1 a 30. Um dos fatores para avaliar o desempenho mensal da empresa é verificar qual é o menor montante diário V_0 arrecadado ao longo do mês e classificar o desempenho conforme as categorias apresentadas a seguir, em que as quantidades estão expressas em milhar de real.

- Ótimo: $V_0 \geq 24$
- Bom: $20 \leq V_0 < 24$
- Normal: $10 \leq V_0 < 20$
- Ruim: $4 \leq V_0 < 10$
- Péssimo: $V_0 < 4$

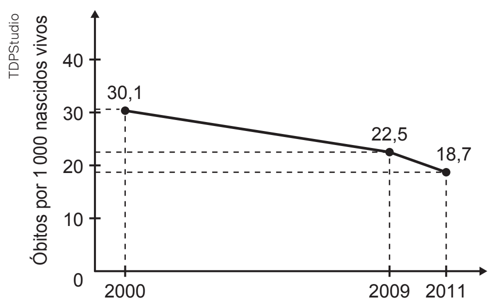
No caso analisado, qual seria a classificação do desempenho da empresa? 23. Alternativa **d**.

a) Ótimo.
b) Bom.
c) Normal.
d) Ruim.
e) Péssimo.

24. (Enem) O chocolate é um dos alimentos mais apreciados e desejados do mundo. Uma loja especializada nesse produto oferece uma promoção para os bombons, que custam R$ 2,00 cada. Cada cliente tem x% de desconto na compra de x bombons. A promoção é válida para a compra de até 40 bombons, ou seja, 40% é o desconto máximo possível. Queremos escrever uma expressão para V em função de x, com $x \leq 40$. Qual é a expressão do valor V, em reais, na compra de x bombons da promoção, por cliente? 24. Alternativa **c**.

a) $V = \frac{1}{50}x^2$
b) $V = 2 - \frac{1}{50}x^2$
c) $V = 2x - \frac{1}{50}x^2$
d) $V = x - \frac{1}{100}x^2$
e) $V = 2x - \frac{1}{100}x^2$

25. (Enem) A taxa de mortalidade infantil vem decaindo a cada ano no Brasil. O gráfico, gerado a partir de dados do IBGE, apresenta a evolução da taxa de mortalidade infantil (número de óbitos para cada 1 000 nascidos vivos) de crianças com até 5 anos, no Brasil, no período de 2000 a 2011.



Considere que, para os próximos anos, o decréscimo anual médio do número de óbitos para cada 1000 nascidos vivos registrados, no período de 2009 a 2011, será mantido.

A partir das informações fornecidas, a taxa de mortalidade infantil de crianças com até 5 anos tornar-se-á inferior a 10 no período de 25. Alternativa **d**.

a) 2011 a 2012
b) 2012 a 2013
c) 2013 a 2014
d) 2015 a 2016
e) 2017 a 2018

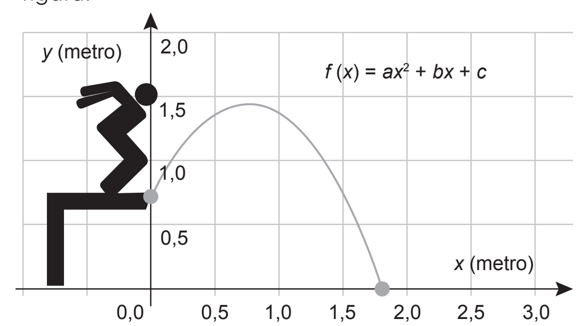
26. (Enem) Considere que o modelo matemático utilizado no estudo da velocidade V, de uma partícula de um fluido escoando em um tubo, seja diretamente proporcional à diferença dos quadrados do raio R da seção transversal do tubo e da distância x da partícula ao centro da secção que a contém. Isto é, $V(x) = K^2(R^2 - x^2)$, em que K é uma constante positiva. O valor de x, em função de R, para que a velocidade de escoamento de uma partícula seja máxima é de

a) 0
b) R
c) $2R$
d) KR
e) $K^2 R^2$

26. Alternativa **a**.

27. (Enem) A trajetória de uma pessoa que pula de um andaime até o chão é descrita por uma função $y = f(x)$, sendo x e y medidos em metro, conforme mostra a figura.

Seja D o domínio da função $f(x)$, como definida na figura.



Para que a situação representada na figura seja real, o domínio dessa função deve ser igual a 27. Alternativa **b**.

a) $\{x_2\}$, sendo x_2 a raiz positiva de $f(x)$.
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq x_2\}$, sendo x_2 a raiz positiva de $f(x)$.
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$, sendo x_1 e x_2 as raízes de $f(x)$, com $x_1 < x_2$.
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
e) $x \in \mathbb{R}$.

Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão dos assuntos e objetivos trabalhados ao longo do presente capítulo.

Objetivos de aprendizagem	Sim	É necessário retomar
Compreendo e utilizo a resolução de equações do 2º grau para resolver problemas.		
Compreendo e utilizo na resolução de problemas as propriedades entre as raízes e os coeficientes de uma equação do 2º grau.		
Utilizo as funções do 2º grau para modelar e resolver problemas.		
Construo esboços gráficos de funções quadráticas identificando e calculando as coordenadas dos vértices correspondentes.		
Resolvo problemas envolvendo inequações do 2º grau pela análise do sinal da função quadrática.		
Resolvo problemas envolvendo funções definidas por mais de uma sentença.		

Ernesto Reghran/Pulsar Imagens

Neste capítulo, você vai:

- compreender relações para o cálculo de perímetros e áreas de figuras planas;
- empregar diferentes métodos no cálculo de medidas de superfície;
- resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de perímetros e áreas de polígonos;
- identificar semelhanças entre figuras geométricas planas;
- identificar polígonos regulares;
- estabelecer relações entre ângulos de um polígono regular;
- utilizar o conceito de ângulo para elaborar e resolver problemas de ladrilhamento no plano.

CAPÍTULO

6

Geometria Plana

Neste capítulo, você vai retomar alguns conceitos de Geometria Plana que serão úteis na resolução de problemas diversos. Vai também ter a oportunidade de ampliar seu olhar matemático sobre situações cotidianas, ao analisar como os conceitos geométricos podem estar envolvidos nas regras e sinalizações de trânsito.

É de extrema importância a conscientização do respeito às regras de segurança no trânsito.
Foto da avenida Adhemar Pereira de Barros, Londrina (PR), 2015.

1. **Como você pensa que a Matemática está presente nas regras de trânsito? Dê alguns exemplos.** 1. Resposta pessoal.

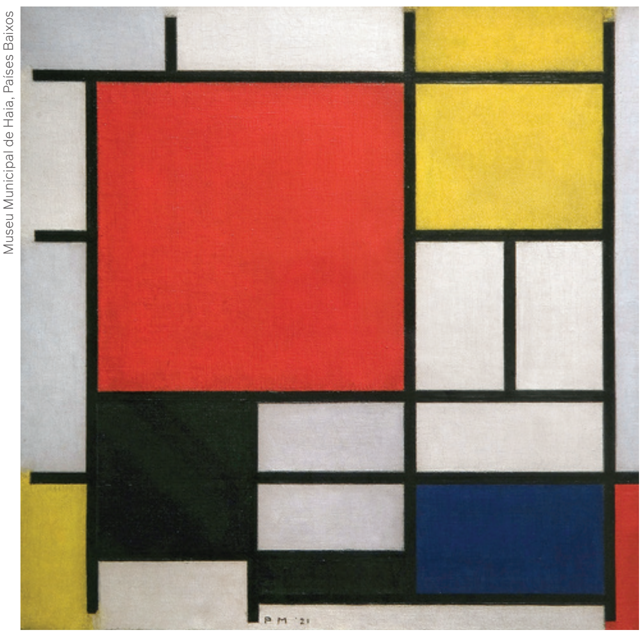
2. **As leis de trânsito em sua cidade são respeitadas pela maioria das pessoas? O que você considera que leva as pessoas a desrespeitar as leis de trânsito?** 2. Resposta pessoal.

1 Conceitos de Geometria Plana

É bem provável que você já tenha visto a imagem a seguir.

Trata-se *da Composição com vermelho, amarelo, azul e preto*, feita em 1921 pelo pintor Piet Mondrian, artista modernista que em algumas de suas telas se inspirou em retas e formas.

Museu Municipal de Haia, Países Baixos



Piet Mondrian. *Composição com vermelho, amarelo, azul e preto*, 1921. Óleo sobre tela, 59,5 cm × 59,5 cm.

Para pensar e discutir

1. Quais quadriláteros estão presentes nessa tela? 1. Quadrados e retângulos.
2. Você identifica paralelismo nessa tela? Exemplifique. 2. Sim; resposta pessoal.
3. E perpendicularismo? Exemplifique. 3. Sim; resposta pessoal.

Assim como encontramos em obras de arte elementos geométricos, também podemos encontrá-los em objetos e construções. E falando de formas geométricas planas, as placas de trânsito são exemplos claros desse fato.

Reinado Vignati

Proibido ultrapassagem.

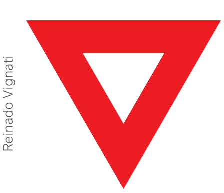
Reinado Vignati

Altura limitada.

Reinado Vignati

Pare.

Reinado Vignati



Dê a preferência.

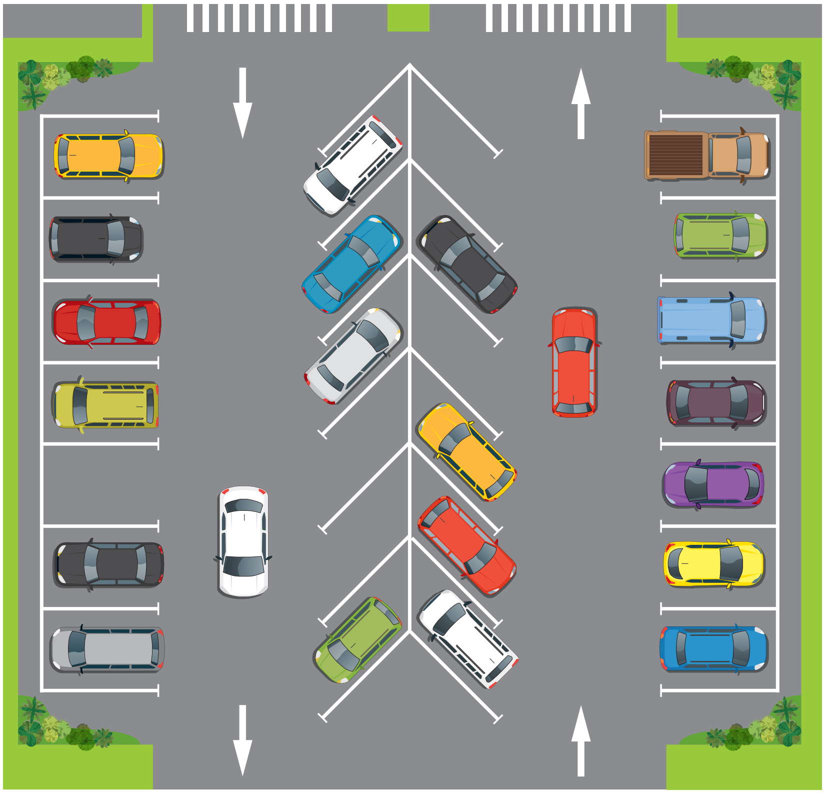
Repare que, sem entrar em detalhes, observamos, da esquerda para a direita, que a primeira placa tem o formato de um círculo (também parece uma coroa circular e, no contorno, a circunferência); a segunda, ignorando os cantos arredondados, tem o formato de um quadrado (também é um losango); a terceira placa tem o formato de um octógono (um polígono com 8 lados) e a última tem o formato de um triângulo.

Você saberia dizer o que significa cada uma dessas placas? Converse com os colegas a respeito disso.

Retomaremos alguns conceitos e ideias relacionados à Geometria Plana que foram estudados ao longo do Ensino Fundamental: identificação das formas geométricas planas, paralelismo, perpendicularidade etc. Assim, vamos abordar um dos conceitos empregados com muita frequência na Geometria e em diversas áreas do conhecimento: o **ângulo**.

Ângulos

Utilizamos a ideia de ângulo (e, como consequência, a de paralelismo e perpendicularidade) para resolver problemas como o estabelecimento de mais vagas em um estacionamento. Observe, na ilustração a seguir, que existem carros colocados perpendicularmente às linhas laterais externas do estacionamento. Entretanto, ao centro, para que mais carros pudessem estacionar, a saída foi colocar vagas inclinadas.



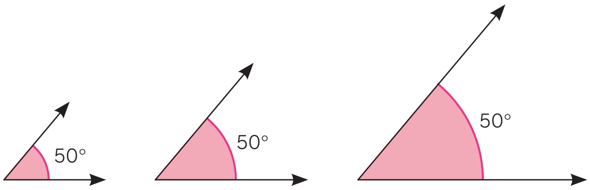
Reinado Vignati

Para pensar e discutir

1. O que aconteceria se as vagas centrais, na ilustração, tivessem a mesma direção das vagas laterais? 1. Respostas pessoais.
2. As linhas entre os carros nas laterais são paralelas entre si? E as linhas entre os carros ao centro que estão de um mesmo lado da linha central? 2. Sim; sim.
3. Quanto mede o ângulo entre a linha central do estacionamento e uma linha inclinada que divide as vagas de dois carros? Como você obteve essa medida? 3. 45° e 135°; resposta pessoal

Recordamos que utilizamos o grau como unidade de medida de ângulo. Assim, quando falamos em uma volta completa, o ângulo correspondente a esse giro é de 360°. Já para a meia-volta, temos um ângulo de 180°.

Quando representamos um ângulo por meio de duas semirretas com a mesma origem (vértice do ângulo), não importa o tamanho dessa representação, pois a medida do ângulo que corresponde à abertura permanece a mesma. Assim, por exemplo, os três ângulos representados a seguir têm a mesma medida: 50°.

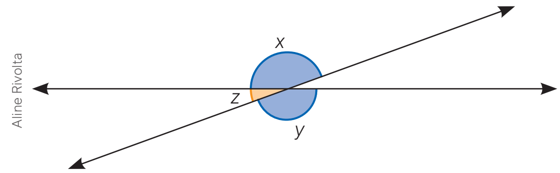


Aline Rivolta

Por meio de atividades resolvidas, vamos retomar algumas ideias que você já estudou no Ensino Fundamental. Procure analisar cada situação, discutindo-as com os colegas e verificando outro procedimento de resolução.

Atividades resolvidas

1. Os ângulos representados a seguir têm medidas indicadas pelas letras x, y e z. Os ângulos de medidas x e y são ditos opostos pelo vértice.



a) Em graus, qual é a medida correspondente a $x + z$? E a medida correspondente a $y + z$? Justifique.

b) Se $x = 100°$, quais são as medidas y e z? E se $z = 10°$, quais são as medidas x e y?

c) Qual é a relação entre as medidas x e y? Justifique.

- No item **a**, conforme representado na figura, os ângulos indicados por $x + z$ e $y + z$ são ângulos rasos. Assim, temos:

$$x + z = 180°$$
$$y + z = 180°$$

- No item **b**, substituindo na igualdade anterior x por 100°, temos:

$$100° + z = 180° \Rightarrow z = 80°$$
$$y = 180° - 80° \Rightarrow y = 100°$$

Logo:

Substituindo nas igualdades anteriores z por 10°, temos:

$$x + 10° = 180° \Rightarrow x = 170°$$
$$y + 10° = 180° \Rightarrow y = 170°$$

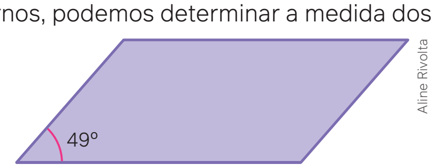
- No item **c**, são dois ângulos opostos pelo vértice; portanto, têm a mesma medida. Isolando z nas duas expressões do item **a**, temos:

$$x + z = 180° \Rightarrow z = 180° - x \text{ (I)}$$
$$y + z = 180° \Rightarrow z = 180° - y \text{ (II)}$$

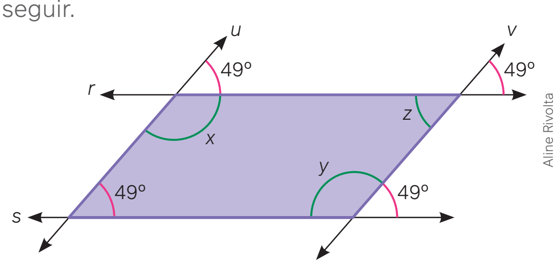
Igualando (I) e (II):

$$180° - x = 180° - y$$
$$-x = -y \Rightarrow x = y$$

2. O quadrilátero representado a seguir é um paralelogramo, isto é, os lados opostos são paralelos. Conhecendo-se a medida de um dos ângulos internos, podemos determinar a medida dos demais. Justifique.



- Prolongando os lados do paralelogramo, teremos as retas r e s paralelas e também as retas u e v paralelas. Observe que, em razão desses paralelismos, teremos externamente ângulos congruentes ao de medida 49°, como indicado na figura a seguir.



Assim, podemos determinar as medidas dos outros três ângulos internos representadas por x, y e z:

$$x + 49° = 180° \Rightarrow x = 131° \text{ (ângulos suplementares)}$$
$$y + 49° = 180° \Rightarrow y = 131° \text{ (ângulos suplementares)}$$
$$z = 49° \text{ (ângulos opostos pelo vértice: congruentes)}$$

Infográfico

Fábio Nienow

João Prudente/Pulsar Imagens

Natal (RN), 2019.

Sinalização para pedestres

As faixas são utilizadas para indicar a passagem de pedestres. Essas faixas têm a mesma largura, são igualmente espaçadas e representam elementos em paralelo.

Vagas preferenciais de estacionamento: pessoas com deficiência física e idosos

As vagas preferenciais são destinadas basicamente a idosos e pessoas com deficiência física, sendo determinadas por lei, que foi criada com o objetivo de facilitar a locomoção de cidadãos. De acordo com essa lei, as vagas para pessoas com deficiência física devem representar no mínimo 2% do total de vagas em um estacionamento coletivo. Já para os idosos, devem-se destinar pelo menos 5% do número total de vagas.

Daniel Cymbalista/Pulsar Imagens

Jorge Maricato/Shutterstock.com

João Prudente/Pulsar Imagens

São Luís (MA), 2019.

João Prudente/Pulsar Imagens

Batatais (SP), 2018.

Munique Bassoli/Pulsar Imagens

Holambra (SP), 2019.

Vagas para estacionamento de carros nas ruas

Existem basicamente três tipos de vaga ao longo das ruas. Em um, os carros estacionam paralelamente às calçadas. No outro, os carros estacionam perpendicularmente às calçadas e, no terceiro tipo, os carros estacionam obliquamente às calçadas. Nos estacionamentos de parques e locais comerciais, essas posições também podem ser observadas.

1. Qual é a principal finalidade das faixas de pedestres em ruas movimentadas? 1. Resposta pessoal.

2. Examinando as posições das vagas de estacionamento nas ruas em relação às calçadas:

a) Qual é a vantagem da vaga inclinada em relação à perpendicular? 2. a) Resposta pessoal.

b) Quando se deve utilizar a vaga paralela à calçada? 2. b) Resposta pessoal.

3. Em relação às vagas preferenciais:

a) A proporção delas é respeitada, conforme manda a lei, em algum espaço de estacionamento perto da escola? Verifiquem. 3. a) Resposta pessoal.

b) Qual é a condição para um carro utilizar esse tipo de vaga? 3. b) Resposta pessoal.

c) Vocês imaginam que somente as pessoas que têm o direito garantido por lei utilizam essas vagas? O que vocês proporiam para garantir isso? 3. c) Resposta pessoal.

Para explorar

Junte-se com três colegas para realizar a pesquisa a seguir.

1. As pessoas idosas são aquelas que também têm vagas preferenciais. Entretanto, muitas vezes nem elas mesmas sabem de seus direitos. Para verificar se isso de fato ocorre, sugerimos uma pequena pesquisa a ser feita com 5 a 10 pessoas idosas com base nas seguintes questões: 1. Respostas pessoais.

- Você conhece os direitos das pessoas idosas?
- Você utiliza as vagas de estacionamento para pessoas idosas?
- Você tem o cartão que dá direito a essas vagas?
- De modo geral, você se sente respeitado como idosa ou idoso?
- Quais são os outros direitos das pessoas idosas que você utiliza?

2. Após a pesquisa, elaborem um roteiro para a produção de um *podcast* que aborde os direitos das pessoas idosas e também para contar como as pessoas entrevistadas por vocês se sentem em relação a esses direitos. 2. Resposta pessoal.

Atividades

1. b) Ângulos que somam 180°; resposta pessoal.
1. c) Resposta no Manual do Professor.
1. d) Duas.

1. a) Ângulos que somam 90°; resposta pessoal.

1. Junte-se a um colega nesta atividade. Se necessário, pesquisem para fazer o que se pede.

a) O que são ângulos complementares? Exemplifiquem.

b) O que são ângulos suplementares? Exemplifiquem.

c) Representem no caderno duas retas paralelas e uma reta transversal cortando essas retas de tal maneira que um dos ângulos determinados entre a transversal e uma das paralelas tenha medida 32°.

d) Existem oito ângulos determinados entre a reta transversal e as paralelas do item anterior. Quantas são as medidas diferentes desses ângulos?

2. Utilizando um transferidor, faça o que se pede a seguir.

a) Desenhe no caderno dois ângulos consecutivos (que tenham um lado em comum) que sejam complementares. Depois, indique as medidas em graus desses dois ângulos. 2. a) Resposta pessoal.

b) Desenhe no caderno dois ângulos consecutivos que sejam suplementares. Depois, indique as medidas em graus desses dois ângulos. 2. b) Resposta pessoal.

3. As subunidades de medidas do grau são minuto e segundo. Não as confunda com as subunidades da hora. Como são medidas sexagesimais, temos que 1 grau corresponde a 60 minutos (representamos por $1° = 60'$) e que 1 minuto corresponde a 60 segundos (representamos por $1' = 60''$).

a) Quantos minutos tem a décima parte de 1°? 3. a) 6 minutos

b) Qual é a medida do ângulo complementar de 22,5°? E de 22° 45′? 3. b) 67,5°; 67°15′

c) A notação 6° 42′ 33″ é chamada de notação mista. Qual é a notação mista do ângulo correspondente a 4 210″? 3. c) 1° 10′ 10″

4. Indique, observando na própria sala de aula, exemplos de linhas relacionadas à utilização de:

a) paralelismo; 4. a) Resposta pessoal.

b) perpendicularidade. 4. b) Resposta pessoal.

5. Observe atentamente as orientações dadas com base na rosa dos ventos e responda:

Reinado Vignati

a) Qual é a medida do menor ângulo entre as direções N e S? Justifique. 5. a) 180°; resposta pessoal

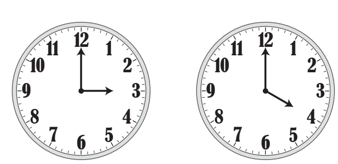
b) Qual é a medida do menor ângulo entre as direções NO e N? Justifique. 5. b) 45°; resposta pessoal

6. Ainda a respeito da rosa dos ventos, responda:

a) Se em uma viagem você está seguindo no sentido nordeste (NE) e resolve mudar para o sentido noroeste (NO), qual é o menor ângulo para essa "mudança de direção"? 6. a) 90°

b) Uma pessoa que segue no sentido sudeste (SE) e gira 90° o seu trajeto, em qual "direção" seguirá? 6. b) NO ou SO.

7. Na figura a seguir está representado um relógio analógico em duas horas exatas e consecutivas.



Reinado Vignati

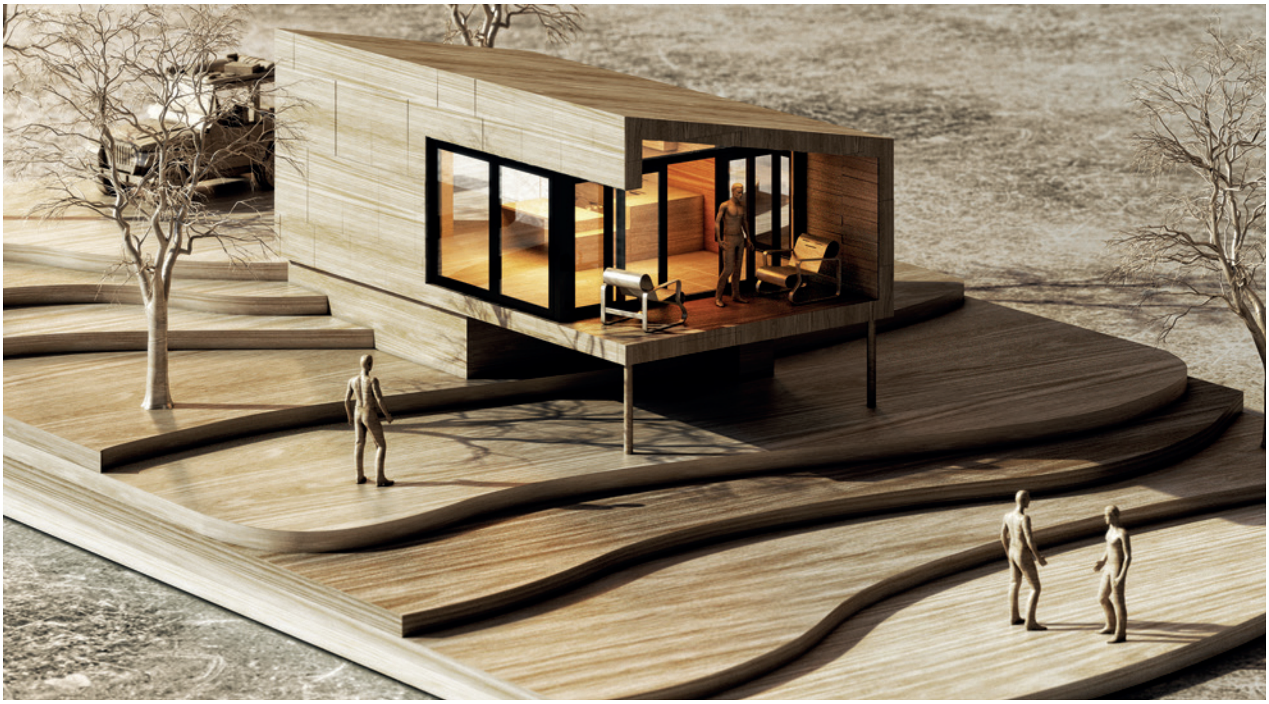
a) Determine o menor ângulo entre os dois ponteiros em cada um dos horários, justificando sua resposta. 7. a) 90° (às 15h) e 120° (às 16h)

b) Em 60 minutos, qual é o ângulo descrito pelo ponteiro dos minutos? E pelo ponteiro das horas? 7. b) 360°; 30°

c) Em 30 minutos, qual é o ângulo descrito pelo ponteiro das horas? E pelo ponteiro dos minutos? 7. c) 15°; 180°

Semelhanças

Observe na imagem a seguir a maquete de uma casa. As maquetes representam, em escala reduzida, a casa, por exemplo, que será construída. Em associação às construções, existem também as plantas das casas, dos apartamentos e dos escritórios.



wiliangaspar/Shutterstock.com

Exemplo de maquete de casa.

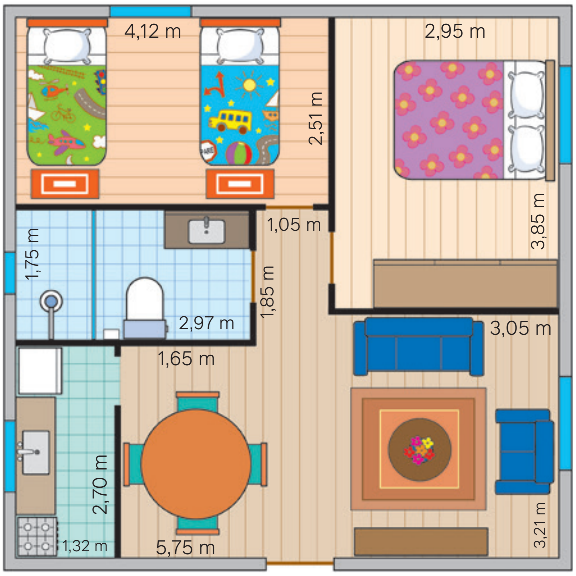
Assim, a planta representada contém, além das medidas, as posições de paredes que separam ambientes, quartos, cozinha, até a posição das camas, bem como possíveis estantes e sofás na sala de estar.

Apenas para exemplificar, vamos imaginar que este seja um apartamento. Nele residem quatro pessoas: dois adultos e duas crianças. Olhe para a ilustração e localize onde se encontram:

- a mesa da sala de jantar;
- o local em que fica a cama de casal;
- a estante onde fica a televisão;
- a porta que dá acesso à cozinha;
- o banheiro;
- as camas das crianças.

Você poderia localizar outros elementos desse apartamento?

Podemos utilizar a planta do apartamento para planejar como será sua organização.



Reinaldo Vignati

Exemplo de planta baixa.

Para pensar e discutir

1. O que é uma ampliação? E uma redução? Exemplifique. 1. Resposta pessoal.
2. Desconsiderando-se as paredes, o banheiro e a cozinha, qual é a área aproximada do apartamento? Explique como calculou. 2. Aproximadamente 40,72 m^2; resposta pessoal.

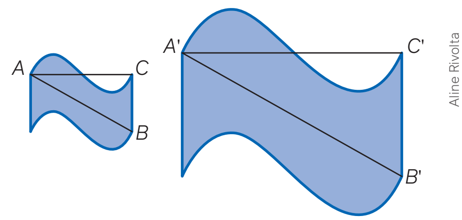
Na elaboração de uma maquete ou mesmo de uma planta baixa, utilizamos um conceito muito importante da Geometria: a **semelhança**.

Mas, afinal, quando duas figuras são semelhantes?

Vamos considerar as duas figuras a seguir. Marcamos três pontos quaisquer (poderiam ser mais pontos, tantos quanto você desejasse) na figura da esquerda e marcamos os pontos correspondentes na figura da direita.

Calculamos as razões entre medidas de segmentos correspondentes:

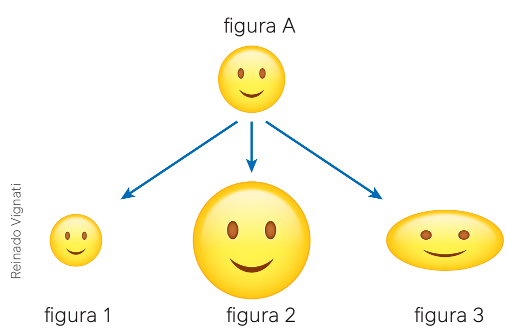
$$\frac{AB}{A'B'} = k_1$$
$$\frac{BC}{B'C'} = k_2$$
$$\frac{AC}{A'C'} = k_3$$



Se essas razões forem iguais para quaisquer segmentos correspondentes, dizemos que as figuras são semelhantes. Resumindo essa ideia:

> Dizemos que duas figuras são semelhantes se existe uma correspondência entre seus pontos, tal que a razão entre os comprimentos de um segmento qualquer da primeira e o comprimento do segmento correspondente da segunda sejam constantes.

Quando **ampliamos** ou **reduzimos** uma figura qualquer, estamos construindo figuras semelhantes. Note que, no procedimento de ampliar ou reduzir uma figura, sua forma deve ser conservada, mudando apenas os comprimentos lineares. Mas cuidado: algumas vezes não estamos diante de uma ampliação ou de uma redução, mas de uma figura que foi deformada, pois sua forma não foi mantida. Observe o caso a seguir, em que, com base na figura A, construímos as figuras 1, 2 e 3.

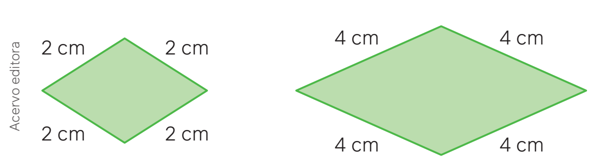


Enquanto as figuras 1 e 2 representam, respectivamente, redução e ampliação da figura A, na figura 3 houve uma deformação (ela está mais achatada). Você pode ampliar, reduzir ou até mesmo deformar uma figura qualquer utilizando o computador.

Precisamos estabelecer a condição para que dois polígonos sejam semelhantes. Para isso, primeiro analisaremos dois exemplos comentados a seguir.

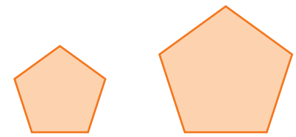
Atividades resolvidas

3. Observe a seguir dois polígonos que, apesar de terem as medidas dos lados proporcionais (a medida de um é o dobro da medida do outro), não são semelhantes. Explique!



- Os dois quadriláteros são losangos, mas não possuem a mesma forma, uma vez que os ângulos correspondentes dois a dois não são iguais.

4. Os dois polígonos representados a seguir não são regulares. Você lembra o que é um polígono regular? Apesar disso, eles são semelhantes. Justifique.



Acervo da editora

- Um polígono é regular quando todos os ângulos internos são congruentes e todos os lados têm a mesma medida. Aqui todos os lados de um mesmo polígono têm a mesma medida, mas os ângulos internos não são congruentes. Logo, o polígono não é regular.
- Os ângulos internos correspondentes dois a dois (poderiam ser os ângulos externos correspondentes) têm a mesma medida, o que pode ser verificado por meio de um transferidor. Logo, os polígonos são semelhantes, mesmo não sendo regulares.

Agora que você analisou os dois exemplos anteriores, vamos estabelecer a condição para que dois polígonos quaisquer sejam semelhantes.

Dois polígonos são semelhantes quando os ângulos de um são, respectivamente, congruentes aos ângulos do outro, e os lados de um, respectivamente, têm medidas proporcionais às medidas dos lados do outro.

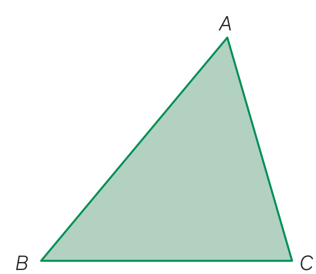
Assim, podemos dizer que, quando dois polígonos são semelhantes, um é uma redução, uma ampliação ou mesmo uma cópia do outro. Note que, para verificar a semelhança entre dois polígonos, é necessário verificar duas condições:

- os ângulos internos correspondentes devem ter medidas iguais;
- as medidas dos lados correspondentes devem ser proporcionais.

No entanto, há um polígono que representa uma exceção: o triângulo.

Recorde, a seguir, algumas características que tornam o triângulo um polígono diferenciado dos demais.

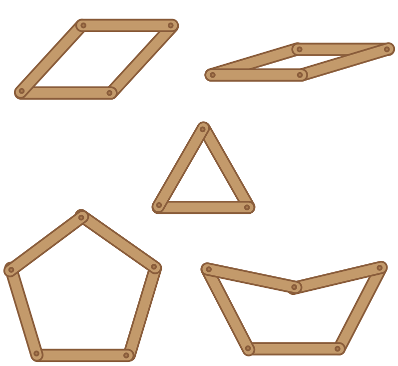
- Um polígono que tem todos os lados com a mesma medida não tem necessariamente ângulos congruentes. Um triângulo que tem todos os lados com a mesma medida tem os ângulos congruentes.
- Um polígono que tem todos os ângulos congruentes não tem necessariamente os lados com a mesma medida. Um triângulo que tem todos os ângulos congruentes tem os lados com a mesma medida.



Acervo editora

Há outra característica importante que diferencia o triângulo dos demais polígonos: ele tem uma rigidez geométrica que se traduz pelo fato de poder ser definido conhecendo-se a medida de seus lados (um único triângulo é construído). Já quanto aos demais polígonos, mesmo conhecendo as medidas de seus lados, não obtemos um único polígono, ou seja, ele não fica definido com base nas medidas dos lados.

Essa rigidez no triângulo, que não há nos demais polígonos, pode ser constatada por meio de palitos, como sugere a ilustração abaixo.



Aline Rivolta

Mapa clicável
Geometria e arte

Essa característica o torna muito útil nas várias estruturas utilizadas em telhados, pontes ou torres.

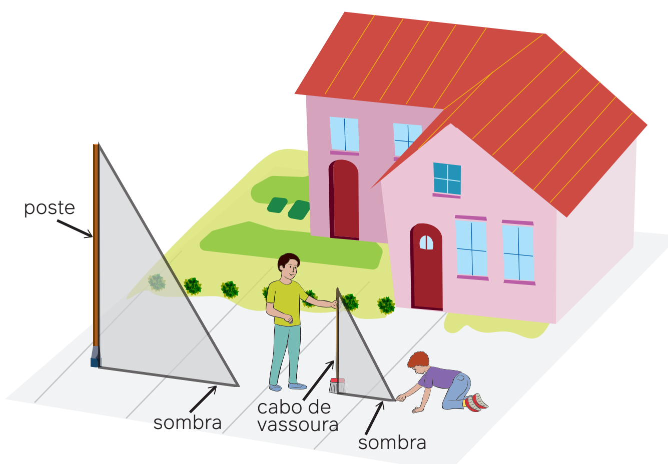
Geralmente, em Geometria Plana, enfatizamos o conceito de semelhança entre triângulos. Isso se deve ao fato de que a semelhança entre dois triângulos é mais simples de ser verificada com base na seguinte explicação:

Para que dois triângulos sejam semelhantes, basta que eles tenham os ângulos correspondentes congruentes ou basta que eles tenham os lados correspondentes com medidas proporcionais.

Na história da Matemática, é difundido o experimento atribuído a Tales de Mileto, feito há mais de 2 500 anos, para o cálculo da grande pirâmide de Quéops, no Egito. Ele teria observado, em determinado momento do dia, a semelhança entre dois triângulos retângulos: um tendo como catetos a altura da pirâmide e sua sombra, e o outro tendo como catetos correspondentes a altura de um bastão e sua sombra. Provavelmente utilizando proporção entre as medidas, acabou determinando a altura da pirâmide.

Atividades resolvidas

5. Utilizando a ideia de Tales, Pedro observou que um poste em frente à sua casa, em determinado momento do dia, projetava uma sombra de 3,5 m. Nesse mesmo momento, ele constatou que um cabo de vassoura de 1,20 m de altura colocado na vertical projetava uma sombra de 0,50 m de comprimento. Com base nisso, ele determinou a altura do poste. Explique o procedimento utilizado por Pedro.



Reinaldo Vignati

- Os triângulos têm ângulos correspondentes congruentes, pois o poste e o cabo de vassoura formam um ângulo reto com o chão. A inclinação da luz para projetar a sombra do poste e a sombra do cabo de vassoura é a mesma, tanto em relação ao poste e ao cabo quanto em relação ao chão. Assim, sendo H a altura do poste, é válida a seguinte proporção:

$$\frac{H}{1,20} = \frac{3,50}{0,50}$$

$$\frac{H}{1,20} = 7$$

$$H = 7 \cdot 1,20$$

$$H = 8,40$$

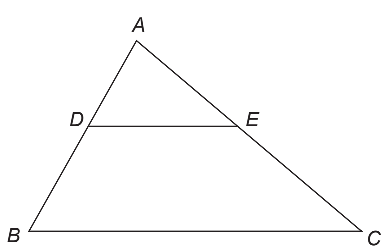
Dessa forma, a altura do poste é de 8,40 m.

Para pensar e discutir

1. Os dois triângulos representados acima são semelhantes? Como você justifica? 1. Sim; resposta pessoal.

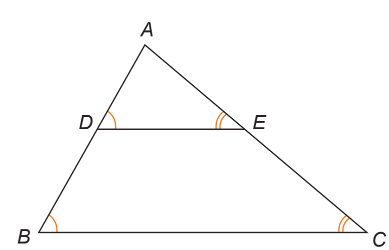
2. Vimos que dois triângulos são semelhantes quando têm os ângulos correspondentes congruentes ou os lados correspondentes com medidas proporcionais. Se dois triângulos têm dois de seus lados correspondentes com medidas proporcionais e os ângulos formados por esses dois lados congruentes, eles são semelhantes? Justifique. 2. Sim; resposta pessoal.

6. Considere que o lado DE do triângulo ADE é paralelo ao lado BC do triângulo ABC representado abaixo. Se $AB = 10$ cm, $AD = 4$ cm e $AE = 5$ cm, calcule a medida do segmento CE.



TDPStudio

- Indicamos na figura a seguir os ângulos correspondentes congruentes, considerando que DE é paralelo a BC. Seja $CE = x$:
- Como o ângulo interno A é comum aos dois triângulos, então, dois a dois, os triângulos têm ângulos congruentes. Assim, como são semelhantes, vale a proporção entre as medidas de seus lados, isto é:



TDPStudio

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\frac{4}{10} = \frac{5}{5 + x}$$

$$4 \cdot (5 + x) = 10 \cdot 5$$

$$20 + 4x = 50$$

$$4x = 30 \Rightarrow x = 7,5$$

Portanto, $CE = 7,5$ cm.

Para explorar

Junte-se a três colegas para fazer estas atividades.

1. Utilizando computador e um *software* de edição de imagens, selecionem a imagem de uma construção ou de um objeto e, com base nela, façam o que se pede a seguir.

a) Ampliem essa imagem. 1. a) Resposta pessoal.

b) Reduzam essa imagem. 1. b) Resposta pessoal.

c) Deformem essa imagem. 1. c) Resposta pessoal.

2. Elaborem ou selecionem uma imagem em forma de retângulo e, com base nela, façam o que se pede a seguir.

a) Ampliem as medidas dos lados da imagem retangular em 100%. 2. a) Resposta pessoal.

b) Reduzam as medidas dos lados da imagem retangular em 50%. 2. b) Resposta pessoal.

3. Respondam às questões a seguir. Se necessário, desenhem as figuras correspondentes, justificando sua resposta.

a) Dois triângulos equiláteros são sempre semelhantes? 3. a) Sim.

b) Dois triângulos isósceles são sempre semelhantes? 3. b) Não.

c) Dois quadrados são sempre semelhantes? 3. c) Sim.

d) Dois retângulos são sempre semelhantes? 3. d) Não.

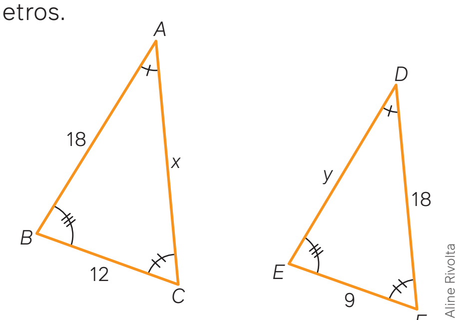
e) Podemos ter dois retângulos semelhantes? 3. e) Sim.

f) Dois hexágonos regulares são sempre semelhantes? 3. f) Sim.

g) Dois hexágonos não regulares podem ser semelhantes? 3. g) Sim.

Atividades

8. Os dois triângulos representados a seguir têm os ângulos correspondentes, dois a dois, conforme indicado. As medidas estão em centímetros.



a) Esses triângulos são semelhantes? Por quê? 8. a) Sim; resposta pessoal.

b) Quais são as medidas de x e de y? 8. b) $x = 24$ cm; $y = 13{,}5$ cm

9. Utilize instrumentos de desenho geométrico ou um *software* de geometria dinâmica para construir os triângulos semelhantes 1 e 2 conforme indicado a seguir.

Triângulo 1 – lados com 5 cm, 6 cm e 7 cm

Triângulo 2 – lados com 10 cm, 12 cm e 14 cm

a) Qual é a razão de semelhança entre o triângulo 1 e o triângulo 2 nessa ordem? 9. a) $\frac{1}{2}$

b) Essa razão é a mesma entre os perímetros desses triângulos? Justifique. 9 b) Sim; resposta pessoal.

10. Considere agora os quadrados 1 e 2 conforme indicado a seguir.

Quadrado 1 – lado com 4 cm

Quadrado 2 – lado com 6 cm

a) Esses quadrados são semelhantes? Justifique. 10. a) Sim; resposta pessoal.

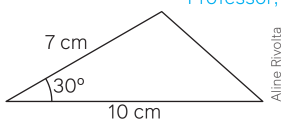
b) Determine a razão entre as medidas a seguir, dos quadrados 1 e 2, nessa ordem.

- Dos lados.
- Dos perímetros.
- Das diagonais.
- Das áreas.

10. b) $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$ respectivamente.

11. Junte-se a um colega para fazer esta atividade utilizando instrumentos de desenho geométrico ou um *software* de geometria dinâmica.

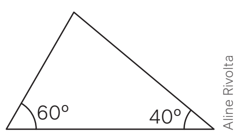
a) A seguir está representado um triângulo em que se conhecem as medidas de dois lados e a medida do ângulo entre eles. 11. a) Resposta no Manual do Professor; sim.



- Tracem um triângulo que seja semelhante, de tal maneira que as medidas dos lados sejam o dobro das medidas dos lados do triângulo dado.
- As medidas dadas foram suficientes para ampliar o triângulo?

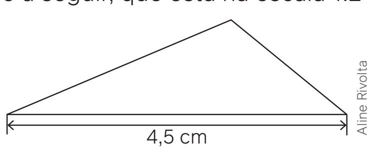
b) A seguir está representado um triângulo em que se conhecem as medidas de dois ângulos internos.

11. b) Resposta pessoal; sim.



- Tracem um triângulo que seja semelhante ao triângulo dado.
- As medidas dos ângulos dados foram suficientes para traçar esse triângulo?

12. Em uma praça de formato triangular, um dos três lados mede 90 m. Essa praça foi representada no desenho a seguir, que está na escala 1:2 000.



Para calcular a área A de um triângulo, utilizamos a fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$, sendo b a medida da base do triângulo (medida de um dos três lados) e h a altura relativamente à base. Meça com a régua a altura do triângulo apresentado.

a) Explique o que significa no desenho a utilização da escala 1:2 000. 12. a) Cada 1 cm no desenho corresponde a 2 000 cm da imagem real.

b) Qual é a área da praça? 12. b) 1 125 m²

13. Junte-se a um colega para fazer esta atividade. Elaborem e resolvam uma situação similar à anterior envolvendo áreas de triângulos em escala. Depois, apresentem-na a outra dupla de colegas para que eles também possam resolvê-la. Ao final, confrontem as respostas, discutindo-as com a turma. 13. Resposta pessoal.

14. Você e um colega irão reproduzir o feito de Tales de Mileto para calcular a altura de alguma árvore, de um poste, de uma casa ou de um edifício com base no comprimento da sombra em determinado momento do dia. Para isso, façam o que se pede a seguir. 14. Respostas pessoais.

I. Escolham o objeto cuja altura vocês deverão medir e, inicialmente, façam uma estimativa dessa medida para confrontar no final.

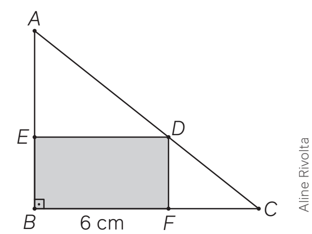
II. Assim como Tales, utilizem um bastão (pode ser um cabo de vassoura).

III. Em determinado momento do dia, obtenham as medidas da sombra do objeto cuja altura desejam medir e da sombra do cabo de vassoura.

IV. Utilizando a semelhança de triângulos, determinem a altura do objeto.

V. Elaborem um desenho para representar a situação e, depois, apresentem-no à turma explicando o procedimento utilizado.

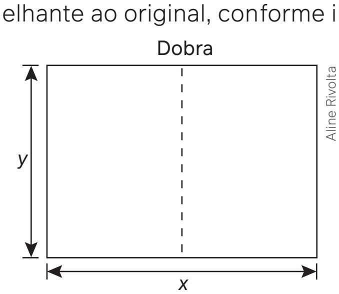
15. (UEFS-BA) Os pontos D, E e F pertencem aos lados de um triângulo retângulo ABC, determinando o retângulo $BFDE$, com $BF = 6$ cm, conforme mostra a figura.



Dadas as medidas $AB = 8$ cm e $BC = 10$ cm, o comprimento do segmento BE é: 15. Alternativa **d**.

a) 2,4 cm
b) 2,7 cm
c) 3 cm
d) 3,2 cm
e) 3,5 cm

16. (Fatec-SP) Um formato de papel usado para impressões e fotocópias, no Brasil, é o A4, que faz parte de uma série conhecida como série A, regulamentada internacionalmente pelo padrão ISO 216. Essa série criou um padrão de folha retangular que, quando seu lado maior é dobrado ao meio, gera um retângulo semelhante ao original, conforme ilustrado.



16. Alternativa **b**.

Considerando uma folha da série A, com as dimensões indicadas na figura, pode-se afirmar que

a) $x = 2y$
b) $x = y\sqrt{2}$
c) $x = y$
d) $y = x\sqrt{2}$
e) $y = 2x$

17. (IFPE) Em um dia ensolarado, às 10h da manhã, um edifício de 40 metros de altura produz uma sombra de 18 metros. Nesse mesmo instante, uma pessoa de 1,70 metro de altura, situada ao lado desse edifício, produz uma sombra de 17. Alternativa **d**.

a) 1,20 metro
b) 3,77 metros
c) 26,47 centímetros
d) 76,5 centímetros
e) 94 centímetros

2

Polígonos e ângulos

Em pisos e calçadas, de modo geral, encontramos figuras geométricas planas utilizadas para revestir essas superfícies. Algumas vezes, temos apenas uma figura geométrica, outras a composição de dois ou mais tipos de figura.

Dragonskydrive/Shutterstock.com

Calçada formada por peças hexagonais

SIRIVIMON CHENGJAROEN/Shutterstock.com

Calçada formada por peças quadradas e octogonais.

Note que foram utilizados polígonos para "forrar" o chão. Na imagem da esquerda, vemos apenas um tipo de polígono, o hexágono. Já na ilustração da direita há dois polígonos: o quadrado e o octógono.

Vamos observar melhor essas duas maneiras de "forrar" o chão.

Para pensar e discutir

1. A forma de hexágono regular possibilita cobrir completamente o plano sem superposição das peças? Por quê? 1. Sim; resposta pessoal.
2. Se no lugar de hexágono regular fossem utilizados apenas triângulos equiláteros, seria possível cobrir completamente o plano? Justifique. 2. Sim; resposta pessoal.
3. E se fosse utilizado um pentágono regular? 3. Não; resposta pessoal.
4. O quadrado e o octógono regular têm a mesma medida de lado e cobrem completamente o plano sem superposição de peças. Qual é a justificativa para isso? 4. Resposta pessoal.

Você poderá retomar essa discussão um pouco mais adiante!

Existem diversas maneiras de cobrir o plano utilizando peças em forma de polígonos.

Entretanto, utilizando peças com exatamente a mesma forma geométrica, o número de possibilidades fica menor. Veremos que esse tipo de problema está relacionado à ideia de ângulo; sendo assim, precisamos observar e compreender medidas de ângulos em polígonos, particularmente em polígonos regulares.

Existem três resultados importantes que envolvem ângulos estudados no Ensino Fundamental: ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo.

Para recordar esses resultados, considere as seguintes figuras:

Aline Rivolta

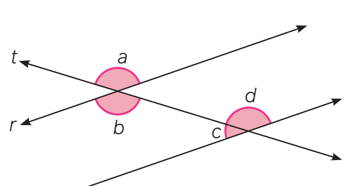


figura 1

Aline Rivolta

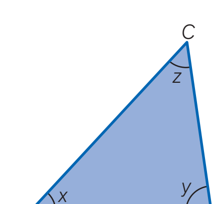


figura 2

Na figura 1, as retas *r* e *s* são paralelas e as letras *a*, *b*, *c* e *d* indicam as medidas em graus dos ângulos representados. Já no triângulo *ABC*, as letras *x*, *y* e *z* representam as medidas em graus dos ângulos internos. Sobre essas duas figuras, analise as resoluções das atividades a seguir.

Atividades resolvidas

7. Qual é a relação, na figura 1, entre as medidas dos ângulos *a*, *b* e *d*? Justifique.

- Como os ângulos *a* e *b* são opostos pelo vértice, temos:

$$a = b$$

- As retas *r* e *s* são paralelas. Assim, os ângulos de medidas *b* e *d* (denominados ângulos alternos internos) têm a mesma medida:

$$b = d$$

Portanto, os três ângulos têm a mesma medida.

8. Ainda na figura 1, qual é a relação entre as medidas dos ângulos *a* e *c*? Justifique.

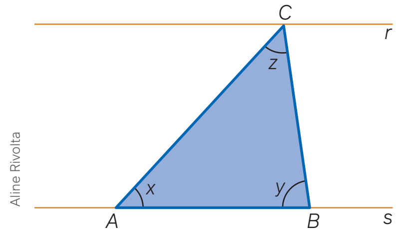
- Na atividade anterior, vimos que os ângulos *a* e *d* têm a mesma medida. Observando a figura, temos que os ângulos *c* e *d* são suplementares (formam ângulo raso). Assim, podemos concluir que:

$$c + d = 180°$$
$$\downarrow d = a$$
$$c + a = 180°$$

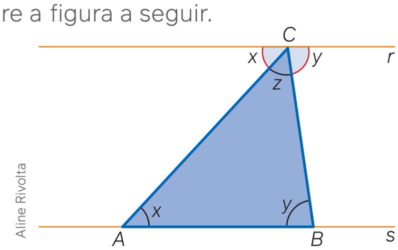
Portanto, os ângulos *a* e *c* têm suas medidas somando 180°.

9. A soma das medidas dos ângulos internos *x*, *y* e *z* da figura 2 é igual a 180°? Justifique.

- Uma maneira de justificar que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo *ABC* é igual a 180° é traçar duas retas paralelas *r* e *s*: r passando pelo vértice *C* e s contendo o lado *AB*.



- Utilizando o resultado de ângulos alternos internos, podemos "transportar" os ângulos de medidas *x* e *y* em torno do vértice *C*, conforme sugere a figura a seguir.

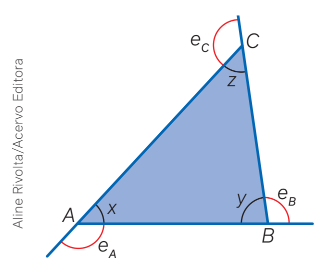


Como os três ângulos destacados formam um ângulo raso em torno do vértice *C*, concluímos que:

$$x + y + z = 180°$$

10. Mostre que a soma das medidas dos ângulos externos do triângulo *ABC* acima é igual a 360°.

- Prolongando os lados do triângulo dado indicamos na figura a seguir as medidas dos ângulos externos por e_A, e_B e e_C.



- Em cada vértice o ângulo interno e o ângulo externo formam um ângulo raso. Assim, temos:

$$e_A + x = 180°$$
$$e_B + y = 180°$$
$$e_C + z = 180°$$

- Adicionando membro a membro essas três igualdades, temos:

$$e_A + x + e_B + y + e_C + z = 180° + 180° + 180°$$
$$e_A + e_B + e_C + \underbrace{x + y + z}_{x + y + z = 180°} = 540°$$
$$e_A + e_B + e_C + 180° = 540°$$
$$e_A + e_B + e_C = 360°$$

Portanto, a soma das medidas dos ângulos externos é igual a 360°.

Soma das medidas dos ângulos internos e externos de um polígono

Você sabe o que é um levantamento topográfico?

Na construção civil, na agricultura, no monitoramento de áreas ambientais, entre outras situações, são necessários levantamentos topográficos de superfícies. É por meio de tais levantamentos que podemos conhecer inúmeros detalhes da área de interesse: características do terreno, limites com os terrenos vizinhos, diferenças de altitudes etc.

Vídeo
Teodolito


Ernesto Reghran/Pulsar Imagens

Plantação de eucaliptos, Telêmaco Borba (PR), setembro de 2019.


Freedy/Shutterstock.com

O teodolito pode ser usado nas medições de grandes áreas.

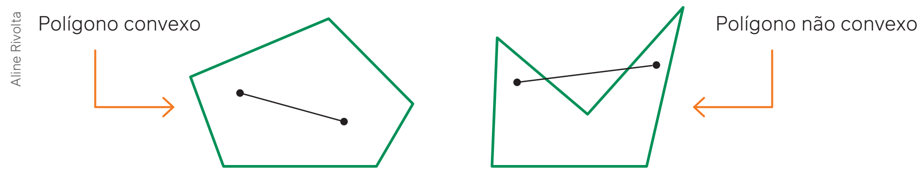

Evgeniyqw/Shutterstock.com

As fotografias feitas por *drones* são utilizadas para auxiliar nas medições de áreas.

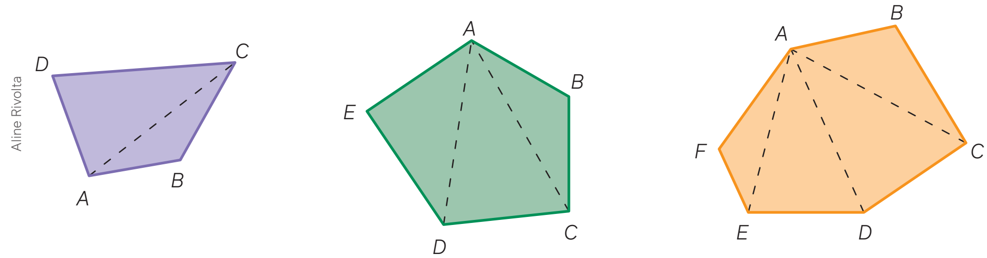
Existem diversos equipamentos que são utilizados pelos topógrafos para fazer o levantamento de uma grande área. O teodolito é o mais simples e também o mais utilizado a fim de obter medidas angulares para demarcar determinada região. Entretanto, o GPS representa um instrumento de precisão bem maior. Complementando esses instrumentos, existem *drones*, que são utilizados para filmar e fotografar a área a ser demarcada.

O conhecimento a respeito dos ângulos de um polígono é fundamental nesse processo de levantamento topográfico. O cálculo da soma das medidas dos ângulos internos e dos ângulos externos de um polígono representa uma ferramenta básica para o topógrafo.

Vamos estabelecer a seguir uma relação matemática que possibilita obter a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono. Para isso, consideraremos apenas os polígonos convexos, aqueles em que **qualquer** segmento considerado com extremidades em dois de seus pontos sempre estará **inteiramente** contido no polígono (ver figura da esquerda). Caso isso não ocorra (figura da direita), o polígono é não convexo.



Como conhecemos a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, podemos aplicar esse conhecimento nos polígonos dividindo-os em triângulos originados em um mesmo vértice. Observe a seguir alguns exemplos: um quadrilátero, um pentágono e um hexágono.



Sobre esses três polígonos representados, encaminhamos a seguir quatro questões para uma discussão que pode ser em grupo. Uma sugestão é que cada grupo construa esses polígonos (na construção eles podem ser de qualquer tamanho, desde que sejam quadrilátero, pentágono ou hexágono convexo).

Para pensar e discutir

1. Sim; resposta pessoal.

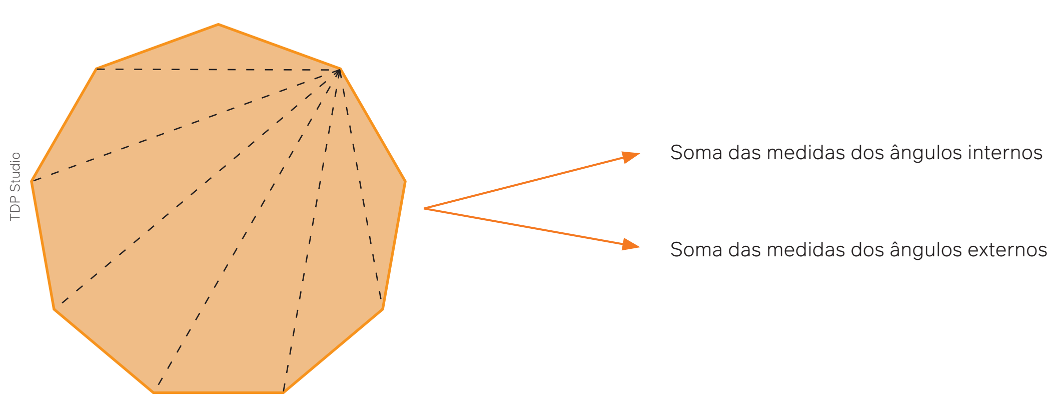
1. Em cada polígono representado, a soma das medidas dos ângulos internos pode ser dada por meio da soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos em que está subdividido? Justifiquem.

2. Qual é a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero? E do pentágono? E do hexágono? Expliquem como calcularam. 2. Quadrilátero: 360°; pentágono: 540°; hexágono: 720°. Resposta pessoal.

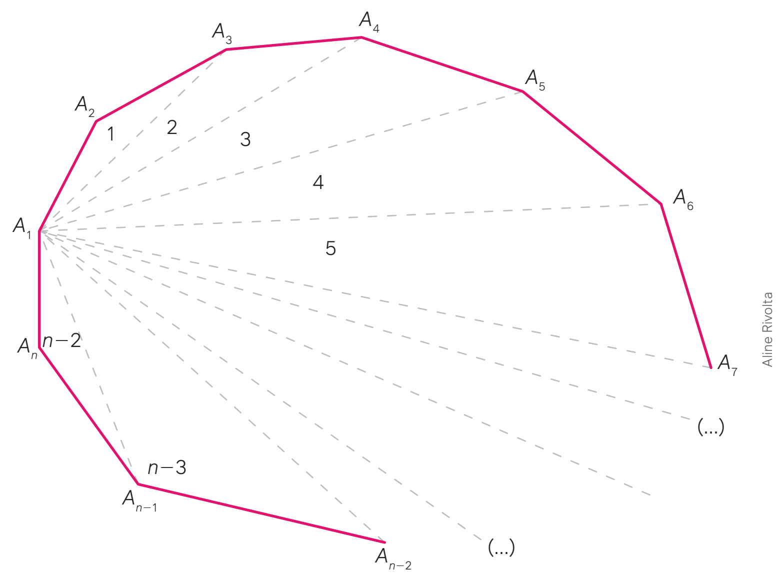
3. Um dodecágono pode ser subdividido, a partir de um de seus vértices, em quantos triângulos (a exemplo do que foi feito acima)? Qual é a soma das medidas dos ângulos internos? 3. 10 triângulos; 1 800°

4. E um polígono com 15 lados (a exemplo do que foi feito acima)? Qual é a soma das medidas dos ângulos internos? 4. 13 triângulos; 2 340°

Podemos obter relações matemáticas que permitem calcular não apenas a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono como também a soma das medidas de seus ângulos externos correspondentes. Essas relações podem ser obtidas conhecendo-se o número de vértices (que é igual ao número de lados) de um polígono convexo.



Vamos generalizar o resultado da soma das medidas dos ângulos internos para um polígono de n lados (n vértices), conforme a representação abaixo sugere, em que A_1, A_2, A_3, ..., A_n são os vértices.



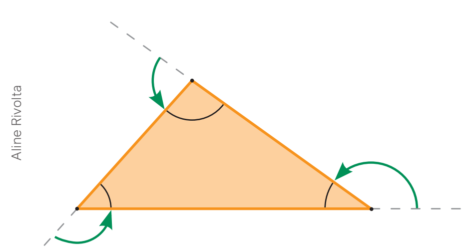
O polígono de n lados está subdividido em $n - 2$, uma vez que, fixado um vértice qualquer, ele pode ser ligado a outros ($n - 2$) vértices, excluídos apenas dois dos n, para formar um triângulo. Assim, a soma das medidas de todos os ângulos desses triângulos é a soma das medidas dos ângulos internos do polígono.

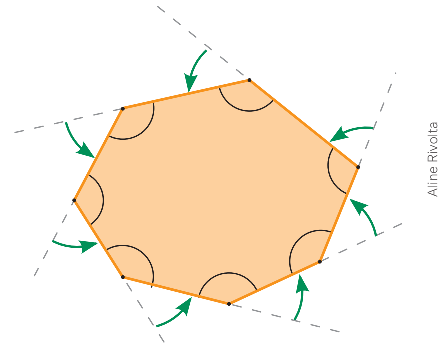
A soma S_n das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é determinada pela relação:

$$S_n = (n - 2) \cdot 180°$$

E a soma das medidas dos ângulos externos?

Observe inicialmente a representação dos ângulos externos tanto no triângulo quanto no hexágono abaixo.

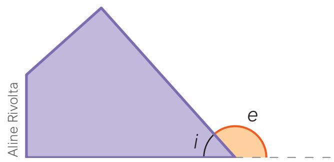




Se imaginarmos um local em forma de polígono e considerarmos que estamos andando ao longo dos seus lados, os ângulos externos nos dão a ideia de mudança de direção. Assim, se percorrermos todos os lados desse triângulo, passando sucessivamente pelos vértices, faremos três mudanças de direção até retornarmos ao ponto de partida. E, no hexágono, faremos seis mudanças de direção.

Para pensar e discutir

1. Se nas duas situações você volta ao ponto de partida, qual é a soma das medidas dos ângulos correspondentes às mudanças de direção? 1. 360°
2. Escolha um vértice qualquer do triângulo. Qual é a soma das medidas dos ângulos interno e externo nesse vértice? 2. 180°
3. E no hexágono? 3. 180°



Na discussão anterior, você provavelmente chegou a uma conclusão que envolve as medidas de um ângulo interno e de um ângulo externo referente a um mesmo vértice de um polígono. No quadrilátero ao lado, observe que representamos por ***i*** e ***e*** as medidas dos ângulos interno e externo, respectivamente, de um de seus vértices.

Como são ângulos suplementares, isto é, formam um ângulo raso, temos que a soma de suas medidas é igual a 180°:

$$i + e = 180°$$

Se considerarmos um polígono com n vértices, teremos para os ângulos internos $i_1, i_2, i_3, ..., i_n$ e os correspondentes ângulos externos $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$:

$$\begin{aligned} i_1 + e_1 &= 180° \\ i_2 + e_2 &= 180° \\ i_3 + e_3 &= 180° \\ &\dots \\ i_n + e_n &= 180° \end{aligned}$$

Adicionando-se essas igualdades membro a membro, temos:

$$(i_1 + i_2 + i_3 + ... + i_n) + (e_1 + e_2 + e_3 + ... + e_n) = \underbrace{180° + 180° + 180° + ... + 180°}_{n}$$

$$\begin{aligned} &(n - 2) \cdot 180° + (e_1 + e_2 + e_3 + ... + e_n) = n \cdot 180° \\ &e_1 + e_2 + e_3 + ... + e_n = n \cdot 180° - (n - 2) \cdot 180° \\ &e_1 + e_2 + e_3 + ... + e_n = 180° \cdot [n - (n - 2)] \\ &e_1 + e_2 + e_3 + ... + e_n = 360° \end{aligned}$$

A soma das medidas de todos os ângulos externos de um polígono convexo é igual a 360°.

Atividades resolvidas

11. Obtenha a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo formado por 17 lados.

- Como o polígono tem 17 lados, substituímos n por 17:

$$S_n = (n - 2) \cdot 180°$$
$$\downarrow \; n = 17$$
$$S_{17} = (17 - 2) \cdot 180°$$
$$S_{17} = 15 \cdot 180° \Rightarrow S_{17} = 2\,700°$$

12. Sabe-se que um polígono convexo tem a soma das medidas de seus ângulos internos igual a 1 440°. Identifique esse polígono.

- Como conhecemos a soma das medidas dos ângulos internos, utilizamos a relação matemática para determinar o valor de n (número de lados):

$$\begin{aligned} S_n &= (n - 2) \cdot 180° \\ 1\,440° &= (n - 2) \cdot 180° \\ 1\,440° &= n \cdot 180° - 2 \cdot 180° \\ 1\,440° &= n \cdot 180° - 360° \\ 1\,800° &= n \cdot 180° \Rightarrow n = 10 \end{aligned}$$

13. Em um polígono regular, todas as medidas dos ângulos internos são iguais. Qual é a medida de cada ângulo interno de um icoságono regular?

- Icoságono tem 20 lados. Uma maneira de calcular a medida de cada ângulo interno é dividir a soma de todas as medidas dos ângulos internos por 20, isto é, sendo i a medida de cada ângulo interno, temos:

$$i = \frac{S_n}{n} = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$$
$$\downarrow \; n = 20$$
$$i = \frac{(20 - 2) \cdot 180°}{20}$$
$$i = 18 \cdot 9° \Rightarrow i = 162°$$

Para pensar e discutir

1. Como você calcularia a medida de cada ângulo interno do icoságono regular com base na soma das medidas dos ângulos externos? 1. Resposta pessoal.

Observação:
Ainda neste capítulo voltaremos a abordar situações envolvendo polígonos regulares.

Para explorar

Junte-se a três colegas para fazer estas atividades.

Por meio de um *software* de geometria dinâmica, vocês irão explorar não apenas a construção, mas também a determinação de medidas dos ângulos internos e externos de um polígono.

1. Tracem um pentágono qualquer e, depois, determinem:
a) a soma das medidas dos ângulos internos; 1. a) 540°
b) a soma das medidas dos ângulos externos. 1. b) 360°

2. Tracem um quadrilátero qualquer e, depois, determinem:
a) a soma das medidas dos ângulos internos; 2. a) 360°
b) a soma das medidas dos ângulos externos. 2. b) 360°

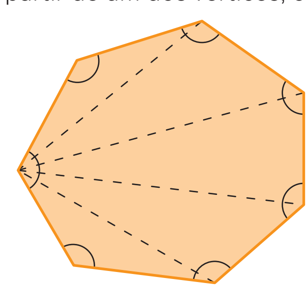
3. Tracem um hexágono qualquer e, depois, determinem:
a) a soma das medidas dos ângulos internos; 3. a) 720°
b) a soma das medidas dos ângulos externos. 3. b) 360°

4. Tracem um polígono de 9 lados e, depois, determinem:
a) a soma das medidas dos ângulos internos; 4. a) 1 260°
b) a soma das medidas dos ângulos externos. 4. b) 360°

5. Elaborem um texto, utilizando argumentos matemáticos, a respeito da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono ser múltiplo de 180°. Apresente também, por meio de argumentos matemáticos, uma explicação sobre a regularidade observada na soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo. 5. Resposta pessoal.

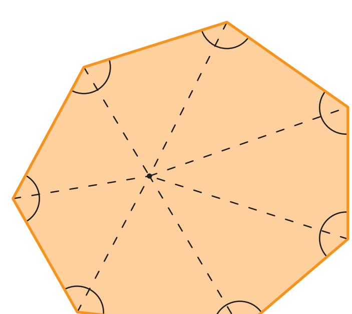
Atividades

18. Considere o polígono representado, em que os ângulos internos estão indicados. A partir de um dos vértices, o polígono foi subdividido em triângulos.
Obtenha:


Aline Rivolta

a) o número de lados desse polígono; 18. a) 7
b) o número de triângulos em que está subdividido; 18. b) 5
c) a soma das medidas dos ângulos internos de cada triângulo; 18. c) 180°
d) a soma das medidas dos ângulos internos do polígono sem utilizar fórmulas. 18. d) $900° = 180° \cdot 5$

19. Agora considere o mesmo polígono. Escolhemos um ponto qualquer em seu interior e dividimos o polígono em triângulos.


Aline Rivolta

a) Qual é a relação entre o número de lados do polígono e o número de triângulos em que está subdividido? 19. a) O número de lados é igual ao número de triângulos.
b) A soma das medidas de todos os ângulos internos dos triângulos resultará exatamente na soma das medidas dos ângulos internos do polígono? 19. b) Não.
c) Como você pode obter a soma das medidas dos ângulos internos do polígono por meio da soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos em que ele está subdividido? Justifique sua resposta. 19. c) Resposta pessoal.

20. Junte-se a um colega para esta atividade. 20. Respostas pessoais.

I. Tracem em uma folha à parte um polígono convexo (não precisa ser regular) que tenha 11 lados.

II. Escolham um dos vértices do polígono e, a partir dele, dividam o polígono em triângulos como foi feito na questão 18.

III. Determinem a soma das medidas dos ângulos internos do polígono correspondente utilizando apenas a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

IV. Tracem em uma folha à parte um polígono convexo (não precisa ser regular) que tenha 13 lados.

V. Escolham um ponto na região interna do polígono e, a partir dele, dividam o polígono em triângulos como foi feito na questão 19.

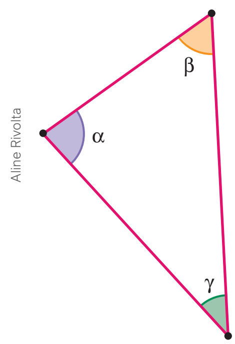
VI. Determinem a soma das medidas dos ângulos internos do polígono correspondente utilizando apenas a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

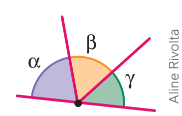
21. Utilize a fórmula da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono para calcular:

a) a soma das medidas dos ângulos internos de um octógono convexo; 21. a) 1 080°

b) a soma das medidas dos ângulos internos de um decágono convexo. 21. b) 1 440°

22. Para mostrar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, podemos desenhar o triângulo em uma folha de papel, recortar o desenho nos ângulos e juntá-los, como sugere a figura a seguir.





Você poderá fazer isso também para os ângulos externos. Siga as instruções:

I. Desenhe em uma folha à parte um polígono convexo com 9 lados (não precisa ser regular).

II. Prolongando os lados desse polígono, represente os ângulos externos e procure colori-los.

III. Recorte cada ângulo externo.

IV. Junte-os sem sobreposições em torno de um ponto.

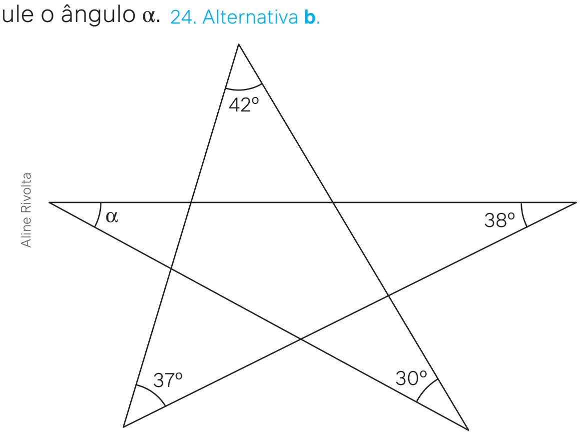
- Qual foi o resultado? 22. Resposta pessoal.

23. (Unifesp) A soma de $n - 1$ ângulos internos de um polígono convexo de n lados é 1 900°. O ângulo remanescente mede: 23. Alternativa **d**.

a) 120° **c)** 95° **e)** 60°

b) 105° **d)** 80°

24. (Ifal) Na figura a seguir, calcule o ângulo α. 24. Alternativa **b**.



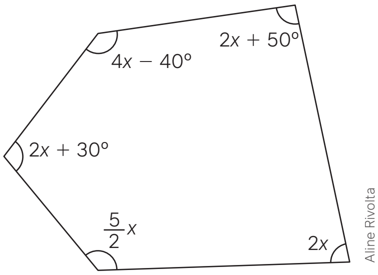
a) 30° **c)** 37° **e)** 42°

b) 33° **d)** 38°

25. (IFCE) Um hexágono convexo possui três ângulos internos retos e outros três medem *y* graus cada. O valor de *y* é: 25. Alternativa **b**.

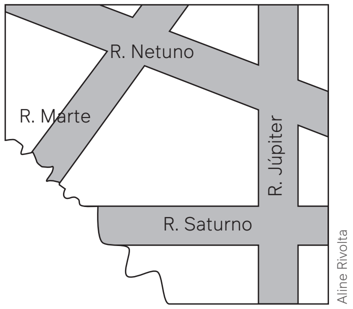
a) 135
b) 150
c) 120
d) 60
e) 30

26. (UTFPR) O valor de *x* no pentágono abaixo é igual a: 26. Alternativa **b**.



a) 25°
b) 40°
c) 250°
d) 540°
e) 1 000°

27. (IFSP) Uma pessoa pegou um mapa rasgado em que constava um terreno delimitado por quatro ruas. Na parte visível do mapa, vê-se que o ângulo formado pela rua Saturno e pela rua Júpiter é 90°; o ângulo formado pela rua Júpiter e pela rua Netuno é 110° e o ângulo formado pela rua Netuno e pela rua Marte é 100°. Nessas condições, a medida de um ângulo formado pelas ruas Marte e Saturno, na parte rasgada do mapa, é de
27. Alternativa **b**.

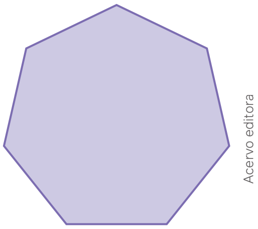


a) 50°
b) 60°
c) 70°
d) 80°
e) 90°

28. (IFSul-RS) Quantos lados tem um polígono cuja soma dos ângulos internos e externos é 1 980°? 28. Alternativa **b**.

a) 8
b) 11
c) 13
d) 7

29. (IFSP) Ana estava participando de uma gincana na escola em que estuda e uma das questões que ela tinha de responder era "quanto vale a soma das medidas dos ângulos internos do polígono regular da figura?"



Para responder a essa pergunta, ela lembrou que seu professor ensinou que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, e que todo polígono pode ser decomposto em um número mínimo de triângulos. Sendo assim, Ana respondeu corretamente à pergunta dizendo: 29. Alternativa **b**.

a) 720°
b) 900°
c) 540°
d) 1 080°
e) 630°

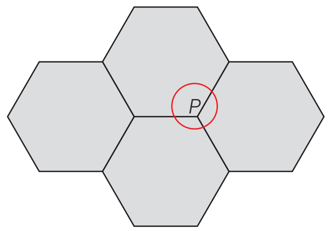
30. (Cefet-MG) Somando-se todos os ângulos internos de três polígonos convexos obtém-se 2 160°. Sabe-se que o número de lados desses polígonos é $n - 2$ e $n + 2$. Dentre eles, o que possui menor número de lados é um

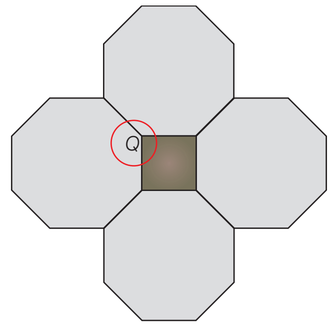
a) triângulo. 30. Alternativa **b**.
b) quadrilátero.
c) pentágono.
d) hexágono.

Os ângulos nos polígonos regulares

Agora que já conhecemos uma relação que envolve a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono, vamos retomar e ampliar a tarefa de “forrar” sem sobras um plano com ladrilhos em forma de polígonos. Observe que, nas duas formas a seguir, o plano está completamente “forrado” em torno de um vértice *P* na figura da esquerda e em torno de um vértice *Q* na figura da direita, sem sobreposição das peças.

Aline Rivolta





Aline Rivolta

Isso ocorre porque a soma das medidas dos ângulos no encaixe dessas peças em torno desses dois pontos resulta em 360°. No ponto *P*, o encaixe é feito por meio de três peças em forma de hexágono regular; já no ponto *Q*, esse encaixe ocorre com dois octógonos regulares e um quadrado.

Para pensar e discutir

1. Como você calcula a medida de cada ângulo interno de um hexágono regular? Qual é essa medida? 1. Resposta pessoal; 120°.

2. E de um octógono regular? E do quadrado? 2. Resposta pessoal; 135°, 90°.

3. Um triângulo equilátero sempre é regular? 3. Sim.

4. E um hexágono com todos os lados com a mesma medida é necessariamente regular? 4. Não.

Agora que você discutiu e respondeu às questões anteriores, relembre que, para um polígono ser regular, duas condições devem ser verificadas.

Um **polígono convexo** é dito **regular** quando todos os lados têm a mesma medida e todos os ângulos internos são congruentes.

Assim, como todos os ângulos internos de um polígono devem ter a mesma medida, uma maneira de você determinar essa medida é dividindo a soma de todos os ângulos internos pelo número de ângulos. Analogamente, no caso de cada ângulo externo, a medida é obtida dividindo a soma de todos os ângulos externos pela quantidade de ângulos. Se representássemos a medida de cada ângulo interno de um polígono regular por *i* e a medida de cada ângulo externo por *e*, teríamos:

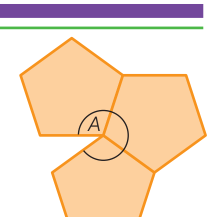
- medida do ângulo interno: $i = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$;
- medida do ângulo externo: $e = \dfrac{360°}{n}$.

Ainda observando a situação que envolve a ideia de cobrir um plano completamente por meio de ladrilhos em forma de polígonos convexos regulares, observe na atividade resolvida a seguir o que acontece se utilizarmos peças somente em forma de pentágonos regulares.

Atividades resolvidas

14. Verifique se, utilizando apenas peças em forma de pentágonos regulares, é possível cobrir totalmente o plano para cobrir o entorno de um ponto *A*.

- Inicialmente representamos na figura indicada o ponto *A* e pentágonos adjacentes, sem sobreposições, indicando também os ângulos internos desses pentágonos em torno do ponto.



Aline Rivolta

- Embora apenas a figura já seja suficiente para verificar a impossibilidade de cobrir o plano utilizando apenas pentágonos regulares, vamos calcular a medida de cada ângulo interno i:

$$i = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$
$$i = \frac{(5-2) \cdot 180°}{5}$$
$$i = 108°$$

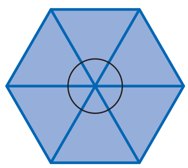
- Como na figura temos 3 pentágonos, para que o ângulo total seja 360° falta um "pedaço" para cobrir completamente:

$$360° - (3 \cdot 108°) = 360° - 324° = 36°$$

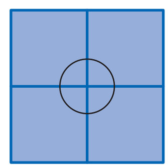
Portanto, utilizando somente pentágonos regulares não seria possível cobrir completamente o plano em torno de um ponto A.

Então, surge um problema mais abrangente.

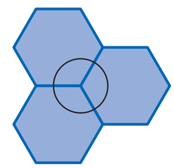
Utilizando peças de um polígono regular de mesmo tamanho e mesmo formato, quais seriam as possibilidades de compor um plano em torno de um ponto?


Aline Rivolta

6 triângulos equiláteros


Aline Rivolta

4 quadrados


Aline Rivolta

3 hexágonos

- Com uma rápida olhada nas calçadas e nos pisos de grandes áreas, podemos constatar apenas três maneiras de resolver o problema:

Note que, nesses três casos, ao dividirmos a medida total de 360° pelo número de peças em cada figura, obtemos a medida de cada ângulo interno, ou, de forma equivalente, multiplicando o número de peças pela medida de cada ângulo interno, obtemos 360°:

- triângulo: $\frac{360°}{6} = 60° \Rightarrow 360° = 6 \cdot 60°$;
- quadrado: $\frac{360°}{4} = 90° \Rightarrow 360° = 4 \cdot 90°$;
- hexágono: $\frac{360°}{3} = 120° \Rightarrow 360° = 3 \cdot 120°$.

Mas será que não pode haver outras possibilidades?

Sugerimos que você investigue a situação para responder melhor a essa questão.

Para explorar

Junte-se a três colegas para fazer estas atividades.

1. Descubram todas as medidas de ângulos em graus que representem divisores naturais de 360°, isto é, ângulos que divididos por 360° resultem em um número natural. Anotem essas medidas.
1. 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, 8°, 9°, 10°, 12°, 15°, 18°, 20°, 24°, 30°, 36°, 40°, 45°, 60°, 72°, 90°, 120°, 180° e 360°

2. Com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica, construam os polígonos regulares a seguir e determinem as medidas de cada ângulo interno deles. 2. 60°; 90°; 108°; 120°; 128,57°; 135°; 144°

- Triângulo equilátero.
- Quadrado.
- Pentágono.
- Hexágono.
- Heptágono.
- Octógono.
- Decágono.

3. Elaborem um quadro com as seguintes informações para os polígonos regulares construídos no item anterior.
3. Resposta no Manual do Professor.

Polígono	Número de lados	Soma dos ângulos internos	Medida do ângulo interno

4. Agora, verifiquem que medidas dos ângulos internos obtidas são divisoras de 360°. 4. 60°, 90° e 120°

5. Elaborem um texto explicativo sobre as formas de polígonos regulares que possibilitam resolver o problema de "forrar" completamente o plano em torno de um ponto. 5. Resposta pessoal.

Observação:

Quando precisamos determinar a medida de cada ângulo interno de um polígono regular, geralmente calculamos a soma de todas as medidas dos ângulos internos e, então, dividimos pelo número de lados (ou de vértices, ou de ângulos) do polígono. Veja a seguir.

- Passo 1: $S = (n - 2) \cdot 180°$
- Passo 2: $i = \frac{S}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$

Observando que em um polígono a medida do ângulo interno i é suplementar à medida do ângulo externo, para o caso dos polígonos regulares, podemos proceder inicialmente calculando a medida de cada ângulo externo, dividindo 360° pelo número de lados do polígono e determinando a medida de seu suplemento.

- Passo 1: $e = \frac{360°}{n}$
- Passo 2: $i + e = 180° \Rightarrow i = 180° - e$

Atividades resolvidas

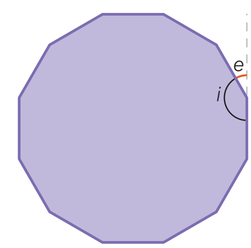
15. Determine a medida do ângulo interno de um dodecágono regular.

- Cálculo da medida do ângulo externo:

$$e = \frac{360°}{12} \Rightarrow e = 30°$$

- Cálculo da medida do ângulo interno:

$$i + e = 180°$$
$$i + 30° = 180°$$
$$i = 180° - 30° \Rightarrow i = 150°$$



Aline Rivolta

Portanto, cada ângulo interno do dodecágono regular mede 150°.

16. Um polígono regular tem 4 lados a mais que outro; seu ângulo interno tem medida excedendo em 15° a medida do outro. Identifique esses dois polígonos.

- Sendo n o número de lados de um polígono (com menor número de lados) e i_1 a medida de seu ângulo interno, temos:

$$i_1 = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

- Sendo $n + 4$ o número de lados de um polígono e i_2 a medida de seu ângulo interno, temos:

$$i_2 = \frac{(n+4-2) \cdot 180°}{n+4} = \frac{(n+2) \cdot 180°}{n+4}$$

- Conforme enunciando, a medida de cada ângulo interno i_2 excede em 15° a medida do ângulo interno i_1, portanto temos:

$$i_2 = i_1 + 15°$$
$$\frac{(n+2) \cdot 180°}{n+4} = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n} + 15°$$

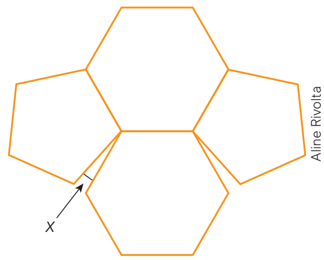
$$\div 15$$

$$\frac{(n+2) \cdot 12}{n+4} = \frac{(n-2) \cdot 12}{n} + 1$$
$$\frac{12n + 24}{n+4} = \frac{12n - 24 + n}{n}$$
$$(12n + 24) \cdot n = (n + 4) \cdot (13n - 24)$$
$$12n^2 + 24n = 13n^2 - 24n + 52n - 96$$
$$n^2 + 4n - 96 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 8 \text{ ou} \\ n = -12 \text{ (não serve)} \end{cases}$$

Portanto, um polígono tem 8 lados (octógono) e outro polígono tem 4 lados a mais (dodecágono).

Atividades

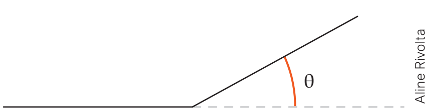
31. Na tentativa de "forrar" um plano, Márcia utilizou peças em forma de hexágono regular e pentágono regular, como mostra a figura a seguir.



a) Por que Márcia não conseguiu? 31. a) Resposta no Manual do Professor.

b) Qual é a medida do ângulo indicado na figura pela letra x? 31. b) $x = 12°$

32. Em um jogo eletrônico, o personagem se desloca em torno de polígonos regulares. A seguir, vemos dois segmentos que indicam dois lados consecutivos com 2 cm de comprimento fixo. O ângulo externo indicado por θ pode variar, alterando o número de lados do polígono.



a) Considerando que $\theta = 10°$, quantos lados tem o polígono e qual é a distância percorrida pelo personagem ao dar uma volta completa? 32. a) 36; 72 cm

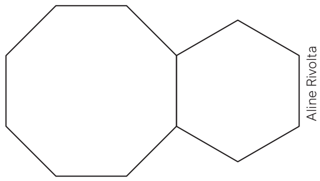
b) Considerando $\theta = 60°$, quantos lados tem o polígono e qual é a distância percorrida pelo personagem ao dar uma volta completa? 32. b) 6; 12 cm

c) Se, ao dar uma volta completa ao longo de um polígono, o personagem percorreu 180 cm, quantos lados tem o polígono correspondente e qual é a medida de θ? 32. c) 90; 4°

d) Se, ao dar uma volta completa ao longo de um polígono, o personagem percorreu 60 cm, quantos lados tem o polígono correspondente e qual é a medida de θ? 32. d) 30; 12°

33. Junte-se a um colega para resolver o problema a seguir.

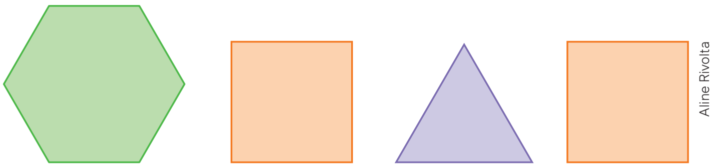
Para pavimentar uma sala ampla de uma biblioteca, a arquiteta planejou a utilização de três lajotas em forma de polígonos regulares. Duas delas estão representadas na figura a seguir.



A arquiteta pensou em colocar uma peça em forma de pentágono regular. Se ela fizer isso, o piso será inteiramente coberto em torno de um ponto sem sobreposição de peças? Justifique. 33. Não; resposta pessoal.

34. Para verificar se você compreendeu a ideia de "forrar" um plano com polígonos regulares, resolva individualmente a atividade a seguir.

Considere a seguinte afirmação: "Ao utilizar um hexágono regular, um triângulo equilátero e dois quadrados, como representados a seguir, todos com a mesma medida de lado, é possível 'forrar' completamente um plano em torno de um ponto".

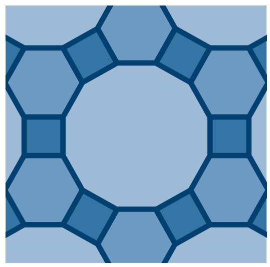


a) Explique por que isso é possível. 34. a) Resposta pessoal.

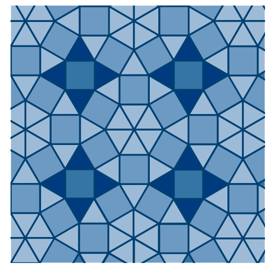
b) Construa, com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica, um hexágono regular, dois quadrados e um triângulo equilátero, todos com a mesma medida de lado. Depois, imprima essas peças, recorte-as e cole-as em uma cartolina para verificar como é possível “forrar” o plano em torno de um ponto. 34. b) Resposta pessoal.

35. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.

A seguir, estão representadas duas maneiras diferentes de cobrir completamente uma superfície por meio de polígonos regulares.



Reinaldo Vignati



Reinaldo Vignati

Cada dupla deverá apresentar para a turma um exemplo criativo de como cobrir completamente uma superfície utilizando pelo menos duas peças diferentes em forma de polígonos regulares. 35. Resposta pessoal.

36. (IFPE) Em determinado ano, as moedas de R$ 0,25 tinham, numa de suas faces, um polígono regular com 7 lados, como se pode ver na figura.

MarcusVDT/Shutterstock.com

Quanto vale a soma dos ângulos internos desse polígono de 7 lados? 36. Alternativa **b**.

a) 1 160°

b) 900°

c) 1 180°

d) 1 260°

e) 1 620°

37. (IFCE) O polígono regular convexo cujo ângulo interno é $\frac{7}{2}$ do seu ângulo externo é 37. Alternativa **e**.

a) octógono.

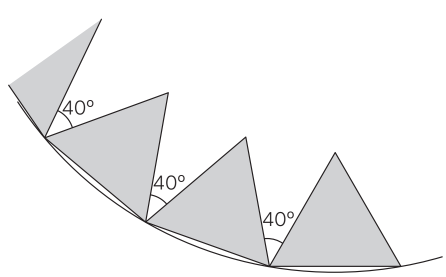
b) dodecágono.

c) decágono.

d) icoságono.

e) eneágono.

38. (UFGRS) Um desenhista foi interrompido durante a realização de um trabalho, e seu desenho ficou como na figura abaixo. 38. Alternativa **e**.



Aline Rivolta

Se o desenho estivesse completo, ele seria um polígono regular composto de triângulos equiláteros não sobrepostos, com dois de seus vértices sobre um círculo, e formando um ângulo de 40°, como indicado na figura. Quando a figura estiver completa, o número de triângulos equiláteros com dois de seus vértices sobre o círculo é

a) 10

b) 12

c) 14

d) 16

e) 18

Medidas de superfícies

3

O que é uma Área de Preservação Permanente?

©2011CIAT/NeilPalmer

Vista aérea da Floresta Amazônica, próximo a Manaus (AM), 2021.

De acordo com o Código Florestal, Lei nº 12 651/12, no seu artigo 3º, a definição é:

Área de Preservação Permanente (APP): área protegida, coberta ou não por vegetação nativa, com a função ambiental de preservar os recursos hídricos, a paisagem, a estabilidade geológica e a biodiversidade, facilitar o fluxo gênico de fauna e flora, proteger o solo e assegurar o bem-estar das populações humanas.

BRASIL. *Lei no 12.651, de 25 de maio de 2012*. Dispõe sobre a proteção da vegetação nativa. Brasília, DF: Presidência da República, 2012. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2012/lei/l12651.htm. Acesso em: 2 set. 2024.

O Código Florestal, além de definir o que é uma Área de Preservação Permanente, estabelece em seu artigo 4º as diferentes larguras correspondentes. Assim, apenas para exemplificar, temos:

I – as faixas marginais de qualquer curso-d'água natural perene e intermitente, excluídos os efêmeros, desde a borda da calha do leito retangular, em largura mínima de:
- a) 30 (trinta) metros, para os cursos-d'água de menos de 10 (dez) metros de largura;
- b) 50 (cinquenta) metros, para os cursos-d'água que tenham 10 (dez) a 50 (cinquenta) metros de largura;
- c) 100 (cem) metros, para os cursos-d'água que tenham 50 (cinquenta) a 200 (duzentos metros) de largura;
- d) 200 (duzentos) metros, para os cursos-d'água que tenham de 200 (duzentos) a 600 (seiscentos) metros de largura;
- e) 500 (quinhentos) metros, para os cursos-d'água que tenham largura superior a 600 (seiscentos) metros;

II – as áreas no entorno dos lagos e lagoas naturais, em faixa com largura mínima de:
- a) 100 (cem) metros, em zonas rurais, exceto para o corpo de água com até 20 (vinte) hectares de superfície, cuja faixa marginal será de 50 (cinquenta) metros;
- b) 30 (trinta) metros, em zonas urbanas;

BRASIL. *Lei no 12.651, de 25 de maio de 2012*. Dispõe sobre a proteção da vegetação nativa. Brasília, DF: Presidência da República, 2012. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2012/lei/l12651.htm. Acesso em: 2 set. 2024.

Aqui mencionamos apenas parte do referido artigo. Nele há diversas outras preocupações relacionadas ao entorno dos reservatórios de águas artificiais e de áreas em torno das nascentes, dos olhos-d'água perenes, das encostas, das restingas e dos mangues, entre outras.

Para pensar e discutir

1. Além das Áreas de Preservação Permanente, conforme mencionamos anteriormente, existem também as Áreas de Preservação Ambiental (APA). Em seu município há alguma Área de Preservação Ambiental? Procure saber a medida dela. 1. Respostas pessoais.
2. O que é medida de superfície? Quais unidades de medida de superfície você conhece? 2. Respostas pessoais.
3. Quantos metros quadrados correspondem a 20 hectares? Explique como calculou. 3. 200 000 m²; resposta pessoal

Ao longo dos últimos anos do Ensino Fundamental foi trabalhado o conceito de medida de superfície. Algumas relações matemáticas para o cálculo de áreas de regiões em forma de quadrado, de retângulo, de triângulo, de trapézio, do losango e de paralelogramos foram estabelecidas. Nesta unidade vamos retomar, aplicar e ampliar tais conhecimentos na resolução de situações diversas.

Assim, como poderemos calcular a área de uma grande superfície que foi desmatada se ela não tem uma forma geométrica conhecida, como citamos anteriormente?


Bruno Rocha/Fotoarena

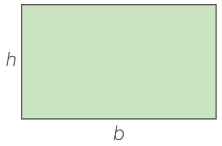
Terreno desmatado na Floresta Amazônica, nos arredores de Porto Velho (RO), setembro de 2019.

Ou como poderemos encontrar a área de um lago totalmente irregular? Veremos que existem procedimentos que possibilitam o cálculo aproximado de medidas de superfície por meio da decomposição em partes. Antes, vamos explorar um pouco mais seu conhecimento do Ensino Fundamental sobre o cálculo de áreas das figuras geométricas planas mais comuns. Analise as atividades resolvidas a seguir.

Atividades resolvidas

17. Um campo oficial de futebol, conforme determinado pela FIFA, tem como medidas 105 m por 68 m. Calcule sua área, em metros quadrados.

- A área de um retângulo é o produto das medidas de sua base e de sua altura (comprimento × largura). Sendo A a área, b a medida da base e h a medida da altura, temos:



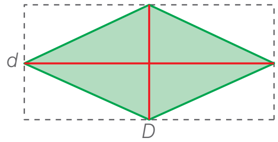
Acervo editora

$$A = b \cdot h$$
$$A = 105 \cdot 68$$
$$A = 7140$$

Portanto, a medida de um campo de futebol conforme as especificações da FIFA é de 7 140 m^2.

18. Em um losango, as medidas das diagonais são 10 cm e 26 cm. Obtenha e explique como calcular a área do losango em função da área de um retângulo.

- A seguir está representado um retângulo de lados com as mesmas medidas das diagonais do losango. Essas diagonais dividem o losango em 4 triângulos e o retângulo maior em 4 retângulos menores.



TDPStudio

- Conforme figura, o losango ocupa a metade da superfície do retângulo. Assim, temos:

$$A_{\text{losango}} = \frac{1}{2} \cdot A_{\text{retângulo}}$$
$$A_{\text{losango}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d$$

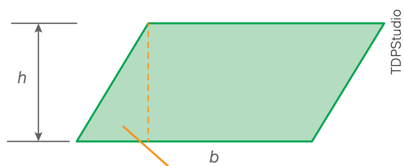
- Com base nessa relação, podemos calcular a área do losango conforme medidas dadas:

$$A_{\text{losango}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d$$
$$A_{\text{losango}} = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 10$$
$$A_{\text{losango}} = 130$$

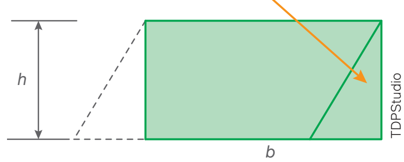
Portanto, a área do losango é de 130 cm^2.

19. A área de um paralelogramo de medida da base b e a altura h é igual à área de um retângulo de mesma medida da base e da mesma medida da altura. Explique.

- Do paralelogramo podemos obter um retângulo, conforme sugerem as figuras a seguir:



Recortando o triângulo e reposicionando-o:



Assim, a área do paralelogramo pode ser calculada pelo produto das duas medidas:

$$A_{\text{paralelogramo}} = A_{\text{retângulo}}$$
$$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$$

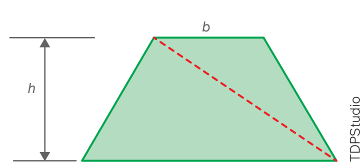
Para pensar e discutir

1. Mostre que a área de um triângulo é a metade da área de um retângulo de base medindo b e a altura medindo h.

1. Resposta no Manual do Professor

20. Com base na relação matemática para o cálculo da área de um triângulo (relação: $A = \frac{b \cdot h}{2}$), obtenha a relação matemática para o cálculo da área de um trapézio.

- Na ilustração a seguir, temos um trapézio em que as medidas das bases são b e B e a altura tem medida h. Esse trapézio está dividido em dois triângulos, conforme linha tracejada.



- A área do trapézio é a soma das áreas dos dois triângulos de mesma altura, isto é:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2}$$
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2}$$
$$A_{\text{trapézio}} = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h$$

Resumindo as relações para o cálculo de áreas de algumas figuras planas que aqui foram retomadas:

- retângulo: $\boldsymbol{A = B \cdot h}$
- losango: $\boldsymbol{A = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d}$
- paralelogramo: $\boldsymbol{A = B \cdot h}$
- trapézio: $\boldsymbol{A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h}$

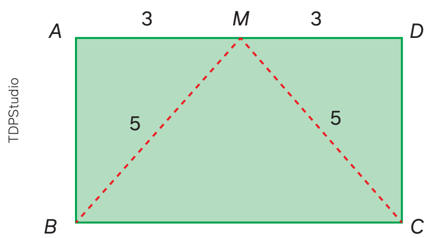
Atividades

39. Um quadrado tem medida do lado igual a x cm.

a) Duplicando a medida do lado desse quadrado, o que ocorre com a medida de seu perímetro? 39. a) Duplica.

b) E a medida de sua área? 39. b) Quadruplica.

40. Considere o retângulo *ABCD* cujas medidas estão indicadas em centímetros.



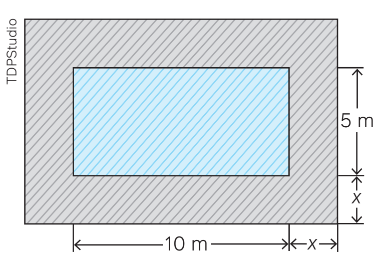
a) Determine a medida do menor lado do retângulo *ABCD*. 40. a) 4 cm

b) Calcule a área do retângulo *ABCD*. 40. b) 24 cm^2

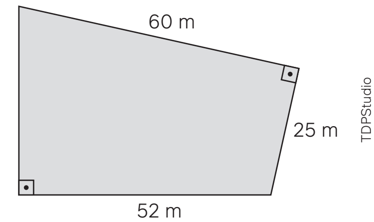
c) Calcule a área do triângulo isósceles *BCM*. 40. c) 12 cm^2

41. Um grande jardim em formato de losango tem as medidas das diagonais dadas por 32 m e 24 m. Nesse jardim será plantada grama cujo custo é R$ 4,50 por metro quadrado. Qual será o custo total da grama utilizada para plantar no jardim? 41. R$ 1.728,00

42. Uma piscina tem 10 m de comprimento por 5 m de largura, conforme desenho a seguir. Ao redor dessa piscina será feito um revestimento em pedra com x metros de largura. Como existe disponível 87,75 m^2 desse revestimento, qual deverá ser a medida x para aproveitar todo esse revestimento? 42. 2,25 m

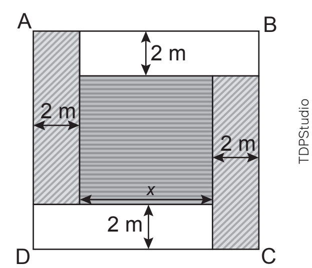


43. (ESPM-SP) A área do terreno representado na figura abaixo é igual a: 43. Alternativa **b**.



a) 1 896 m^2 **b)** 1 764 m^2 **c)** 2 016 m^2 **d)** 1 952 m^2 **e)** 1 948 m^2

44. (Unesp) Renata pretende decorar parte de uma parede quadrada ABCD com dois tipos de papel de parede, um com linhas diagonais e outro com riscos horizontais. O projeto prevê que a parede seja dividida em um quadrado central, de lado x, e quatro retângulos laterais, conforme mostra a figura.



Se o total da área decorada com cada um dos dois tipos de papel é a mesma, então x, em metros, é igual a 44. Alternativa **b**.

a) $1 + 2\sqrt{3}$ **b)** $2 + 2\sqrt{3}$ **c)** $2 + \sqrt{3}$ **d)** $1 + \sqrt{3}$ **e)** $4 + \sqrt{3}$

45. (Ifal) Deseja-se determinar a área de um trapézio, cuja base maior mede 1 metro a mais que a altura, e a base menor 1 metro a menos que a altura. Sabendo que a altura desse trapézio mede 4 metros, qual é, em metros quadrados, a área desse trapézio?

a) 10 **b)** 16 **c)** 20 **d)** 25 **e)** 30

45. Alternativa **b**.

Resolução de problemas de cálculo de áreas

Eduardo Zappia/Pulsar Imagens

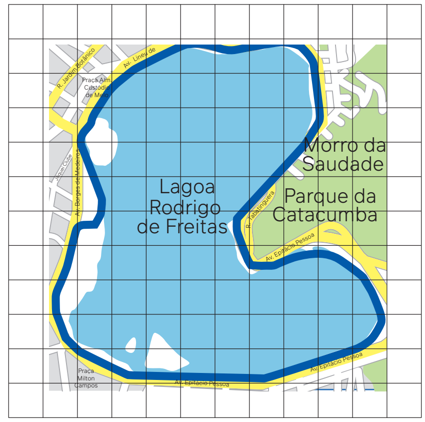
Vista aérea da Lagoa Rodrigo de Freitas, Rio de Janeiro (RJ), março de 2019.

No cálculo relacionado às medidas de superfície, é comum utilizarmos aproximação, pois nem sempre tais superfícies são regulares ou nem mesmo estamos diante de uma forma geométrica conhecida.

Apenas para exemplificar um método de determinação de áreas, vamos considerar a Lagoa Rodrigo de Freitas, situada na cidade do Rio de Janeiro, conforme a imagem indicada.

Qual é a área total dessa lagoa? Como podemos determiná-la? Uma ideia consiste em transportar a vista aérea (ou a planta da região) para um papel quadriculado e, em seguida, estimar a quantidade de quadrados que estão contidos nela.

Observe em azul a representação do contorno da superfície cuja área queremos calcular.



Reinaldo Vignati

Existem, perto da borda do desenho, partes que, juntas, formam, aproximadamente, quadrados inteiros.

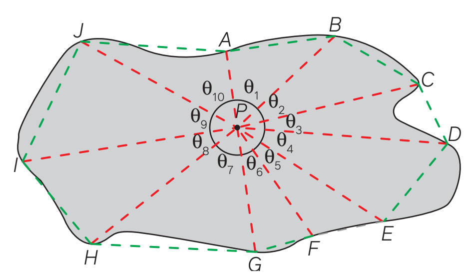
Para pensar e discutir

1. Aproximadamente quantos quadrados inteiros correspondem à superfície da lagoa? 1. 74

2. Com base na quantidade que você obteve no item **1**, como é possível obter a área da lagoa? 2. Resposta pessoal.

3. Considerando que no desenho cada quadrado ocupa uma área de 30 000 metros quadrados, qual é a área aproximada da Lagoa Rodrigo de Freitas? 3. 2 220 000 m^2

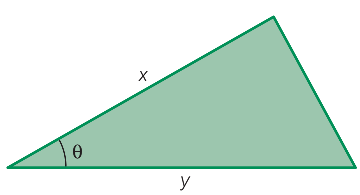
Outro procedimento para o cálculo da área de uma superfície irregular, utilizado por agrimensores com o auxílio de topógrafos, é aproximar a superfície de um polígono. Para isso, escolhe-se um ponto no interior da figura e ela é dividida em triângulos com vértices nesse ponto, conforme mostra a Figura 1.



Reinaldo Vignati

Figura 1.

Há uma relação matemática que possibilita calcular a área de um triângulo conhecendo-se a medida de dois de seus lados e a do ângulo entre eles. Para exemplificar, se no triângulo a seguir dois lados medem x e y e o ângulo entre eles é θ, sua relação com a área A é dada por:



Aline Rivolta

$$A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \text{sen } \theta$$

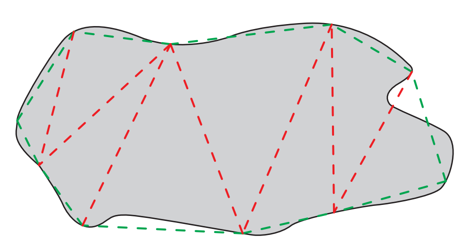
Voltaremos a essa relação, ao estudar a resolução envolvendo conhecimentos trigonométricos.

Há outra ideia, conhecida como triangulação, em que não precisamos do cálculo da medida de ângulos, mas somente de medidas dos lados dos triângulos. Assim, voltando à situação, podemos determinar, com o auxílio de uma trena, as medidas dos lados dos triângulos da Figura 2.

E como podemos calcular a área de um triângulo conhecendo apenas as medidas de seus três lados?

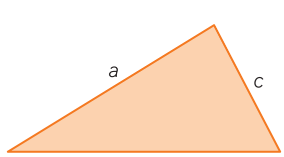
Há uma relação que possibilita calcular a área de qualquer triângulo com base nessas medidas: a fórmula de Heron de Alexandria.

Observe o exemplo a seguir.



Reinaldo Vignati

Figura 2.



Acervo editora

$$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Sendo: $p = \dfrac{a + b + c}{2}$

Atividades resolvidas

21. Um terreno tem a forma de um triângulo cujos lados medem aproximadamente 50 m, 60 m e 42 m. Calcule em metros quadrados a área desse terreno.

- Para utilizarmos a fórmula de Heron precisamos inicialmente obter o semiperímetro p desse terreno em forma de triângulo:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$p = \frac{50+60+42}{2} \Rightarrow p = 76$$

- Utilizamos a fórmula de Heron para calcular a área do triângulo:

$$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

$$A = \sqrt{76 \cdot (76-50) \cdot (76-60) \cdot (76-42)}$$

$$A = \sqrt{76 \cdot 26 \cdot 16 \cdot 34}$$

$$A = \sqrt{1\,074\,944} \Rightarrow A \cong 1\,037$$

Assim, a área do terreno é aproximadamente 1 037 m^2.

22. Considere um triângulo equilátero em que a medida dos três lados seja representada por L. Utilizando a fórmula de Heron, obtenha a expressão que fornece a área A desse triângulo em função da medida L de seu lado.

- Cálculo do semiperímetro p do triângulo equilátero:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$p = \frac{L+L+L}{2} \Rightarrow p = \frac{3L}{2}$$

- Utilizando a fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

$$A = \sqrt{\frac{3L}{2} \cdot \left(\frac{3L}{2} - L\right) \cdot \left(\frac{3L}{2} - L\right) \cdot \left(\frac{3L}{2} - L\right)}$$

$$A = \sqrt{\frac{3L}{2} \cdot \left(\frac{L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{2}\right)}$$

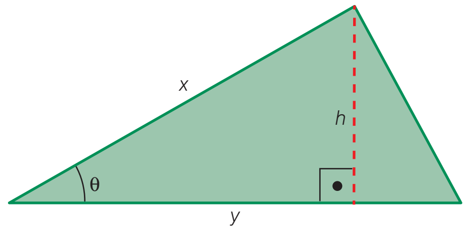
$$A = \sqrt{\frac{3L^4}{16}} \Rightarrow A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Para pensar e discutir

1. Você saberia calcular a área de um triângulo equilátero utilizando outro procedimento? Explique.
   1. Respostas pessoais.
2. Em um triângulo equilátero, duplicando a medida de seu lado L, o que ocorre com a medida de sua área?
   2. Quadruplica.

23. O seno de um ângulo agudo em um triângulo retângulo é a razão entre as medidas do cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa. Utilizando esse conceito, mostre que a área A de um triângulo é $A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \text{sen}\,\theta$, sendo x e y as medidas de dois de seus lados e θ o ângulo entre eles.

- Na figura a seguir, a altura h, relativa ao lado y, divide o triângulo em dois triângulos retângulos.



Aline Rivolta

- Utilizando a razão seno do ângulo θ no triângulo da esquerda, temos:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \cdot \text{sen}\,\theta$$

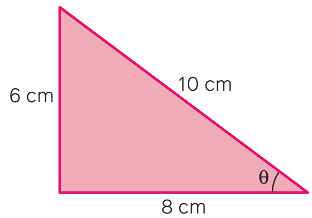
- Conforme relação para o cálculo da área de um triângulo, temos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{y \cdot x \cdot \text{sen}\,\theta}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \text{sen}\,\theta$$

46. A seguir está representado um triângulo retângulo de lados 6 cm, 8 cm e 10 cm. Calcule a área desse triângulo conforme pede cada item.



Aline Rivolta

a) Por meio da fórmula $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$, sendo b a medida da base do triângulo e h a medida da altura correspondente. 46. a) 24 cm²

b) Por meio da fórmula de Heron, $A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$, sendo a, b e c as medidas dos lados do triângulo e p o semiperímetro correspondente. 46. b) 24 cm²

c) Por meio da fórmula $A = \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \text{sen}\ \theta$, sendo x e y as medidas de dois de seus lados e θ a medida do ângulo entre eles (considere que sen $\theta = 0{,}6$). 46. c) 24 cm²

47. Nas áreas rurais e em grandes áreas utilizam-se como medidas de superfície o alqueire e o hectare. Pesquise para responder:

a) Quantos metros quadrados há em 1 hectare? 47. a) 10 000 m²

b) Qual é o comprimento, em metros, do lado de um quadrado que tem 1 hectare de área? 47. b) 100 m

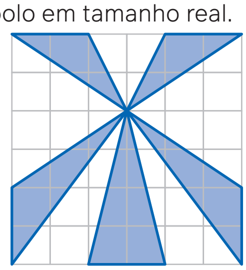
c) Quantos metros quadrados há em 1 alqueire? Há só um tipo de alqueire utilizado no Brasil? 47. c) Respostas no Manual do Professor.

48. Uma fazenda com 165 hectares de área está sendo vendida por R$ 8.000.000,00. Responda ao que se pede.

a) Qual é o valor aproximado dessa fazenda por hectare? 48. a) Aproximadamente R$ 48.500,00 por hectare.

b) Qual é o valor aproximado dessa fazenda por metro quadrado? 48. b) Aproximadamente R$ 4,85 por metro quadrado.

49. Para calcular a área de um símbolo representado em uma grande superfície, Júlia fez o desenho a seguir, em que cada quadrado representava 1 m² da superfície do símbolo em tamanho real.



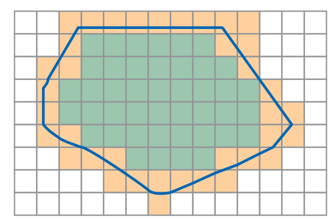
Aline Rivolta

Considerando que a parte escura representa o símbolo, calcule sua área. 49. 14 m²

50. Esta é uma atividade para ser feita coletivamente e com o uso de trena.

A turma deverá medir o contorno do terreno da escola. Cada grupo de estudantes pode ficar encarregado de medir parte do contorno, conforme determinado pelo professor. Depois, esse terreno deverá ser representado por meio de um desenho na escala 1 : 100. Com base no desenho, deve-se calcular a área do terreno. 50. Resposta pessoal.

51. Rodrigo e Laura desenharam em uma malha quadriculada uma região irregular. Depois, coloriram todos os quadradinhos inteiros dentro da figura com a cor verde. Os quadradinhos que estavam parcialmente dentro da curva e parcialmente fora da curva foram coloridos com a cor laranja, como mostra a figura a seguir.



Aline Rivolta

Para calcular a área da região irregular, procederam da seguinte maneira:

I. Calcularam, por falta, a área da região, obtendo a área da parte verde.

II. Calcularam, por excesso, a área da região verde com a região laranja.

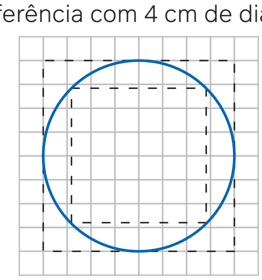
III. Fizeram a média aritmética das duas áreas para obter a área aproximada dessa região irregular.

Considerando que cada quadradinho representa 1 cm², responda:

Qual área eles obtiveram? 51. 61,5 cm²

52. Junte-se a um colega para fazer esta atividade. Utilizando como referência a atividade anterior, elaborem e resolvam um problema que envolva o cálculo da área de uma superfície irregular. Depois, apresentem-no para outra dupla também resolver. 52. Resposta pessoal.

53. Na malha quadriculada a seguir, o lado de cada quadradinho mede 0,5 cm. Nessa malha foi desenhada uma circunferência com 4 cm de diâmetro.



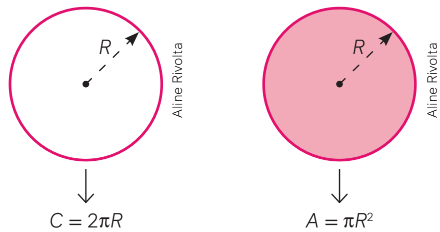
Aline Rivolta

a) Obtenha uma aproximação da área da superfície limitada pela circunferência (círculo). Para isso, utilize a quantidade aproximada de quadradinhos contidas no círculo. 53. a) Aproximadamente 12 cm².

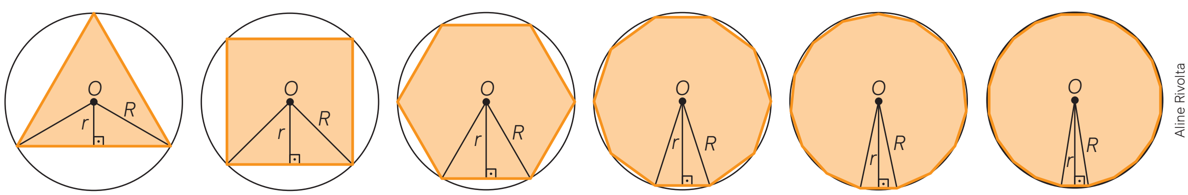
b) Obtenha a média das áreas dos dois quadrados (inscrito e circunscrito) e compare-a com a área calculada no item anterior. 53. b) 12cm²

Área do círculo

A circunferência é a linha que limita uma superfície denominada círculo. O comprimento da circunferência, isto é, seu perímetro, pode ser obtido com base na medida do raio R. Também podemos calcular a área de um círculo conhecendo a medida do raio, como na figura.



Essas duas relações, que você já conheceu no Ensino Fundamental, envolvem o número irracional π e alguns grandes capítulos da história da Matemática. Se pesquisar em livros de história da Matemática, você encontrará personagens diversos que se debruçaram não apenas no estudo desse número como também na obtenção tanto da relação sobre o comprimento da circunferência quanto do cálculo da área do círculo. Vamos abordar uma situação em que, em um círculo de raio R, inscrevemos polígonos regulares. Nas figuras a seguir, o número de lados do polígono aumenta gradativamente. Observe.



Em cada desenho está representado um triângulo isósceles em que os dois lados congruentes equivalem ao raio do círculo no qual ele está inscrito.

Para pensar e discutir

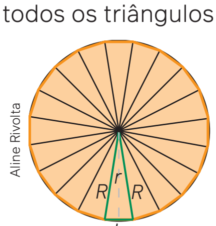
1. Em cada figura acima, o que a medida r indica em relação aos triângulos isósceles? 1. Altura do triângulo.

2. Com base no lado L de qualquer um desses polígonos e na medida r, qual é a expressão para o cálculo da área de cada triângulo isósceles? 2. $A = \frac{L \cdot r}{2}$

3. À medida que o número de lados dos polígonos aumenta, o raio R permanece inalterado e a medida r varia. Considerando um polígono com o número de lados muito grande, qual é a tendência da medida r?
3. Se aproxima cada vez mais da medida R.

O desenho a seguir representa um polígono regular de n lados que está inscrito no círculo de raio R. Vamos obter a expressão matemática que fornece a área desse polígono regular.

- Como todos os triângulos isósceles em que o polígono está dividido têm a mesma área A_t:



$$A_t = \frac{L \cdot r}{2}$$

- a área A_p do polígono pode ser dada por:

$$A_p = n \cdot \left(\frac{L \cdot r}{2}\right) = \frac{n \cdot L \cdot r}{2}$$

Na expressão descrita, $n \cdot L$ representa o perímetro do polígono regular.

Agora, um pouco de intuição!

Se o número de lados do polígono aumentar cada vez mais, o perímetro do polígono irá se aproximar cada vez mais do comprimento da circunferência, e a medida r tenderá a ser o raio R do círculo. Então:

$$A_p = \frac{n \cdot L \cdot r}{2} \Rightarrow A_{círculo} = \frac{(2\pi r) \cdot R}{2} \Rightarrow \underline{A_{círculo} = \pi R^2}$$

Relação para o cálculo da área de um círculo de raio r.

Atividades resolvidas

24. A janela na imagem tem a forma de um círculo. O diâmetro da parte de vidro é 2,5 m. Considere que esse vidro foi quebrado e será necessário comprar um vidro especial que custa R$ 410,00 por metro quadrado. Sem contar a mão de obra, quanto será gasto nessa troca?


Rubens Chaves/Pulsar Imagens

Janela em formato circular.

- Como conhecemos o diâmetro, calculamos a medida do raio:

$$2r = 2{,}5$$
$$r = 1{,}25$$

Logo, a medida do raio é 1,25 m.

- Calculamos a área do círculo correspondente ao vidro:

$$A = \pi r^2$$
$$A \cong 3{,}14 \cdot 1{,}25^2$$
$$A \cong 3{,}14 \cdot 1{,}5625$$
$$A \cong 4{,}91$$

Logo, a medida da área é 4,91 m².

- Calculamos o valor V aproximado a ser pago pelo vidro:

$$V = 4{,}91 \cdot 410$$
$$V = 2\,013$$

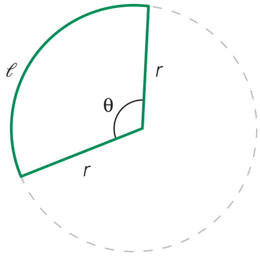
Portanto, o custo total será de aproximadamente R$ 2.013,00.

Para pensar e discutir

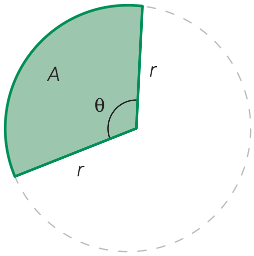
1. E se no lugar de utilizar a fórmula da área do círculo você considerasse que a janela tem a forma de quadrado de lado medindo o diâmetro do círculo, qual seria o custo total do vidro?

1. R$ 2.562,50

25. Em algumas situações, precisamos calcular a medida do comprimento de um arco de uma circunferência e, em outras, calcular a área de uma parte do círculo, denominada setor circular, como nas figuras a seguir.



Aline Rivolta



Aline Rivolta

Em ambas as figuras, r representa o raio; θ, a medida do ângulo central em graus; ℓ, a medida do comprimento do arco e A representa a área do setor circular. Obtenha:

a) a relação matemática que fornece o comprimento ℓ de um arco de circunferência em função do ângulo θ correspondente e da medida r do raio da circunferência;

b) a relação matemática que fornece a área A do setor circular em função do ângulo θ correspondente e da medida r do raio do círculo.

- Observando que o comprimento do arco é diretamente proporcional ao ângulo central, escrevemos a seguinte proporção com o comprimento da circunferência e a medida do ângulo correspondente à volta completa:

$$\frac{\text{Comprimento do arco}}{\text{Medida do ângulo}} = \frac{2\pi r}{360°}$$
$$\frac{\ell}{\theta} = \frac{2\pi r}{360°} \Rightarrow \ell = \frac{\pi r \theta}{180°}$$

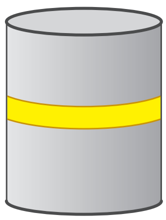
- Observando que área do setor é diretamente proporcional ao ângulo central, escrevemos a seguinte proporção com a área do círculo e a medida do ângulo correspondente à volta completa:

$$\frac{\text{Área do setor}}{\text{Medida do ângulo}} = \frac{\pi r^2}{360°}$$
$$\frac{A}{\theta} = \frac{\pi r^2}{360°} \Rightarrow A = \frac{\pi r^2 \theta}{360°}$$

Atividades

54. Escolha uma lata em forma de cilindro e, com base nela, faça o que se pede a seguir.

a) Com uma fita de papel, determine a medida aproximada em centímetros do contorno (medida do comprimento da circunferência de qualquer uma das bases) dessa lata, conforme mostrado na figura a seguir. 54. a) Resposta pessoal.



Reinaldo Vignati

b) Com uma régua, determine a medida do diâmetro dessa lata. 54. b) Resposta pessoal.

c) Calcule o quociente entre as medidas do comprimento da circunferência obtida e do diâmetro da lata, nessa ordem. 54. c) Aproximação do número π.

55. A imagem a seguir representa uma maquete de uma praça.

Fábio Nienow

Você irá fazer uma estimativa da área do círculo central formado pela parte gramada e todos os elementos nela contidos (quadras, espaços de convivência etc.). Para isso, observe que nessa representação aparecem alguns elementos que possibilitam estimar a medida aproximada do diâmetro desse círculo.

Explique como você pode estimar esta área e indique o valor aproximado. 55. Resposta pessoal.

56. Junte-se a um colega para fazer esta atividade. Selecionem em *sites* de busca uma fotografia de um local com formato circular. Com base na ilustração, determinem aproximadamente:

a) o diâmetro da região circular; 56. a) Resposta pessoal.

b) o comprimento do contorno do local (medida do comprimento da circunferência); 56. b) Resposta pessoal.

c) a área desse local. 56. c) Resposta pessoal.

57. Responda:

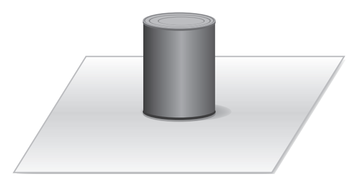
a) Reduzindo-se pela metade o raio de uma circunferência, o que acontece com o comprimento dela? 57. a) Será reduzido pela metade.

b) Reduzindo-se pela metade o raio de um círculo, o que acontece com a área desse círculo? 57. b) Será reduzida pela quarta parte.

c) Se a razão entre os raios de duas circunferências é representada pelo número real k, como você representaria a razão, na mesma ordem, dos diâmetros dessas circunferências? E a razão dos comprimentos? 57. c) k em ambos os casos.

d) Se a razão entre os raios de dois círculos é representada pelo número real k, como você representaria a razão, na mesma ordem, das áreas desses círculos? 57. d) k^2

58. Para esta atividade, você precisará, conforme demonstrado na ilustração, de um objeto com formato cilíndrico apoiado sobre uma folha de papel.



Aline Rivolta

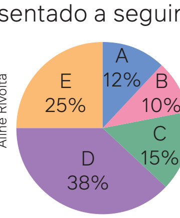
I. Apoiando com uma das mãos a lata para mantê-la em cima da folha, contorne com um lápis a circunferência da lata em contato com a folha.

II. Utilizando uma régua, determine o comprimento aproximado do diâmetro dessa circunferência e calcule seu comprimento aproximado.

III. Pinte a região interna dessa circunferência e determine a área aproximada do círculo limitado pela circunferência. 58. Resposta pessoal.

59. Considere que, em uma atividade, você fez um gráfico de setores, dividido em cinco setores representados pelas letras A, B, C, D e E, conforme representado a seguir.

Aline Rivolta



Fonte: Dados fictícios.

a) Os percentuais indicados nos setores serão proporcionais às áreas desses setores circulares? 59. a) Sim.

b) Os ângulos centrais de cada um desses setores serão proporcionais aos percentuais indicados nesses setores? 59. b) Sim.

c) Qual é a medida do ângulo central de cada um desses setores? 59. c) A: 43,2°; B: 36°; C: 54°; D: 136,8°; E: 90°.

d) Qual é o setor circular cuja área corresponde a $\frac{1}{4}$ da área do círculo? 59. d) E.

Cubagem

Reinaldo Vignati

Existe muita matemática interessante e curiosa praticada pelos diferentes povos espalhados nas regiões brasileiras. Por exemplo, é bastante comum a demarcação no solo de áreas que serão cultivadas ou mesmo que serão construídas. Um simples poço de água exige que se faça uma demarcação no chão de uma área em forma de círculo. Nesse caso, a ideia é simples: um pedaço de pau fixo no centro e uma corda presa nele e esticada para demarcar o círculo.

Outro exemplo bem interessante vindo das regiões rurais é o cálculo da área a ser plantada ou cultivada. Já comentamos nesta unidade que nas grandes regiões brasileiras, além do metro quadrado e do hectare como unidade de medida para grandes superfícies, é utilizado o alqueire (que pode ser diferente de acordo com a região: alqueire do norte, alqueire baiano, alqueire paulista e alqueire mineiro).

Você já se perguntou como os povos dos campos calculam a medida de uma superfície?

Nas áreas rurais, é muito comum a necessidade de medir determinadas regiões, por vários motivos, entre eles o manejo do gado, a plantação de certas culturas ou mesmo a definição do local que uma pessoa deve roçar ou capinar.

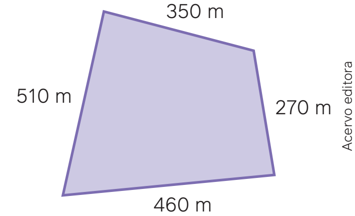
A matemática praticada por diversos grupos culturais, tais como aldeias indígenas, população ribeirinha, quilombolas, artesãos, donas de casa, costureiras, crianças de mesma idade, entre outros, é uma abordagem educacional que recebe o nome de Etnomatemática. Um dos pioneiros no estudo e disseminação desse ramo da Educação Matemática é o brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (1932-2021).

Por exemplo, para o cálculo de uma grande área existe a técnica chamada cubagem. Inicialmente o procedimento é delimitar o contorno com o auxílio de estacas de madeira e, em seguida, medi-lo com trenas. As medições são feitas em linha reta tentando-se obter um quadrilátero, formado por quatro linhas retas.

Chico Ferreira/Pulsar Imagens

Homem trabalhando em plantação de banana. Jacobina (BA), 2019.

É claro que, sempre que possível, são feitas aproximações. Ao final dessas medições é feito um esboço, como no exemplo que consideraremos a seguir.



O cálculo da área geralmente é feito por meio da média aritmética das medidas dos lados opostos seguida do produto dessas medidas. Assim, em nosso exemplo hipotético, teremos:

$$A = \left(\frac{510 + 270}{2}\right) \cdot \left(\frac{350 + 460}{2}\right)$$

$$A = 390 \cdot 405 \Rightarrow A = 157\,950$$

Área de 157 950 m²

Agora que você leu o texto acima, faça o que se pede.

1. Quantos hectares correspondem à área acima? Explique como calculou. 1. 15,795 he; resposta pessoal.

2. Desenhe no chão da escola, com o auxílio de um barbante, uma circunferência com 4 m de raio. Em seguida, determine:

a) o comprimento aproximado dessa circunferência; 2.a) 25,13 m

b) a área aproximada do círculo limitado pela circunferência. 2. b) 50,26 m²

3. Em uma folha, desenhe um quadrilátero cujos quatro lados tenham medidas diferentes em centímetros. Depois, utilizando o procedimento antes descrito, calcule a área aproximada em centímetros quadrados. 3. Resposta pessoal.

4. Entreviste algum profissional que utilize a Matemática não formal em seu trabalho (pedreiros, pintores, marceneiros, costureiras, entre outros) e descreva os procedimentos utilizados por ele. Traga para a sala de aula e apresente para a turma. 4. Resposta pessoal.

5. Junte-se a três colegas e, com base no que vocês estudaram neste capítulo, elaborem uma proposta para criação de uma área de preservação em torno da escola. Apresentem a proposta aos demais colegas. 5. Resposta pessoal.

Atividades finais

1. e) Lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes.

1. Em relação aos conteúdos estudados nesta unidade responda:

a) Qual é a medida do ângulo correspondente a um giro completo? 1. a) 360°

b) Quando dois ângulos são considerados suplementares? 1. b) Quando somam 180°.

c) Dois quadrados são sempre semelhantes? Justifique. 1. c) Sim; resposta pessoal.

d) Dois retângulos são sempre semelhantes? Justifique. 1. d) Não; resposta pessoal.

e) Qual é a condição para que dois polígonos quaisquer sejam semelhantes?

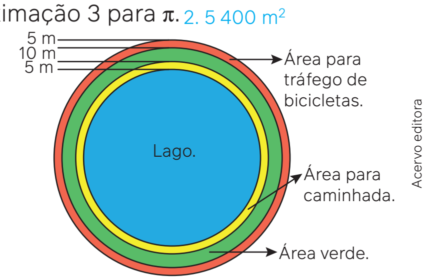
f) Qual fórmula possibilita calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de *n* lados? 1. f) $S_n = (n - 2) \cdot 180°$

g) Qual é medida da soma dos ângulos externos de um polígono com 17 lados? 1. g) 360°

h) Qual fórmula possibilita calcular a área de um triângulo conhecendo-se as medidas dos três lados?

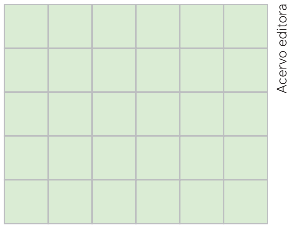
1. h) $A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ com $p = \frac{a + b + c}{2}$

2. A imagem a seguir apresenta o croqui de um parque em formato circular de raio medindo 100 m. Calcule a área da parte destinada ao tráfego de bicicletas e a destinada à caminhada, juntas, considerando a aproximação 3 para π. 2. 5 400 m²



3. Para o cálculo aproximado da área do círculo um procedimento é elevar ao quadrado $\frac{8}{9}$ da medida de seu diâmetro. Esse procedimento corresponde a substituir, na fórmula da área do círculo, o valor π por um número racional. Determine esse número racional. 3. $\frac{256}{81}$

4. Cada quadradinho da malha quadriculada possui áre com medida igual a 4 m^2.



Calcule o perímetro desse retângulo. 4. 44 m

Questões de vestibulares e Enem

5. (UFJF-MG) Uma folha de papel retangular (Figura 1) é dobrada conforme indicado na Figura 2 abaixo:

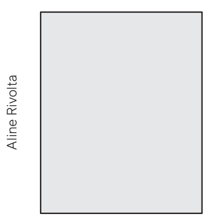


Figura 1

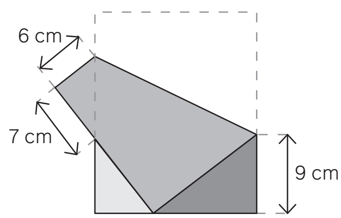


Figura 2

A área do triângulo em cinza-escuro na Figura 2, formado após a dobra da folha, mede, em centímetros quadrados, 5. Alternativa **c**.

a) 31,50

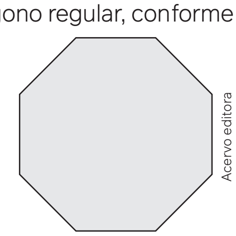
b) 34,65

c) 47,25

d) 63,00

e) 189,00

6. (IFPE) As lutas de UFC acontecem num ringue com formato de octógono regular, conforme a figura abaixo.



Para a montagem das laterais do ringue, o responsável pelo serviço precisaria da medida do ângulo interno formado entre dois lados consecutivos, de modo que pudesse montar sem erros. Consultando o manual do ringue, ele verificou que o ângulo que precisava media: 6. Alternativa **d**.

a) 100°

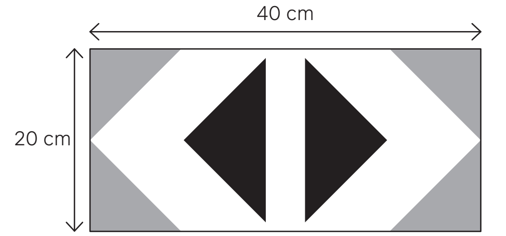
b) 120°

c) 140°

d) 135°

e) 150°

7. (Fatec-SP) Uma artesã borda, com lã, tapetes com desenhos baseados em figuras geométricas. Ela desenvolve um padrão retangular de 20 cm por 40 cm. No padrão, serão bordados dois triângulos pretos e quatro triângulos na cor cinza e o restante será bordado com lã branca, conforme a figura.



Cada triângulo preto é retângulo e isósceles com hipotenusa $12\sqrt{2}$ cm. Cada triângulo cinza é semelhante a um triângulo preto e possui dois lados de medida 10 cm. Assim posto, a área no padrão bordada em branco é, em cm^2, 7. Alternativa **b**.

a) 344

b) 456

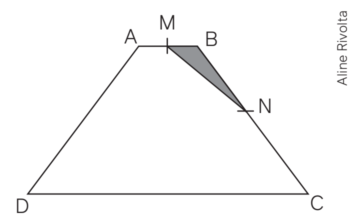
c) 582

d) 628

e) 780

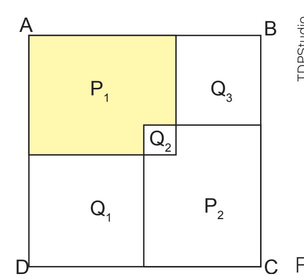
8. (Unicamp-SP) Na figura a seguir, *ABCD* é um trapézio com $AB = 1$ e $CD = 5$. Os pontos *M* e *N* são pontos médios de *AB* e *BC*.

Sabendo que a área de *MBN* é 1, a área do trapézio é: 8. Alternativa **d**.



a) 18 **b)** 20 **c)** 22 **d)** 24

9. (UEA-AM) O interior do quadrado *ABCD* foi dividido em 3 quadrados menores, Q_1, Q_2 e Q_3 e 2 polígonos, P_1 e P_2, conforme figura. 9. Alternativa **b**.



Fora de escala.

Sabendo que as áreas dos quadrados Q_1, Q_2 e Q_3 são, respectivamente, 16 cm^2, 1 cm^2 e 9 cm^2, o perímetro do polígono P_1 é

a) 16 cm

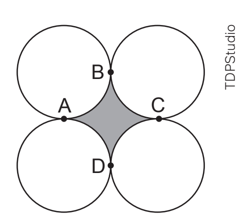
b) 18 cm

c) 14 cm

d) 15 cm

e) 12 cm

10. (UFPR) Na figura abaixo, estão representadas quatro circunferências de raio $r = 1$ cm que são tangentes nos pontos *A*, *B*, *C* e *D*. Assinale a alternativa que corresponde ao valor, em cm^2, da área hachurada em cinza. 10. Alternativa **d**.



a) $\pi - 1$

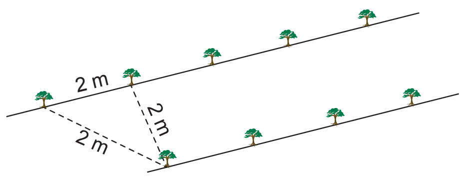
b) $\pi - 2$

c) $2 - \frac{\pi}{2}$

d) $4 - \pi$

e) $4 - \frac{\pi}{2}$

11. (Uerj) Um agricultor dividiu um terreno plano em retas paralelas e plantou sobre elas sementes de determinada árvore frutífera. Para obter uma boa colheita, essas sementes foram dispostas a uma distância de 2 metros entre si. A imagem a seguir ilustra a plantação após um tempo. 11. Alternativa **d**.



TDPStudio

A menor distância, em metros, entre duas dessas retas, traçadas para o plantio das sementes, é igual a:

a) 1,3 **b)** $\sqrt{2}$ **c)** 1,5 **d)** $\sqrt{3}$

12. (Uece) Uma plantação de alface ocupa uma área de forma retangular. Essa área é tal que a distância entre seus cantos opostos é 150 m, e a medida do menor ângulo entre suas diagonais é 60 graus. Então, a medida, em m^2, da área considerada é

a) $5\,625\sqrt{2}$ **c)** $5\,615\sqrt{2}$

b) $5\,620\sqrt{3}$ 12. Alternativa **d**. **d)** $5\,625\sqrt{3}$

13. (Enem) As Artes Marciais Mistas, tradução do inglês: MMA – *mixed martial arts*, são realizadas num octógono regular. De acordo com a figura, em certo momento os dois lutadores estão respectivamente nas posições *G* e *F* e o juiz está na posição *I*. O triângulo *IGH* é equilátero e *GÎF* é o ângulo formado pelas semirretas com origem na posição do juiz, respectivamente passando pelas posições de cada um dos lutadores. 13. Alternativa **e**.

A medida do ângulo *GÎF* é

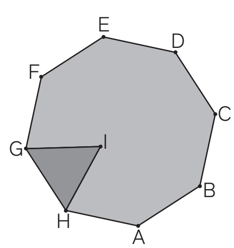
a) 120°

b) 75°

c) 67,5°

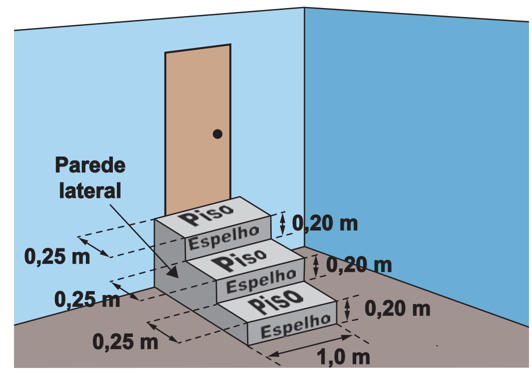
d) 60°

e) 52,5°



Aline Rivolta

14. (Enem) A figura representa uma escada com três degraus, construída em concreto maciço, com suas medidas especificadas.

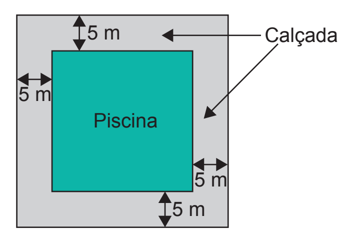


TDPStudio

Nessa escada, pisos e espelhos têm formato retangular, e as paredes laterais têm formato de um polígono cujos lados adjacentes são perpendiculares. Pisos, espelhos e paredes laterais serão revestidos em cerâmica. A área a ser revestida em cerâmica, em metro quadrado, mede 14. Alternativa **e**.

a) 1,20 **b)** 1,35 **c)** 1,65 **d)** 1,80 **e)** 1,95

15. (Enem) Na planta baixa de um clube, a piscina é representada por um quadrado cuja área real mede 400 m^2. Ao redor dessa piscina, será construída uma calçada, de largura constante igual a 5 m.



TDPStudio

Qual é a medida da área, em metro quadrado, ocupada pela calçada? 15. Alternativa **d**.

a) 1 000 **c)** 600 **e)** 400

b) 900 **d)** 500

Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão em relação aos assuntos e objetivos trabalhados ao longo deste capítulo.

Objetivos de aprendizagem	Sim	Preciso retomar
Compreendo as relações para o cálculo de perímetros e áreas de figuras planas.		
Utilizo diferentes procedimentos no cálculo de medidas de superfícies.		
Resolvo e elaboro problemas relacionados ao cálculo de perímetros e áreas de polígonos.		
Identifico quando duas figuras geométricas planas são semelhantes.		
Identifico polígonos regulares.		
Compreendo as relações entre ângulos de um polígono regular.		
Utilizo o conceito de ângulo na elaboração e resolução de problemas de ladrilhamento no plano.		

Projeto 1

Uma maneira inteligente de informar

Para que serve este projeto?

Os infográficos estão presentes em diversos meios de comunicação e representam a principal escolha feita por veículos de mídia para transmitir dados. Ao produzir um infográfico, você será levado não só ao exercício de tratamento da informação como também à reflexão sobre as diversas formas de apresentar os resultados desse tratamento. Além disso, estará em contato com reflexões importantes acerca dos fatores que contribuem para uma melhora do Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) do Brasil. No infográfico apresentado nesta página, por exemplo, é possível observar como as informações pessoais coletadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) se tornam públicas, utilizadas pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD) para o cálculo do IDH.

Neste projeto, você irá estudar diferentes formas de leitura e representação de informações, ampliando seu repertório e desenvolvendo sua habilidade de interpretar e elaborar tabelas e gráficos com dados estatísticos.

IBGE

Fonte: PERISSE, C. Entenda como informações individuais se tornam estatísticas públicas no IBGE. *Agência IBGE Notícias*, Rio de Janeiro, 28 jan. 2019. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/23630-entenda-como-informacoes-individuais-se-tornam-estatisticas-publicas-no-ibge. Acesso em: 22 jul. 2024.

Questão disparadora

- Para que serve e como deve ser feito um infográfico?

Contexto

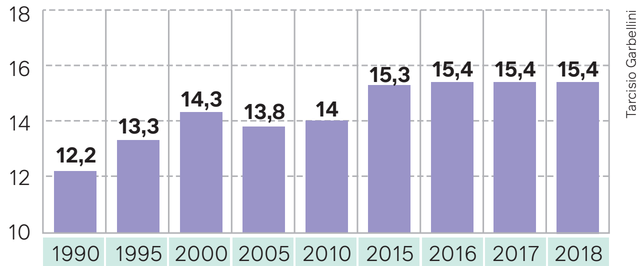
O IBGE é o órgão responsável pelo levantamento e pela análise de aspectos diversos a respeito dos dados socioeconômicos brasileiros. Conforme expressa o próprio instituto de pesquisa, seu grande objetivo é “retratar o Brasil com informações necessárias ao conhecimento de sua realidade e ao exercício da cidadania”.

Observe, por exemplo, os gráficos a seguir sobre alguns indicadores econômicos e o IDH brasileiro, lembrando que o IDH representa o Índice de Desenvolvimento Humano de um país e que, para determinar esse índice, são considerados três aspectos:

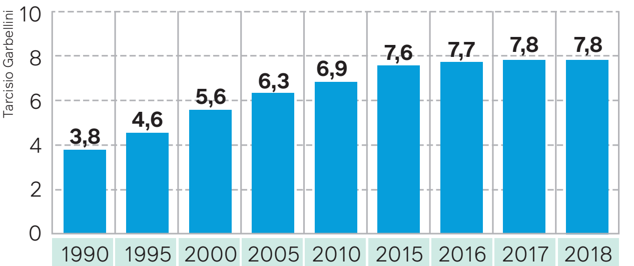
- esperança (expectativa) de vida ao nascer;
- renda *per capita;*
- escolaridade.

Evolução histórica dos indicadores econômicos e IDH Brasileiro de 1990 a 2018

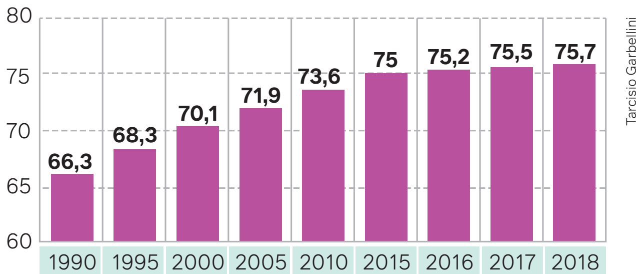
Anos esperados de escolaridade



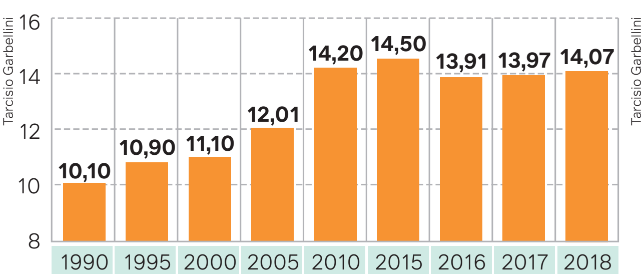
Média de anos de estudo



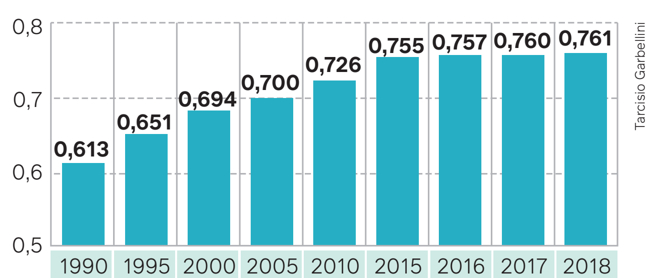
Esperança de vida ao nascer



Renda nacional bruta *per capita* (em US$ mil)



IDH



PROGRAMA DAS NAÇÕES UNIDAS PARA O DESENVOLVIMENTO. *Relatório de Desenvolvimento Humano de 2019*: Além da renda, além das médias, além do hoje: desigualdades no desenvolvimento humano no século XXI. Nova York: PNUD, 2019.

Desenvolvimento

Você irá utilizar dados oficiais para produzir um infográfico sobre o IDH mais recente do Brasil. Para isso, siga os passos propostos a seguir.

1. Busque a maior quantidade que você encontrar de infográficos para analisar. Faça uma leitura das informações e selecione até quatro infográficos que você considere visualmente atraentes e que possibilitem uma boa compreensão das informações. Você pode utilizar as fontes de pesquisa presentes na seção **Sugestão de fontes**.
2. Com base em sua pesquisa, elabore uma lista de itens e características que um infográfico deve ter para ser informativo de maneira clara e atraente.
3. Compartilhe essa lista com os colegas de grupo e, com base nas contribuições de todos, elaborem uma lista final, que deverá ser utilizada como referência para o trabalho que vocês irão desenvolver.

4. Vocês deverão produzir um infográfico em que estejam contemplados todos os itens que listaram como sendo características necessárias para torná-lo claro e atraente.

O conteúdo do infográfico deve informar:

- a evolução do IDH brasileiro entre 1990 e o ano atual;
- a taxa de variação média anual do IDH entre 1990 e o ano atual;
- a previsão do IDH para os anos subsequentes ao ano atual, caso essa taxa de variação se mantenha para os anos subsequentes;
- a explicação, em um ou dois parágrafos, de quanto você acredita que essa taxa irá ou não se manter e por quê.

Caso seu infográfico informe a evolução dos outros índices (expectativa de vida, escolaridade e renda *per capita*), repita o procedimento indicando a taxa de variação anual e reproduzindo-a para os anos seguintes.

Para determinar a taxa de variação, vocês podem executar o procedimento a seguir.

Considerando o ano de 1990 como marco zero, marquem em um plano cartesiano os pontos (x; y) sendo x a quantidade de anos passados a partir de 1990 e y o valor do IDH. Em seguida, tracem uma reta unindo os pontos que representam os anos 1990 e o ano mais recente que desejam comparar. Por fim, determinem a função afim que tem essa reta como representação gráfica. O coeficiente que multiplica o x na função afim é a taxa de variação.

Produto final

O seu produto final deverá ser um infográfico que relacione de forma clara e atrativa as informações mais atuais sobre o IDH brasileiro, incluindo uma análise sobre a taxa de variação desse índice.

Apresentação

É importante que você identifique o infográfico como o **produto final** do projeto. O infográfico elaborado deve situar o leitor sobre o IDH brasileiro no cenário mundial, além de destacar pontos fundamentais que contribuem para o seu cálculo: expectativa de vida, renda *per capita* e escolaridade. Você pode apresentar seu infográfico na forma de cartaz ou em formato digital, acompanhado de um parágrafo comentando a taxa de variação desse índice ao longo dos anos.

Relatório conclusivo

O relatório de conclusão do projeto deve conter, além do produto final:

- a lista de elementos que um infográfico deve ter para ser eficiente e atrativo, indicando onde eles aparecem no infográfico elaborado pelo grupo;
- uma reflexão sobre como a elaboração do infográfico promoveu aprendizagens acerca do IDH e da aplicabilidade do conceito de taxa de variação;
- uma resposta para a questão disparadora: "Para que serve e como deve ser feito um infográfico?".

Sugestões de fontes

Sites

- **IBGE: Brasil – Panorama.** Disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/panorama. Acesso em: 22 jul. 2024.
- **Pnud Brasil: Desenvolvimento e IDH.** Disponível em: https://www.br.undp.org/content/brazil/pt/home/IDH0.html. Acesso em: 22 jul. 2024.
- **Canva.** Disponível em: https://www.canva.com/. Acesso em: 22 jul. 2024.
- **O que é um infográfico: 5 passos para criá-lo**. Disponível em: https://ebaconline.com.br/blog/o-que-e-um-infografico. Acesso em: 22 jul. 2024.

Vídeos

- **Como fazer um infográfico: passo a passo** (11 min). Disponível em: https://www.assessordeimprensa.com.br/como-fazer-um-infografico-5-ferramentas/. Acesso em: 22 jul. 2024.

Apps

- **Editor gráfico Canva.** Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.canva.editor. Acesso em: 22 jul. 2024.
- **Posters.** Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.kvadgroup.posters. Acesso em: 22 jul. 2024.

Projeto 2

Modelando dados estatísticos

Para que serve esse projeto?

Os dados estatísticos geralmente são utilizados para prever eventos e tomar decisões. Porém, é importante ter em mente que esses dados possuem diversas aleatoriedades.

A proposta desse projeto é explorar maneiras de encontrar funções que aproximem dados estatísticos, para modelar seu comportamento e auxiliar sua análise. Com esse projeto, você irá desenvolver sua habilidade de analisar criticamente dados estatísticos e inferir relações entre variáveis. Além disso, poderá ampliar a percepção do papel da Matemática como ferramenta de estudo aplicada a situações que envolvem outras áreas de conhecimento.

alvarez/iStockphoto.com

As pesquisas estatísticas são ferramentas importantes para as tomadas de decisão das empresas.

Questão disparadora

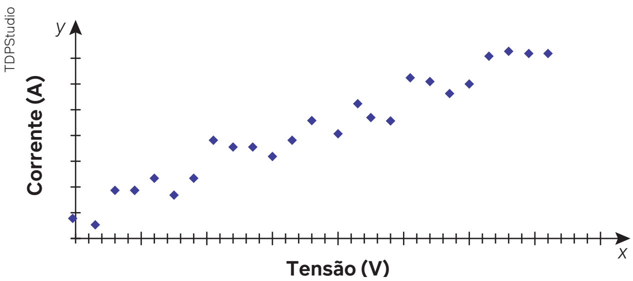
- Como podemos gerar uma função com base em dados coletados estatisticamente que permita analisar e estimar o comportamento desses dados no futuro?

Contexto

O estudo das funções, inicialmente, pode nos dar ideia de que sempre é possível encontrar uma expressão algébrica que defina a relação entre duas variáveis para a análise em questão. No entanto, ao analisarmos o comportamento de duas variáveis em diversas situações, percebemos que os dados obtidos são aleatórios. A estatística oferece ferramentas que possibilitam encontrar funções que se aproximam dos dados coletados, oferecendo análises e estimativas de resultados que vão além desses dados.

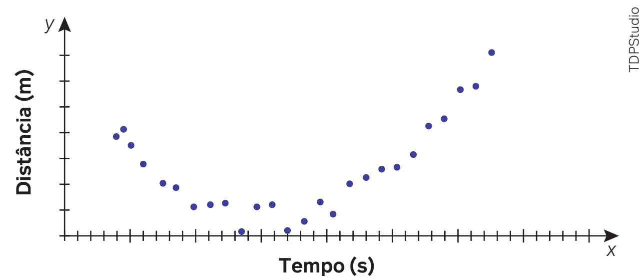
Observe os conjuntos de dados abaixo.

Relação entre a corrente elétrica em um fio e a tensão aplicada



Fonte: dados fictícios.

Relação entre tempo e a distância de um objeto de um determinado referencial

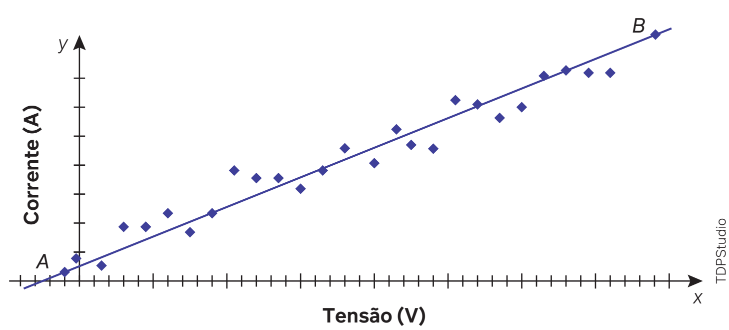


Fonte: dados fictícios.

Dizemos que duas variáveis x e y se relacionam linearmente quando o gráfico que contém os pares ordenados (x, y) é uma reta. Nos exemplos, podemos notar que os pontos não formam uma reta, mas podemos supor que, no primeiro caso, o par de variáveis corrente e tensão tem uma relação linear crescente, ou seja, quanto maior a tensão aplicada, maior a corrente. O mesmo não pode ser dito do par de variáveis do segundo experimento.

De modo geral, quando a relação entre duas variáveis é exclusivamente crescente ou decrescente e, provavelmente, os valores médios apresentam relação linear, podemos traçar uma reta média para representar essa relação, como na figura a seguir.

Relação entre a corrente elétrica em um fio e a tensão aplicada



Fonte: dados fictícios.

Isso não significa que podemos usar uma função para determinar a corrente que passa por um fio com base na tensão aplicada, mas podemos elaborar uma função para dizer a corrente média dos fios que possuem uma determinada corrente aplicada.

Desenvolvimento

Escolha duas variáveis para analisar. Veja alguns exemplos:

- taxa de analfabetismo e expectativa de vida de um país ou região;
- renda *per capita* e expectativa de vida de um país ou região;
- renda *per capita* e taxa de analfabetismo de um país ou região;
- relação entre o “peso” e a altura de uma pessoa adulta;
- a relação entre altura média dos pais e altura média dos seus filhos;
- a relação entre altura e idade de crianças em fase de crescimento.

Você pode escolher um dos exemplos ou determinar outras variáveis do seu interesse ou do seu cotidiano, como “horas de estudo por semana x nota média nas provas”. Uma vez escolhidas as variáveis, é hora de coletar os dados. Observe as seguintes condições.

1. Se as variáveis escolhidas representarem dados sociais disponíveis na internet (como é o caso dos três primeiros exemplos citados acima), garanta que sua pesquisa seja feita em fontes confiáveis. Será preciso também determinar os países ou as regiões que serão estudados, garantindo a maior variedade de dados possível para que a análise possa ser feita.

2. Se as variáveis escolhidas representarem dados sociais que você pode coletar (como altura, “peso”, idade, horas de estudo por semana, etc.), elabore um roteiro para fazer uma pesquisa coletando esses dados de uma pessoa. Garanta também a maior variedade de dados possível.

Após coletar os dados, organize-os em uma tabela com duas colunas (uma para a variável x e outra para a variável y) e marque os pares (x, y) em um gráfico, construído em papel milimetrado. Em seguida, escolha um ponto $A(x_A, y_A)$ que seja menor que todos os pontos gerados pelos dados coletados e outro ponto $B(x_B, y_B)$ que seja maior que eles, de modo que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ separe os pontos marcados deixando metade deles abaixo dessa reta e a outra metade, acima. Note que, no primeiro exemplo apresentado no item *Contexto*, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ passa ou "encosta" em 5 pontos, deixando 10 pontos acima dela e 10 pontos abaixo.

O traçado da reta média é feito de modo estimado e, uma vez determinados os pontos A e B, precisamos obter a função $y = f(x) = \alpha x + \beta$, ou seja, obter os valores de α e β que relacionam as variáveis x e y, resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha x_A + \beta = y_A \\ \alpha x_B + \beta = y_B \end{cases}$$

Ressalta-se que essa função determina o valor médio esperado para y em função de cada valor dado para x, caso haja correlação entre as variáveis, ou seja, se a distribuição dos pontos for próxima à reta média $\left(\overleftrightarrow{AB}\right)$.

Produto final

Seu projeto deve gerar uma função linear que relacione duas variáveis. A função deve ser determinada graficamente com base na construção de uma reta média sobre os pontos obtidos experimentalmente.

Além da função, seu projeto também deve conter:

- a pesquisa realizada, incluindo método de pesquisa e fontes dos dados;
- os dados tabulados;
- o gráfico com os dados tabulados, os pontos A e B escolhidos e a reta média em papel milimetrado;
- os cálculos realizados para obter a função.

Apresentação

A apresentação da função pode ser realizada em um documento ou em formato de *slides* e pode ser entregue impressa ou na forma de seminário. É essencial que a apresentação contenha toda a explicação de como os dados foram coletados e de como a função foi encontrada.

Relatório conclusivo

O relatório de conclusão deve conter, além do produto:

- um texto informando se a função pode ou não ser usada para determinar o comportamento da variável y em função da variável x, ou seja, se podemos pressupor que existe uma correlação linear entre as variáveis;
- uma resposta à questão disparadora: Como podemos gerar uma função com base em dados coletados estatisticamente que permita analisar e estimar o comportamento desses dados no futuro?;
- uma reflexão sobre se, e como, esse projeto contribui para sua formação matemática e para sua habilidade na leitura de resultados de pesquisas e dados estatísticos.

Sugestões de fontes

Sites

- **O que é regressão linear?** Disponível em: https://www.ibm.com/br-pt/topics/linear-regression. Acesso em: 24 abr. 2024.
- **O que é regressão linear? Saiba como fazer a sua**. Disponível em: https://www.fm2s.com.br/blog/regressao-linear-economizar-milhoes. Acesso em: 24 abr. 2024.

Artigos em PDF

- **Interpretação gráfica de dados**. Disponível em: http://macbeth.if.usp.br/~gusev/Graficos.pdf. Acesso em: 24 abr. 2024.

Vídeos

- **Ajuste de uma reta aos dados**. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/statistics-probability/describing-relationships-quantitative-data/introduction-to-trend-lines/v/fitting-a-line-to-data. Acesso em: 24 abr. 2024.
- **Adicionar uma tendência ou linha média a um gráfico**. Disponível em: https://support.microsoft.com/pt-br/office/adicionar-uma-tend%C3%AAncia-ou-linha-m%C3%A9dia-a-um-gr%C3%A1fico-fa59f86c-5852-4b68-a6d4-901a745842ad?ui=pt-br&rs=pt-br&ad=br. Acesso em: 24 abr. 2024.

Projeto 3

Rampas de acesso

Para que serve esse projeto?

Os conhecimentos de Geometria Plana são aplicáveis no nosso cotidiano em situações que vão bem além de desenhos em um papel. Você sabe dizer, por exemplo, o que significa afirmar que a inclinação de um telhado ou uma rampa é adequada? Veja a explicação.

> Para determinar a inclinação de um plano (rampa, telhado ou outros), destaca-se o triângulo que representa a vista lateral do plano inclinado em relação a um plano horizontal, como na imagem abaixo, e calcula-se a razão entre o cateto vertical e o cateto horizontal do triângulo.

Neste projeto os conteúdos geométricos serão aplicados em contextos sociais relevantes, por meio da leitura e interpretação de normas técnicas e sua utilização para argumentar a favor de intervenções urbanas que busquem atender a critérios de acessibilidade.

Svtist/iStockphoto.com

Escada e rampa de acesso na entrada de um estabelecimento.

Questão disparadora

- Como usar os conhecimentos geométricos para melhorar a acessibilidade ao seu redor?

Contexto

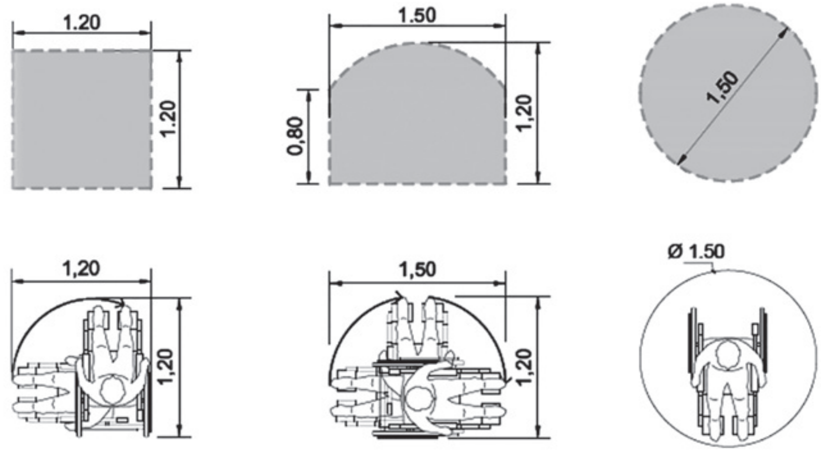
Caminhando pelo bairro ou pelo entorno da escola, quantos obstáculos você encontra que impossibilitam a livre circulação de cadeiras de rodas ou carrinhos de bebê?

A garantia da acessibilidade aos diversos cidadãos que transitam por uma região é uma questão da gestão pública e, por isso, é mediada por uma série de regras e normas técnicas que devem ser seguidas em condomínios residenciais e estabelecimentos comerciais, além de prédios, áreas e vias públicas. Conhecer essas normas, observar essas regras nos espaços que frequenta e saber a quem recorrer, caso tais normas sejam descumpridas, é função de todos.

Desenvolvimento

Selecionem uma rampa de acesso na sua escola ou região e façam todas as medições necessárias para avaliar se a rampa atende ou não à norma de número NBR 9050 da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Será necessário medir o comprimento da rampa, a distância horizontal coberta pela rampa, a altura atingida pelo ponto mais alto da rampa em relação ao ponto mais baixo e as medidas das áreas de circulação no início e no final da rampa.

Veja na imagem, um exemplo de como essas medidas de circulação são determinadas pela NBR 9050.



© ABNT

Fonte: ACESSIBILIDADE a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. *Norma Brasileira ABNT NBR 9050*. 4. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 3 ago. 2020. Disponível em: https://www.causc.gov.br/wp-content/uploads/2020/09/ABNT-NBR-9050-15-Acessibilidade-emenda-1_-03-08-2020.pdf. Acesso em: 24 abr. 2024.

O projeto consiste em coletar as medidas de uma rampa, avaliar sua adequação às normas e propor alterações que mantenham ou melhorem essa adequação.

Para realizar o projeto, observem os passos abaixo.

1. Coletem as medidas da rampa e a área de circulação selecionadas pelo grupo e determinem uma escala para que seja possível desenhar a rampa em uma folha de papel A4.
2. Desenhem em uma folha de papel uma vista lateral da rampa e da área de circulação e, em outra folha, uma vista superior, indicando em ambos os desenhos as medidas de todos os segmentos e utilizando a escala definida, respeitando as proporções da rampa original.
3. Verifiquem e indiquem no desenho se as medidas coletadas por vocês respeitam as normas da ABNT.
4. Por fim, proponham uma alteração na rampa, considerando as seguintes questões:
   - **a)** As medidas estão de acordo com a ABNT? Se não estão, quais as adaptações necessárias para atendê-las?
   - **b)** O que seria preciso alterar nas medidas para seguir atendendo a ABNT se a altura atingida pela rampa fosse maior? E se a distância horizontal fosse menor?
   - **c)** Quais as vantagens e desvantagens para o proprietário do estabelecimento em aumentar a área de circulação? E para os usuários da rampa?

Produto final

O produto do seu grupo será dividido em três partes, que consistem em:

- desenho em escala de uma rampa e área de circulação com as condições dadas anteriormente;
- avaliação da adequação da rampa às normas da ABNT, propondo adequações se necessário;
- discussão sobre possíveis alterações na construção, incluindo as ampliações e reduções nas medidas de comprimento e área e as vantagens e desvantagens dessa alteração, considerando também a ABNT.

Apresentação

A apresentação do produto pode ser feita na forma de documento físico ou virtual.

Relatório conclusivo

O relatório de conclusão deve apresentar uma resposta à questão disparadora: Como usar seus conhecimentos geométricos para melhorar a acessibilidade ao seu redor?

O relatório deve conter também uma reflexão final do grupo indicando quais foram as aprendizagens obtidas com o projeto e os conhecimentos de Geometria Plana utilizados. As aprendizagens listadas não precisam estar todas relacionadas ao campo de Matemática.

Sugestões de fontes

- **JusBrasil:** Ouvidoria do MPF orienta sobre direitos da pessoa com deficiência e como denunciar descumprimento, 21 set. 2017. Disponível em: https://bit.ly/3WcoVm9. Acesso em: 22 jul. 2024.
- **Manual de acessibilidade**, de Instituto de Planejamento Urbano de Florianópolis (IPUF). Disponível em: http://www.pmf.sc.gov.br/arquivos/arquivos/pdf/26_12_2011_17.31.26.f930687d1baa0226e641b934b6fa8d6c.pdf. Acesso em: 24 abr. 2024

Gabarito

Capítulo 1

Página 10

Para pensar e discutir

3. Não.

Página 12

Para pensar e discutir

1. Eles são iguais.

Página 13

Atividades

1.
a) $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$
b) $X = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$
c) $R = \{d, c, n, r\}$
d) $S = \{2\}$
e) $T = \{\ \}$ ou $T = \varnothing$

2.
I. F
II. V
III. V
IV. F
V. V

4.
a) $A = \{-1, -2, -3, -4, 0, 3, 5, 6\}$; $B = \{0, 1, 3, 4, 5, 6\}$; $C = \{-4, 0, 1, 5\}$
b) $\{0, 3, 5, 6\}$
c) $\{-4, 0, 5\}$
d) $\{0, 1, 5\}$
e) $\{0, 5\}$
f) $\varnothing$

5. 7

6. $\{4, 8, 12\}$

7. 50

Página 14

Para pensar e discutir

1. Sim.

2. Não.

Página 15

Para pensar e discutir

1. Os conjuntos A e B são iguais.

2. Basta que exista um elemento de um dos dois conjuntos que não seja elemento do outro.

3. A relação de inclusão $F \subset S \subset B$.

Página 16

Para explorar

1.
a) 1
b) 2
c) 4
d) 8
e) 16

2.
a) 1 024
b) 4 096
c) 2^x

Página 17

Atividades

9.
a) $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
b) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
c) $\{1, 4, 9\}$
d) $\{2, 3, 5, 7, 11\}$

10.
a) $\{2, 5\}, \{2, 7\}, \{2, 8\}, \{5, 7\}, \{5, 8\}, \{7, 8\}$
b) $\{2, 5, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{2, 7, 8\}, \{5, 7, 8\}$
c) $\{2, 5, 7, 8\}$

11.
a) $A \not\subset B$.
b) $A \subset C$.
c) $B \not\subset C$.

12.
a) Todos os retângulos.
b) Todos os quadrados.
c) $B \subset A$.

13.
I. V.
II. V.
III. V.

14. $x = 6$ e $y = 12$ ou $x = 12$ e $y = 6$

15. $Q \subset L$ ou $L \supset Q$; significa que todo quadrado é um losango.

16. $B = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$

17. $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{9\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 9\}$, $\{3, 9\}$ e $\{1, 3, 9\}$

Página 18

Para pensar e discutir

1. $n(E) = 14$, $n(I) = 8$.

2. Não.

Página 20

Para pensar e discutir

1. $A \cup B$

2. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

3. $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$

Página 21

Para pensar e discutir

1. $\{s, t, p, q\}$ e $\{r, y, z, p, q\}$

2. 17

3. $\{a, b, s, t, x\}$

Páginas 22-23

Atividades

18.
a) $\{1, 2\}$
b) $\{3, 4\}$
c) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
d) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
e) $\{0, 3, 4\}$
f) $\{1, 2\}$

19.
a) $\{0, 1\}$
b) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
c) $\{-5, -4, -3, 6, 7, 8, 9\}$
d) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 6, 7, 8, 9\}$
e) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$
f) $\{-2, -1, 0, 1, 4\}$

20.
I. V.
II. V.

21.
a) 47
b) 36
c) 23
d) 60
e) 24
f) 13

22.
a) Não.
b) Sim.

23.
I. F
II. V
III. V
IV. V
V. V
VI. V

24.
a) 1 450, 1 150 e 900
b) 350, 400 e 300
c) 100 e 2 550
d) 1 350, 1 050 e 800

25.
a) I: $(A \cap B) - (A \cap B \cap C)$ ou $(A \cap B) - C$;
II: $(A \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ou $(A \cap C) - B$;
III: $(B \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ou $(B \cap C) - A$;
IV: $A \cap B \cap C$.
b) I e IV: $A \cap B$;
II e IV: $A \cap C$;
III e IV: $B \cap C$.

26.
I. V
II. F
III. V
IV. F
V. V

27.
a) 40
b) 50
c) 100

28. 40%

29. 610

Página 24

Para pensar e discutir

1. 9 700 000 000
2. 26%

Página 25

Para pensar e discutir

1. Entre 0 e 1.
2. $-\frac{72}{10}$
3. 1,333...
4. Quando for uma dízima periódica.

Página 27

Para explorar

1.
a) 1,5
b) 1,25
c) 1,125

2.
a) Nenhum.
b) Infinitos.
c) Não.

3.
a) 0,9888...
b) 0,285714285714285714...
c) –0,132132132...

Atividades

31.
a) –0,45
b) 2,222...
c) $-\frac{7}{5}$ ou $\frac{7}{5}$

32.
a) $\frac{7}{9}$
b) $-\frac{5}{9}$
c) $\frac{23}{99}$
d) $-\frac{47}{99}$
e) $\frac{1\,233}{999}$

33.
a) 0,0625; 0,03125; 0,015625 e 0,0078125
b) Sim.
c) Cada número a partir do segundo é o imediatamente anterior dividido por dois.

34.
a) *b*
b) *c*
c) *c*
d) *b*

35.
a) Sim; 10,4.
b) Sim; 6,76.

36.
a) 4
b) $\frac{99}{24}$ ou 4,125

37.
a) Sim.
b) Sim.
c) Sim.
d) Sim.
e) $\frac{5}{3}$

Página 28

Para pensar e discutir

1. $d = \sqrt{2}$ u.c.
2. Menor: 1 u.a.; maior: 2 u.a.
3. A área do quadrado maior é o dobro da área do quadrado menor.
4. Não.

Para pensar e discutir

1. Não.

Página 29

Para explorar

1.
a) 1,7320
b) 2,2361
c) 5,2915
d) 9,4868

2.
a) Falta.
b) Excesso.
c) Falta.
d) Falta.

Para pensar e discutir

1. $\sqrt{2}$
2. Não.

Página 30

Análise e contexto

3 $10\sqrt{\pi}$ cm

Página 32

Para pensar e discutir

1.
a) Sim.
b) Sim.
c) Sim.
d) Não.
e) Sim.
f) Não.

2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
3. Não para todas as perguntas.
4. $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Página 34

Atividades

38.
a) $-2 + \sqrt{2}$
b) $-4\pi + 10$
c) $-9\sqrt{3}$

39.
a) Sim.
b) 1
c) 1

41.
a) 10
b) 10
c) $3 + \sqrt{7}$
d) $-1 + \sqrt{10}$

42.
a) $2\sqrt{5} - 1$ u.c.
b) Sim; $-2\sqrt{5} + 1$.

43.
a) Inteiros negativos.
b) Racionais não inteiros.
c) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

44. $6\sqrt{2}$ cm

45.
a) $6\sqrt{2}$ cm
b) Não.

46. $7\sqrt{2}$ cm

47.
a) Duplica.
b) Quadruplica.
c) Triplica.
d) Fica multiplicada por nove.

48.
a) 31
b) É racional.
c) $\frac{1}{31}$
d) –31

49.
a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
b) $\sqrt{10}$
c) $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{10}}{2}$
d) $3(\sqrt{7} + \sqrt{6})$

50.
I. V
II. F
III. F
IV. F
V. V

Página 35

Para pensar e discutir

3. Infinitos.
4. 14

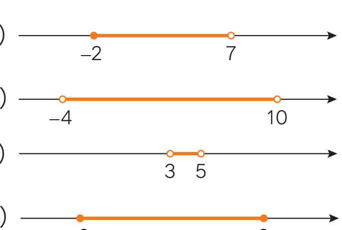
Página 37

Para pensar e discutir

1. –1, 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

Atividades

51.
a)
b)
c)
d)



Acervo editora

52.

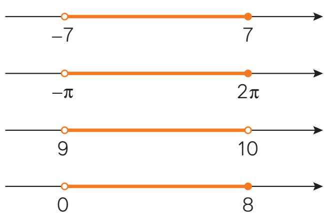
a) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}

b) Não.

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/ -3 < x \leq 15\}$

53.

a)
b)
c)
d)



Acervo editora

54.

a) [–2, 7)

b) [–1, 5]

c)]–1, 5]

d)]–∞, –1[

e)]–∞, 7[

f) {–1}

55.

a) [2, 5[

b)]1, 2[

c)]1, 6]

d) [5, 6]

56. 7

57. 15

Páginas 38-43

Atividades finais

2.

a) $\in$

b) $\notin$

c) $\subset$

d) $\not\subset$

3.

a) 13

b) 8

c) 3

4.

a) $n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

b) Que os conjuntos sejam disjuntos.

5.

a) A = {1, 2, 6, 8, 10, 14}

b) B = {4, 6, 8, 12, 14}

6.

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $(A \cup B) - (A \cap B)$

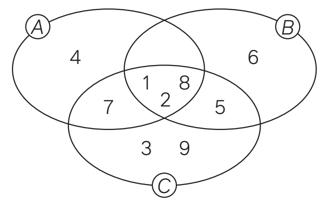
7. 2

8.

I. F III. V

II. F IV. V

9.



Acervo editora

10.

I. V III. F V. V

II. F IV. V

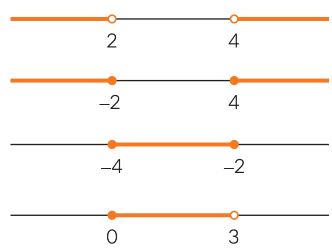
12.

a) $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{Q}$ e) $\mathbb{Q}$

b) $\mathbb{Z}$ d) $\mathbb{Z}$ f) $\mathbb{R}$

13.

a)
b)
c)
d)



Acervo editora

14.

a) [–3, 10)

b) (0, 7]

c) $[-3, 0] \cup (7, 10)$

d) { }

Questões de vestibulares e Enem

15. c **16.** e **17.** b **18.** a **19.** b **20.** e **21.** e

22. c **23.** b **24.** a **25.** a **26.** a **27.** b **28.** a

29. d **30.** a **31.** d **32.** d **33.** c **34.** c **35.** e

36. d **37.** d **38.** b **39.** b **40.** c **41.** d

Capítulo 2

Página 46

Para pensar e discutir

2. Sim

3. Mais que triplicou.

Página 47

Para pensar e discutir

2. O valor do PIB, em bilhões de dólares.

Página 48

Para pensar e discutir

1. Sim.

Página 50

Para pensar e discutir

1. Cresceu.

Página 51

Para pensar e discutir

1. 1 gol; 15

2. Por bolas.

Páginas 52-54

Atividades

1. Futebol: 144°; vôlei: 108°; basquete: 54°; natação: 36°; outros: 18°.

2.

a) Sim.

b) Maior taxa: Bahia e Pernambuco, mais de 14%;

Menor taxa: Rio Grande do Sul, Santa Catarina, Paraná, Mato Grosso do Sul, Rondônia e Mato Grosso até 6%.

3.

a) 12 °C c) 4

b) 3

4.

a) Março – abril e maio – junho.

b) Março – abril.

5.

POPULAÇÃO DAS REGIÕES BRASILEIRAS (Censo 2022)

REGIÃO	POPULAÇÃO (em milhões)	PORCENTAGEM (%)
SUL	29,9	14,7
SUDESTE	84,9	41,8
CENTRO--OESTE	16,3	8,1
NORDESTE	54,6	26,9
NORTE	17,3	8,5
TOTAIS	203	100

6. e **7.** c **8.** d **9.** a

Página 55

Para pensar e discutir

2. 60%

Páginas 56-57

Atividades

11.

a) Sim.

b) Sim.

Página 59

Análise e contexto

1. É calculado com base na expectativa de vida, educação e renda *per capita*. Varia de 0 a 1, em que 1 representa melhor qualidade de vida.

2. As respostas dependem do ano de pesquisa.

Página 60

Para pensar e discutir

2. Diminuiu.

Página 61

Análise e contexto

1. As respostas dependem do ano de realização da pesquisa.

Páginas 67-68

Atividades

15.

a) 200

b) *Pop*: 35%; *rock*: 20%; *hip-hop*: 15%; eletrônica: 10%; sertanejo: 20%.

16. $fa = 3$; $fr = 0,15 = 15\%$

17. 60%

18.

DISCIPLINA	FREQUÊNCIA ABSOLUTA	FREQUÊNCIA RELATIVA
Português	25	0,25
Matemática	15	0,15
História	20	0,20
Física	10	0,10
Química	30	0,30
TOTAL	100	1

19. 70

20. b

21. e

Para pensar e discutir

1. 40 kg

2. 70 kg

3. Repete-se o algarismo das unidades no ramo 3.

4. Na coluna da esquerda, abaixo do número 7, que corresponde à massa dos "70" kg, insere-se o número 10, e à direita, nas "folhas", insere-se o número 2.

Página 69

Para explorar

1.

2	0 0 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 7 8 9
3	0 0 0 1 1 2 2 3 3 4 5 6 7 7 7 8 9 9 9
4	0 0 1 2 2 3 4 5 8 8 8 9
5	2 3 7

Página 70

Atividades

22. Frequência absoluta total: 50.

Frequência relativa: 4%, 12%, 20%, 10%, 8%, 12%, 24%, 10%.

Total: 100%.

24.

a) 65 anos

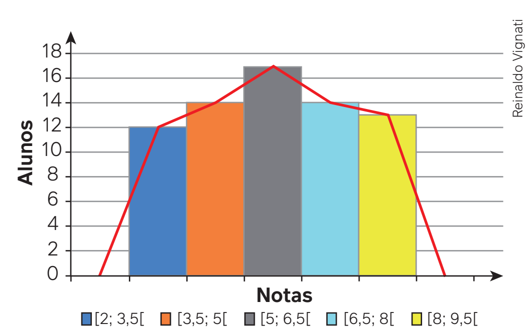
b) 33 anos

c) $fa = 14$; $fr = 35\%$

25. a

26. Resposta dos itens **a** e **b**.

Nota dos alunos



Página 75

Para pensar e discutir

1. Não.

2. Amostral.

Página 76

Para pensar e discutir

1. Não.

2. Não.

Página 80

Para pensar e discutir

1. $h = \sqrt{(c_1)^2 + (c_2)^2}$

Página 82

Para pensar e discutir

2. O losango.

Para pensar e discutir

1. Verificar se ele tem cadastro.

2. Enviar a mensagem: "Compra não aprovada."

Páginas 83-84

Atividades

28.

a) A soma de um número com dez.

34. Os passos para que uma pessoa faça um percurso com a forma de um hexágono.

Páginas 86-89

Atividades finais

1.

a) 42

b) 54

2.

a) Matemática: 216°; Português: 90°; Geografia: 54°.

b) 240

3.

a) Frequência absoluta.

b) Frequência relativa.

4.

a) Maio e junho.

5.

a) PIB (Produto Interno Bruto): Indica a soma de todos os bens e serviços produzidos por um país, estado ou cidade em um determinado período, geralmente por ano.

b) Renda *per capita*: É a renda média por pessoa em uma determinada região, obtida dividindo a renda nacional pelo número de habitantes. É um indicador de desenvolvimento econômico.

c) Representação em Relação ao Todo: Refere-se à apresentação de dados em que cada parte é mostrada em relação ao total, facilitando a compreensão da participação de cada componente no todo.

d) Gráfico de Linhas: Utilizado para analisar o comportamento de um dado ao longo do tempo, mostrando tendências e variações.

e) Fluxograma: Uma representação visual que descreve o fluxo de um processo ou algoritmo, utilizando figuras para representar as etapas e decisões.

f) Algoritmo é um procedimento que descreve as várias etapas ou instruções para a execução de determinado problema ou tarefa.

g) INPC ou IPCA: Índices de preços que medem a variação dos preços de uma cesta de produtos e serviços ao longo do tempo, usados para calcular a inflação.

h) Índice de Desenvolvimento Humano (IDH): Indicador composto que classifica os países em relação ao seu grau de desenvolvimento, considerando fatores como saúde, educação e renda *per capita*.

Questões de vestibulares e Enem

6. a **7.** a **8.** c **9.** a **10.** e **11.** d **12.** e **13.** a **14.** d **15.** b **16.** b **17.** c **18.** e **19.** e

Capítulo 3

Página 92

Para pensar e discutir

1. Pressão máxima (SIS, vem de sistólica), pressão mínima (DIA, vem de diastólica) e batimentos por minuto (Pulso).

2. Quilômetro, jarda, palmo, metro, entre outras.

3. Tudo que pode ser medido.

Página 93

Para pensar e discutir

1. Metro quadrado; m^2.

Página 94

Para explorar

1.

a) 89,7 kg

b) Quilograma.

2.

a) Newton (N).

b) $879{,}06 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$.

Página 95

Atividades

1. c **2.** d

3. $1\text{V} = 1\dfrac{\text{J}}{\text{C}} = 1\dfrac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$

4. $9\text{ W} = 9\dfrac{\text{J}}{\text{s}} = 9\dfrac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3}$

5. $1\,300 \text{ kg/m}^3$

6. d **7.** b **8.** d **9.** c **10.** a **11.** a **12.** e

Página 96

Para pensar e discutir

1. 10^{-3}

2. 1 800 m

Página 97

Para pensar e discutir

1. 15; 15 **2.** $5 \cdot 10^{-10}$

Página 99

Análise e contexto

2. 1 024

Páginas 100-101

Atividades

13.

a) $12\,000\,000 \text{ cm}^3$.

b) $250\,000 \text{ cm}^2$

c) 4 500 mL

d) 108 km/h

14.

a) 2 048 bytes

b) 2 000 m

15.

I. V
II. V
III. F
IV. F
V. F

16. b

17.

a) $3 \cdot 10^8$ m/s

b) $2{,}031 \cdot 10^8$

c) $7 \cdot 10^{-5}$ m

d) $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg

18. $1{,}5 \cdot 10^{-7}$ m

19.

a) 92 000 000

b) 0,00081

c) 7 210 000

d) 0,0000402

20. d

21. 70

22. Aproximadamente 6,94 m/s.

23. 625 L

24. 92 000 L

25. b

26.

Estado	Densidade
Rio de Janeiro	365
São Paulo	179
Pernambuco	92
Ceará	59
Paraná	58
Rio Grande do Sul	39
Minas Gerais	35
Bahia	25

27. b

28. a

29. c

Página 102

Para pensar e discutir

1. 7,1 cm
2. 7,071 cm
3. 0,029 cm

Página 103

Para pensar e discutir

1. 3
2. 9 e 1
3. 6, 2, 0, 0, 2 e 3; 9, 9, 7, 2 e 0

Página 104

Atividades

30.

a) O centímetro.

b) 8 cm

c) 0,2 cm

31.

a) 8, 1 e 7

b) 7

c) Não.

32.

a) 3

b) 37 °C

33. 1; 3; 4; 4; 2; 3

34.

a) $1{,}2589 \cdot 10^2$ km^2; 1, 2, 5, 8 e 9

b) $125{,}89 \cdot 10^6$ m^2;
$1{,}2589 \cdot 10^8$ m^2; 1, 2, 5, 8 e 9

35.

a) $4{,}558 \cdot 10^{-3}$ N; 4

b) Aproximadamente
$0{,}0046$ N $= 4{,}6 \cdot 10^{-3}$; 4 e 6

Página 105

Para pensar e discutir

1. 10^8
2. 10^8
3. Entre 10^0 e 10^1.

Página 106

Para explorar

2.

a) $3{,}884 \cdot 10^8$ m

b) $7 \cdot 10^{-5}$ m

c) $1{,}2 \cdot 10^3$ s

3.

a) 384 000 km: 10^9

b) 70 micrômetros: 10^{-4}

c) 20 minutos: 10^3

Página 107

Para pensar e discutir

2. Não.
3. Não.

Atividades

36.

a) 10^{-n}, para $n \geq 0$

b) 10^0 ou 10^1 c) 10^0, 10^1 ou 10^2

37.

a) 10^{-5} c) 10^{-16}

b) 10^6 d) 10^{13}

38.

a) 203 100 000

b) $2{,}031 \cdot 10^8$

c) 4

d) 10^8

39. 10^{14}

40.

I. V

II. V

III. F; 10^{-9}

41.

a) 3

b) 10^3

42.

a) 10^{-10}

b) 10^{-10}

43. 10^4

44.

a) 4 500 000 000

b) $4{,}5 \cdot 10^9$

c) 10^{10}

45. b

46. c

Página 108

Para pensar e discutir

2. 2 horas; 30 minutos.
3. Reduz pela metade.

Página 109

Para pensar e discutir

1. Cada 1 cm na imagem do mapa representa 45 000 000 m no real. Cada 1 cm na imagem do mapa representa 8 000 000 m no real.
2. 450 km
3. 80 km

Páginas 111-112

Para pensar e discutir

2. Não.

Atividades

47. 4 g/cm^3

48.

a) π

b) $\sqrt{2}$

49. 180

50.

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{1}{5}$

51.

a) $\frac{13}{5}$

b) $\frac{17}{16}$

c) $-\frac{34}{3}$

d) $\frac{31}{4}$

52. 6,5 litros

53. d

54. c

55. d

56. b

Página 113

Para pensar e discutir

1. 102 reais.
2. O valor será multiplicado por 3.
3. 150 litros
4. Triplica a quantidade.

Página 115

Para pensar e discutir

1. Distância percorrida.

Página 116

Para explorar

1.

a) 155,8 L

b) 1 869,6 L

c) Diretamente proporcionais.

Página 117

Atividades

57.

I. F

II. F

III. V

IV. V

58.

a) Não é possível saber.

b) Idade e massa não são grandezas proporcionais.

59.

a) 60

b) 2 horas

c) 6 kg

d) 5,4 km

60. A: R$ 64.000,00; B: R$ 96.000,00 e C: R$ 128.000,00.

61. 120°, 40° e 20°, respectivamente.

62. c

63. c

64. d

65. a

66. a

Páginas 118-121

Atividades finais

1.

a) 0,01 km^2

b) 100 hectares

2.

a) 720 cm^3

b) 1 500 cm^3

c) 5 000 cm^3

3.

a) 2 000 m/min

b) Aproximadamente 33,33 m/s.

4.

I. V

II. V

III. F

IV. V

V. V

VI. V

5.

a) $6 \cdot 10^3$ kg

b) 1

c) 10^4

6.

a) $\alpha < 3,16$

b) $\alpha \geq 3,16$

7.

a) $1,7 \cdot 10^3$ km/h

b) 2

c) 10^3

8. Pai: 35 anos, filho: 10 anos.

9.

a) Quando o quociente das medidas correspondentes for uma constante positiva.

b) Quando o produto das medidas correspondentes for uma constante e diferente de zero.

Questões de vestibulares e Enem

10. c

11. 06 (02 + 04)

12. c

13. a

14. c

15. a

16. e

17. b

18. a

19. a

20. c

21. b

22. c

23. c

24. c

25. c

26. b

27. e

28. a

29. b

30. d

31. b

32. b

33. e

34. c

Capítulo 4

Página 124

Para pensar e discutir

2. A área.
3. πr^2

Página 126

Para pensar e discutir

1. Dependente: *P*; independente: *x*.
2. $f(x) = 12,50x$
3. R$ 287,50.
4. $x \geq 0$

Páginas 128-129

Atividades

1.

a) A área do círculo de raio *r*.

b) 100π. A área do círculo de raio 10 u.c.

c) 400π. A área do círculo de raio 20 u.c.

d) Quadruplica.

2.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x^2 - 3$

c) $f(r) = 4r$

d) $f(\ell) = \ell\sqrt{2}$

3.

a) $V = 300 + 45t$

b) R$ 525,00

c) 4 horas

4.

I. V

II. V

III. F

5.

a) 30

b) 4

c) $x = 4$ ou $x = -4$

d) $x = 7\sqrt{2}$ ou $x = -7\sqrt{2}$

6.

a) R$ 1.500,00

b) R$ 6.000,00

c) $S = f(V) = 1\,500 + 0,05V$

7.

a) $y = f(x) = 4\sqrt{x}$
b) 8
c) 0
d) Para valores inteiros que são quadrados perfeitos.
e) 100

8.

a) 2; o número de diagonais de um quadrilátero
b) 27

9.

a) $V = f(t) = \dfrac{500}{t}$
b) 62,5 km/h

Página 130

Para explorar

1. *B* é o quadrado do valor correspondente de *A*.
2. Sim.
3. Sim.
4. $y = x^2$
5. Não.

Página 132

Atividades

10.

a) Sim.
b) Sim.

11.

a) $D(f) = \{1, 2, 3\} = A$, $CD(f) = B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $Im(f) = \{2, 4, 6\}$
b) 12

12. Não.

13.

a) 30
b) $f(x) = 3x$

14. Injetoras: 2 e 4; sobrejetoras: 3 e 4 e bijetoras: 4.

Página 133

Para pensar e discutir

1. 1º e 4º
2. 3º e 4º
3. A ordenada deve ser igual a zero; a abscissa deve ser igual a zero.

Para pensar e discutir

1. Velocidade e tempo.
2. O automóvel partiu da velocidade zero e atingiu a velocidade de 30 m/s.
3. Entre 40 s e 50 s.
4. Durante 20 s.
5. 108 km/h.

Página 134

Para pensar e discutir

1. Seriam apenas pontos isolados e alinhados tendo a origem e os pontos no 1º e no 3º quadrantes.
2. Seriam apenas pontos isolados e alinhados tendo a origem e os pontos no 1º quadrante.

Página 136

Para pensar e discutir

1. $f(x) = 2x$: $Im(f) = \mathbb{R}$; $g(x) = \sqrt{x}$: $Im(g) = \mathbb{R}_+$; $h(x) = x^2$: $Im(h) = \mathbb{R}_+$
2. $\sqrt{2}$
3. $f(x) = 2x$: $D(f) = \mathbb{R}$; $g(x) = \sqrt{x}$: $D(g) = \mathbb{R}_+$; $h(x) = x^2$: $D(h) = \mathbb{R}$
4. $f(x) = 2x$ e $g(x) = \sqrt{x}$

Páginas 139-140

Atividades

15.

a) –1
b) 3
c) –1
d) 4

16.

a) $Im(f) = [-2, 3]$
b) $f(-1) = 3$, $f(0) = 1$ e $f(8) = -2$
c) $x = 2$, $x = 4$ e $x = 7$
d) $x \in]2, 4[$ ou $x \in]7, 8]$

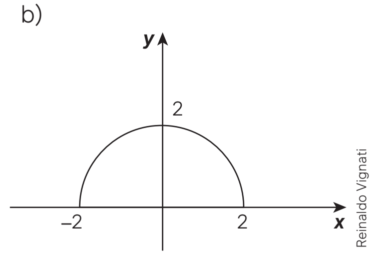
17.

b) Uma vez.
c) $x = 0$
d) $x > 0$
e) $x < 0$

18. Não é função.

19.

a) $D(f) = [-2, 2]$
b)



c) $Im(f) = [0, 2]$

20.

I. V
II. V
III. F
IV. F

21. 67,2 kcal

22. e

23. c

24. c

Página 141

Para pensar e discutir

1. 100%
2. 2 h
3. A cada duas horas é reduzido em 20 pontos percentuais; a cada hora é reduzido em 10 pontos percentuais.
4. 10 h.

Páginas 143-144

Para pensar e discutir

2. 240

Atividades

25.

a) –3
b) 5
c) 2,5
d) 1,5

26.

a) $f(x) = 10$
b) $f(x) = 3{,}75x$
c) $f(x) = 7x + 7$

27. Todas são verdadeiras.

28. Todas são falsas.

29.

a) $a = 0$ e $b = 25$
b) y é sempre igual a 25.

30.

a) $Q(t) = 10\,000 - 200t$
b) 25 min
c) 50 min

31.

a) $V(t) = 150\,000 - 15\,000t$
b) R$ 75.000,00

32.

a) $L(x) = 14x - 21\,000$
b) Prejuízo; R$ 7.000,00

c) 1 500

33. d

34. c

35. a

36. c

37. a

38. c

Página 145

Para pensar e discutir

1. Aumentam de 2 em 2.
2. Sim.
3. Diminuirão.

Página 147

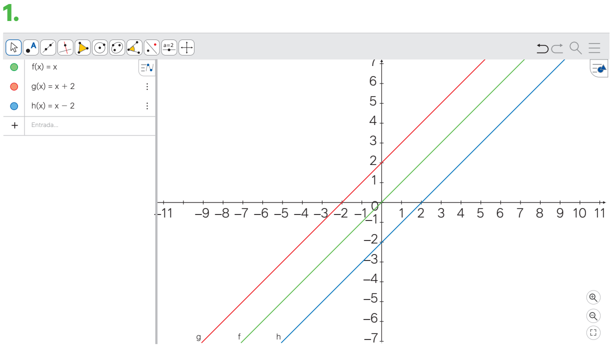
Para pensar e discutir

1. $f(x) = 3x + 1$
2. $g(x) = -2x + 2$
3. $h(x) = 5$

Páginas 148-149

Para explorar

1.



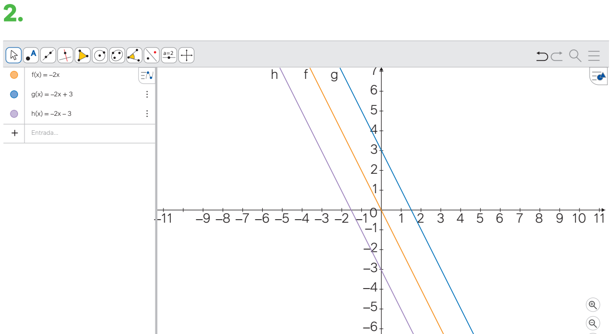
Reinaldo Vignati

a) São três retas paralelas.

b) O deslocamento na vertical.

c) Os pontos em que os gráficos interceptam o eixo das ordenadas.

2.



Reinaldo Vignati

a) Sim.

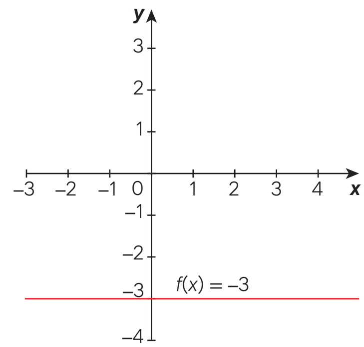
b) O ponto em que a reta intercepta o eixo das ordenadas.

c) Diminui.

Atividades

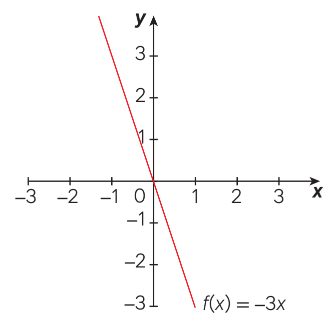
39. Para esboço dos gráficos, as raízes são:

a)



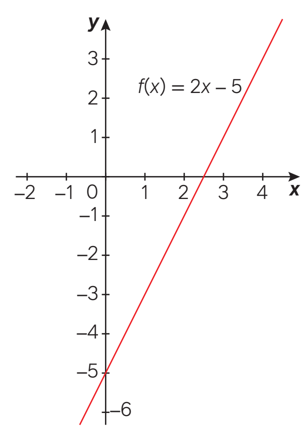
Reinaldo Vignati

b)



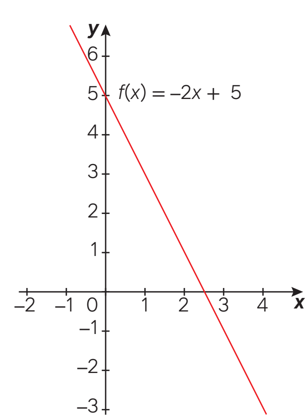
Reinaldo Vignati

c)



Reinaldo Vignati

d)



Reinaldo Vignati

40.

a) (0, −3); b) (0, 0); c) (0, −5) e d) (0, 5)

41.

a) $f(x) = 2x + 4$

b) Eixo das abscissas: (−2, 0); eixo das ordenadas (0, 4).

42.

a) $f(x) = 2x + 1$

c) $x = -\frac{1}{2}$

43. $\frac{12}{5}$

44.

a) $f(x) = x$, $g(x) = x + 2$, $h(x) = x - 2$

b) Nas três funções.

45. b

46. b

47. b

48. b

Página 150

Para pensar e discutir

1. Função decrescente.
2. Função crescente.

Página 152

Para pensar e discutir

1. A cada 1 grau a mais na medida *C*, *F* aumenta 1,8 grau.
2. Aumentam de 10 em 10.

Páginas 153-154

Atividades

49.

a) $x = \frac{2}{7}$

b) Não admite *x* inteiro.

c) $x = 0$

d) $x = 0$

e) Não admite *x* real.

50.

a) Triângulo retângulo isósceles com vértices (0, 0), (0, 10) e (10, 0).

b) $20 + 10\sqrt{2}$ u.c.

c) 50 u.a.

51.

I. F

II. V

III. V

IV. F

52.

I. V

II. V

III. F

IV. F

53. $P(0, b)$ e $Q\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

54. $-\frac{3}{100}$ grau; a cada 100 m a temperatura diminui 3 °C

55. d

56. e

57. b

58. d

59. d

Página 155

Para pensar e discutir

1. É o ponto em que o gráfico intercepta o eixo *y*.
2. Sim; sim.

Página 156

Para pensar e discutir

1. Duplica.
2. Triplica ou quadruplica.
3. Sim.
4. Constante de proporcionalidade. Representa o consumo de 1 L por km percorrido.

Páginas 158-159

Atividades

60.

a) 320 km

b) 5 h

c) Velocidade: 80 km/h.

61.

a) Não.

b) Não.

c) Não.

d) Não.

62.

a) $N(x) = x$

b) 100%

63.

a) Sim.

b) $C(t) = 5{,}25t$

c) 5,25 L/min

64. Sim; 1,25 e representa a velocidade em m/s.

65.

I. F

II. V

III. F

IV. V

66. Não.

67.

I. V

II. F

III. V

IV. V

68. a

69. e

70. c

71. e

Página 160

Para explorar

1.

a) −5; −3, −1; 1; 3; 5; 7

2.

a) (5, 12, 19, 26, ..., $7n - 2$, ...)

c) Cada termo, a partir do 2º, é o termo imediatamente anterior acrescido da razão constante 7.

d) A razão constante.

3.

a) (5, −5, −15, −25, ..., $-10n + 15$, ...)

c) Cada termo, a partir do 2º, é o termo imediatamente anterior acrescido da razão constante −10.

d) A razão constante.

Página 162

Para pensar e discutir

1. $L = V - C$
2. Não.
3. Sim.
4. 616

Página 163

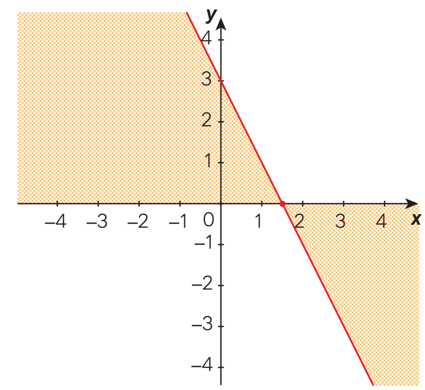
Para pensar e discutir

1. $a = 0$
2. $a > 0$; $a < 0$
3. $a \neq 0$
4. Um ou nenhum
5. O gráfico é o próprio eixo das abscissas; infinitos.

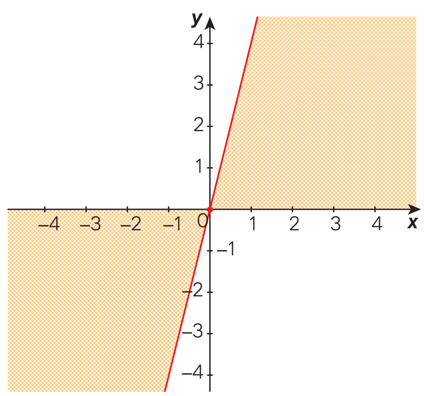
Página 164

Para explorar

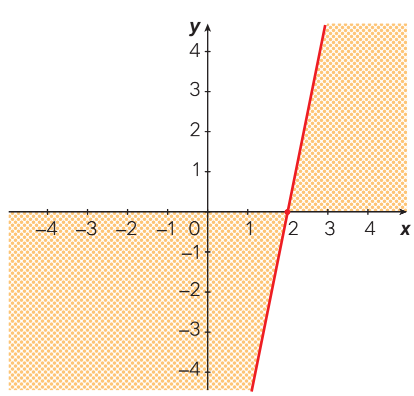
1.



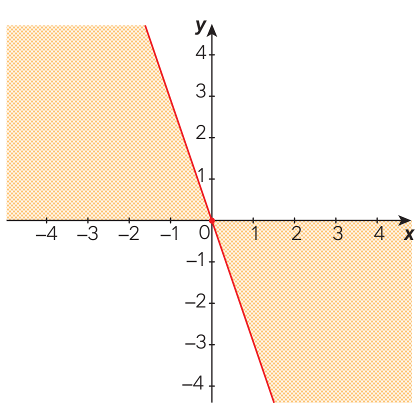
Tarcísio Garbellini



Tarcísio Garbellini



Tarcísio Garbellini



Tarcísio Garbellini

2.

a) $\frac{3}{2}$, 0; 2; 0

b) $x < \frac{3}{2}$, $x > 0$; $x > 2$; $x < 0$

c) $x > \frac{3}{2}$, $x < 0$; $x < 2$; $x > 0$

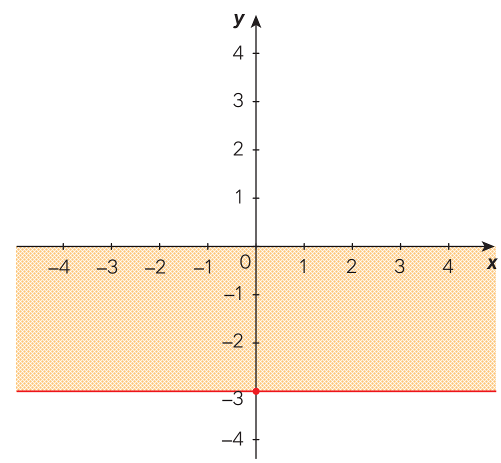
Página 165

Atividades

72.

a) Nenhum.
b) Todos.
c) Nenhum.

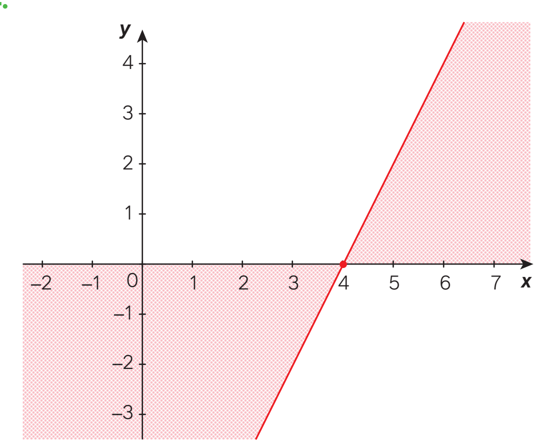
73.



Tarcísio Garbellini

a) Nenhum.
b) Nenhum.
c) Todos.

74.



Tarcísio Garbellini

a) $x = 4$
b) $x > 4$
c) $x < 4$

75.

a) $y = 0$ para $x = -5$;
$y > 0$ para $x < -5$;
$y < 0$ para $x > -5$

b) $y = 0$ para $x = 0$;
$y > 0$ para $x > 0$;
$y < 0$ para $x < 0$

c) $y < 0$ para qualquer valor de x.

d) $y = 0$ para $x = -\frac{9}{4}$
$y > 0$ para $x > -\frac{9}{4}$
$y < 0$ para $x < -\frac{9}{4}$

77.

c) $x < 3$
d) $x > 3$
e) $x = 3$

78.

I. F
II. V
III. V
IV. V
V. V

79.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$
b) 4
c) $x > -3$
d) $x < -3$

Página 166

Para pensar e discutir

1. 615,38
2. Positivos; também são positivos.
3. A quantidade de trufas produzidas e vendidas.
4. 616

Página 169

Para pensar e discutir

1. $x \geq 20$: x pode ser 20 ou qualquer valor superior a 20. $x > 20$, x pode ser apenas os números maiores que 20. $x \leq 20$: x pode ser 20 ou qualquer valor inferior a 20. $x < 20$, x pode ser apenas os números menores que 20.
2. Os dois membros foram multiplicados por 7.
3. Isolou-se o x.
4. $x = 18$

Atividades

80.

a) $x \leq \frac{5}{2}$
b) $x < -\frac{10}{3}$
c) $x \leq -15$
d) $x > -3$

81.

a) Dividiu todos os termos por 2.
b) $\left]\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right[$
c) Infinitas.
d) 1, 2 e 3

82.

a) $\left[-\frac{3}{4}, 2\right]$
b) Três; 0, 1 e 2.

83. [5; 20]

84. d **85.** a **86.** a

Páginas 170-173

Atividades finais

1. O elemento x de A corresponde a 2 elementos distintos de B.

2.

a) 0
b) −16
c) 16

3.

a) $Im(f) = \{0, 2, 4\}$
b) 8

4.

a) a = −1 e b = 3
b) 3
c) $x = 3$
d) $x < 3$
e) $x > 3$

5.

a) $D(f) =]-2, 3]$
b) $Im(f) = [-2, 2]$

6. f: −1; g: 2; h: 1.

7.

I. V
II. F
III. F
IV. V

Questões de vestibulares e Enem

8. c
9. a
10. b
11. d
12. c
13. d
14. a
15. b
16. b
17. c
18. d
19. b
20. a
21. a
22. e
23. d
24. d
25. c

Capítulo 5

Página 176

Para pensar e discutir

1. Sim.
2. $(20 + x)^2 = 900$

Página 177

Para pensar e discutir

1. $x^2 + 14x + 49$ e $x^2 - 14x + 49$
2. Sim.
3. Sim.

Página 178

Para pensar e discutir

1. Não existe número real cujo quadrado seja negativo.

Página 179

Atividades

1.

a) $S = \{8, -2\}$
b) $S = \left\{1, \frac{1}{3}\right\}$
c) $S = \{5, -15\}$
d) $S = \left\{2, \frac{3}{2}\right\}$

2.

a) 25; $(x - 5)^2$
b) 225; $(x + 15)^2$
c) 16; $(x - 4)^2$
d) $\frac{9}{4}$; $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$
e) $\frac{49}{4}$; $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2$
f) 1; $(2x - 1)^2$
g) 4; $(3x + 2)^2$

3.

a) 1
b) 25
c) $8y$ ou $-8y$
d) $24y$ ou $-24y$

4.

a) $S = \{2\}$
b) $S = \{3\}$
c) $S = \{-3, 1\}$
d) $S = \{3, 7\}$
e) $S = \{-8, -2\}$
f) $S = \{\ \}$
g) $S = \{\ \}$

5.

b) $S = \{1, 9\}$

6.

a) $x(x + 9) + 4(x + 9)$;
$(x + 9)(x + 4)$
b) $S = \{-9, -4\}$

7.

a) $4x^2 - 900 = 0$
b) $x = 15$
c) 31 m e 29 m

8.

Situação 1. $x = 6$
Situação 2. 15
Situação 3. 25 m e 35 m

9. R$ 48,00

Página 180

Para pensar e discutir

1. $4a^2x^2 + 4abx + b^2$

2. $S = \{-1, -3\}$

3. Não.

Páginas 181-182

Atividades

10.

a) $S = \{4, -3\}$
b) $S = \{6, 1\}$
c) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$
d) $S = \{\ \}$
e) $S = \{-5, 2\}$
f) $S = \left\{\frac{1+\sqrt{13}}{6}, \frac{1-\sqrt{13}}{6}\right\}$
g) $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

11.

a) $S = \left\{1, -\frac{1}{5}\right\}$
b) $S = \left\{\frac{9+\sqrt{145}}{2}, \frac{9-\sqrt{145}}{2}\right\}$
c) $S = \{4, -1\}$
d) $S = \left\{10, -\frac{1}{2}\right\}$
e) $S = \left\{\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right\}$

12.

Problema 1. 5 ou –6
Problema 2. 5
Problema 3. 5 m
Problema 4. 7 cm e 12 cm

13.

a) 6 jogos: A × B, A × C, A × D, B × C, B × D e C × D
b) 10 jogos: A × B, A × C, A × D, A × E, B × C, B × D, B × E, C × D, C × E e D × E

14.

a) $S = \{-7, 8\}$
b) $S = \{-11, 12\}$

15.

a) $40h^2 - 80 = 0$; $h \cong 1{,}41$ m
b) 76,8 kg

16.

a) $x^2 - 50x + 600 = 0$
b) $x = 30$ m e $y = 20$ m

17.

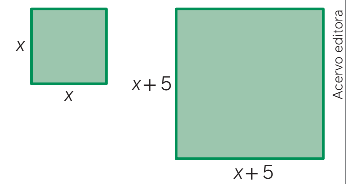
a) $n^2 - 2n - 675 = 0$
b) $S = \{27\}$

18.

a) $x^2 + 42x - 400 = 0$
b) 8 m

19.

a)



b) $3x^2 - 10x - 25 = 0$
c) 5 cm

Página 183

Para pensar e discutir

1. $S = \{\ \}$; $\Delta < 0$

2. $x = \frac{3}{2}$; $\Delta = 0$

3. $x = 1$ ou $x = \frac{3}{2}$; $\Delta > 0$

Páginas 184-185

Atividades

21.

a) Não tem raiz real.
b) Não tem raiz real.
c) Tem duas raízes reais e distintas.
d) Não tem raiz real.
e) Não tem raiz real.
f) Tem duas raízes reais e iguais.
g) Tem duas raízes reais e iguais.

22.

a) $k = \frac{7}{4}$
b) $k > \frac{7}{4}$
c) $k < \frac{7}{4}$

23.

a) Não.
b) Sim.
c) $\frac{1}{3}$
d) Admitirá sempre duas raízes reais e distintas.

24.

a) $\Delta = m^2 + 40$
b) Sim.

25. $k = 3$

26. a

28.

a) $\Delta = k^2 - 8$

29.

a) $n(n-1)$
b) 90
c) 132
d) 21

30.

a) Não.
b) Sim.

31. Parte 1

a) 252 cm^2
b) 192 cm^2

Parte 2

a) $(20 - 2x)(16 - 2x)$
b) Comprimento: 10 cm, largura: 6 cm e altura: 5 cm.

Páginas 186-187

Infográfico

1. 5 s

Página 188

Para pensar e discutir

1. $-\frac{1}{2}$ e 3

2. Soma: $\frac{5}{2}$, produto: $-\frac{3}{2}$.

Página 190

Atividades

32.

a) $S = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right\}$
b) $S = \frac{1}{2}$ e $P = -\frac{1}{4}$
c) $S = \frac{1}{2}$ e $P = -\frac{1}{4}$

33. $x^2 + 5x - 50 = 0$

34.

a) –2
b) $-\frac{1}{2}$

35. $x^2 - 19x + 88 = 0$

36.

a) $S = \{3, 1\}$

b) $S = \{-10, 1\}$

c) $S = \{-9, -4\}$

d) $S = \{9, 4\}$

37. b

38. b

Página 191

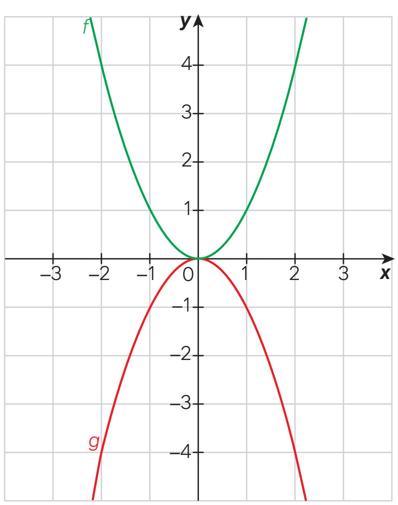
Para pensar e discutir

1. 54 m
2. 162 m^2
3. Sim.

Página 192

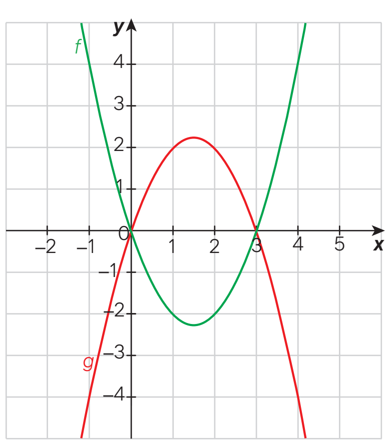
Para explorar

Construção 1



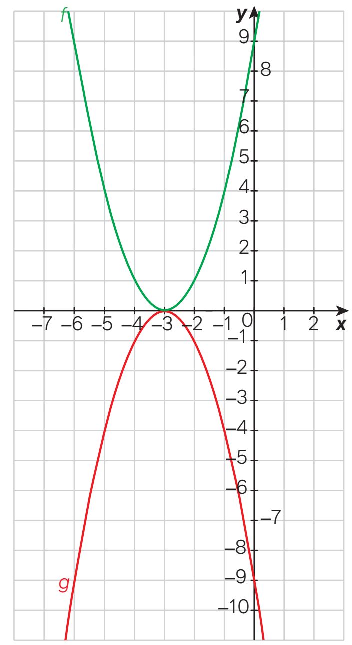
Tarcisio Garbellini

Construção 2



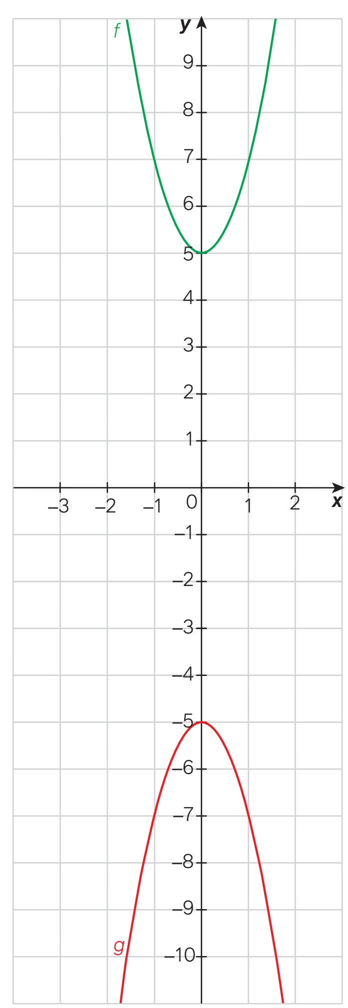
Tarcisio Garbellini

Construção 3



Tarcisio Garbellini

Construção 4



Tarcisio Garbellini

1. Na função afim, o gráfico é uma linha reta e na função quadrática é uma linha curva.
2. Parábola.
4. Intersecta em 1 ponto, intersecta em 2 pontos ou não intersecta.

Páginas 196-197

Atividades

39.

a) –3

b) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

c) (1, –1)

d) –3 e 2

40.

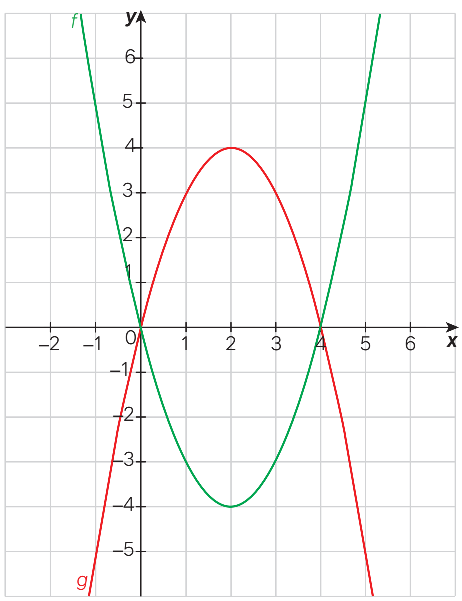
a) –4

b) (0, 0)

c) (3, 5)

d) –2 e 2

41.

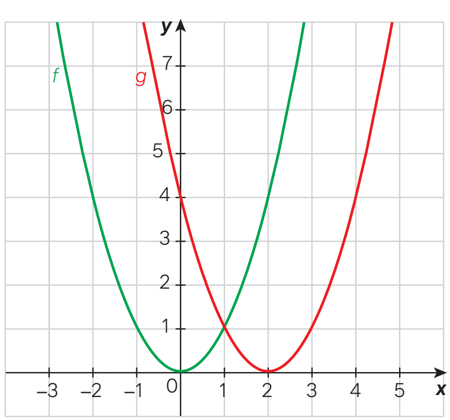


Tarcisio Garbellini

a) Dois.

b) (0, 0) e (4, 0)

42.



Tarcisio Garbellini

a) Não. b) Não. c) Sim.

43.

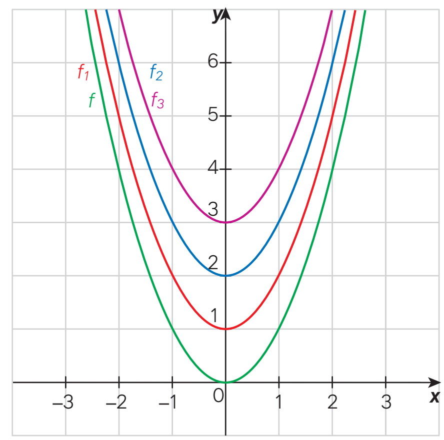
a) $k = 2$

b) $k = -2$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

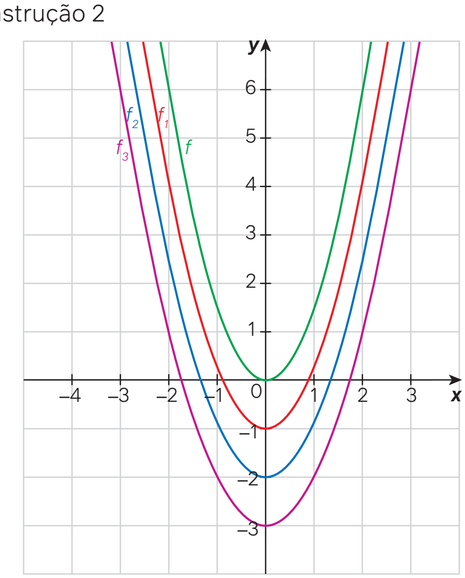
44.

Construção 1



Tarcisio Garbellini

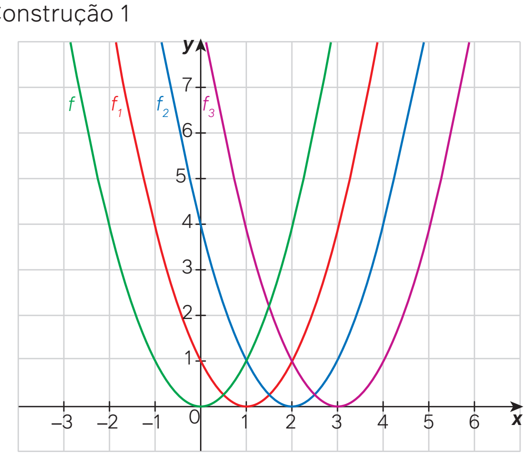
Construção 2



Tarcisio Garbellini

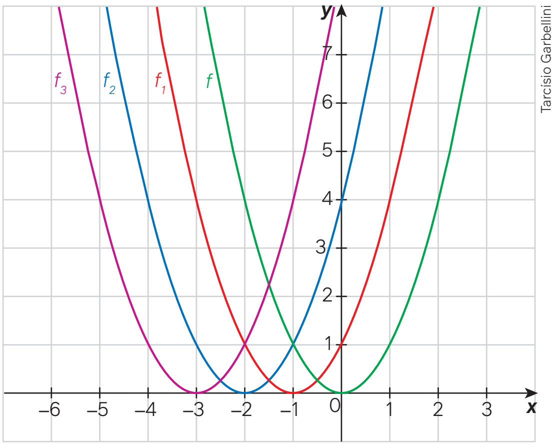
45.

Construção 1



Tarcisio Garbellini

Construção 2



46. $A(x) = -x^2 + 30x$

47. $A(x) = -0{,}5x^2 + 30x$

Página 199

Para pensar e discutir

1. Dois.

2. O valor que anula a função.

3. É sempre positivo.

Páginas 200-201

Para pensar e discutir

1. (1, 0) e (3, 0)

2. $k^2 < 40$

Atividades

48.

a) Nenhuma.

b) Uma.

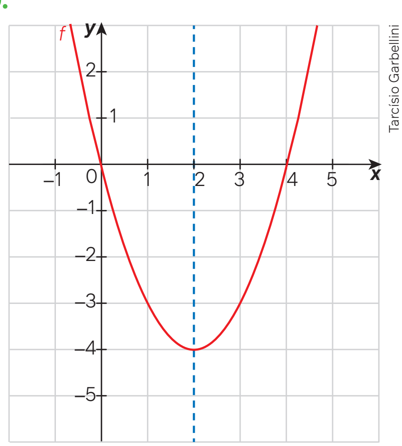
c) Duas.

49.

a) (0, 0)

b) (0, 0) e (4, 0)

50.



a) (2, –4)

51.

a) (0, 5)

b) (0, 25)

c) (0, 10)

52.

a) Roxa, azul, laranja e verde respectivamente.

b) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 2 e 4 respectivamente.

53.

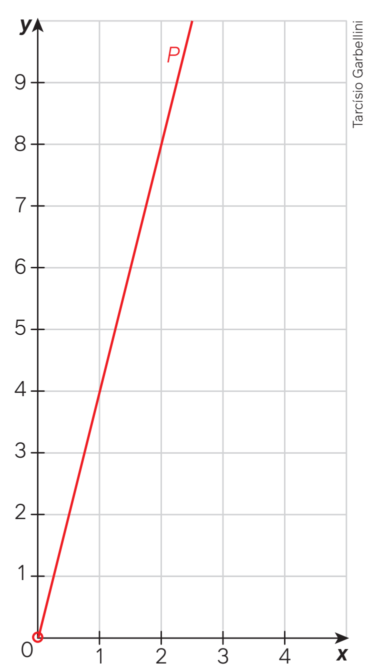
a)

Lado (cm)	Perímetro (cm)	Área (cm²)
1,0	4	1
1,5	6	2,25
2,0	8	4
2,5	10	6,25
3,0	12	9
3,5	14	12,25
4,0	16	16
4,5	18	20,25
5,0	20	25

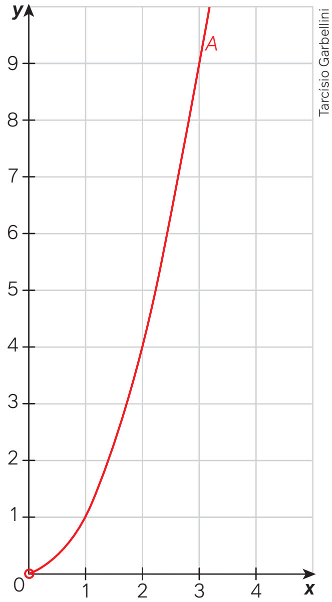
b) $P(x) = 4x$

c) $A(x) = x^2$

d) $P(x) = 4x$ (x deve ser positivo)



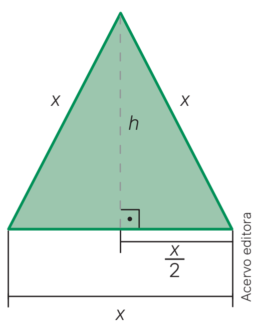
e) $A(x) = x^2$ (x deve ser positivo)



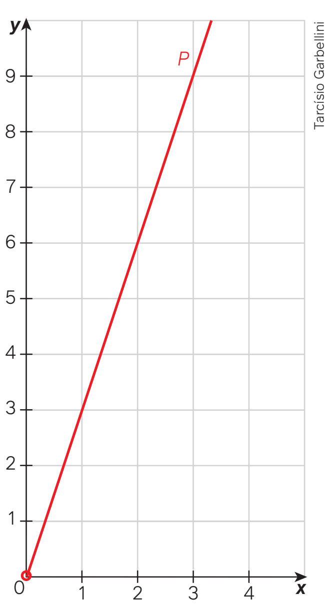
f) Sim; não.

54. Parte 1

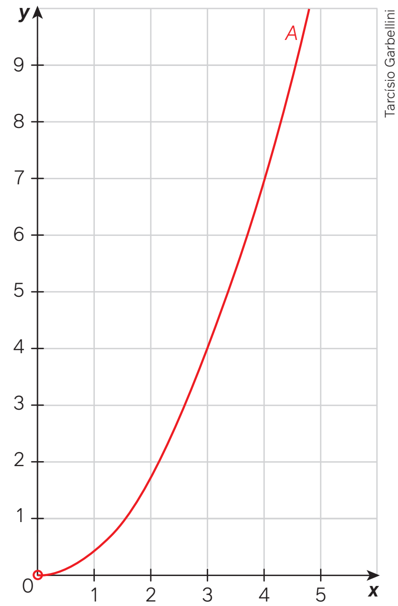
1. Considere um triângulo equilátero de lado x.



2. Perímetro: $P = 3x$ (x deve ser positivo).



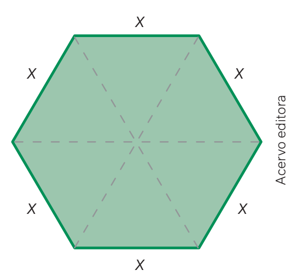
3. Área: $A = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$ (x deve ser positivo).



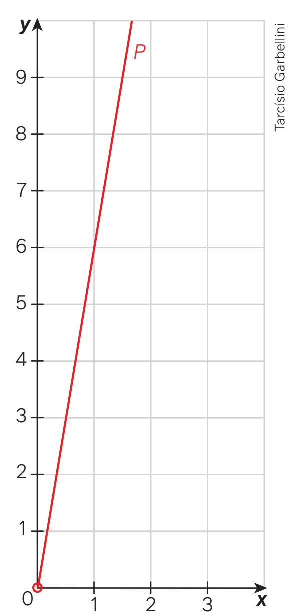
4. A área do triângulo equilátero não é proporcional ao lado do triângulo equilátero.

Parte 2

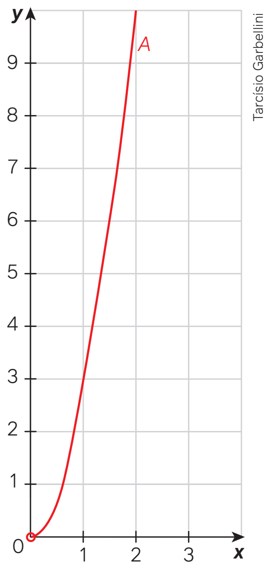
1. Considere o hexágono regular de lado x.



2. Perímetro: $P = 6x$ (x deve ser positivo).



3. Área: $A = 6 - \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$ (x deve ser positivo).



4. Sim.

Página 204

Para pensar e discutir

1. Duas fatorações foram feitas: na primeira, x foi colocado em evidência, já na segunda, $-x_2$ foi colocado em evidência.
2. Nessa passagem, a expressão $(x - x_1)$ foi colocada em evidência, isto é, foi fatorada.
3. São os zeros da função, isto é, as abscissas dos pontos do plano cartesiano em que a parábola corta o eixo das abscissas.

Página 205

Para pensar e discutir

1. $f(x) = (x - 3)(x - 1)$

Atividades

55.

a) $f(x) = (x + 1)(x - 1)$ e $f(x) = x^2 - 1$

b) $g(x) = -x^2 + 1$

c) O gráfico de f ficará refletido em torno do eixo x.

56.

a) $x = 0$ e $x = 6$

b) $f(x) = -x(x - 6)$

57. $y = -x^2 - 6x + 16$

59. $f(x) = x^2 - x - 6$

Página 206

Para pensar e discutir

1. A ordenada do vértice.
2. Reta que divide o gráfico em duas partes simétricas.
3. São iguais.
4. São iguais.

Páginas 207-208

Para pensar e discutir

1. $x_v = 4$
3. Pela média aritmética entre os zeros da função.

Atividades

61. $-\dfrac{b}{a}$

a) A abscissa do vértice.

b) Não.

62.

a) Voltada para baixo.

b) $x_v = 2$

c) $y_v = 7$

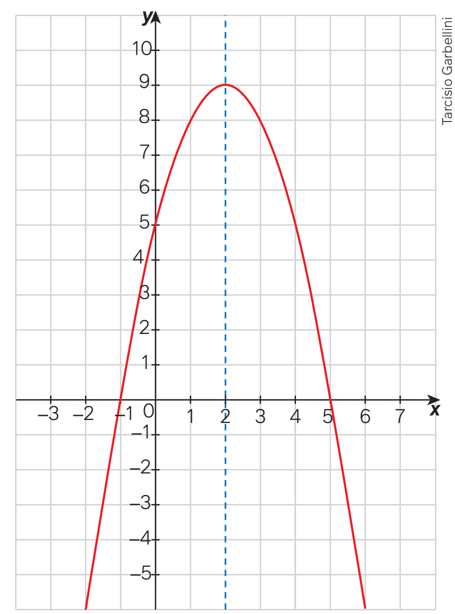
63.

a) $x = 0$ e $x = 4$

b) $x_v = 2$

c) $y_v = 4$

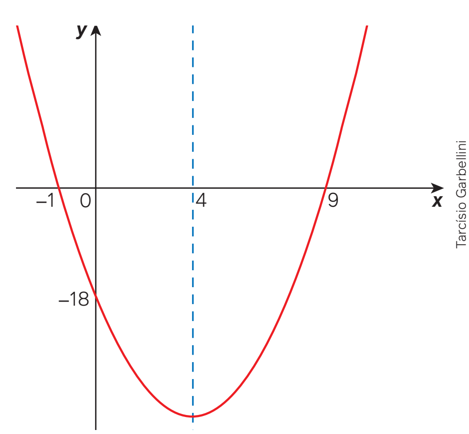
64.



a) Para baixo.

b) –1

65. $y = 2x^2 - 16x - 18$



66.

a) $y = -\frac{10}{9}(x - 2)(x - 8)$

Página 209

Para pensar e discutir

1. Sim.

2. A ordenada do vértice.

Página 210

Para explorar

1.

a) 35 m b) –18 m/s c) 4 m/s²

Para pensar e discutir

1. Prejuízo.

2. R$ 900,00

Páginas 211-212

Atividades

68.

a) 6 m

b) 2 s

c) 10 m

d) Aproximadamente 5,16 s.

69. 1 250 m²

70.

a) $y_V = 3$

b) $Im(f)=\{y \in \mathbb{R} / y \leq 3\}$

71.

a) $y_V = -9$

b) Mínimo.

c) $Im(f) =\{y \in \mathbb{R} / y \geq -9\}$

73. b

74.

a) $f(x) = -x^2 + 50x$ $(0 < x < 50)$

b) 625 cm²

75. d

76.

a) 4 s

b) 8 m

78. a

Página 214

Análise e contexto

1. $A = b \cdot h$

2. $A = b \cdot h \leq k$

Página 215

Para pensar e discutir

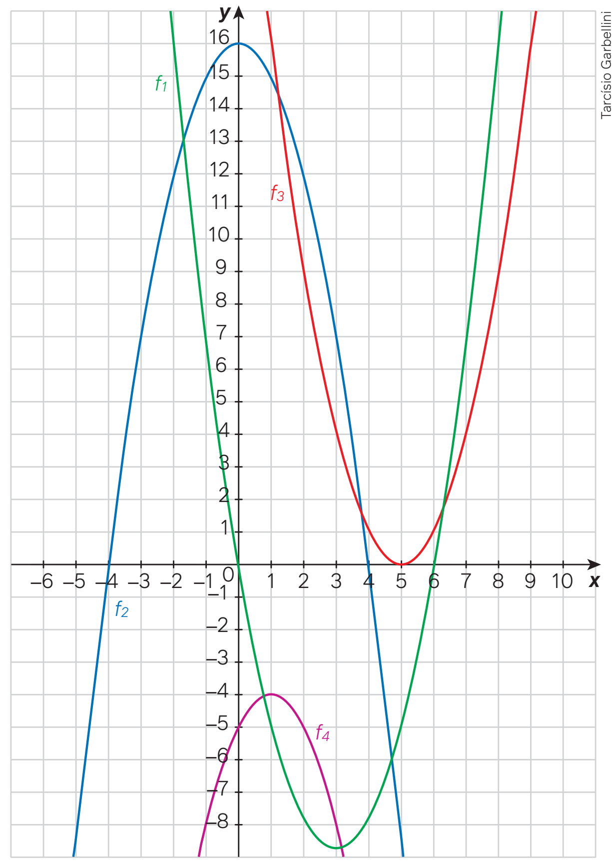
1. 320

2. R$ 256,00

Páginas 217-218

Para explorar

1.



2.

a) Anulam f_1: {0; 6}. Anulam f_2 : {–4; 4}. Anulam f_3: {5}. Anulam f_4: não há.

b) Imagem positiva de f_1: $x < 0$ e $x > 6$. Imagem positiva de f_2 : $-4 < x < 4$. Imagem positiva de f_3: $\mathbb{R}$. R. Imagem positiva de f_4: não há.

c) Imagem negativa de f_1: $0 < x < 6$. Imagem negativa de f_2 : $x < -4$ e $x > 4$. Imagem negativa de f_3: não há. Imagem negativa de f_4: $\mathbb{R}$.

Atividades

79.

a) $x < 1$ ou $x > 5$

b) $1 < x < 5$

80.

a) 4 e –4

b) $x <-4$ ou $x > 4$

c) $-4 < x < 4$

81.

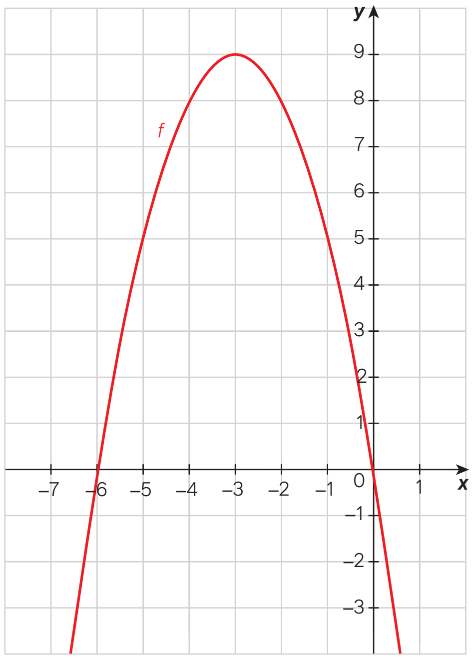
a) $x = 0$ ou $x = 6$

b) $x < 0$ ou $x > 6$

c) $0 < x < 6$

82.

a)



Tarcisio Garbellini

b) $f(x) = 0$ para $x = -6$ e $x = 0$; $f(x) > 0$ para $-6 < x < 0$; $f(x) < 0$ para $x < -6$ ou $x > 0$.

83.

a) $f(x) = 0$ para $x = -2$ ou $x = 7$; $f(x) > 0$ para $-2 < x < 7$; $f(x) < 0$ para $x < -2$ ou $x > 7$.

b) $x > 7$.

84. Para $1 \leq x \leq 3$.

86. $1 < i < 3$

Página 219

Para pensar e discutir

1.

(I) $S = [1, 6]$ e (II) $S =]1, 6[$; não.

2.

(III) $S =]-\infty, 1]$ ou $[6, \infty[$ e (IV) $S =]-\infty, 1[$ ou $]6, \infty[$; não.

Página 220

Atividades

88.

a) $[-2, 3]$

b) $]-2, 3[$

c) $]-\infty, -2]$

d) $]-\infty, -2[$

e) $[-2, +\infty[$

f) $]-2, +\infty[$

89. $x \leq 1$ ou $x \geq 6$

90.

a) $S = \{ \}$

b) $S = \mathbb{R}$

c) $S = \{3\}$

d) $S = \mathbb{R}$

92. c

93. c

94.

a) Empresa A.

b) Entre 5 km e 10 km.

Página 221

Para pensar e discutir

1. 59 m^3

2. R$ 1.392,68.

3. Nos dois casos, o valor mínimo, R$ 76,68.

4. R$ 297,00.

5. Não.

Página 222

Para pensar e discutir

1. (I): sólido; (III): líquido; (V): gasoso.

2. De sólido para líquido.

3. De líquido para gasoso.

4. Ponto de fusão e ponto de ebulição.

5. Na parte (II), os estados sólidos e líquido coexistem à temperatura de 0 °C. Na parte (IV), os estados líquido e gasoso coexistem à temperatura de 100 °C.

Página 223

Para explorar

2.

a) 20

b) 160

3. Sim.

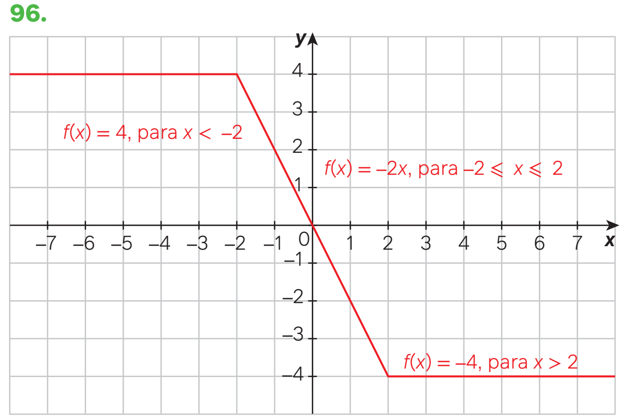
Página 224

Para pensar e discutir

3. Não.

Atividades

96.



Tarcisio Garbellini

a) Para x variando no intervalo $[-2, 2]$.

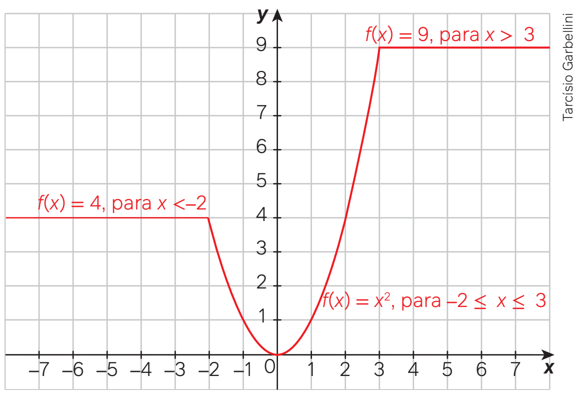
b) Para $x < -2$ ou para $x > 2$.

c) $-0,6$

d) -4

e) 4

97.



b) 9

c) Zero.

98.

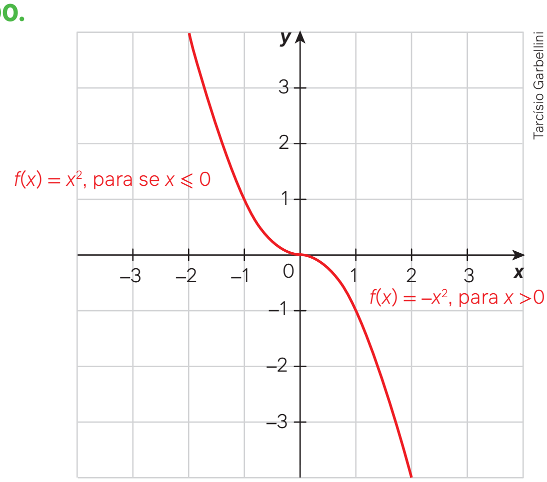
a) [–4, 4]

b) [–2, 2]

c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 6, \text{ se } -4 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{x^2}{2}, \text{ se } -2 < x < 2 \\ -2x + 6, \text{ se } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

99. $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leq -1 \\ x^2, \text{se } x > -1 \end{cases}$

100.



a) Diminui.

b) Aumenta.

101.

a) $Im(f) =]-\infty, 1]$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, \text{ se } x < -2 \\ -1, \text{ se } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 3, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

Páginas 226-229

Atividades finais

1.

a) Dois.

b) Sim.

c) Não.

d) Qualquer número real positivo.

e) Zero.

f) 0 e 10

g) $\sqrt{10}$ e $-\sqrt{10}$

h) 5 e 15

i) Basta transformar o primeiro membro da equação em produto. Depois disso, se o produto é igual a zero, necessariamente um dos fatores deverá ser igual a zero.

j) Basta isolar a incógnita *x* no primeiro membro e, então, determinar os números que, elevados ao quadrado, resultam em 144.

2.

a) Parábola.

b) Vértice.

c) Voltada para cima ou voltada para baixo.

d) Ordenada do ponto em que o gráfico intersecta o eixo *y*.

e) Em um ponto.

f) Voltada para baixo.

g) Nenhuma.

h) Não.

3.

a) Infinitos.

b) 21

4.

a) Para $x = -1$ ou $x = 2$.

b) Para $x < -1$ ou $x > 2$.

c) Para $-1 < x < 2$.

Questões de vestibulares e Enem

5. c

6. c

7. c

8. d

9. a

10. e

11. c

12. c

13. c

14.

a) 16 m

b) 76 km/h

15. d

16. b

17. b

18. e

19. a

20. d

21. c

22. b

23. d

24. c

25. d

26. a

27. b

Capítulo 6

Página 232

Para pensar e discutir

1. Quadrados e retângulos.

2. Sim.

3. Sim.

Página 233

Para pensar e discutir

2. Sim; sim.

3. 45° e 135°

Página 236

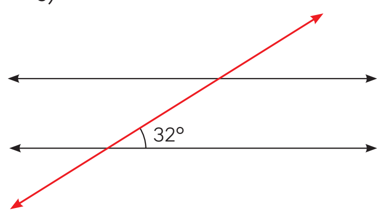
Atividades

1.

a) Ângulos que somam 90°.

b) Ângulos que somam 180°.

c)



Acervo editora

d) Duas.

3.

a) 6 minutos
b) 67,5°; 67° 15′
c) 1° 10′ 10″

5.

a) 180°
b) 45°

6.

a) 90°
b) NO ou SO.

7.

a) 90° (às 15 h) e 120° (às 16 h)
b) 360°; 30°
c) 15°; 180°

Página 237

Para pensar e discutir

2. Aproximadamente 40,72 m^2.

Página 240

Para pensar e discutir

1. Sim. **2.** Sim.

Página 241

Para explorar

3.

a) Sim.
b) Não.
c) Sim.
d) Não.
e) Sim.
f) Sim.
g) Sim.

Atividades

8.

a) Sim.
b) $x = 24$ cm; $y = 13{,}5$ cm

9.

a) $\frac{1}{2}$
b) Sim.

10.

a) Sim.
b) $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}$, respectivamente

Página 242

11.

a) Sim.
b) Sim.

12.

a) Cada 1 cm no desenho corresponde a 2 000 cm da imagem real.
b) 1 125 m^2

15. d **16.** b **17.** d

Página 243

Para pensar e discutir

1. Sim. **2.** Sim. **3.** Não.

Página 246

Para pensar e discutir

1. Sim.
2. Quadrilátero: 360°; pentágono: 540°; hexágono: 720°.
3. 10 triângulos; 1 800°
4. 13 triângulos; 2 340°

Página 247

Para pensar e discutir

1. 360° **2.** 180° **3.** 180°

Página 249

Para explorar

1. a) 540°; b) 360°
2. a) 360°; b) 360°
3. a) 720°; b) 360°
4. a) 1.260°; b) 360°

Atividades

18.

a) 7
b) 5
c) 180°
d) $900° = 180° \cdot 5$

19.

a) O número de lados é igual ao número de triângulos.
b) Não.

Páginas 250-251

21.

a) 1 080° b) 1 440°

23. d **26.** b **29.** b
24. b **27.** b **30.** b
25. b **28.** b

Página 252

Para pensar e discutir

1. 120°
2. 135°; 90°
3. Sim.
4. Não.

Página 253

Para pensar e discutir

1. 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, 8°, 9°, 10°, 12°, 15°, 18°, 20°, 24°, 30°, 36°, 40°, 45°, 60°, 72°, 90°, 120°, 180° e 360°
2. 60°; 90°; 108°; 120°; 128,57°; 135°; 144°
3.

Polígono	Números de lados	Somas dos ângulos internos	Medida do ângulo interno
Triângulo	3	180°	60°
Quadrado	4	360°	90°
Pentágono	5	540°	108°
Hexágono	6	720°	120°
Heptágono	7	≅ 900°	≅ 128,6°
Octógono	8	1 080°	135°
Decágono	10	1 440°	144°

4. 60°, 90° e 120°

Páginas 255-256

Atividades

31.

a) A soma das medidas dos ângulos internos dos dois hexágonos com a medida do ângulo interno do pentágono não corresponde a 360°.
b) $x = 12°$

32.

a) 36; 72 cm
b) 6; 12 cm
c) 90; 4°
d) 30; 12°

33. Não. **36.** b **37.** e **38.** e

Página 258

Para pensar e discutir

3. 200 000 m^2

Página 260

Atividades

39.

a) Duplica. b) Quadruplica.

40.

a) 4 cm b) 24 cm^2 c) 12 cm^2

41. R$ 1.728,00

42. 2,25 m

43. b **44.** b **45.** b

Página 261

Para pensar e discutir

1. 74

3. 2 220 000 m^2

Página 262

Para pensar e discutir

2. Quadruplica.

Página 263

Atividades

46.

a) 24 cm^2 b) 24 cm^2 c) 24 cm^2

47.

a) 10 000 cm^2

b) 100 m

c) Alqueire do norte (27 225 m^2), alqueire mineiro (48 400 m^2), alqueire paulista (24 200 m^2) e alqueire baiano (96 800 m^2).

48.

a) Aproximadamente R$ 48.500,00 por hectare.

b) Aproximadamente R$ 4,85 por metro quadrado.

49. 14 m^2 **51.** 61,5 cm^2

53.

a) Aproximadamente 12 cm^2.

b) 12 cm^2

Página 264

Para pensar e discutir

1. Altura do triângulo.

2. $A = \frac{L \cdot r}{2}$

3. Se aproxima cada vez mais da medida *R*.

Página 265

Para pensar e discutir

1. R$ 2.562,50

Página 266

Atividades

54.

c) Aproximação do número π.

57.

a) Será reduzido pela metade.

b) Será reduzida pela quarta parte.

c) *k* em ambos os casos.

d) k^2

59.

a) Sim.

b) Sim.

c) A: 43,2°; B: 36°; C: 54°; D: 136, 8°; E: 90°.

d) E

Páginas 268-270

Análise e contexto

1. 15,795 he

2.

a) 25,13 m

b) 50,26 m^2

Atividades finais

1.

a) 360°

b) Quando somam 180°.

c) Sim.

d) Não.

e) Lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes.

f) $S_n = (n - 2) \cdot 180°$

g) 360°

h) $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ com $p = \frac{a + b + c}{2}$

2. 5 400 m^2

3. $\frac{256}{81}$

4. 44 m

Questões de vestibulares e Enem

5. c **11.** d

6. d **12.** d

7. b **13.** e

8. d **14.** e

9. b **15.** d

10. d

Referências

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
A obra aborda conceitos de Geometria Euclidiana Plana por meio da apresentação da teoria, da proposição de exercícios e de problemas e comentários.

BARBOSA, R. M. *Descobrindo padrões em mosaicos*. São Paulo: Atual, 1993.
O livro aborda a identificação e a criação de padrões em mosaicos de pavimentações planas à luz da Geometria Euclidiana.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2000.
O texto faz uma introdução à modelagem matemática e como ela pode ser feita com a Matemática elementar.

BRACARENSE, P. A. *Estatística aplicada às Ciências Sociais*. Curitiba: IESDE Brasil, 2018.
O livro apresenta como a Estatística pode contribuir para entender alguns indicadores utilizados pelas Ciências Sociais.

BRASIL. INEP. *Questionário do estudante*. Brasília, DF: INEP, 2022. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/questionario_estudante/questionarios_estudante_enade_2022.pdf. Acesso em: 22 abr. 2024.
O *site* apresenta um documento com um questionário socioeconômico utilizado pelo ENADE.

BRASIL. Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia. *Portaria nº 590 de 2 de dezembro de 2013*. [Brasília, DF]: Inmetro, 2013. Disponível em: http://www.inmetro.gov.br/legislacao/rtac/pdf/RTAC002050.pdf. Acesso em: 6 fev. 2024.
Portaria referente à atualização do Quadro Geral de Unidades de Medida adotado pelo Brasil.

BRASIL. *Lei nº 12.651, de 25 de maio de 2012*. Dispõe sobre a proteção da vegetação nativa. Brasília, DF: Presidência da República, 2012. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2012/lei/l12651.htm. Acesso em: 22 mar. 2024.
Lei de Proteção da Vegetação Nativa, conhecida como Novo Código Florestal, aprovada em 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 7 fev. 2024.
Documento que apresenta os Temas Contemporâneos Transversais e sua contextualização no processo histórico da educação no Brasil.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: propostas de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 7 fev. 2024.
Documento que apresenta sugestões de como implementar os Temas Contemporâneos Transversais no dia a dia da escola.

BRASIL. Ministério da Integração e do Desenvolvimento Regional. *Consumo consciente da água é base para um futuro sustentável*. [Brasília, DF]: MIDR, 13 jan. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/dnocs/pt-br/assuntos/noticias/consumo-consciente-da-agua-e-base-para-um-futuro-sustentavel. Acesso em: 2 abr. 2024.
O texto apresenta dicas de como usar a água de forma consciente, e preservar os mananciais.

BRASIL. Fundação Nacional dos Povos Indígenas. *Demarcação.* Brasília, DF: Funai, [20--]. Disponível em: https://www.gov.br/funai/pt-br/atuacao/terras-indigenas/demarcacao-de-terras-indigenas. Acesso em: 9 set. 2024.
No texto, são apresentadas as modalidades de terras indígenas, de acordo com a legislação vigente.

BRASIL. Secretaria de Comunicação Social. *IBGE*: desemprego recua em oito das 27 UFs no segundo trimestre. Brasília, DF: Secom, 15 ago. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/secom/pt-br/assuntos/noticias/2023/08/ibge-desemprego-recua-em-oito-das-27-ufs-no-segundo-trimestre-de-2023-e-se-mantem-estavel-nas-demais. Acesso em: 28 abr. 2024.
O texto apresenta dados divulgados pelo IBGE mostrando redução da taxa de desocupação do país.

CABRAL, U. DE 2010 a 2022, população brasileira cresce 6,5% e chega a 203,1 milhões. *Agência IBGE Notícias*, [Rio de Janeiro], 28 jun. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/37237-de-2010-a-2022-populacao-brasileira-cresce-6-5-e-chega-a-203-1-milhoes. Acesso em: 11 set. 2024.
O *site* apresenta dados do Censo 2022 relativos ao crescimento da população brasileira.

CAUSA mortis: o sucesso e o fracasso das empresas nos primeiros cinco anos de vida. *Sebrae*, São Paulo, 2014. Disponível em: https://sebrae.com.br/Sebrae/Portal%20Sebrae/UFs/SP/Anexos/causa_mortis_2014.pdf. Acesso em: 7 fev. 2024.
Apresenta os resultados de pesquisa sobre o fracasso das empresas nos cinco primeiros anos de vida.

DE 2010 a 2022, população brasileira cresce 6,5% e chega a 203,1 milhões. *Agência IBGE Notícias*, [Rio de Janeiro], 28 jun. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/37237-de-2010-a-2022-populacao-brasileira-cresce-6-5-e-chega-a-203-1-milhoes. Acesso em: 22 abr. 2024.
O texto trata do aumento da população brasileira com base nos dados apresentados pelo Censo de 2022.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática elementar*: Geometria Plana. São Paulo: Atual, 2013. v. 9.
A Geometria Plana é abordada nos capítulos iniciais dessa obra por meio do estudo posicional das figuras geométricas e, nos capítulos finais, por meio de um tratamento métrico que envolve o cálculo de perímetros e áreas dessas figuras.

EVOLUÇÃO do IDH do Brasil 2010-2021. *Atlas Socioeconômico Rio Grande do Sul*, Porto Alegre, 2022. Disponível em: https://atlassocioeconomico.rs.gov.br/midia/imagem/graf-2010-2021-evolucao-idh-br. Acesso em: 24 abr. 2024.
O *site* apresenta os valores de IDH do Brasil entre 2010 e 2021 dispostos em um gráfico de linhas que pode ser utilizado como exemplo para a abordagem de gráficos de linhas e indicadores socioeconômicos.

HUFF, D. *Como mentir com estatística*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.
Esse livro aborda o mau uso da estatística para maquiar dados e validar opiniões ao questionar o grau de confiança que devemos ter nas análises estatísticas.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática elementar*: conjuntos [e] funções. São Paulo: Atual, 1985. v. 1.
O livro introduz o conceito das funções polinomiais de 1º e 2º grau.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. *Panorama*: gráficos. Brasília, DF: IBGE, [20--]. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/. Acesso em: 25 abr. 2024.
Gráficos divulgados pelo IBGE com dados do Censo 2022 relativos à alfabetização da população brasileira.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. *Panorama*: mapas. Brasília, DF: IBGE, [20--]. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/mapas.html?localidade=&recorte=N2. Acesso em: 17 abr. 2024.
Mapa divulgado pelo IBGE com dados do Censo 2022 relativos à população brasileira.

KARLSON, P. *A magia dos números*. Porto Alegre: Globo, 1961.
Nessa obra, o autor apresenta uma visão da história da Matemática desde seus primórdios, com o ato de contar e organizar áreas, até a relação entre números e Geometria.

KASNER, E.; NEWMAN, J. *Matemática e imaginação*. Tradução: Jorge Fortes. Rio de Janeiro: Zahar, 1968.
O livro desmistifica a complexidade da Matemática e apresenta fatos curiosos – tal como a invenção do número googol (leia-se: “gugol”), que deu origem ao famoso *site* de buscas pela internet.

LAUNAY, M. *A fascinante história da Matemática*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.
O autor apresenta uma linha do tempo da Matemática focando a relação entre sociedade e conhecimento.

LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1997. v. 1. A obra aborda os conjuntos numéricos e as funções.
As demonstrações são apresentadas com rigor e criatividade.

LIMA, E. L. *Medida e forma em Geometria*: comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.
A Geometria é introduzida com base no contexto histórico, abordando o fato de que a determinação de áreas e volumes está entre as primeiras noções geométricas que despertaram o interesse da humanidade.

LIMA, E. L. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
O foco é o desenvolvimento das funções de uma variável estudada sem uso de cálculo infinitesimal. A obra aborda noções de conjuntos, a ideia geral de função, os diferentes conjuntos numéricos e as diferentes classes de funções.

MACEDO NETO, M. C. de; GOMES, I. R. B.; GONDIM, P. C.; SOUZA, L. G. M. de. Desenvolvimento de um fogão solar com parábola fabricada em material compósito. *HOLOS*, [*s. l.*], v. 5, p. 117–135, 2011. Disponível em: https://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/653. Acesso em: 30 abr. 2024.
Apresentação de alguns processos de fabricação e montagem de um fogão solar, bem como os resultados de testes para determinar a temperatura de contato e os tempos de cozimento de alguns tipos de alimentos.

MEDIDA de armazenamento de informações. *In*: *GCF Global*. [*S. l.*, 20--]. Disponível em: https://edu.gcfglobal.org/pt/conhecimentos-tecnologicos/medidas-de-armazenamento-de-informacoes/1/. Acesso em: 6 fev. 2024.
Esse artigo esclarece como se relacionam as unidades de medida que permitem calcular a capacidade de armazenamento de informações ou processamento de dados em um computador.

MOMENTO de ação global para as pessoas e o planeta. *Fórum Empresarial de Inovação e Desenvolvimento*, Brasília, DF, 21 dez. 2017. Notícias. Disponível em: https://forumdoacre.org.br/momento-de-acao-global-para-as-pessoas-e-o-planeta/. Acesso em: 6 fev. 2024.
O texto faz referência a uma iniciativa global liderada pela ONU e diversos países que estão interessados na melhoria de vida da população mundial.

NAÇÕES UNIDAS BRASIL. *População mundial deve chegar a 9,7 bilhões de pessoas em 2050*, diz relatório da ONU. Brasília, DF: 17 jun. 2019. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/83427-popula%C3%A7%C3%A3o-mundial-deve-chegar-97-bilh%C3%B5es-de-pessoas-em-2050-diz-relat%C3%B3rio-da-onu. Acesso em: 10 jan. 2024.
Texto sobre o relatório da ONU que apresenta dados relativos à população mundial.

OLIVEIRA, R. Tabela IPCA 2024: Índice oficial de inflação atualizado. *Mobills*, [*s. l.*], 10 abr. 2024. Disponível em: https://www.mobills.com.br/tabelas/ipca/. Acesso em: 24 abr. 2024.

Tabela que apresenta o IPCA acumulado e o IPCA de abril de 2024.

PIB: saiba o que é e como é calculado. *Finance One*, [*s. l.*], 11 mar. 2020. Disponível em: https://financeone.com.br/pib-o-que-e-e-como-e-calculado/. Acesso em: 19 abril 2024.

No texto é apresentado o significado do PIB (Produto Interno Bruto) e como ele é calculado.

POPULAÇÃO indígena no Brasil. *UOL*, [São Paulo], c2024. Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/geografia/a-populacao-indigena-no-brasil.htm. Acesso em: 6 fev. 2024.

Nessa página, são encontrados dados e informações sobre os povos indígenas no Brasil.

POPULAÇÃO mundial deve crescer em 2,2 bilhões até 2050 e chegar a 11,9 bilhões de seres humanos. *Grafitti News*, [*s. l.*], 2 jul. 2022. Disponível em: https://grafittinews.com.br/populacao-mundial-deve-crescer-em-22-bilhoes-ate-2050-e-chagar-a-119-bilhoes-de-seres-humanos/. Acesso em: 2 fev. 2024.

Esse artigo apresenta dados do relatório da ONU Habitat, divulgado em 2022, sobre o crescimento da população urbana global.

QUAIS são as 20 maiores economias da América Latina? Veja a posição do Brasil. *Estado de S. Paulo*, São Paulo, 17 fev. 2024. Disponível em: https://www.estadao.com.br/economia/brasil-america-latina-ranking-20-maiores-economias-2023-fmi-nprei/. Acesso em: 20 abr. 2024.

Texto que apresenta as 20 maiores economias da América Latina e a posição do Brasil.

RELEMBRE os maiores artilheiros da Copa do Mundo da FIFA. FIFA, [Zurique], 9 nov. 2023. Disponível em: https://www.fifa.com/fifaplus/pt/tournaments/mens/worldcup/articles/maiores-artilheiros-copa-do-mundo-lista. Acesso em: 26 abr. 2024.

Texto que apresenta os maiores artilheiros da Copa do Mundo da FIFA.

SUÍÇA e Noruega têm os melhores índices de Desenvolvimento Humano do mundo; Somália e Sudão do Sul, os piores. Veja o *ranking*. *G1 Mundo*, [São Paulo], 13 mar. 2024. Disponível em: https://g1.globo.com/mundo/noticia/2024/03/13/suica-e-noruega-tem-os-melhores-indices-de-desenvolvimento-humano-do-mundo-somalia-e-sudao-do-sul-os-piores-veja-ranking.ghtml. Acesso em: 25 abr. 2024.

Texto que apresenta o ranking de Desenvolvimento Humano no mundo.

WHEELAN, C. *Estatística*: o que é, para que serve, como funciona. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

O autor mostra que, com os dados certos e as ferramentas estatísticas adequadas, é possível compreender conceitos estatísticos importantes para a vida cotidiana.

Referências complementares

CARZOLA, I. *et al*. (org.). *Estatística para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental*. Brasília, DF: SBEM, 2017. v. 9. E-book. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ebook_sbem.pdf. Acesso em: 22 abr. 2024.

O livro apresenta exemplos de pesquisas estatísticas envolvendo o ciclo investigativo completo. Atende a públicos da educação básica à universidade.

LAUNAY, M. *A fascinante história da Matemática*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.

Esse livro mostra as ideias que provavelmente, desde a Pré-História, inspiraram o avanço da humanidade usando a Matemática.

RIBEIRO, L.; FOSS, L.; CAVALHEIRO, S. Entendendo o pensamento computacional. *In*: CORNELL UNIVERSITY. Ithaca: Cornell University, 2 jul. 2017. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1707.00338.pdf. Acesso em: 19 abril 2024.

O texto apresenta ao estudante o pensamento computacional e o objetivo da computação.

ROCHA FILHO, R. C. *Grandezas e unidades de medida*: o Sistema Internacional de Unidades. São Paulo: Ática, 1988.

Essa obra é uma referência importante sobre grandezas e unidades de medida.

ROZENBERG, I. M. *O Sistema Internacional de Unidades*: SI. 3. ed. rev. e aum. São Paulo: Instituto Mauá de Tecnologia, 2006.

Esse livro apresenta o Sistema Internacional de Unidades e um histórico dos padrões e das técnicas de medida desde a Antiguidade.

SANTOS, T. Tipos de gráficos. *In*: EDUCA MAIS BRASIL. [*S. l.*], 30 jan. 2019. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/tipos-de-graficos. Acesso em: 22 abr. 2024.

Nesse artigo, são apresentados os tipos de gráfico e seus principais componentes.

Sites

DICAS DE PROGRAMAÇÃO. [*S. l.*]: Gustavo Furtado, c2023. Disponível em: https://dicasdeprogramacao.com.br/. Acesso em: 22 abr. 2024.

Essa página da internet apresenta várias dicas de programação e desenvolvimento de softwares.

PROGRAMAÊ! São Paulo: Fundação Telefônica Vivo, [20--]. Disponível em: https://www.fundacaotelefonicavivo.org.br/programae/. Acesso em: 22 abr. 2024.

O conteúdo do *Programaê!* está disponível gratuitamente e aborda temáticas de pensamento computacional, programação plugada e desplugada, robótica e narrativas digitais.

INTERAÇÃO

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

MATEMÁTICA ▸ APRENDENDO E RESOLVENDO PROBLEMAS

ADILSON LONGEN

- Doutor em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Mestre em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Professor do Ensino Médio

LUCIANA TENUTA DE FREITAS (COORD.)

- Mestre em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-Minas)
- Bacharel e licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
- Assessora pedagógica da Educação Básica, com atuação na formação de professores

1ª edição
São Paulo, 2024

Editora do Brasil

"Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada"

VOLUME 1

ENSINO MÉDIO – 1º ANO
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – MATEMÁTICA

CARA PROFESSORA, CARO PROFESSOR,

Para que as aprendizagens escolares capacitem os jovens a atuar, com competência e responsabilidade, na sociedade em que vivem, é importante que se apropriem da Matemática como uma das diversas formas de leitura da realidade e utilizem-na como ferramenta que os auxilie a intervir, de forma consciente e responsável, nessa realidade.

Com esse objetivo, apresentamos a você esta obra, que tem o estudante como centro do processo de aprendizagem, em uma proposta interativa e aberta de ensino de Matemática. Os diversos tipos de atividade propiciam aos estudantes a discussão de ideias, o desenvolvimento de hipóteses, a argumentação, a elaboração de problemas, o desenvolvimento de projetos, entre outros, enquanto desenvolvem tanto as competências gerais como as específicas de Matemática. Dessa forma, a sala de aula passa a ser um espaço vivo, no qual as ideias matemáticas são discutidas, confrontadas, validadas ou refutadas o tempo todo.

Cabe a você ser o(a) organizador(a)/mediador(a) desse processo estimulando as discussões, promovendo debates, orientando as reformulações, valorizando as produções e o posicionamento dos estudantes, ao mesmo tempo que contribui para o desenvolvimento integral deles.

Este Manual foi elaborado visando orientá-lo nesse processo. Esperamos que você possa aproveitar nossas sugestões de forma criativa, desenvolvendo e ampliando o trabalho de acordo com suas possibilidades e com a realidade em que está inserido(a).

Os autores

SUMÁRIO

A etapa do Ensino Médio na BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) está estruturada com base em dez competências gerais que devem ser desenvolvidas pelos estudantes desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

Competências gerais

Competências gerais

1 **Conhecimento**
Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2 **Pensamento científico, crítico e criativo**
Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3 **Repertório cultural**
Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4 **Comunicação**
Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5 **Cultura digital**
Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6 **Trabalho e projeto de vida**
Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7 **Argumentação**
Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8 **Autoconhecimento e autocuidado**
Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9 **Empatia e colaboração**
Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10 **Responsabilidade e cidadania**
Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 9. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

As quatro áreas de conhecimento estabelecidas para o Ensino Médio estão definidas por meio de competências específicas que se articulam às competências gerais. No caso da área de Matemática e suas Tecnologias são cinco competências específicas, e cada uma delas se desdobra em um conjunto de habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo dos três anos do Ensino Médio.

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 531. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

Distribuídas nessas cinco competências específicas encontram-se 43 habilidades sem uma ordem preestabelecida, porque, diferentemente do Ensino Fundamental, seus códigos não indicam uma progressão ano a ano, o que favorece a flexibilidade dos currículos e das propostas pedagógicas das escolas.

O desenvolvimento de competências e habilidades

Por meio do trabalho proposto nesta coleção, organizada em 3 volumes, pretendemos que os estudantes desenvolvam todas as competências gerais e específicas, além das habilidades de Matemática e suas Tecnologias, previstas na BNCC.

As competências gerais dizem respeito à formação integral dos estudantes e estão relacionadas tanto a seu desenvolvimento cognitivo quanto ao socioemocional.

Nesta obra, as competências gerais são desenvolvidas por meio dos diversos tipos de atividades propostos. A **competência geral 2**, por exemplo, que se refere ao exercício da curiosidade intelectual por meio da investigação, da análise crítica, da imaginação e da criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas, é mobilizada em vários momentos, uma vez que a resolução de problemas e a investigação matemática, que serão detalhadas a seguir, estarão presentes ao longo de todo o trabalho.

Ao resolver as atividades em grupos ou em duplas discutindo ideias, argumentando com base em fatos e informações confiáveis e confrontando diferentes pontos de vista, os estudantes mobilizam a **competência geral 7**. Nesse processo desenvolvem também a **competência geral 4**, ao usar diferentes formas de linguagem para se expressar. As atividades em grupos, por terem a capacidade de gerar conflitos, são uma oportunidade para o exercício democrático e a criação de consensos. Esse exercício favorece a construção de diálogos e o desenvolvimento de atitudes e valores como empatia, respeito e cooperação que são pressupostos da **competência geral 9**. Na parte específica deste manual estão apontadas e exemplificadas as competências gerais trabalhadas em cada volume, capítulo por capítulo.

Já as habilidades se relacionam ao “saber fazer”. Elas são associadas a verbos como identificar, planejar, analisar, investigar, interpretar, construir, entre outros. Essas habilidades, associadas aos demais conhecimentos que se aprendem ao desenvolvê-las, como as próprias competências especificas da área de Matemática e as competências gerais, formam o conjunto daquilo que se espera do estudante e de seu desenvolvimento ao final do Ensino Médio.

De modo resumido, as habilidades que integram a **competência específica 1** estão relacionadas aos contextos externos à Matemática. Na **competência específica 2** estão as habilidades que se relacionam ao contexto social. A **competência específica 3** envolve habilidades que se referem à resolução de problemas e à modelagem matemática, e na **competência específica 4** estão agrupadas aquelas que dizem respeito a diferentes representações para um mesmo objeto matemático. E, por fim, na **competência específica 5** encontram-se as habilidades que envolvem um tratamento mais formal da Matemática. Assim agrupadas, habilidades que se referem a um mesmo conteúdo podem ser associadas a diferentes competências específicas. Esse é o caso, por exemplo, do estudo das probabilidades, que está ligado às competências específicas 1, 3 e 5 por meio das habilidades **EM13MAT106**, **EM13MAT311**, **EM13MAT312** e **EM13MAT511**.

Na parte específica deste manual estão indicadas as habilidades de Matemática trabalhadas em cada capítulo, com os respectivos exemplos.

Além disso, as possibilidades de trabalho interdisciplinar que ocorrem ao longo dos capítulos, nas mais diversas seções, e também na parte **Conexões e Projetos** que se encontra ao final de cada volume, contribuem para o desenvolvimento de competências de outras áreas de conhecimento, em especial da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Pressupostos teórico-metodológicos

A Matemática tem diferentes aplicações na vida das pessoas e estabelece relações com diversas áreas. É papel da escola mostrar essas relações, que podem ou não ser evidentes. Além disso, o trabalho com a Matemática deve levar os jovens a compreender a origem histórica de alguns conceitos, verificar suas aplicações nas diferentes expressões da área de Linguagens, nas Ciências Humanas e Sociais e, em especial, nas Ciências da Natureza, no campo da Biologia, da Física e da Química; enfim, perceber que a Matemática marca sua presença na vida das pessoas.

Constatar essa presença, fazer bom uso dela e aprender Matemática de maneira reflexiva, investigativa e valorizando os conhecimentos prévios é um caminho que auxilia o estudante tanto dentro quanto fora da escola.

O letramento matemático

De acordo com o que propõe a BNCC, o desenvolvimento das habilidades e competências no Ensino Médio está articulado às "aprendizagens essenciais estabelecidas para o Ensino Fundamental" devendo consolidá-las, ampliá-las e aprofundá-las.

Para tanto devemos observar que:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição) (Brasil, 2018, p. 266).

E ainda que:

> A área de Matemática, no **Ensino Fundamental**, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No **Ensino Médio**, na área de **Matemática e suas Tecnologias**, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (Brasil, 2018, p. 471).

Visando dar continuidade à proposta de desenvolvimento do letramento matemático do Ensino Fundamental, é essencial promover no Ensino Médio a consolidação, o aprofundamento e a ampliação do trabalho com as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, com foco na formulação e resolução de problemas em contextos variados, fazendo uso das ferramentas matemáticas e dos conhecimentos adquiridos previamente.

O documento afirma também que:

> Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior (Brasil, 2018, p. 528).

Assim, fica evidente o fato de que saber matemática não se resume ao estudo isolado de conteúdos específicos ou aos procedimentos de cálculo, mas está ligado principalmente ao desenvolvimento do letramento matemático. Isso significa ser capaz de usar a matemática para argumentar claramente sobre determinada situação, para defender seus pontos de vista, para escolher o modelo matemático mais adequado que resolve um problema, ter autonomia para raciocinar sobre caminhos a serem escolhidos, priorizar questões a serem resolvidas, comunicar e ler com propriedade as informações que lhe são apresentadas. A matemática tecnicista, que perdurou na escola por muito tempo, hoje dá lugar à valorização do pensamento matemático e do raciocínio sobre os fatos, sejam eles relacionados ao cotidiano do estudante ou a descobertas que ampliarão seu repertório.

Ao se apresentar dessa forma, a BNCC estimula você, professor, e os estudantes a buscar maneiras diferentes de ensinar e aprender Matemática, promovendo o protagonismo, a troca de ideias e o compartilhamento de estratégias, além da autonomia dos estudantes para avançar em suas aprendizagens escolhendo estratégias próprias de resolução dos problemas que encontrarem.

Sob essa perspectiva, os objetivos que fundamentam a proposta didático-pedagógica desta coleção, a seguir explicitada, visam ao letramento matemático e ao desenvolvimento da autonomia e do protagonismo dos estudantes por meio da resolução de problemas e da investigação matemática.

A resolução de problemas e a investigação matemática

Resolver problemas é uma prática diária, cotidiana e envolve os mais diversos tipos de situação. Assim como Sternberg (2001), partimos do pressuposto de que problema é toda situação inédita que leva o estudante a pensar e utilizar ferramentas mentais conhecidas por ele para se chegar a uma solução.

Para resolver um problema é necessário levantar hipóteses, discutir possibilidades, criar estratégias com base em conhecimentos prévios identificados visando atingir novos objetivos. Por mais simples que se configure, todo problema desafia quem o enfrenta, fomentando o gosto pela descoberta de formas para resolvê-lo. Ao sentir-se desafiado, o estudante desprende um esforço cognitivo que lhe possibilita ir além. Junto do trabalho de resolução de problemas, a investigação matemática estimula a busca por soluções criativas, inovadoras ou não, para situações que façam parte do cotidiano dos estudantes, dentro ou fora da escola.

Quando analisamos o trabalho em sala de aula sob o viés da resolução de problemas, entendemos que o desenvolvimento do pensamento matemático sempre parte de um problema e este é o meio pelo qual a Matemática será apreendida. Ao longo do processo histórico de constituição dos conceitos e conhecimentos matemáticos, o avanço dos estudos e as descobertas foram ocasionados pela necessidade de solucionar problemas nos mais variados contextos. Para resolvê-los, o processo de investigação ganhou força e se configurou como um caminho importante para se chegar a conclusões sobre temas matemáticos. George Polya (1978) resume assim as etapas de resolução de um problema:

- Compreender o problema.
- Destacar informações e dados importantes do enunciado para sua resolução.
- Elaborar um plano.
- Executar o plano
- Conferir resultados e estabelecer nova estratégia, se necessário, até chegar a uma solução aceitável.

Ao longo desta obra, além do trabalho fundamentado na resolução de problemas, várias atividades tiveram como base a proposta da investigação matemática, em que os estudantes buscam a solução para situações que podem envolver um ou mais problemas. No trabalho com investigação matemática, o caminho a ser percorrido é mais importante do que a meta final. Nesse sentido, cabe a você acompanhar o estudante ao longo de todo o processo.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira:

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2005, p. 23).

O seu papel, professor, tanto no campo da resolução de problemas quanto nas investigações matemáticas é saber dosar e fazer as perguntas certas nos momentos certos, sem dar respostas, criando um movimento de construção do espírito investigativo, com a intenção de levar os estudantes a alcançar conquistas maiores pelos próprios meios, promovendo, assim, a autonomia e a busca pelo aprendizado.

Os processos de investigação matemática estão estreitamente relacionados ao desenvolvimento da **competência específica 5** da área de Matemática e suas tecnologias proposta na BNCC para o Ensino Médio:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 531).

A proposta desta obra é recriada a todo momento, de acordo com os caminhos traçados por você e pelo próprio estudante, por isso é essencial que a criação de processos investigativos aconteça de maneira eficiente, visando manter a atenção e a curiosidade do estudante de forma efetiva, de acordo com o que você propõe e pelas descobertas próprias e da turma.

Diante do que foi exposto anteriormente cabe a você, professor, com base na realidade de sua turma e das possibilidades apresentadas nas atividades propostas em cada capítulo desta obra, elaborar seu planejamento alinhado ao Projeto Político Pedagógico da escola e ao currículo estadual, visando uma formação matemática consistente, que possibilite aos jovens usar com propriedade seus conhecimentos matemáticos pela vida afora.

O papel do erro

Os estudantes devem desenvolver o hábito de encarar suas dificuldades e entender que os erros são parte integrante do processo de aprendizagem. O próprio processo de investigação matemática favorece essa percepção: nele o estudante constrói, reconstrói, avalia e reavalia a situação quantas vezes for necessário. Ao explicar os próprios erros, os jovens se sentem desafiados a rever o percurso adotado, o que se torna mais uma oportunidade de aprendizagem.

Além disso, somente com a prática o estudante aprende a lidar naturalmente com o erro, com a confiança de que é possível explorar as ideias matemáticas de diferentes formas, por diferentes caminhos, partilhando com seus pares e discutindo estratégias de resolução para os problemas propostos. Para isso, é preciso que ele se sinta à vontade para dialogar com você e com os colegas a respeito das ideias matemáticas que forem surgindo, sabendo apresentar suas contribuições com argumentos cada vez mais consistentes, além de saber ouvir e mudar de ideia quando for o caso.

Essas oportunidades estarão presentes ao longo de toda a coleção por meio de questões para serem discutidas em duplas ou em pequenos grupos, além do desenvolvimento de projetos.

O trabalho em grupo

Na perspectiva da resolução de problemas e da investigação matemática que orientam o trabalho desta coleção, a realização das atividades em duplas ou em pequenos grupos é fundamental. Esse tipo de atividade exige uma organização da turma que difere do modelo enfileirado, em que o professor é o protagonista de todo o processo.

Em seu livro *Planejando o trabalho em grupo*, Cohen e Lotan (2017) defendem que, quando você, professor, propõe uma atividade em grupo e permite que os estudantes se esforcem sozinhos, inclusive cometendo erros, delega autoridade a eles e essa autoridade é a primeira característica-chave do trabalho em grupo.

A construção de um ambiente propício a esse tipo de trabalho, inclusive em relação à forma de constituição dos grupos, pode ocorrer com diálogo sobre os combinados que envolvem a relação entre professor e estudante e entre os próprios estudantes. Além do estímulo a serem autônomos na tomada de decisões, é seu papel fazer com que a turma coloque em jogo as decisões tomadas, vivenciando-as.

De acordo com as autoras, a segunda característica-chave do trabalho em grupo é que gere aprendizagens colaborativas e que a construção dos conhecimentos e soluções para os problemas sejam realizados coletivamente, e isso vai depender de que a atividade seja pensada/planejada com essa intenção.

A terceira característica-chave está relacionada, portanto, à natureza das atividades propostas.

> Se o professor quer que os alunos se comuniquem de maneira autônoma e produtiva, eles vão precisar ter algo a respeito do que irão conversar. Se o professor quer que os alunos se engajem em conversas substantivas e de alta qualidade, a atividade precisa estabelecer problemas complexos ou dilemas, ter diferentes soluções possíveis e contar com a criatividade (Cohen; Lotan, 2017, p. 2-3).

Nessa perspectiva, trabalhando em duplas ou em pequenos grupos por meio de atividades diversificadas, que envolvem discussões com os colegas, o estudante tem a oportunidade de levantar hipóteses, argumentar, defender suas ideias, mudar de opinião ao ouvir a argumentação do colega e, assim, desenvolver a empatia e o respeito pelo outro, o que contribui para sua formação humana. Esse exercício de respeito às opiniões dos outros, da valorização das diversas ideias apresentadas, com reflexão constante sobre o que o outro pensa, sem pré-julgamentos, desenvolve a escuta ativa e as **competências gerais 4**, **7** e **9** da BNCC relacionadas ao uso de diferentes linguagens, à argumentação e ao exercício da empatia, do diálogo, da resolução de conflitos e da cooperação, respectivamente.

Ao estudante que desenvolve um trabalho em grupo é dada a oportunidade de reconhecer as próprias emoções frente a opiniões contrárias às suas, ao ser questionado por seu posicionamento. Conflitos de opiniões são constantes na vida em sociedade e o trabalho em grupo se configura como uma experiência única no ambiente escolar, observado sob essa perspectiva, e promove o desenvolvimento integral do estudante.

Quando professores e estudantes compreendem a potencialidade de aprendizagem do trabalho em grupo, e incorporam a cultura desse tipo de trabalho, os resultados se efetivam em um ambiente envolto em compreensão, soluções de conflitos, com orientações claras, perguntas pertinentes, bom convívio, respeito e com parceria entre todos os envolvidos no processo.

Uma sugestão para esse tipo de trabalho, inclusive envolvendo turmas com número grande de estudantes, é constituir grupos permanentes para determinado período, um mês por exemplo. Dessa forma, esse mesmo grupo se reúne sempre que forem propostas atividades coletivas. Entre as vantagens desse tipo de organização está a facilidade de você ficar mais próximo dos estudantes para observar suas necessidades e fazer intervenções em relação a conhecimentos, habilidades, atitudes e valores. Seu olhar para o grupo como um todo possibilita a observação mais aguçada de cada estudante.

Nesse tipo de organização envolvendo grupos permanentes, as possibilidades de intervenção que atendam às necessidades individuais dos estudantes também se intensificam. Por exemplo, enquanto todos os grupos desenvolvem determinada atividade, você pode pedir a um ou mais estudantes que tenham necessidades comuns de aprendizagem, que se reúnam com você ou com estudantes que não apresentaram a mesma dificuldade, para que haja um atendimento mais específico. A reorganização dos grupos periodicamente, inclusive com a participação dos estudantes para definir critérios de escolha dos integrantes dos novos grupos, é fundamental para que desenvolvam competências ligadas à incorporação de direitos e responsabilidades, ponderação sobre consequências, participação social e liderança, entre outros.

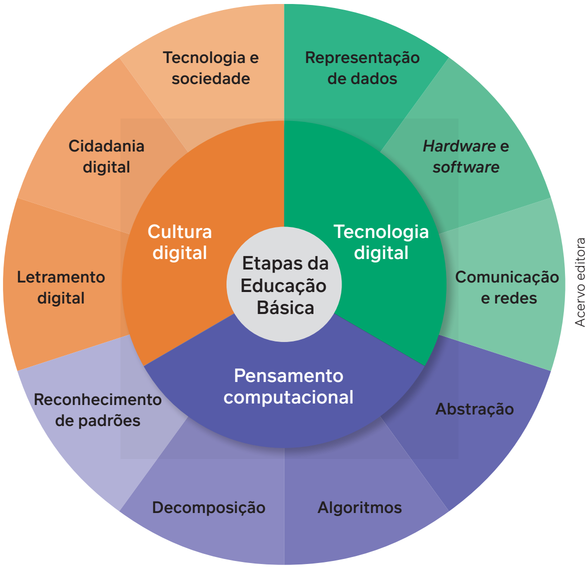
O trabalho em grupo, incorporado como cultura, transforma consideravelmente os indivíduos de maneira positiva porque proporciona verdadeiro desenvolvimento pessoal e coletivo. A escola tem a oportunidade de tornar esses momentos propícios para a construção de uma sociedade mais empática, de respeito entre todos, a partir do momento em que os estudantes conseguem fazer um paralelo entre suas práticas ao longo do processo de aprendizagem e as atividades cotidianas.

Nesse modelo de ensino, o professor torna-se coadjuvante nos processos de ensino e aprendizagem, permitindo aos estudantes o protagonismo de seu aprendizado.

O pensamento computacional

Diferentemente do que se possa imaginar, o pensamento computacional não está necessariamente associado à programação de computadores, ao uso de tecnologias ou à comunicação pela internet.

Veja no esquema a seguir o que se entende por cultura digital, tecnologia digital e pensamento computacional nas etapas da Educação Básica.



O pensamento computacional se relaciona aos processos de pensamento utilizados para modelar problemas e resolvê-los de forma eficiente, determinando soluções genéricas para classes inteiras de problemas e pode ser decomposto em quatro etapas (Wing, 2021):

- decomposição – divisão de um problema em partes menores;
- reconhecimento de padrões – identificação de um ou mais padrões que geram o problema;
- abstração – seleção dos dados essenciais de um problema;
- algoritmo – estabelecimento de uma sequência ou ordem em que o problema será resolvido.

De acordo com a BNCC (Brasil, 2018, p. 474), o pensamento computacional "envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos".

Assim, o trabalho voltado para a autonomia do sujeito, por meio da investigação matemática e da resolução de problemas, conforme proposto nesta coleção, contém elementos essenciais para o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes.

Avaliação

Avaliar é uma ação cognitiva de que dispomos para tomar decisões e que nos orienta se estamos nos aproximando ou nos distanciando dos objetivos que queremos alcançar. A avaliação é um compromisso coletivo que a escola deve assumir para a garantia do direito à aprendizagem e à formação integral das juventudes.

Mudanças na concepção do ensino e da aprendizagem e na abordagem dos conteúdos implicam repensar as finalidades da avaliação, o que e como se avalia, em um trabalho cotidiano que pressupõe uma variedade de situações de aprendizagem, inclusive coletivas.

Quando se trabalha na perspectiva do desenvolvimento de competências e habilidades, o conceito de avaliação se amplia e deve levar em conta possibilidades de avaliar aprendizagens que vão além dos tópicos de conteúdo específico. Várias competências e habilidades de Matemática dizem respeito à investigação, à discussão de ideias, à capacidade de argumentação que demandam outros tipos de avaliação além das tradicionais **avaliações somativas**, que visam medir o desempenho dos estudantes em relação aos conteúdos, por meio do instrumento prova ou exame, ao final de um ciclo (bimestral, trimestral, semestral).

O compromisso com a formação integral dos estudantes e com o desenvolvimento de competências torna clara a superação das tradicionais **avaliações somativas** e **comparativas** (a referência é a comparação com base no desempenho dos outros estudantes) como norma escolar, para uma perspectiva da diversidade nas avaliações. Isso significa a adoção de modelos e instrumentos diversos de avaliação da aprendizagem que dê conta da complexidade e diversidade dos sujeitos e de como eles aprendem. A **avaliação ipsativa**, por exemplo, se refere ao estudante, que é comparado consigo mesmo, levando em conta aspectos como o esforço, o contexto em que o trabalho se desenvolve e os seus progressos.

Ao discutir a avaliação da aprendizagem, Andrade (2021) traduz diversas abordagens que a escola adota ou pode passar a adotar em suas práticas avaliativas de acordo com o foco, o propósito, a referência de comparação e os atores que protagonizam a ação de avaliar.

Abordagem	Foco	Propósito	Referência de comparação	Figura-chave
Avaliação **da** aprendizagem	Resultados somativos Metáfora: é como uma foto	Juízos sobre a posição, a promoção e as credenciais de cada estudante	Outros estudantes. Padrões ou expectativas de aprendizagem do currículo e de avaliações externas (ex.: SAEB, PISA)	Professor
Avaliação **para** aprendizagem	Processo de aprendizagem Metáfora: é como um filme	Informações para ajustes nas decisões, instruções didáticas e engajamento Devolutivas pedagógicas	Padrões ou expectativas de aprendizagem do currículo. Devolutivas do professor e entre pares	Professor, turma ou grupos de estudantes
Avaliação **como** aprendizagem		Automonitoramento, autocorreção e autoajuste	Objetivos pessoais e padrões do currículo	Estudante

Fonte: ANDRADE, J. P. *Aprendizagens visíveis*: experiências teórico-práticas em sala de aula. 1. ed. São Paulo: Panda Educação, 2021, p. 209.

A avaliação **da** aprendizagem, abordagem mais comum nas nossas escolas, está ligada à **avaliação somativa** e a critérios que se definem previamente, ou seja, as aprendizagens dos estudantes são analisadas em termos de critérios definidos.

A avaliação **para** aprendizagem nos diz muito sobre o modelo de **avaliação formativa**, que visa acompanhar o percurso de aprendizagem do estudante, gerando oportunidades de intervenção e retomadas durante a caminhada formativa. Esse tipo de avaliação propicia que tanto o professor como os estudantes possam identificar as necessidades de aprendizagem ao longo do processo e não só ao final dele.

Avaliação **como** aprendizagem dialoga com o que conhecemos por **autoavaliação**, que deve ser estimulada não somente do ponto de vista de o estudante reconhecer seus acertos e erros e "recalcular" a rota da aprendizagem, mas de tornar o próprio ato de avaliar objeto e objetivo de sua aprendizagem, contribuindo para o desenvolvimento de sua autonomia e confiança para vivenciar e enfrentar situações diversas dentro e fora da escola.

É importante ressaltar ainda a importância das **avaliações diagnósticas** que, independentemente dos tipos de instrumentos utilizados, devem auxiliá-lo na identificação do ponto de partida dos processos de ensino tendo como referência as aprendizagens ocorridas nos processos anteriores.

Para Frade, Val e Bregunci, esse tipo de avaliação:

> [...] é entendida também como a avaliação que ocorre ao longo dos processos de ensino e aprendizagem, visando a sua regulação. Ou seja, a avaliação diagnóstica pode ser entendida como aquela que verifica se o aluno aprendeu aquilo que lhe foi ensinado, a fim de identificar dificuldades de aprendizagem a serem superadas (Frade; Val; Bregunci, 2014, p. 39).

Ainda de acordo com as autoras, seja qual for a interpretação, a avaliação diagnóstica é parte de um percurso de aprendizagem cuja finalidade é delimitar pontos de partida e/ou de retomada para o ensino.

Cabe a você, professor, na elaboração do planejamento de uma etapa de trabalho, estabelecer momentos de avaliação prevendo, inclusive, um número de aulas para possíveis retomadas, de acordo com as necessidades de aprendizagem dos estudantes, evidenciadas nas avaliações.

Essas distintas abordagens podem e devem assumir um conjunto diverso de situações de aprendizagem e instrumentos de avaliação que sejam capazes de produzir evidências das aprendizagens que se espera que os estudantes construam.

Compartilhamos aqui alguns instrumentos e sua relação com as abordagens discutidas, condizentes com as características desta obra didática da área de conhecimento da Matemática, tanto de caráter formativo quanto de preparação para exames de larga escala.

- **Relatórios escritos**: contemplam o desenvolvimento descritivo, analítico e/ou explicativo de um processo criativo, investigativo e/ou de intervenção sociocultural. Ao longo dos capítulos de todos os volumes os estudantes produzem textos, nas mais diversas atividades, para comunicar ideias, fazer sínteses e expressar conclusões. Além disso, a última parte de cada volume desta obra, intitulada **Conexões & Projetos**, também contempla a produção de relatórios que expressam evidências das aprendizagens esperadas. Este tipo de relatório pode ser avaliado na perspectiva formativa, isto é, o docente acompanha sua produção ao longo do processo investigativo e apoia os estudantes na autorregulação das aprendizagens e no aprimoramento do relatório.
- **Observação informal** dos estudantes enquanto realizam a tarefa e apresentam suas conclusões à turma é parte cotidiana da avaliação formativa no processo de aprendizagem. Nesses momentos podem ser observados aspectos como o modo de mobilizar os conhecimentos matemáticos formais e informais, a maneira como entendem o processo investigativo e qual é o papel de cada estudante no desenvolvimento da atividade proposta. Cabe a você, quando oportuno, fazer perguntas e registros que evidenciem como os estudantes estão pensando, tornando os conhecimentos e as aprendizagens visíveis.
- **Apresentações orais**, nas quais os estudantes têm a oportunidade de apresentar a você e aos colegas os resultados de suas investigações. Esses momentos se constituem em oportunidade tanto para você avaliá-los quanto para o aprendizado dos estudantes, uma vez que possibilitam a eles desenvolverem processos de comunicação e de argumentação. As apresentações orais podem ser parte estratégica também em situações de aprendizagem que têm como objetivos avaliativos o levantamento de conhecimentos prévios dos estudantes (**avaliação diagnóstica**) que estão mobilizados na obra didática, sobretudo, na seção **Para pensar e discutir**. Além disso, na parte intitulada **Conexões e projetos**, os estudantes fazem a apresentação oral dos trabalhos desenvolvidos.
- **Painel de soluções** é uma estratégia metodológica ativa e colaborativa em que vários estudantes fazem registros, em um painel físico ou virtual, da resolução de problemas matemáticos. Essa estratégia possibilita que o professor avalie o raciocínio que utilizam na resolução dos problemas, avaliando não só o resultado final, mas o processo matemático que o estudante realiza para chegar em um resultado correto ou incorreto. O painel de soluções oportuniza também que os estudantes aprendam uns com os outros, autorregulando suas aprendizagens e ampliando seu repertório ao conhecer diversos caminhos e estratégias para chegar a um resultado correto ou confiável matematicamente.
- **Rubrica:** trata-se de um guia de avaliação baseado em critérios que consistem em uma gradação e descrições das características para cada ponto dessa gradação, ou seja, descreve graus de qualidade, proficiência ou compreensão ao longo de um *continuum*. Esse instrumento favorece a avaliação qualitativa do que foi realizado pelos estudantes, tornando palpável o que seria subjetivo. A rubrica é também um excelente instrumento de autoavaliação e coavaliação – quando grupos de estudantes avaliam o trabalho ou a apresentação oral de outros grupos de estudantes. Na produção de projetos pelos estudantes, mobilizada na parte **Conexões e projetos**, o instrumento rubrica é uma oportunidade significativa para a avaliação da aprendizagem dos e com os estudantes.

- **Prova em duplas:** nesse tipo de avaliação, o estudante tem oportunidade de discutir ideias, exercitar a argumentação, aprender a trabalhar de forma colaborativa e aprimorar as relações sociais. Para favorecer o desenvolvimento dessas habilidades, é fundamental que as questões propostas nesse tipo de prova propiciem o debate entre os estudantes.
- **Prova individual:** esse tipo de instrumento é um velho conhecido da Matemática, mas que pode assumir outro significado enquanto prática avaliativa, que favoreça a aprendizagem dos estudantes e a leitura avaliativa que o professor pode fazer dessas aprendizagens. Para isso, as questões devem ser planejadas e elaboradas com a intenção de levar o estudante a refletir e a estabelecer relações e não simplesmente repetir informações. O instrumento deve dar oportunidade para que o estudante explicite o seu raciocínio matemático e não apenas assinale as alternativas corretas. Após a realização da prova deve ser dada oportunidade para que os estudantes revejam os caminhos adotados para a resolução das questões, identifiquem os erros e acertos e pensem, com a mediação do professor, como poderiam propor outros caminhos para solucionar os problemas. O *feedback* individual para os estudantes que estejam com mais dificuldades é uma estratégia relevante a ser adotada após uma prova, pois fortalece a criação de vínculo e a autoconfiança do estudante.
- **Provas tipo teste:** de tempos em tempos podem ser aplicados testes como preparação para exames de vestibulares, Enem e avaliações de larga escala. Entretanto, é importante lembrar que não é o treinamento sistemático nesse tipo de prova que vai garantir o sucesso dos estudantes. Mais preparados estarão para se sair bem em qualquer tipo de prova aqueles que desenvolverem um pensamento matemático articulado e que souberem encontrar estratégias para resolver qualquer tipo de problema.

Para a utilização de qualquer um desses instrumentos, deve-se definir claramente os objetivos que orientam sua aplicação. Vasconcellos (2003) aponta questões fundamentais que servem de reflexão no planejamento de instrumentos de avaliação: Como os instrumentos são preparados? Como são aplicados? Como são analisados/corrigidos? Como os resultados são comunicados? E o mais importante, o que vai se fazer com os resultados?

As diferentes culturas juvenis

De acordo com Correa, Alves e Maia (2014) a expressão “culturas juvenis” se refere:

> [...] a todos os elementos que demarcam uma identidade própria desse grupo, por exemplo, a linguagem, as roupas e acessórios, os estilos musicais, os aparelhos tecnológicos, os espaços e modos de lazer e sociabilidade (Correa; Alves; Maia, 2014, p. 17-18).

As autoras defendem que:

> O uso de tais elementos dentro da escola para desenvolver o currículo pode e deve ser considerado, uma vez que pode aproximar a escola dos jovens, criando situações de diálogo entre a cultura escolar e as culturas juvenis (Correa; Alves; Maia, 2014, p. 18).

Quanto aos procedimentos para se trabalhar as culturas juvenis, as autoras reconhecem as práticas sociais com música, dança, grafite, esportes e tecnologias como importantes mediadores da construção de vivências das juventudes. Segundo elas,

> Uma *pedagogia da juventude* seria, assim, um conjunto de práticas educativas pensadas para jovens e com a participação dos jovens, considerando-se seus desejos, anseios, sonhos, projetos e necessidades presentes e futuras (Correa; Alves; Maia, 2014, p. 14).

Sendo assim, é importante que você esteja atento às características de sua turma, gostos, ambientes que frequentam, músicas que escutam, se constituem um grupo mais homogêneo ou mais heterogêneo, de modo que possa trazer as possibilidades de aprendizagem ligadas aos interesses desses jovens.

Além disso, esta coleção apresenta, na parte **Conexões e projetos**, várias oportunidades de se trabalhar, por meio de projetos, as competências gerais e específicas, além das habilidades ligadas às diversas unidades temáticas. Os projetos podem e devem ser adaptados, com a participação da turma, da forma que melhor atendam aos interesses dos jovens e às possibilidades apresentadas pela sua realidade.

No Observatório da Juventude da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), disponível em: https://observatoriodajuventude.ufmg.br/observatorio-da-juventude-2/, podem ser encontradas várias sugestões para o trabalho com as culturas juvenis.

A inclusão dos estudantes com deficiência

De acordo com Belisário (2005), quando se fala em inclusão, três aspectos precisam ser observados:

- **Formação continuada de professores**: oferecer programas de formação continuada para os professores, capacitando-os a lidar com as necessidades específicas dos alunos com deficiência. Isso inclui cursos e *workshops* sobre práticas pedagógicas inclusivas e estratégias de ensino adaptadas.
- **Adaptação do ambiente escolar**: adaptar a infraestrutura das escolas para torná-las acessíveis a todos os alunos. Isso envolve a construção de rampas, instalação de elevadores, sinalização tátil e auditiva e a criação de salas com recursos multifuncionais equipadas com materiais específicos para atender às necessidades dos alunos com deficiência.

- **Desenvolvimento de currículos flexíveis**: elaborar currículos flexíveis que permitam a personalização do ensino de acordo com as necessidades e habilidades de cada aluno. Isso inclui a adaptação de materiais didáticos, atividades diferenciadas e a avaliação contínua do progresso dos alunos.

Visando desenvolver currículos e práticas de ensino que sejam acessíveis para todos os estudantes, independentemente de suas habilidades, necessidades ou estilos de aprendizagem, o Desenho Universal para a Aprendizagem (DUA), baseia-se nos seguintes princípios:

- Fornecer várias formas de apresentar a informação para atender às diversas formas com que os estudantes percebem e compreendem os conteúdos que estão sendo trabalhados. Para isso, podem ser usados textos, áudios, vídeos, gráficos, infográficos, diagramas e outros recursos visuais.
- Oferecer diferentes maneiras para que os estudantes demonstrem o que sabem e o que aprenderam. Isso reconhece que os jovens têm preferências e habilidades variadas para expressar o que sabem. Para mostrar o que aprenderam sobre determinado assunto, eles podem produzir um texto, elaborar uma apresentação, gravar um *podcast* ou desenvolver um projeto artístico, por exemplo.
- Proporcionar várias maneiras de motivar e envolver os estudantes, considerando seus interesses, níveis de habilidade e preferências para manter seu envolvimento. Em uma aula de Matemática, por exemplo, o professor pode usar jogos, desafios de resolução de problemas e projetos práticos.

A organização da obra

O Manual do Professor

É formado por esta parte geral e uma parte específica, de acordo com cada volume.

Parte geral	Parte específica
Essa primeira parte consta do Manual do Professor em todos os volumes da coleção.	A parte específica de cada volume está assim distribuída: • Cronograma • Orientações específicas por capítulo

Orientações por capítulo	Conexões & projetos
• Objetivos • Justificativa • Competências gerais da BNCC • Competências específicas e habilidades de Matemática • Conexões com outras áreas de conhecimento • Temas Contemporâneos Transversais • Resoluções e comentários	• Competências gerais • Competências específicas • Habilidades • Orientações
Sugestões de leitura **Sugestão de atividades individuais e em grupos**	
Referências comentadas **Referências suplementares**	

Audiovisual
A coleção inclui 12 recursos audiovisuais por volume: 3 *podcasts*, 3 vídeos, 2 carrosséis de imagens, 3 infográficos clicáveis e 1 mapa clicável, fornecendo informações adicionais sobre cada recurso.

O Livro do Estudante

Veja a seguir a descrição detalhada de cada parte que integra o Livro do Estudante.

Esta coleção consta de três volumes sequenciais e a distribuição dos assuntos em cada volume teve como norte a presença de todas as cinco unidades temáticas – Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, Probabilidade e estatística.

Apresentamos a seguir o quadro de conteúdos dos três volumes.

Organização dos volumes

Volume 1			
Capítulo	**Tópicos e subtópicos**	**Unidades temáticas, competências e habilidades**	**Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**
1. Teoria dos conjuntos	**1. Noções de teoria dos conjuntos** • Conceitos iniciais • Subconjuntos • Operações entre conjuntos **2. Conjuntos numéricos** • Ampliações do campo numérico • Números reais	**Unidades temáticas:** • Números • Álgebra **Competências gerais**: 2, 4, 7, 9	• Diversidade cultural
2. Estatística e pensamento computacional	**1. Tabelas e gráficos estatísticos** • Análise e construção de tabelas e gráficos • Os índices socioeconômicos **2. Linguagem estatística** • Elementos em pesquisas estatísticas • Realizando uma pesquisa estatística **3. Pensamento computacional** • Algoritmos e fluxogramas • Introdução à programação	**Unidades temáticas:** • Números • Probabilidade e estatística **Competências gerais:** 1, 4, 5, 7, 9 **Competências específicas:** 1, 2, 3, 4 **Habilidades:** EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT202, EM13MAT315, EM13MAT405, EM13MAT406, EM13MAT407	• Ciência e tecnologia • Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras • Educação fiscal • Educação para os direitos humanos
3. Grandezas e medidas	**1. Grandezas e unidades fundamentais** • Unidades de medidas de grandeza • Notação científica e precisão nas medidas de grandezas **2. Grandezas direta e inversamente proporcionais** • Razão e proporção • Grandezas direta e inversamente proporcionais	**Unidade temática:** • Grandezas e medidas **Competências gerais:** 2, 4, 7, 9, 10 **Competências específicas:** 1, 2, 3 **Habilidades:** EM13MAT103, EM13MAT201, EM13MAT313, EM13MAT314, EM13MAT315	• Educação ambiental
4. Função afim	**1. A ideia de função** • Conceito de função • Função e teoria dos conjuntos • Representação de função no plano cartesiano **2. Função afim** • Conceito de função afim • Gráfico de uma função afim • Taxa de variação de uma função afim **3. Função afim e consequências** • Função linear e proporcionalidade **4. Funções e inequações** • Estudo dos sinais de uma função afim • Resolução de inequações do 1º grau	**Unidade temática:** • Álgebra **Competências gerais:** 2, 4, 5, 6, 9 **Competências específicas:** 1, 3, 4, 5 **Habilidades:** EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT401, EM13MAT404, EM13MAT501, EM13MAT510	• Educação Financeira
5. Função quadrática	**1. O estudo de equações do 2º grau** • Equações do 2º grau **2. Função quadrática** • Conceito e gráfico de função quadrática **3. Coordenadas do vértice da parábola** • Problemas de máximo ou de mínimo **4. Inequações do 2º grau** • Estudo dos sinais de uma função quadrática • Resoluções de inequações do 2º grau **5. Funções definidas por mais de uma sentença** • Lei de formação e gráficos	**Unidade temática:** • Álgebra **Competências gerais:** 2, 4, 5 **Competências específicas:** 3, 4, 5 **Habilidades:** EM13MAT302, EM13MAT402, EM13MAT404, EM13MAT405, EM13MAT502, EM13MAT503, EM13MAT506	• Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras • Educação para o consumo

Volume 1			
Capítulo	**Tópicos e subtópicos**	**Unidades temáticas, competências e habilidades**	**Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**
6. Geometria plana	**1. Conceitos de Geometria Plana** • Ângulos • Semelhanças **2. Polígonos e ângulos** • Soma das medidas dos ângulos internos e externos de um polígono • Os ângulos nos polígonos regulares **3. Medidas de superfícies** • Resolução de problemas de cálculo de áreas • Área do círculo	**Unidades temáticas:** • Geometria • Grandezas e medidas **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 **Competências específicas:** 2, 3, 5 **Habilidades:** EM13MAT201, EM13MAT307, EM13MAT308, EM13MAT505	• Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras • Educação para o trânsito • Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso

Volume 2			
Capítulo	**Tópicos e subtópicos**	**Unidades temáticas, competências e habilidades**	**Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**
1. Função exponencial e função logarítmica	**1. Potenciação** • Propriedades da potenciação **2. A função exponencial** • Conceito e gráfico de uma função exponencial • Resolução de equações e inequações exponenciais **3. Logaritmos** • Conceito de logaritmo • Propriedades dos logaritmos **4. A função logarítmica** • Conceito e gráfico de uma função logarítmica • Resolução de equações e inequações logarítmicas • O uso de logaritmos na resolução de problemas	**Unidades temáticas:** • Números • Álgebra **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10 **Competências específicas:** 1, 3, 4 **Habilidades:** EM13MAT101, EM13MAT304, EM13MAT305 EM13MAT313, EM13MAT403	• Saúde
2. Sequências numéricas	**1. Sequências numéricas** • Padrões numéricos e geométricos **2. Progressão aritmética** • Termo geral de uma progressão aritmética • Progressão aritmética e outras relações • Soma dos termos de uma progressão aritmética **3. Progressão geométrica** • Termo geral de uma progressão geométrica • Propriedades de uma progressão geométrica • Progressão geométrica e outras relações • Soma dos termos de uma progressão geométrica	**Unidade temática:** • Álgebra **Competências gerais:** 2, 3, 4, 5, 9 **Competências específicas:** 2, 4, 5 **Habilidades:** EM13MAT203, EM13MAT405, EM13MAT507, EM13MAT508	• Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
3. Estatística descritiva	**1. Medidas de tendência central** • Média aritmética • Moda • Mediana **2. Medidas de dispersão** • Amplitude total • Variância e desvio-padrão **3. Outra forma de análise de dados** • Utilizando quartis e o diagrama *boxplot*	**Unidade temática:** • Probabilidade e estatística **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 6, 7, 10 **Competências específicas:** 1, 2, 3, 4 **Habilidades:** EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT202, EM13MAT316, EM13MAT406, EM13MAT407	• Educação para o consumo

Volume 2

Capítulo	Tópicos e subtópicos	Unidades temáticas, competências e habilidades	Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)
4. Geometria das transformações e triângulos	**1. Geometria das transformações** • Transformações isométricas • Transformações homotéticas **2. Triângulos: relações trigonométricas** • Trigonometria no triângulo retângulo • Trigonometria em um triângulo qualquer	**Unidade temática:** • Geometria **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5 **Competências específicas:** 1, 3 **Habilidades:** EM13MAT105, EM13MAT308	
5. Funções trigonométricas	**1. Circunferência trigonométrica** • Arcos e ângulos • O plano cartesiano e a circunferência trigonométrica • Seno e cosseno na circunferência trigonométrica • A tangente na circunferência trigonométrica **2. As funções seno e cosseno** • Função seno • Função cosseno • O uso de funções trigonométricas na resolução de problemas	**Unidades temáticas:** • Álgebra • Geometria **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10 **Competência específica:** 3 **Habilidade:** EM13MAT306	• Direitos da criança e do adolescente
6. Os sólidos geométricos	**1. O método matemático** **2. Figuras geométricas espaciais** • Poliedros: relação de Euler **3. Relações métricas em sólidos geométricos** • Bloco retangular e cubo • Pirâmides regulares e cones • Esferas **4. Geometria dos mapas: projeções cartográficas** • Projeção cônica • Projeção cilíndrica • Projeção azimutal	**Unidades temáticas:** • Geometria • Grandezas e medidas **Competências gerais:** 1, 2, 3, 4, 5, 9 **Competência específica:** 5 **Habilidade:** EM13MAT509	

Volume 3

Capítulo	Tópicos e subtópicos	Unidades temáticas, competências e habilidades	Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)
1. Prismas e cilindros	**1. Prismas** • Área da superfície de um prisma • Área da superfície de um bloco retangular • Volume do bloco retangular **2. Cilindros** • Área dos cilindros • Volume do cilindro	**Unidades temáticas:** • Geometria • Grandezas e medidas **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 9, 10 **Competências específicas:** 2, 3, 5 **Habilidades:** EM13MAT201, EM13MAT309, EM13MAT504	• Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
2. Pirâmides, cones e esferas	**1. Pirâmides** • Área da superfície da pirâmide • Volume da pirâmide **2. Cones** • Área da superfície do cone • Volume do cone • Tronco de pirâmide e tronco de cone **3. Esfera** • Volume da esfera • Área da superfície esférica	**Unidades temáticas:** • Geometria • Grandezas e medidas **Competências gerais:** 1, 2, 3, 4, 6, 7 **Competências específicas:** 2, 3, 5 **Habilidades:** EM13MAT201, EM13MAT309, EM13MAT504	• Educação Ambiental
3. Sistemas lineares	**1. Sistemas de equações lineares** **2. Resolução de sistemas de equações lineares** • A forma escalonada	**Unidade temática:** • Álgebra **Competências gerais:** 2, 4, 9 **Competências específicas:** 3, 4 **Habilidades:** EM13MAT301, EM13MAT401	

Volume 3			
Capítulo	**Tópicos e subtópicos**	**Unidades temáticas, competências e habilidades**	**Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**
4. Análise combinatória	**1. Princípios de contagem** • Problemas iniciais de contagem • Princípio multiplicativo **2. Permutações** • Permutações simples • Permutações com repetição **3. Formando agrupamentos** • Arranjo simples • Combinação simples **4. Triângulo de Pascal** • Propriedades dos números binominais	**Unidade temática:** • Números **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 9 **Competências específicas:** 3, 4 **Habilidades:** EM13MAT310, EM13MAT315, EM13MAT405	
5. Probabilidades	**1. Probabilidade** • Espaço amostral e evento • Probabilidade **2. Adição de probabilidades** • Probabilidade condicional **3. Multiplicação de probabilidades** **4. Probabilidade e estatística** • Obtenção de uma curva	**Unidade temática:** • Probabilidade e estatística **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9 **Competências específicas:** 1, 3, 5 **Habilidades:** EM13MAT106, EM13MAT311, EM13MAT312, EM13MAT511	• Saúde
6. Matemática Financeira	**1. A matemática e a Educação Financeira** • Matemática Comercial **2. Matemática Financeira** • Juros simples • Juros compostos • Financiamentos	**Unidades temáticas:** • Números • Álgebra **Competências gerais:** 2, 4, 5, 9 **Competências específicas:** 1, 2, 3, 4 **Habilidades** EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT203, EM13MAT302, EM13MAT303, EM13MAT315, EM13MAT405	• Educação Financeira • Educação para o consumo • Educação fiscal

Além dos seis capítulos, cada volume contém, ao final, uma parte importante intitulada **Conexões & Projetos**, constituída de três projetos por meio dos quais os estudantes colocam em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas em alguns capítulos daquele volume.

A organização dos capítulos

Os capítulos que compõem cada volume são constituídos por um percurso que envolve, para cada tópico apresentado, atividades resolvidas seguidas de problematizações que levam os estudantes, trabalhando em duplas ou em pequenos grupos, a discutir ideias, propor e validar hipóteses, além de apresentar argumentações consistentes para as afirmações que fazem. Da forma como estão propostas, essas atividades propiciam o desenvolvimento de processos como comunicação, investigação, construção de modelos e resolução de problemas.

Para favorecer esse trabalho, em todos os volumes da coleção, sempre que possível, três elementos estarão presentes: **Produção de textos**, **Algoritmos e fluxogramas** e **Recursos digitais**.

Esses elementos garantem a diversidade de atividades, o desenvolvimento de habilidades e a participação dos estudantes como sujeitos ativos no processo de ensino e aprendizagem.

Produção de textos

A **competência geral 7** da BNCC propõe que o estudante deve ser capaz de:

> Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta (Brasil, 2018, p. 9).

Visando desenvolver essa competência, que envolve a capacidade de argumentação, em todos os capítulos são propostas atividades em que os estudantes produzirão textos, tanto oralmente como por escrito, principalmete nas seções **Para pensar e discutir** e **Para explorar**. Por meio desses textos eles descrevem formas de pensar, elaboram hipóteses e problemas, apresentam argumentações, entre outros.

É importante destacar que em todas essas situações os estudantes devem apresentar argumentos que justifiquem as ideias apresentadas, seja oralmente ou por escrito. Cabe a você, professor promover discussões em grupos ou com toda a turma para que os argumentos possam ser debatidos e justificados, inclusive por meio de expressões e cálculos matemáticos, quando for o caso. Dessa forma, contribui-se para que desenvolvam a capacidade de argumentar com base em dados e informações confiáveis.

Sobre a elaboração de problemas, vale ressaltar que um dos pontos de destaque que evidenciam a autonomia no desenvolvimento do pensamento matemático é a elaboração de problemas sobre determinado conceito. Em várias oportunidades os estudantes elaboram problemas sobre determinado assunto, refletem sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou propõem diferentes soluções para um problema apresentado.

Saber elaborar uma situação-problema requer um esforço cognitivo maior do que uma simples resolução, além de necessitar de conhecimento mais profundo sobre o assunto tratado.

Nesse sentido, a BNCC propõe:

> Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada (Brasil, 2018, p. 536).

Algoritmos e fluxogramas

O trabalho com algoritmos e fluxogramas favorece o desenvolvimento do pensamento computacional e está presente na BNCC desde o 6º ano do Ensino Fundamental. Esse tipo de pensamento permite que, diante de um problema, o sujeito possa dividi-lo em partes, identificar padrões, imaginar uma solução que seja válida para diversos problemas e definir uma sequência de passos que os resolvam. Esses passos podem ser expressos por meio de um algoritmo, que, por sua vez, pode ser representado por um fluxograma.

A partir do Capítulo 2 do Volume 1, quando são retomados e aprofundados, os algoritmos e fluxogramas são trabalhados, sempre que possível, envolvendo os mais diversos assuntos, visando desenvolver as seguintes habilidades:

(**EM13MAT315**) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(**EM13MAT405**) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Recursos digitais

Em diversas atividades, em todos os volumes, os estudantes fazem uso de planilhas eletrônicas, *softwares* de geometria dinâmica ou calculadoras.

De acordo com a BNCC,

> [...] o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações (Brasil, 2018, p. 536).

A importância do uso desses recursos fica evidente porque dezessete habilidades, distribuídas nas cinco competências específicas de Matemática, se referem ao uso das tecnologias digitais para a etapa do Ensino Médio na BNCC.

Seções

Abertura de capítulo

Na abertura de todos os capítulos é apresentado um pequeno texto que relaciona o assunto que será tratado a algum aspecto da realidade ou a situações reais, oportunizando, inclusive, um trabalho interdisciplinar. Com base nesse texto são propostas duas questões para serem debatidas em duplas ou em pequenos grupos, cujo objetivo é mobilizar os conhecimentos anteriores e provocar a necessidade de aquisição de novas habilidades e/ou conteúdos conceituais, inclusive envolvendo outras áreas de conhecimento. Esse momento pode ser aproveitado também para a avaliação diagnóstica da turma.

As questões propostas podem ser trabalhadas na perspectiva da “sala de aula invertida” (Bacich; Moran, 2018), em que o estudante, de alguma forma, tem acesso prévio ao assunto que será tratado no capítulo. Essa é uma das metodologias ativas propostas como forma de colocar o estudante no centro do processo de aprendizagem. Com essa perspectiva, as questões podem ser propostas com antecedência, envolvendo inclusive algum tipo de pesquisa, de modo que ao iniciar o capítulo o estudante já tenha tido a oportunidade de pensar sobre o assunto que será abordado. A primeira aula daquele capítulo passa a ser, então, um momento de ricas discussões sobre o assunto, com a contribuição de cada estudante, podendo contar também com a contribuição de professores de outras áreas e até gerar projetos interdisciplinares sobre o tema tratado.

Para pensar e discutir

Esta seção aparece ao longo de todos os capítulos, permeando o texto, cujo objetivo é colocar o estudante como participante ativo do próprio processo de aprendizagem. É constituída por situações que o levam a pensar individualmente, seja durante a aula, seja durante a tarefa de casa, para serem posteriormente discutidas. As questões propostas podem envolver investigação de propriedades, elaboração de novos problemas, conclusões ou sínteses que podem ser apresentadas por meio de um texto argumentativo ou de resoluções matemáticas para justificar os argumentos apresentados na discussão, conforme o caso, o que propicia mais uma oportunidade para o desenvolvimento da capacidade de argumentação. As discussões podem ocorrer em duplas, em grupos ou com toda a turma, sob sua mediação. A ideia é incentivar os estudantes a pensar sobre as questões propostas e apresentar argumentos bem fundamentados. No momento das discussões, é importante que você garanta um ambiente de respeito e permita que novos questionamentos sejam feitos, promovendo o desenvolvimento de ideias matemáticas e corrigindo, quando necessário, os conceitos envolvidos.

Para explorar

Os estudantes resolvem as atividades propostas nesta seção sempre em duplas ou em pequenos grupos. Eles trocam ideias ao investigar regras, padrões e propriedades matemáticas e ao fazer análises críticas, criativas e propositivas envolvendo diversos tipos de situação. Em alguns desses momentos são utilizadas tecnologias diversas, como calculadora, planilha eletrônica ou *softwares* de geometria dinâmica. As atividades propostas nesta seção possibilitam também o desenvolvimento do processo de metacognição (Leite; Darsie, 2011), por meio do qual os estudantes têm a oportunidade de pensar sobre como aprendem, promovendo o autoconhecimento, a autonomia intelectual e o controle das próprias atividades cognitivas. Durante a realização das atividades cabe a você incentivar os alunos a se expressarem com clareza, comunicarem suas formas de pensar e apresentarem argumentos que justifiquem suas afirmações.

Atividades resolvidas

Esta seção é utilizada como referência, ao final de cada assunto, para resolver problemas relativos ao assunto tratado. Você pode propor aos estudantes que analisem cada situação e a respectiva resolução individualmente ou em duplas, para posterior discussão. Em alguns casos, é solicitado aos estudantes que completem algumas resoluções ou que reflitam sobre o que ocorreria se modificassem alguns dados, valorizando, assim, suas formas de pensar e a elaboração de estratégias. Pode-se solicitar também que elaborem novos problemas a partir dos que foram apresentados.

Atividades

As atividades propostas ao final de cada tópico, podem ser abertas ou fechadas e, em alguns casos, envolver investigações matemáticas, produção de textos ou elaboração de algoritmos e fluxogramas. Pode haver atividades para serem resolvidas em grupos ou em duplas, usando ou não algum tipo de tecnologia digital.

Análise e contexto

Esta seção aparece pelo menos uma vez em cada capítulo, após uma seção de atividades, ao longo dos três volumes. É constituída por textos do cotidiano, notícias, ensaios, divulgação científica, textos de conteúdos matemáticos ou de história da Matemática, que são sempre acompanhados de questões para reflexão e análise. Busca contribuir para desenvolver a capacidade de argumentação com base em dados confiáveis.

Infográfico

Esta seção aparece em alguns capítulos de cada volume. Apresenta, de forma atrativa e utilizando elementos visuais, assuntos relacionados ao capítulo. O infográfico é sempre acompanhado de questões para discussão.

Atividades finais

Relação de atividades que envolvem todo o assunto estudado no capítulo, incluindo questões que podem ser utilizadas como verificação de aprendizagem. Podem ser abertas ou não. Inclui questões de vestibulares e do Enem, destacadas com o subtítulo **Questões de vestibulares e Enem**. Podem ser propostas como tarefa de casa ou para serem resolvidas durante a aula. Você pode selecionar algumas atividades para serem resolvidas em duplas e discutidas coletivamente.

Ao final desta seção, os estudantes terão a oportunidade de avaliar todo o percurso e seu processo de aprendizagem por meio da **autoavaliação**, que retoma os objetivos que constam no início do capítulo. É importante que eles sejam incentivados a fazer uma reflexão antes de realizá-la. Você pode encaminhar o levantamento dos resultados e fazer, com a turma, um planejamento para retomada dos assuntos em que os estudantes não se sentem seguros.

Observação importante: nas diferentes seções, as atividades que solicitam justificativas ou explicações apresentam como resposta para o professor, no Livro do Estudante, apenas "Resposta pessoal". Entretanto, na parte específica deste manual você encontrará orientações ou sugestões de resposta.

Conexões e projetos

A última parte do Livro do Estudante é constituída por uma seção denominada **Conexões e projetos**, formada por três projetos que visam levar os estudantes a colocar em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas ao longo dos capítulos. Por meio desses projetos, eles terão a oportunidade de desenvolver competências relacionadas a saberes e vivências da vida cotidiana usando diversos tipos de tecnologia e os conhecimentos matemáticos adquiridos.

Cada projeto apresenta possibilidades de trabalho interdisciplinar que pode ser desenvolvido juntamente com professores de outras áreas. Nesse caso, é importante que vocês façam a leitura prévia do projeto e o adaptem à sua realidade, não se esquecendo de verificar a coerência com o Projeto Politico Pedagógico da escola e com o currículo estadual.

É importante também que, dependendo da natureza das atividades propostas, seja garantida a segurança de todos os envolvidos (estudantes, professores e demais pessoas) no que diz respeito a eventuais riscos.

Para esse trabalho em conjunto é necessário desenvolver um cronograma de acordo com o número de aulas de cada componente curricular envolvido e com os temas que serão desenvolvidos/aprofundados por cada um, lembrando que existe a possibilidade de aprofundamento dos temas de acordo com a demanda de cada turma e a disponibilidade de tempo.

A escolha dos temas levou em conta a possibilidade de oferecer aos jovens a oportunidade de conhecer novas realidades, de se aprofundarem em temas relevantes para sua vida e, em alguns casos, fazer intervenções na comunidade.

Tendo em vista uma **escola que acolha as juventudes**, a proposta visa, de acordo com a BNCC (Brasil, 2018, p. 465):

- favorecer a atribuição de sentido às aprendizagens, por sua vinculação aos desafios da realidade e pela explicitação dos contextos de produção e circulação dos conhecimentos;
- garantir o protagonismo dos estudantes em sua aprendizagem e o desenvolvimento de suas capacidades de abstração, reflexão, interpretação, proposição e ação, essenciais à sua autonomia pessoal, profissional, intelectual e política;

- promover a aprendizagem colaborativa, desenvolvendo nos estudantes a capacidade de trabalharem em equipe e aprenderem com seus pares; e
- estimular atitudes cooperativas e propositivas para o enfrentamento dos desafios da comunidade, do mundo do trabalho e da sociedade em geral, alicerçadas no conhecimento e na inovação.

Essa parte da obra oferece, ainda, aos estudantes a oportunidade de (Brasil, 2018, p. 467):

- compreender e utilizar os conceitos e teorias que compõem a base do conhecimento científico-tecnológico, bem como os procedimentos metodológicos e suas lógicas;
- conscientizar-se quanto à necessidade de continuar aprendendo e aprimorando seus conhecimentos;
- apropriar-se das linguagens científicas e utilizá-las na comunicação e na disseminação desses conhecimentos; e
- apropriar-se das linguagens das tecnologias digitais e tornar-se fluentes em sua utilização.

Pensando na autonomia docente, os projetos são independentes e podem ser desenvolvidos por toda a turma, um de cada vez, de acordo com seu planejamento e o cronograma proposto por você. Outra opção é que cada grupo escolha um dos projetos para desenvolver ao longo de um período estabelecido por você. As opções são várias, analise previamente as propostas, entre nos endereços de *sites* indicados e, se necessário, faça adaptações que possam atender tanto à sua realidade como ao Projeto Político Pedagógico da escola e ao currículo estadual.

Cabe também a você escolher o melhor momento para dar início ao trabalho. Como o desenvolvimento de um projeto demanda tempo para que as várias etapas sejam cumpridas, sugerimos avaliar quando apresentar a proposta de trabalho e orientar os estudantes para que possam, inclusive, desenvolver seus projetos paralelamente ao desenvolvimento dos capítulos. Essa é mais uma oportunidade de investir na autonomia dos estudantes, uma vez que, caso necessário, podem acessar conteúdos de capítulos ainda não trabalhados, mas importantes para o desenvolvimento de seus projetos, o que potencializa seus processos de leitura e compreensão de textos, incluindo o texto matemático. Seu papel é fundamental para incentivá-los a se engajar nesse tipo de trabalho e atender às necessidades específicas de cada grupo.

Parte específica

Orientações específicas para este volume

Apresentamos a seguir uma sugestão de cronograma com três possibilidades de distribuição por capítulo: bimestral, trimestral ou semestral. Esse cronograma pode ser adaptado à sua realidade, de acordo com a programação e o calendário da escola.

Com base no cronograma, você pode elaborar seu planejamento para cada etapa de trabalho, incluindo momentos para a realização de avaliações formativas, que ocorrem ao longo do processo, seguidas de períodos para as possíveis retomadas com base nos resultados obtidos. É importante também analisar previamente as possibilidades de trabalho interdisciplinar, envolvendo professores de outras áreas de conhecimento, para que vocês possam, juntos, planejar as atividades que serão realizadas e incluídas nos planejamentos de ambos.

Cronograma

<table>
<tr><th>Capítulo</th><th>Bimestre</th><th>Trimestre</th><th>Semestre</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1º</td><td>1º</td><td>1º</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1º</td><td>1º</td><td>1º</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">2º</td><td>1º
Da pág. 90 até 107</td><td rowspan="2">1º</td></tr>
<tr><td>2º
Da pág. 108 até 121</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>2º
Da pág. 122 até 140</td><td rowspan="2">2º</td><td>1º
Da pág. 122 até 140</td></tr>
<tr><td>3º
Da pág. 141 até 173</td><td>2º
Da pág. 141 até 173</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>3º
Da pág. 174 até 190</td><td>2º
Da pág. 174 até 190</td><td>2º</td></tr>
<tr><td>4º
Da pág. 191 até 229</td><td>3º
Da pág. 191 até 229</td><td>2º</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4º</td><td>3º</td><td>2º</td></tr>
</table>

CAPÍTULO 1

Teoria dos conjuntos

Objetivos

- Compreender e fazer uso da linguagem dos conjuntos.
- Apropriar-se do conceito de conjuntos, das suas propriedades e operações.
- Compreender a relação de inclusão entre dois conjuntos.
- Resolver problemas com a utilização da teoria dos conjuntos.
- Compreender as sucessivas ampliações do campo numérico.
- Interpretar e representar os intervalos dos números reais efetuando operações entre eles.
- Resolver problemas relacionados ao conjunto dos números reais.

Justificativa

Abrimos esta coleção com um capítulo que resgata e aprofunda assuntos já trabalhados no Ensino Fundamental que são básicos para o desenvolvimento de algumas habilidades do Ensino Médio. Os estudantes terão a oportunidade de fazer o estudo introdutório da teoria dos conjuntos para se apropriarem do seu uso como linguagem. Também vão retomar a construção dos conjuntos numéricos e estudar os intervalos reais, incluindo as operações com esses intervalos, o que os auxiliará no desenvolvimento de habilidades que envolvem, por exemplo, o estudo de vários tipos de funções e suas representações por meio de gráficos cartesianos.

Competências gerais da BNCC

Competência geral 2: Essa competência é mobilizada, por exemplo, na seção **Para explorar**, da página 29, pois os estudantes recorrem à reflexão, análise crítica e imaginação para fazer as investigações propostas.

Competências gerais 4, **7** e **9**: Ao realizarem, em grupos ou duplas, as atividades propostas nas diversas seções **Para explorar** e **Para pensar e discutir** que aparecem ao longo do capítulo, os estudantes têm a oportunidade de utilizar diferentes linguagens para se comunicar e partilhar informações, desenvolvendo, assim, a **competência 4**. Essas mesmas atividades também mobilizam a **competência 7**, uma vez que, durante as discussões propostas, eles precisam argumentar com base em fatos e dados para negociar e defender ideias. Desenvolvem, ainda, a **competência 9**, pois exercitam a empatia, o diálogo e a resolução de possíveis conflitos. Essas atividades podem ser encontradas, por exemplo, nas páginas 16, 25, 27 e 29.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Nesse capítulo, não foram trabalhadas competências específicas e habilidades de Matemática que constam na etapa do Ensino Médio. Entretanto, os assuntos aqui abordados contribuem para o desenvolvimento de diversas habilidades dessa etapa, conforme explicitado na justificativa descrita anteriormente.

Conexões com outras áreas do conhecimento

Na abertura do capítulo, página 9, os estudantes pesquisam e debatem sobre as etnias que compõem a população brasileira, tema que envolve a área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**.

Temas Contemporâneos Transversais

O TCT **Diversidade cultural** é tratado na abertura do capítulo, nas páginas 8 e 9, por meio da discussão sobre as diversas etnias que compõem a população do nosso país.

Resoluções e comentários

Página 9

Abertura

1. Sugestão de resposta: O povo brasileiro é formado por diversas etnias, mas inicialmente foi formado pelos povos indígena, europeu e africano.
2. Incentive os estudantes a trazer suas histórias pessoais para enriquecer a discussão. Você pode solicitar a participação dos professores de Geografia e/ou de Sociologia para aprofundar o debate sobre o tema. Essa abertura contempla o Tema Contemporâneo Transversal: Diversidade Cultural.

   Seguem duas referências para auxiliá-lo na fundamentação desse assunto.

   - A FORMAÇÃO do povo brasileiro. [*S. l.*]: Khan Academy, 2020. 1 vídeo (ca. 6 min). Disponível em: https://pt.khanacademy.org/science/1-ano/seres-humanos/diversidade-humana/v/a-formao-do-povo-brasileiro. Acesso em: 27 set. 2024.
   - CONHEÇA o Brasil – População. Cor ou raça. *In*: IBGE EDUCA. Rio de Janeiro, [2022]. Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/jovens/conheca-o-brasil/populacao/18319-cor-ou-raca.html/. Acesso em: 27 set. 2024.

1. Noções de teoria dos conjuntos

Página 10

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Quando temos um agrupamento de pessoas, por exemplo, cada uma delas é um elemento desse conjunto de pessoas.

2. Sugestão de resposta: A palavra **conjunto** está associada à ideia de agrupamento, de coleção.
3. Não.

Página 12

Para pensar e discutir

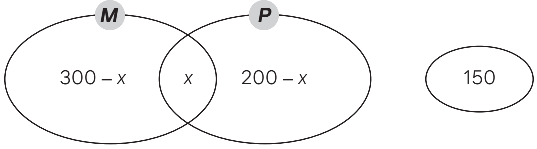
1. Os dois conjuntos são iguais. Basta atribuir à incógnita valores naturais maiores ou iguais a 1 e substituí-la na expressão $2x - 1$, para assim verificar que os conjuntos P e Q são iguais.
2. A ideia é verificar quais outros procedimentos os estudantes utilizam.

Página 13

Atividades

1.
   a) $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$
   b) $X = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$
   c) $R = \{\text{d, c, n, r}\}$
   d) $S = \{2\}$
   e) $T = \{\ \}$ ou $T = \varnothing$
2.
   I. Falsa. $n(P) = 5$, pois o conjunto P tem exatamente cinco elementos: $P = \{a, b, c, d, e\}$.
   II. Verdadeira. O conjunto Q tem exatamente cinco elementos: $Q = \{a, b, f, g, h\}$.
   III. Verdadeira, pois c, d e e são os únicos elementos de P que não são elementos de Q.
   IV. Falsa, pois $a \in P$ e $a \in Q$
   V. Verdadeira, pois $f \notin P = \{a, b, c, d, e\}$ e $f \in Q = \{a, b, f, g, h\}$.
3. Sugestão de respostas:
   a) $\{x\ /\ x$ é um mês do ano com menos de 30 dias$\}$
   b) $\{x\ /\ x$ é um número natural entre 1 e 2$\}$
   c) $\{x\ /\ x$ é um número natural primo entre 1 e 12$\}$
   d) $\{x\ /\ x$ é um número inteiro$\}$
4.
   a) $A = \{-1, -2, -3, -4, 0, 3, 5, 6\}$; $B = (0, 1, 3, 4, 5, 6\}$; $C = \{-4, 0, 1, 5\}$
   b) $\{0, 3, 5, 6\}$
   c) $\{-4, 0, 5\}$
   d) $\{0, 1, 5\}$
   e) $\{0, 5\}$
   f) $\{\ \}$ ou $\varnothing$

   Explique aos estudantes que os elementos de um conjunto não precisam aparecer em ordem crescente ou em ordem decrescente.
5. O número de elementos da região colorida é dado pelo número de elementos do conjunto A (10) menos o número de elementos que pertencem, simultaneamente, aos conjuntos A e B (3): $10 - 3 = 7$; 7 elementos.
6. O conjunto formado por todos os elementos que pertencem, simultaneamente, aos conjuntos A e B é $\{4, 8, 12\}$.
7. Seja o conjunto M como o dos que gostam de Matemática, e P como o dos que gostam de Língua Portuguesa. Vamos representar por x a quantidade de estudantes que gostam das duas disciplinas. Ao todo são 600 estudantes.



Acervo editora

$(300 - x) + x + (200 - x) + 150 = 600$

$650 - x = 600 \Rightarrow x = 50$

8. Oriente os estudantes para que façam um problema com no máximo 3 conjuntos, para facilitar a compreensão do colega.

Página 14

Para pensar e discutir

1. Sim, pois se a pessoa nasceu no Acre também nasceu no Brasil.
2. Não, pois existem pessoas que são brasileiras, mas não acreanas.
3. Sugestão de resposta: O conjunto formado por todas as pessoas que nasceram no Acre é um subconjunto do grupo formado por todas as pessoas que nasceram no Brasil.

Página 15

Para pensar e discutir

1. Os conjuntos A e B são iguais.
2. Basta que exista um elemento de um dos dois conjuntos que não seja elemento do outro.
3. A relação de inclusão $F \subset S \subset B$.

   Aproveite para explicar também que: como $F \subset S$ e $S \subset B$, tem-se que $F \subset B$ (propriedade transitiva).

Página 16

Para explorar

1.
   a) Se $n(A) = 0$, então $A = \{\ \}$ (conjunto vazio).
      O conjunto vazio admite um único subconjunto: o próprio conjunto vazio. Portanto, quando $n(A) = 0$, o conjunto A admite apenas um subconjunto.
   b) Tomando $A = \{a\}$ como exemplo, os subconjuntos de A são os conjuntos $\{\ \}$ e $\{a\}$. Se $n(A) = 1$, A admite exatamente dois subconjuntos.
   c) Tomando $A = \{a, b\}$ como exemplo, $\{\ \}$, $\{a\}$, $\{b\}$, e $\{a, b\}$ são os subconjuntos de A. Se $n(A) = 2$, então há, ao todo, quatro subconjuntos de A.
   d) Supondo $A = \{a, b, c\}$, os subconjuntos de A são os conjuntos: $\{\ \}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ e $\{a, b, c\}$. Se $n(A) = 3$, então A admite exatamente oito subconjuntos.
   e) Supondo $A = \{a, b, c, d\}$, os subconjuntos de A são os conjuntos: $\{\ \}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$,

{b, d}, {c, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d} e {a, b, c, d}. Se $n(A) = 4$, o número total de subconjuntos que A admite é dezesseis.

2.

a) $n(A) = 10 \Rightarrow 2^{10} = 1\,024$; 1 024 subconjuntos

b) $n(A) = 12 \Rightarrow 2^{12} = 4\,096$; 4 096 subconjuntos

c) $n(A) = x \Rightarrow 2^x$; 2^x subconjuntos

Página 17

Atividades

9.

a) {5, 6, 7, 8, 9, 10}

b) {1, 3, 5, 7, 9, 11}

c) {1, 4, 9}

d) {2, 3, 5, 7, 11}

10.

a) {2, 5}; {2, 7}; {2, 8}; {5, 7}; {5, 8}; {7, 8}

b) {2, 5, 7}; {2, 5, 8}; {2, 7, 8}; {5, 7, 8}

c) {2, 5, 7, 8}

11. $A = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$C = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...\}$

a) $13 \in A$ mas $13 \notin B$. Portanto, $A \not\subset B$.

b) Todos os elementos de A são também elementos de B. Então, $A \subset C$.

c) Nem todos os elementos de B são elementos de C (0, 1, 2, 4, 6, 8, 10 e 12 são os elementos de B que não são elementos de C). Portanto, $B \not\subset C$.

12.

a) Todos os retângulos.

b) Todos os quadrados.

c) $B \subset A$, pois todo quadrado tem quatro ângulos retos (todo quadrado é retângulo).

13.

I. Verdadeira. $N \not\subset A$, pois existem elementos de N que não são elementos de A.

II. Verdadeira. $M \subset N$, pois todo elemento de M também é elemento de N.

III. Verdadeira. $A \not\subset M$, pois existem elementos de A que não são elementos de M.

14. Existem duas possibilidades: $x = 6$ e $y = 12$, $x = 12$ e $y = 6$.

15. $Q \subset L$ (Q está contido em L) ou $L \supset Q$ (L contém Q). Significado: todo quadrado é também losango.

16. $B = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ ou $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

17. $P = \{1, 3, 9\}$, os subconjuntos de P são: $\varnothing$, {1}; {3}; {9}; {1, 3}; {1, 9}; {3, 9}; {1, 3, 9}.

Página 18

Para pensar e discutir

1. $n(E) = 14$ e $n(I) = 8$

2. Não. Existem pessoas que estudam ambas as línguas e, por isso, $n(E) + n(I)$ resulta em um número maior do que o número total de pessoas do grupo.

3. O objetivo da questão é observar o conhecimento prévio dos estudantes e oportunizar que expressem suas estratégias.

Página 20

Para pensar e discutir

1. Obtém-se o conjunto $A \cup B$.

2. $n(A) - n(A \cap B) = n(A - B)$

3. $n(B) - n(A \cap B) = n(B - A)$

Página 21

Para pensar e discutir

1. {s, t, p, q} e {r, y, z, p, q}

2. A união dos três conjuntos tem, ao todo, 17 elementos.

3. {a, b, s, t, x}

Páginas 22-23

Atividades

18.

a) $A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2\} = \{1, 2\}$

b) $A \cap C = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{3, 4\}$

c) $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

d) $B \cup C = \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

e) $A - B = \{0, 1, 2, 3, 4\} - \{1, 2\} = \{0, 3, 4\}$

f) $B - C = \{1, 2\} - \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2\}$

19.

a) $P \cap Q \cap R = \{0, 1\}$

b) $P \cup Q \cup R = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

c) $P = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $Q = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$P - Q = \{-5, -4, -3, 6, 7, 8, 9\}$

d) $P = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $Q \cap R = \{0, 1, 4\}$

$P - (Q \cap R) = \{-5, -4, -3, -2, -1, 6, 7, 8, 9\}$

e) $P \cup Q = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $Q \cap R = \{0, 1, 4\}$

$(P \cup Q) - (Q \cap R) = \{-5, -4, -3, -2, -1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$

f) $P \cap Q = \{-2, -1, 0, 1\}$ e $Q \cap R = \{0, 1, 4\}$

$(P \cap Q) \cup (Q \cap R) = \{-2, -1, 0, 1, 4\}$

20. As duas afirmações são verdadeiras. Elas representam, respectivamente, a propriedade distributiva da união em relação à intersecção e a propriedade distributiva da intersecção em relação à união.

21.

a) $n(P) = 24 + 23 = 47$

b) $n(Q) = 23 + 13 = 36$

c) $n(P \cap Q) = 23$

d) $n(P \cup Q) = 24 + 23 + 13 = 60$

e) $n(P - Q) = n(P) - n(P \cap Q) = (24 + 23) - 23 = 24$

f) $n(Q - P) = n(Q) - n(P \cap Q) = (23 + 13) - 23 = 13$

22.

a) Não. Sugestão de resposta: Porque os dois conjuntos não são disjuntos.

$n(P \cup Q) = 60$, $n(P) + n(Q) = 47 + 36 = 83$ e $60 \neq 83$
$n(P \cup Q) \neq n(P) + n(Q)$

b) Sim. Sugestão de resposta: porque os dois conjuntos não são disjuntos.
$n(P \cup Q) = 60$, $n(P - Q) + n(Q - P) = 24 + 13 = 37$ e $60 \neq 37 \Rightarrow n(P \cup Q) \neq n(P - Q) + n(Q - P)$

23.

I. Falsa. Se um elemento pertencer ao conjunto Q, então ele não estará na região destacada.

II. Verdadeira.

III. Verdadeira.

IV. Verdadeira.

V. Verdadeira.

VI. Verdadeira.

24.

a) $n(A) = 800 + 300 + 250 + 100 = 1\,450$,
$n(B) = 600 + 200 + 250 + 100 = 1150$ e
$n(C) = 300 + 300 + 200 + 100 = 900$

b) $n(A \cap B) = 250 + 100 = 350$, $n(A \cap C) = 300 + 100 = 400$ e $n(B \cap C) = 200 + 100 = 300$

c) $n(A \cap B \cap C) = 100$
$n(A \cup B \cup C) =$
$= 800 + 300 + 250 + 100 + 600 + 200 + 300 = 2\,550$

d) $n[A - (B \cap C)] = 800 + 300 + 250 = 1\,350$
$n[B - (A \cap C)] = 600 + 200 + 250 = 1050$
$n[C - (A \cap B)] = 300 + 300 + 200 = 800$

25.

a) Região I: $(A \cap B) - (A \cap B \cap C)$ ou $(A \cap B) - C$
Região II: $(A \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ou $(A \cap C) - B$
Região III: $(B \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ou $(B \cap C) - A$
Região IV: $A \cap B \cap C$

b) União das regiões I e IV: $A \cap B$
União das regiões II e IV: $A \cap C$
União das regiões III e IV: $B \cap C$

26.

I. Verdadeira.

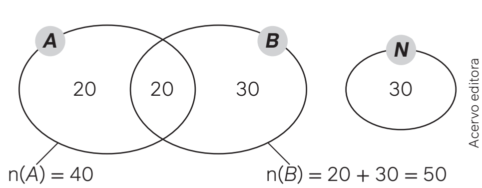
II. Falsa. $A \cap C = \varnothing$

III. Verdadeira.

IV. Falsa. $\varnothing - B = \varnothing$

V. Verdadeira.

27. Admita que A é o conjunto dos estudantes que assistiram ao filme da Primeira Guerra Mundial; B é o conjunto dos estudantes que assistiram ao filme da Segunda Guerra Mundial e N é o conjunto dos estudantes que não assistiram a nenhum desses filmes.

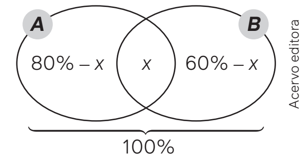


a) 40 estudantes

b) 50 estudantes

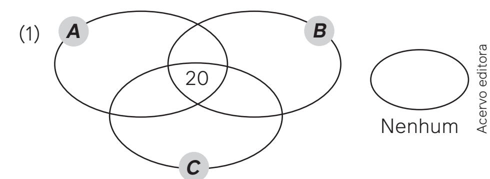
c) $20 + 20 + 30 + 30 = 100$; 100 pessoas

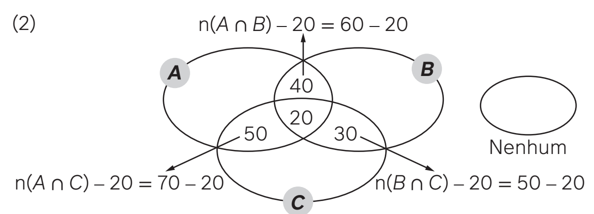
28.

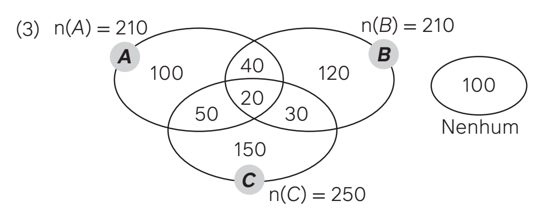


$(80\% - x) + x + (60\% - x) = 100\% \Rightarrow x = 40\%$

29. Acompanhe, nas três etapas indicadas a seguir.







$100 + 50 + 40 + 20 + 120 + 30 + 150 + 100 = 610$; 610 clientes

30. Preferencialmente os conjuntos devem ter pelo menos alguns elementos em comum.

2. Conjuntos numéricos

Página 24

Para pensar e discutir

1. 9 700 000 000
2. Aproximadamente 26%.

$\frac{9{,}7 \text{ bilhões}}{7{,}7 \text{ bilhões}} = \frac{9{,}7}{7{,}7} \cong 1{,}26 = 126\%$

Estima-se que de 2022 a 2050 a população mundial crescerá aproximadamente 26%.

Página 25

Para pensar e discutir

1. Entre os inteiros 0 e 1.
2. Uma das formas fracionárias é $-\frac{72}{10}$.
3. É a dízima periódica 1,333... .
4. Quando sua representação decimal é uma dízima periódica.

Página 27

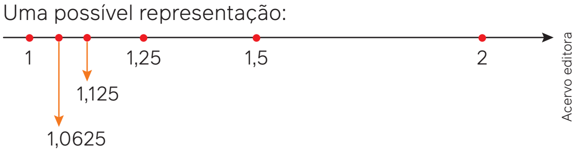
Para explorar

1. A resposta dependerá da representação utilizada pelos estudantes e do número de vezes que o processo será repetido.

   a) $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ **c)** $\frac{1+1{,}25}{2} = \frac{2{,}25}{2} = 1{,}125$

   b) $\frac{1+1{,}5}{2} = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25$ **d)** $\frac{1+1{,}125}{2} = \frac{2{,}125}{2} = 1{,}0625$

   Uma possível representação:



2.
   a) Nenhum. **b)** Infinitos. **c)** Não.

   Comente com os estudantes que os números racionais não são suficientes para "preencher" toda a reta, isto é, sempre ficarão "buracos" que serão preenchidos com os números irracionais que veremos logo a seguir.

3.
   a) 0,9888... **b)** 0,2857142... **c)** –0,132132...

4. Sugestão de resposta: na maioria das calculadoras, pela capacidade limitada de dígitos que podem aparecer no visor, quando o último algarismo que se repete na dízima é menor ou igual a 5, ele é mantido. Mas há um arredondamento, para mais quando esse último algarismo que se repete é maior que 5.

Atividades

31.

a) –0,45 **b)** $\frac{1}{0{,}45} = \frac{100}{45} = 2{,}222...$ **c)** $-\frac{7}{5}$ ou $\frac{7}{5}$

32.

a) $x = 0{,}777\ ... \Rightarrow 10x = 7{,}777\ ...$

$10x - x = 7{,}777\ ... - 0{,}777...$

$9x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{9}$

b) $x = -0{,}555\ ... \Rightarrow 10x = -5{,}555...$

$10x - x = -5{,}555\ ... -(-0{,}555...)$

$9x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{9}$

c) $x = 0{,}232323\ ... \Rightarrow 100x = 23{,}232323...$

$100x - x = 23{,}232323... - 0{,}232323...$

$99x = 23 \Rightarrow x = \frac{23}{99}$

d) $x = -0{,}474747\ ... \Rightarrow 100x = -47{,}474747...$

$100x - x = -47{,}474747... - (-0{,}474747...)$

$99x = -47 \Rightarrow x = -\frac{47}{99}$

e) $x = 1{,}234234234\ ... \Rightarrow 1\,000x = 1234{,}234234234...$

$1\,000x - x = 1234{,}234234234... - 1{,}234234234...$

$999x = 1\,233 \Rightarrow x = \frac{1\,233}{999}$

33.

a) 0,0625; 0,03125; 0,015625; 0,0078125

b) Sim, esses quatro números são decimais exatos.

c) Cada número, a partir do segundo é o imediatamente anterior dividido por dois.

34.

$a = -2{,}45$, $b = -\frac{7}{3} = -2{,}333...$ e $c = -2{,}555...$

$-2{,}555... < -2{,}45 < -2{,}333... \Rightarrow c < a < b$

- $|a| = 2{,}45$, $|b| = 2{,}333...$ e $|c| = 2{,}555...$

  $2{,}333... < 2{,}555.... \Rightarrow |b| < |a| < |c|$

a) *b* é o maior deles. **c)** *c* tem maior módulo.

b) *c* é o menor deles. **d)** *b* tem menor módulo.

35.

a) $4 \cdot 2{,}6 = 10{,}4$; 10,4 cm

O perímetro é o número racional 10,4.

b) $(2{,}6)^2 = 6{,}76$; 6,76 cm².

A área é o número racional 6,76.

36.

a) Se *x* indicar o inverso de 0,25, então:

$x \cdot 0{,}25 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{0{,}25} = \frac{100}{25} = 4$

b) $0{,}242424... = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$

Se *x* indicar o inverso do número 0,242424..., então:

$x \cdot 0{,}242424... = x \cdot \frac{8}{33} = 1 \Rightarrow x = \frac{33}{8} = 4{,}125$

37. Considerando que são inteiros os números *a*, *b*, *c* e *d*, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, são também inteiros, por exemplo, os números *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, $ad + bc$ e $ad - bc$. São racionais os números $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.

a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$, com $(ad + bc) \in \mathbb{Z}$, $bd \in \mathbb{Z}$ e $bd \neq 0$.

Portanto, a soma de dois números racionais é também um número racional.

b) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$, com $(ad - bc) \in \mathbb{Z}$, $bd \in \mathbb{Z}$ e $bd \neq 0$.

Portanto, a diferença de dois números racionais é também um número racional.

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, com $ac \in \mathbb{Z}, bd \in \mathbb{Z}$ e $bd \neq 0$.

Portanto, o produto de dois números racionais é também um número racional.

d) Para que esteja definido o número racional $\frac{d}{c}$, consideremos também $c \neq 0$.

Assim, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$, com $\frac{c}{d} \neq 0$, $ad \in \mathbb{Z}$, $bc \in \mathbb{Z}$ e $bc \neq 0$.

Portanto, o quociente de dois números racionais é também um número racional quando o divisor é diferente de zero.

e) O número que dever ser multiplicado, para resultar em 1, é o inverso do número $\frac{3}{5}$, ou seja, $\frac{5}{3}$.

Página 28

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Do triângulo retângulo de hipotenusa *d*, cujos catetos são os lados do quadrado de diagonal *d*, utilizando o teorema de Pitágoras, verifica-se que $d = \sqrt{2}$ u.c.
2. Área do menor: 1 u.a.

   Área do maior: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ u.a.
3. A área do maior é o dobro do menor.
4. $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ não é um número racional.

Para pensar e discutir

1. Não, pois não existem dois números inteiros p e q, tais que $\frac{p}{q}$ resulte na raiz quadrada de dois.

Página 29

Para explorar

1.
   a) 1,7320 b) 2,2361 c) 5,2915 d) 9,4868
2. $1{,}720^2 = 2{,}999824$, portanto, é uma aproximação **por falta** para $\sqrt{3}$;
   $2{,}2361^2 = 5{,}00014321$, portanto, é uma aproximação **por excesso** para $\sqrt{5}$;
   $5{,}2915^2 = 27{,}99997225$ portanto, é uma aproximação **por falta** para $\sqrt{28}$;
   $9{,}4868^2 = 89{,}99937424$, portanto, é uma aproximação **por falta** para $\sqrt{90}$.
3. Pode-se utilizar um barbante para contornar e então obter seu comprimento. Já o diâmetro pode ser obtido com o auxílio de uma régua. As respostas serão aproximadas.

Para pensar e discutir

1. $\frac{d}{L} = \frac{3\sqrt{2}\text{ cm}}{3\text{ cm}} = \sqrt{2}$
2. Não, pois $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Página 30

Análise e contexto

Sugerimos que esta atividade seja encaminhada em duplas. A discussão coletiva mobiliza competências gerais voltadas ao convívio, ao saber escutar e argumentar.

1.
   a) Sabendo a aresta de um cubo, determinar a de outro com volume igual ao dobro do original.
   b) Sabendo construir um ângulo com "régua e compasso", divida três ângulos congruentes usando os mesmos instrumentos.
   c) Sabendo o raio (ou diâmetro) de um círculo, determine o lado de um quadrado com área igual à do círculo.
2. Sugestão de resposta: A razão entre o comprimento da circunferência e de seu diâmetro resulta no número π.
3. Uma maneira de determinar essa medida:
   $L^2 = \pi r^2 \Rightarrow L^2 = \pi \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2$
   $L^2 = 100 \cdot \pi \Rightarrow L = 10\sqrt{\pi}$; $10\sqrt{\pi}$ cm

Página 32

Para pensar e discutir

Embora seja possível responder às perguntas, este é um momento para sondar o conhecimento prévio dos alunos sobre conjuntos numéricos, agora ampliado pela teoria dos conjuntos. Essas questões devem ser revisadas ao final do estudo.

1.
   a) Sim, todo número natural é também número inteiro.
   b) Sim, todo número inteiro é número racional.
   c) Sim, todo número racional é número real.
   d) Não. Todos os números irracionais são reais e nenhum deles é racional. Ou seja, nem todo número real é racional.
   e) Sim. Se $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é o conjunto dos números irracionais, então, $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$. Portanto, todo número irracional é, também, um número real.
   f) Não. Todo número racional é real, mas nenhum racional é irracional. Logo, nem todo número real é irracional. Essa justificativa pode ser apoiada pelo diagrama de inclusão.
2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é a relação de inclusão entre os conjuntos.
3. Não, para todas as perguntas. Essa resposta pode ser justificada a partir do diagrama apresentado.
4. O conjunto dos números irracionais é $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, isto é, os números que são reais mas não são racionais.

Página 34

Atividades

38.
   a) $-2 + \sqrt{2}$ b) $-4\pi + 10$ c) $-9\sqrt{3}$

39.
   a) Sim. Para cada número real (x), há um único número real oposto ($-x$). Todo número irracional é um número real, então todo número irracional tem número oposto.
   b) O resultado é 1. Se x é um número real diferente de zero, então $\frac{1}{x}$ é o inverso de x e $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1$.
   c) O resultado é 1. Todo número irracional é real e diferente de zero. Portanto, do item anterior, 1 é o resultado da multiplicação de um número irracional pelo seu inverso.

40.
   a) Sugestão de resposta: 1,121; 1,122; 1,123; 1,124; 1,125.
   b) Escolha números entre 1,5 e 1,6, por exemplo. De fato:
   $1{,}5^2 = 2{,}25 > 2 \Rightarrow \sqrt{2} < 1{,}5$; $1{,}6^2 = 2{,}56 < 3 \Rightarrow \sqrt{3} > 1{,}6$
   $1{,}5 < x < 1{,}6 \Rightarrow \sqrt{2} < x < \sqrt{3}$, pois $\sqrt{2} < 1{,}5 < x < 1{,}6 < \sqrt{3}$
   Sugestão de resposta: 1,51; 1,52; 1,53; 1,54; 1,55.

41.
   a) $10 > 0$. Então: $|10| = 10$
   b) $-10 < 0$. Então: $|-10| = 10$
   c) $3 + \sqrt{7} > 0$. Então: $|3 + \sqrt{7}| = 3 + \sqrt{7}$
   d) $1 - \sqrt{10} < 0$. Então: $|1 - \sqrt{10}| = -1 + \sqrt{10}$

42.
   a) A distância entre dois pontos na reta real é a diferença entre o maior e o menor número. Assim, a distância entre 0 e $2\sqrt{5} - 1$ é $2\sqrt{5} - 1$ unidades de comprimento.
   b) Sim, o número $-2\sqrt{5} + 1$ é o oposto de $2\sqrt{5} - 1$. Na reta numérica, números reais opostos estão igualmente distantes da origem.

43.
   a) Inteiros negativos;
   b) Racionais não inteiros;
   c) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

44. Se indicarmos por L o lado do quadrado maior, teremos:

$L^2 = 2 \cdot 6^2 \Rightarrow L = 6\sqrt{2}$; $6\sqrt{2}$ cm

45.

a) Pelo teorema de Pitágoras,

$\ell^2 + \ell^2 = 12^2 \Rightarrow 2 \cdot \ell^2 = 144 \Rightarrow \ell = 6\sqrt{2}$; $6\sqrt{2}$ cm

b) $\dfrac{12 \text{ cm}}{6\sqrt{2} \text{ cm}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Não, pois $\sqrt{2}$ é um número irracional.

46. Seja L a medida do lado do novo quadrado, então:

$L^2 = 2 \cdot 7^2 \Rightarrow L = 7\sqrt{2}$; $7\sqrt{2}$ cm

47. Se, para raio de medida r, comprimento $= 2\pi r = C$ e área $= \pi r^2 = A$, então,

- para raio de medida $2r$:

comprimento $= 2\pi(2r) = 4\pi r = 2C$

área $= \pi(2r)^2 = 4\pi r^2 = 4A$

- para raio de medida $3r$:

comprimento $= 2\pi(3r) = 6\pi r = 3C$

área $= \pi(3r)^2 = 9\pi r^2 = 9A$

a) Duplicando a medida do raio de uma circunferência, o comprimento dessa circunferência também duplica;

b) Duplicando a medida do raio de um círculo, a área desse círculo quadruplica;

c) Triplicando a medida do raio de uma circunferência, o comprimento dessa circunferência também triplica;

d) Triplicando a medida do raio de um círculo, a área desse círculo fica multiplicada por nove.

48. $x = (5 - \sqrt{2})^2 + (5 + \sqrt{2})^2 - (5 + \sqrt{2}) \cdot (5 - \sqrt{2})$

$x = (25 - 10\sqrt{2} + 2) + (25 + 10\sqrt{2} + 2) - (25 - 2)$

a) $x = 31$

b) x é racional.

c) $\dfrac{1}{31}$

d) -31

49.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{10}{\sqrt{10}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \dfrac{10\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{12} - \sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{12} - \sqrt{10}} \cdot \dfrac{\sqrt{12} + \sqrt{10}}{\sqrt{12} + \sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{12} + \sqrt{10}}{2}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} = \dfrac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} \cdot \dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} = 3(\sqrt{7} + \sqrt{6})$

50.

I. Verdadeira.

II. Falsa. O triplo de zero é igual a zero, o triplo de número negativo é negativo e o triplo de número positivo é positivo.

III. Falsa. Quando um número natural é quadrado perfeito, sua raiz quadrada é um número natural (que é também racional e não é irracional):

$\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4, \ldots$

IV. Falsa. $0^2 = 0$, o quadrado do número zero não é positivo (vale destacar que o zero é a única exceção).

V. Verdadeira.

Página 35

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Exclui-se no intervalo o número indicado na "bolinha vazia".
2. Sugestão de resposta: Inclui-se no intervalo o número indicado na "bolinha cheia".
3. Infinitos números reais.
4. Há 14 números inteiros: –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12.

Página 37

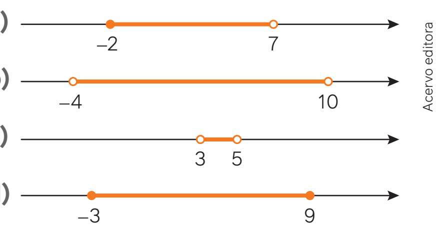
Para pensar e discutir

1. Os números inteiros –1, 0, 1, 2, 3, 4 e 5.
2. Ele pertence ao conjunto B.
3. Ele pertence ao conjunto B, mas não pertence ao conjunto A.

Atividades

51.

a) **b)** **c)** **d)**



52.

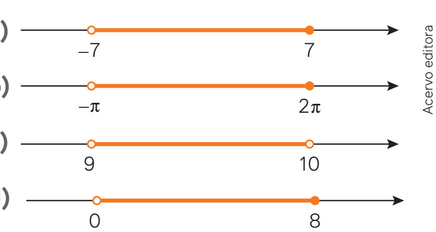
a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15.

b) Não. O intervalo é aberto à esquerda. Portanto, sendo –3 o número indicado nesse extremo, $-3 \notin A$.

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -3 < x \leq 15\}$

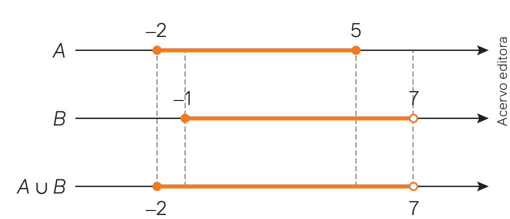
53.

a) **b)** **c)** **d)**



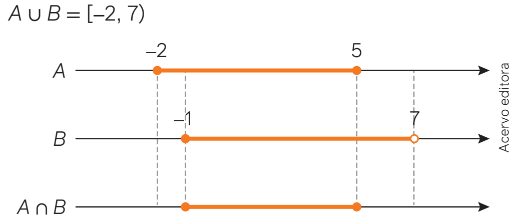
54.

a)



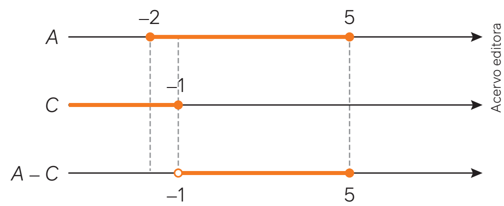
$A \cup B = [-2, 7)$

b)



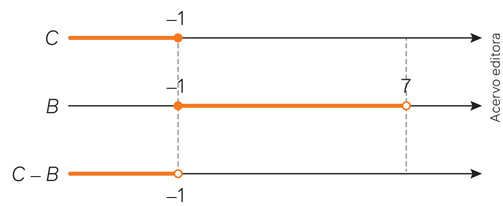
$A \cap B = [-1, 5]$

c)



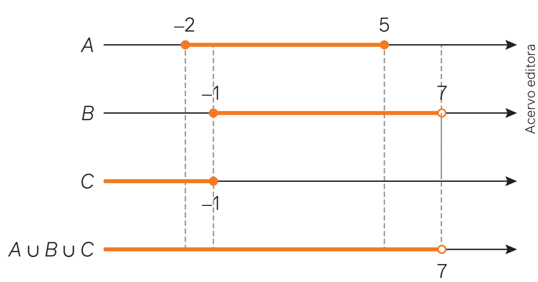
$A – C =]–1, 5]$

d)



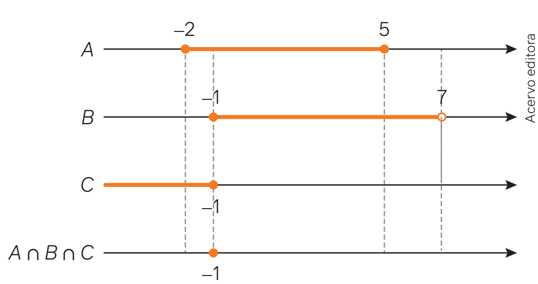
$C – B =]–\infty, –1[$

e)



$A \cup B \cup C =]–\infty, 7[$

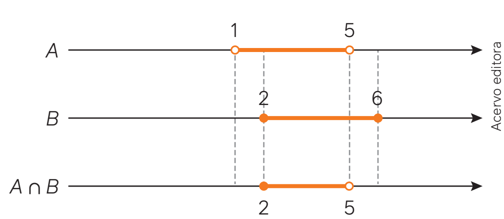
f)



$A \cap B \cap C = \{–1\}$

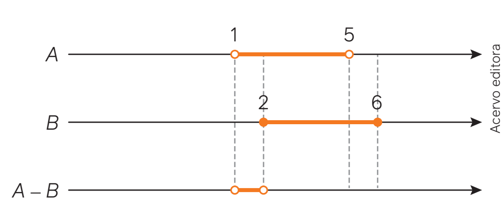
55.

a)



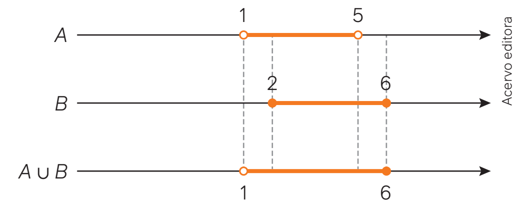
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \leq x < 5\}$ ou $[2, 5[$

b)



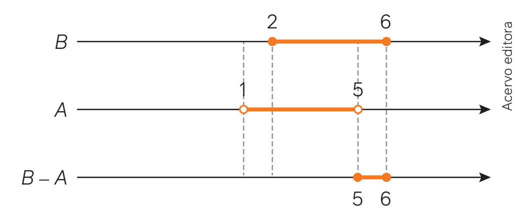
$A – B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 < x < 2\}$ ou $]1, 2[$

c)



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 < x \leq 6\}$ ou $]1, 6]$

d)



$B – A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 5 \leq x \leq 6\}$ ou $[5, 6]$

56.

- $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 0 \text{ ou } x > 4\}$
- $B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 0 < x < 12\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
- $A \cap B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} \Rightarrow n(A \cap B) = 7$; 7 elementos

57.

- Se $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, 1 < x \leq 17\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ é ímpar}\}$, então $A \cap B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$.
- $C = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 9 \leq x \leq 18\}$
  $(A \cap B) \cap C = \{9, 11, 13, 15, 17\}$
- $(A \cap B) – C = (A \cap B) – (A \cap B) \cap C =$
  $= \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\} – \{9, 11, 13, 15, 17\} = \{3, 5, 7\}$
- $3 + 5 + 7 = 15$

Páginas 38-43

Atividades finais

1. Sugestão de resposta:

a) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = 0\}$ **b)** $\{x \in \mathbb{N}^* \,/\, x < 1\}$

2.

a) $\in$ **b)** $\notin$ **c)** $\subset$ **d)** $\not\subset$

3.

a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) – n(A \cap B) = 10 + 5 – 2 = 13$

b) $n(A – B) = n(A) – n(A \cap B) = 10 – 2 = 8$

c) $n(B – A) = n(B) – n(A \cap B) = 5 – 2 = 3$

4.

a) A relação é $n(A \cup B) = n(A) + n(B) – n(A \cap B)$.

b) A condição, para que $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, é que A e B sejam conjuntos disjuntos, isto é, que $n(A \cap B) = 0$.

5.

a) $A = \{1, 2, 6, 8, 10, 14\}$ **b)** $B = \{4, 6, 8, 12, 14\}$

6.

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $(A \cup B) – (A \cap B)$. Em alguns casos, há outras formas de representar, como: $(A – B) \cup (B – A)$.

7. $x = 2$

8.

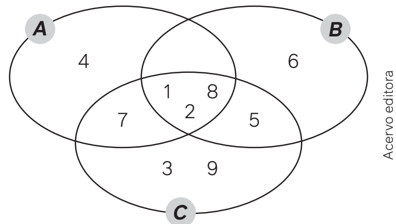
I. Falsa, pois $A - B = \{0, 6\}$.

II. Falsa, pois $B - A = \{0, 7, 8, 9, 10\}$.

III. Verdadeira.

IV. Verdadeira.

9.



10.

I. Verdadeira. Por exemplo, –1 é inteiro e não é natural.

II. Falsa. Todo racional é real, pois $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

III. Falsa. O conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais são disjuntos, isto é, a intersecção entre esses conjuntos é vazia.

IV. Verdadeira. Os números racionais.

V. Verdadeira. O conjunto dos números reais resulta da união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos irracionais.

11. Exemplo de respostas:

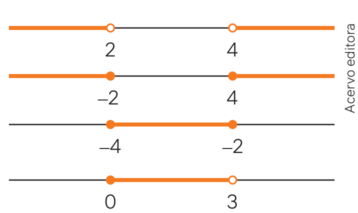
a) –5 b) 0,27 c) $\sqrt{5}$

12. Lembrando que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$:

a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ c) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$ e) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$

b) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ d) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ f) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$

13.

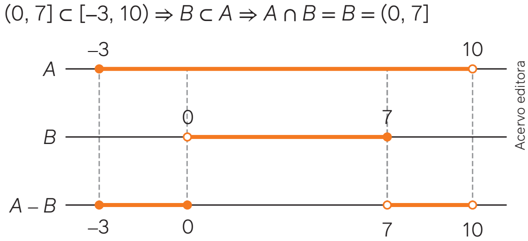


14.

a) $(0, 7] \subset [-3, 10) \Rightarrow B \subset A \Rightarrow A \cup B = A = [-3, 10)$

b) $(0, 7] \subset [-3, 10) \Rightarrow B \subset A \Rightarrow A \cap B = B = (0, 7]$

c)



$A - B = [-3, 0] \cup (7, 10)$

d) $(0, 7] \subset [-3, 10) \Rightarrow B \subset A \Rightarrow B - A = \{\ \}$

Questões de vestibulares e Enem

15. Se x e y são inteiros consecutivos, um é par e o outro é ímpar.

a) Incorreto. Se x for ímpar e y par, então $2x + 3y$ será par, pois é a soma de dois números pares.

b) Incorreto. Se x for par e y ímpar, então $3x + 2y$ será par.

c) Correto. O produto xy é par, pois um dos fatores é par. Assim, $xy + 1$ é ímpar, pois a soma de um par e um ímpar é ímpar.

d) Incorreto. $2xy + 2 = 2(xy + 1)$ é par.

e) Incorreto. $x + y$ é ímpar, pois um é par e o outro é ímpar. Assim, $(x + y) + 1$ é par.

Alternativa **c**.

16. Sejam n(A) e n(B) o número de pessoas que usam as redes sociais A e B, respectivamente. Há 100 pessoas; 12 não usam A nem B. Então, $n(A \cup B) = 100 - 12 = 88$.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 88 = 87 + 73 - n(A \cap B)$

$n(A \cap B) = 72$

$\frac{72}{100} = 72\%$ das 100 pessoas usam as redes sociais A e B.

Alternativa **e**.

17. $a = \frac{2}{7} \cong 0{,}29; b = \frac{1}{5} = 0{,}2; c = \frac{11}{30} \cong 0{,}37 \Rightarrow b < a < c;$

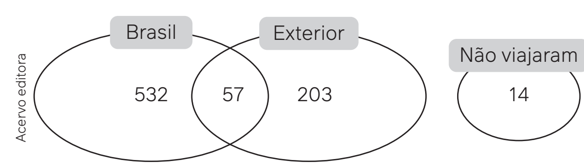
Alternativa **b**.

18. Sendo n o número total de estudantes da escola:

$\frac{2n}{5} + \frac{n}{6} + \frac{n}{3} + x = n \Rightarrow x = \frac{3n}{30} \Rightarrow x = \frac{n}{10}; \frac{1}{10}$ de n

Portanto, $\frac{1}{10}$ dos estudantes da escola não praticam o esporte A e não praticam o esporte B. Alternativa **a**.

19. Registre no diagrama as quantidades da tabela do enunciado.



$532 + 57 + 203 + 14 = 806$; 806 pessoas

Alternativa **b**.

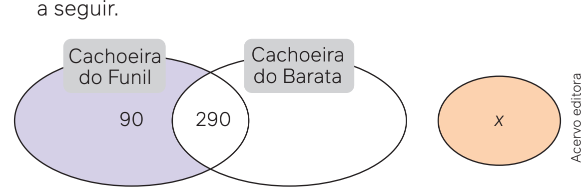
20. $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$; $A \cap B$ {a, e, i} e $B - A = \{b, c, d, f\}$

$A = \{a, e, g, h, i, j\}$; $B = \{a, b, c, d, e, f, i\}$

$A - B = \{g, h, i\}$

Alternativa **e**.

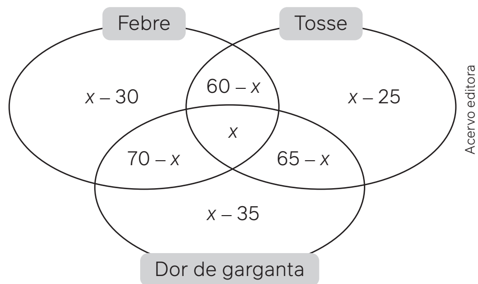
21. Análise de algumas das quantias registradas no diagrama a seguir.



$90 + x = 200 \Rightarrow x = 110$; 110 turistas (superior a 105)

Alternativa **e**.

22. Sabendo que cada uma das 150 pessoas atendidas apresentou pelo menos um dos três sintomas e indicando por x a quantidade de pessoas que apresentaram todos os três sintomas simultaneamente obtemos o diagrama:

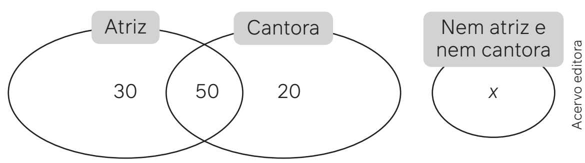


Se, ao todo, são 150 pessoas, então:

$(x - 30) + (x - 35) + (x - 25) + (60 - x) + (70 - x) + (65 - x) + x = 150 \Rightarrow x = 45$; 45 pessoas

Alternativa **c**.

23. Observe o valor no diagrama.



$30 + 50 + 20 + x = 120 \Rightarrow x = 20$; 20 alunas

Alternativa **b**.

24. $(A \cap B) =]-5, 4] \cap [1, 6] = [1, 4]$

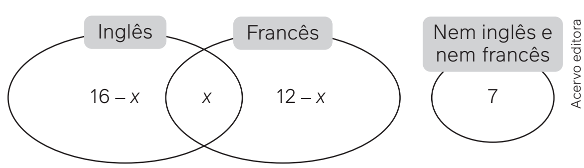
$(A \cap B) - C = [1,4] - [2,3] = [1,2) \cup (3,4]$

Se $(A \cap B) - C = [1, 2) \cup (3, 4]$

Então, {1, 4} é o conjunto formado.

Alternativa **a**.

25. Observe os valores distribuídos no diagrama, onde x indica quantos desses estudantes estudam Francês e Inglês.



Sabendo que são 32 estudantes na classe, temos que:

$(16 - x) + x + (12 - x) + 7 = 32 \Rightarrow x = 3$

Note que 3 é o número de estudantes daquela classe que estudam as duas línguas. Então, a proporção de estudantes que estudam Francês e Inglês (3) em relação aos que não estudam nenhum dos dois (7) é $\frac{3}{7}$.

Alternativa **a**.

26.

- Se $x \in (X \cap Y \cap Z)$, então $x \in K$ e x é múltiplo de 2, 3 e 5 simultaneamente. Ou seja: x é um múltiplo de 30, pois mmc (2, 3, 5) = 30.

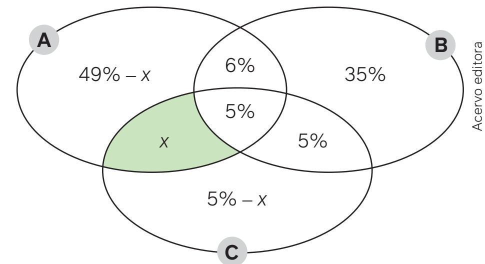
  Mas $V = X \cap Y \cap Z$.

  Então, $V = \{x \in K$ e x é múltiplo de $30\} = \{30, 60, 90\}$

- O número de subconjuntos de um conjunto é $2n$. Com $n(V) = 3$, o conjunto V tem 8 elementos ($2^3 = 8$).

  Alternativa **a**.

27. No diagrama, x indica o percentual de pessoas que consomem A e C, mas não B.



Supondo que a união dos três conjuntos represente 100% dos participantes, podemos escrever:

$(49\% - x) + (5\% - x) + 35\% + 6\% + 5\% + 5\% + x = 100\%$

$105\% - x = 100\% \Rightarrow x = 5\%$

Portanto, 5% das pessoas consomem A e C, mas não B.

Alternativa **b**.

28. $A - B = \{x, 3, 4, 5, 6\} - \{y, 2, 4\} = \{3, 5\}$

$\{x, 3, 4, 5, 6\} \cap \{y, 2, 4\} = \{x, 4, 6\} = \{y, 2, 4\}$

Então, $x = 2$ e $y = 6$, portanto $x - y = 2 - 6 = -4$.

Alternativa **a**.

29. $0 \in \mathbb{Q}$, $-1 \in \mathbb{Q}$, $-\frac{2}{7} \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{9} = 3 \in \mathbb{Q}$. Logo, nenhum desses números pertence ao conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Portanto, $\sqrt{2} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

Alternativa **d**.

30.

I. Correto. **II.** Incorreto. **III.** Incorreto.

Alternativa **a**.

31. Observando que $(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ e $(\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$, temos que $(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) - (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

Os números 3,14; 1,333... e $-\frac{7}{5}$ são racionais, mas não são inteiros. Logo, esses três números pertencem ao conjunto $\mathbb{Q} - \mathbb{Z} = (\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) - (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q})$.

O número -1 é inteiro e, portanto, não pertence ao conjunto $\mathbb{Q} - \mathbb{Z} = (\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) - (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q})$:

$-1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow -1 \notin (\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) - (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q})$. Alternativa **d**.

32. Se a soma de três números inteiros é um número ímpar, então apenas um deles é ímpar ou os três são ímpares. Alternativa **d**.

33. $F = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{7} = \frac{25}{28}$. Alternativa **c**.

34. Observando que $(A \cup B) \cap O = \emptyset$, temos que:

$n(A \cup B) + n(O) = 100 \Rightarrow n(O) = 100 - n(A \cup B)$

$n(O) = 100 - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(O) = 100 - (42 + 36 - 12) \Rightarrow n(O) = 34$; 34 alunos

Alternativa **c**.

35. $7{,}55 - 6{,}8 = 0{,}75$. Se marcou 7,55 pontos e derrubou uma garrafa com rótulo de 6,8, ele também deve ter derrubado uma ou mais garrafas com rótulo de 0,75 para alcançar 7,55. As garrafas com rótulos adicionais como $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{3}{4}$, 75% e 0,75 não são necessárias para essa soma. Portanto, ele pode ter derrubado no máximo 6 garrafas. Alternativa **e**.

36. Para chegar à 10ª posição, o Brasil precisa ultrapassar a Austrália sem superar a Hungria. Com 5 medalhas de ouro a mais que a Hungria e a Austrália na 10ª posição com 7 medalhas de ouro e 16 de prata, o Brasil ultrapassaria a Austrália com 4 medalhas de ouro e 12 de prata, totalizando 16 medalhas. Alternativa **d**.

37. Bianca vendeu (100% – 35%) = 65% do que vendeu Valéria. Logo, Bianca vendeu R$ 6.500,00.

$$\underbrace{10\,000 \in]7\,000,\,10\,000]}_{N3} \text{ e } \underbrace{6\,500 \in]4\,000,7\,000]}_{N4}$$

Portanto, *N*3 e *N*4 foram, respectivamente, as classificações que Valéria e Bianca receberam. Alternativa **d**.

38. Laboratório tipo A:

$$\frac{180 \text{ mil} + 4 \cdot 60 \text{ mil}}{100 \text{ usuários}} = 4{,}20 \text{ mil/usuário}$$

Laboratório tipo B:

$$\frac{120 \text{ mil} + 4 \cdot 16 \text{ mil}}{80 \text{ usuários}} = 2{,}30 \text{ mil/usuário}$$

Economia da escola: 4,20 mil – 2,30 mil = 1,90 mil

A economia da escola será de 1,90 mil reais por usuário. Alternativa **b**.

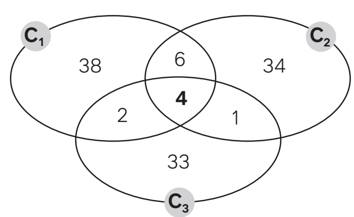
39. Brasil + Argentina:

Ouro = 2 + 3 = 5; Prata = 5 + 2 = 7; Bronze = 3 + 2 = 5

Com 5 medalhas de ouro, 7 de prata e 5 de bronze, “Brasil + Argentina” empataria com EUA em número de medalhas de ouro e em número de medalhas de prata, mas superaria em uma unidade o número de medalhas de bronze. Portanto, esse país hipotético passaria a ocupar a segunda posição. Alternativa **b**.

40. Vamos distribuir, em um diagrama de Venn, os valores informados no enunciado:

$n(C_1) = 50$, $n(C_2) = 45$, $n(C_3) = 40$, $n(C_1 \cap C_2) = 10$, $n(C_1 \cap C_3) = 6$, $n(C_2 \cap C_3) = 5$ e $n(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = 4$



$n(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = (38 + 33 + 34) + (6 + 2 + 1) + 4 = 118$

Total de 118 originais de impressão.

Alternativa **c**.

41. Sem considerar a margem de erro, com 31% das intenções de votos, o candidato Z é o que receberia o menor número de votos. Mesmo assim, considerando a margem de erro estimada (em pontos percentuais) é possível que o candidato Z venha a vencer:

$$\left.\begin{array}{l} X \rightarrow 36\% - 3\% = 33\% \\ Y \rightarrow 33\% \\ Z \rightarrow 31\% + 3\% = 34\% \end{array}\right\} 33\% + 33\% + 34\% = 100\%$$

Se o candidato Z poderia vencer, então qualquer um dos três candidatos poderia vencer.

a) Incorreto. Os candidatos Y e Z também poderiam vencer.

b) Incorreto. O candidato Z também poderia vencer.

c) Incorreto.

$$\left.\begin{array}{l} X \rightarrow 36\% - 3\% = 33\% \\ Y \rightarrow 33\% + 3\% = 36\% \\ Z \rightarrow 31\% \end{array}\right\} 33\% + 36\% + 31\% = 100\%$$

36% – 33% = 3% → máxima diferença possível do candidato Y sobre X; 3% < 5%

Portanto, o candidato Y poderia vencer com uma diferença de até 3% sobre X.

d) Correto.

$$\left.\begin{array}{l} X \rightarrow 36\% - 3\% = 33\% \\ Y \rightarrow 33\% \\ Z \rightarrow 31\% + 3\% = 34\% \end{array}\right\} 33\% + 33\% + 34\% = 100\%$$

34% – 33% = 1% → máxima diferença possível do candidato Z sobre X; portanto, o candidato Z poderia vencer com uma diferença de, no máximo, 1% sobre X.

e) Incorreto.

$$\left.\begin{array}{l} X \rightarrow 36\% \\ Y \rightarrow 33\% - 3\% = 30\% \\ Z \rightarrow 31\% + 3\% = 34\% \end{array}\right\} 36\% + 30\% + 34\% = 100\%$$

34% – 30% = 4% → máxima diferença possível do candidato Z sobre Y; 4% < 5%

Portanto, o candidato Z poderia vencer com uma diferença de até 4% sobre Y.

Alternativa **d**.

CAPÍTULO 2

Estatística e pensamento computacional

Objetivos

- Identificar, construir e analisar gráficos estatísticos.
- Interpretar criticamente situações socioeconômicas com base em índices.
- Reconhecer a diferença entre frequência absoluta e frequência relativa de uma distribuição de dados.
- Analisar e construir diagramas de ramo e folhas associados a uma distribuição de dados.
- Compreender noções básicas referentes à linguagem computacional.
- Utilizar algoritmos e fluxogramas, a fim de descrever procedimentos para a execução de uma atividade.

Justificativa

A interpretação e a análise crítica de gráficos, tabelas e índices socioeconômicos possibilitam aos estudantes que desenvolvam a argumentação com base em fatos, dados e informações confiáveis. O trabalho com algoritmos e fluxogramas visa desenvolver, por meio do pensamento computacional, competências como raciocínio lógico e capacidade de planejamento, necessárias para resolver problemas da vida cotidiana, individual ou coletivamente.

Competências gerais da BNCC

Competência geral 1: Essa competência é mobilizada neste capítulo pela própria natureza dos assuntos tratados. A busca de informações está presente em todo o capítulo. A interpretação de taxas e índices de forma crítica, bem como a localização e a análise de informações em textos, tabelas e gráficos, de maneira segura, contribuem para entender e explicar a realidade. Nesse sentido, por exemplo, são analisados e discutidos gráficos que contêm erros, nas páginas 55 e 56.

Competência 4: Essa competência está presente no trabalho com algoritmos e fluxogramas, por meio do qual os estudantes desenvolvem uma linguagem que possibilita representar uma sequência de passos para resolver determinado tipo de problema. Eles desenvolvem essa competência também na realização da seção **Análise e contexto** da página 59, em que, organizados em grupos, pesquisam como é calculado o IDH de um país e se informam sobre o IDH dos estados brasileiros. Eles representam todos os dados em uma tabela ou um gráfico e, em seguida, redigem um texto comparando o IDH do Brasil com o IDH dos estados. Dessa maneira, usam a linguagem oral para se comunicar, trocar ideias e partilhar informações, bem como a linguagem matemática e a linguagem escrita para redigir um texto que compare os dados obtidos.

Competência geral 5: Essa competência é mobilizada nas diversas atividades em que os estudantes utilizam planilhas eletrônicas para construir gráficos e diagramas, como na seção **Para explorar** da página 69.

Competências gerais 7 e 9: Os estudantes desenvolvem a **competência 7**, que se refere à argumentação com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns, ao resolverem as atividades relativas à seção **Análise e contexto** das páginas 59 e 61. Por serem feitas em grupos, essas atividades contemplam também a **competência 9**, propiciando que exercitem a empatia, o diálogo e a cooperação.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 1

EM13MAT102: Essa habilidade é mobilizada na maior parte do capítulo, cujos objetivos incluem a localização e análise de informações em textos, tabelas e gráficos estatísticos. Em especial a detecção de erros e possíveis inadequações em informações presentes em gráficos estatísticos podem ser encontradas nas páginas 55 e 56. As atividades propostas na seção **Análise e contexto** da página 59 também mobilizam essa habilidade.

EM13MAT104: Da página 57 até 62, os estudantes interpretam taxas e índices de natureza socioeconômica, mobilizando, assim, essa habilidade. São trabalhados os seguintes índices: IDH, IPCA, INPC, PIB e o índice de Gini. Por meio das atividades, os estudantes investigam processos de cálculo, fazem análises críticas em relação à realidade e elaboram argumentos.

Competência específica 2

EM13MAT202: Essa habilidade é contemplada da página 71 até a 75, em que são trabalhadas todas as etapas de uma pesquisa estatística. Com base nesse estudo, por meio da atividade proposta na página 75, os estudantes planejam e executam pesquisa amostral sobre um tema relacionado a uma das áreas de conhecimento.

Competências específicas 3 e 4

EM13MAT315 e EM13MAT405: Essas habilidades são exploradas da página 78 à 85, com o objetivo de desenvolver noções básicas referentes à linguagem computacional e de utilizar algoritmos e fluxogramas para descrever procedimentos para a execução de uma atividade.

EM13MAT406: Essa habilidade é contemplada na pesquisa proposta na atividade da página 75, quando os estudantes deverão construir e interpretar tabelas e gráficos de frequência para apresentar os resultados da pesquisa que irão realizar.

EM13MAT407: Essa habilidade é contemplada em grande parte desse capítulo. Por exemplo, da página 47 até a 54, os estudantes analisam, comparam e interpretam conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes gráficos, tais como os gráficos de colunas, barras, setores, linhas e histogramas, para decidirem sobre os mais eficientes para fazer a análise de acordo com o tipo de dados. Da página 68 à 70, eles trabalham com o diagrama de ramo e folhas.

Conexões com outras áreas do conhecimento

Na abertura do capítulo, na página 45, os estudantes discutem a importância da pesquisa científica e procuram na internet os resultados de uma pesquisa da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, anotam os resultados encontrados e as formas como esses resultados foram apresentados.

Temas Contemporâneos Transversais

O TCT **Ciência e tecnologia** foi mobilizado na abertura do capítulo, na página 45, em que os estudantes procuram na internet os resultados de uma pesquisa da área de **Ciências da Natureza**, anotam os resultados encontrados e as formas como esses resultados foram apresentados.

O TCT **Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras** foi abordado na seção **Para pensar e discutir** da página 49, em que os estudantes analisam um gráfico de setores que aborda a distribuição da população indígena no território brasileiro e, em seguida, pesquisam sobre as características de três etnias da população indígena brasileira.

O TCT **Educação fiscal** foi mobilizado na seção de índices socioeconômicos da página 57 até a 62.

O TCT **Educação para os direitos humanos** foi mobilizado nas páginas 72 e 73, no tópico Etapas de uma pesquisa estatística, em que são encaminhadas discussões e problematizações voltadas aos direitos fundamentais das crianças (saúde, educação, direito a dignidade etc.), inclusive nas atividades propostas na seção **Para pensar e discutir** da página 73.

Resoluções e comentários

Página 45

Abertura

1. Como a pesquisa estatística está proposta na BNCC para ser trabalhada no Ensino Fundamental, incentive os estudantes a fazer relatos das pesquisas que já realizaram.
2. Pode ser feita uma parceria com o professor de Química, de

Física ou de Biologia para propor um tema que esteja sendo estudado no momento. Os estudantes podem trabalhar em grupos e você pode ampliar essa atividade, em conjunto com os professores da área de Ciências da Natureza, o quanto sua realidade permitir. A apresentação dos resultados das pesquisas pode ser feita por meio de um seminário com a participação de todas as disciplinas envolvidas.

1. Tabelas e gráficos estatísticos

Página 46

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: A partir do dia 23/03, percebe-se que houve um aumento acentuado do número de casos.
2. Sim. Pelo gráfico, em 16/04 havia aproximadamente 27 000 casos e, em 26/04, aproximadamente 55 000 casos.
3. De aproximadamente 30 mil chegaram a mais de 100 mil, portanto mais que triplicou o número de casos.

Página 47

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: A comparação entre o PIB do Brasil e do México em relação aos demais, assim como a quantidade de países com PIBs baixos em relação aos citados anteriormente.
2. A variável é o valor do PIB em bilhões de dólares.
3. Sugestão de resposta: O PIB do México no ano de 2023 foi aproximadamente o triplo do PIB da Argentina.

Página 48

Para pensar e discutir

1. Sim. Adicionando as populações das cinco cidades temos 25 326 419 habitantes. Esse valor representa mais de 20 308 075,6 habitantes, correspondente a 10% da população brasileira, que era de 203 080 756 em 2022.
2. Sugestão de resposta: Chama a atenção o fato de a população de uma única cidade corresponder a mais de 5% da população de todo o Brasil.

Página 49

Para pensar e discutir

1. Espera-se dos estudantes uma comparação em relação aos percentuais, por exemplo, a Região Norte é onde está a maior concentração de indígenas do país (45%), mas em relação à população brasileira, a região concentra apenas 8%.
2. Sugira aos estudantes que pesquisem sobre etnias indígenas de sua região ou proximidades; registrando características, como região em que vivem, língua que falam, modo de vida, religião, fabricação de utensílios, pinturas corporais entre outras.

Página 50

Para pensar e discutir

1. A população brasileira cresceu. Podemos observar pelo gráfico que houve um crescimento nesse período, porém menos acentuado que no período anterior.
2. O estudante pode perceber, por exemplo, que nos primeiros períodos apresentados no gráfico, o crescimento da população até 1900 foi pouco acelerado. A partir de então, houve uma aceleração do crescimento até 2010, quando se percebe uma desaceleração.

Página 51

Para explorar

Você pode solicitar a cada estudante que escreva sua altura em um papel, sem precisar se identificar, e coloque em um saquinho. Após o levantamento, eles deverão organizar as medidas das alturas em classes para elaborar o gráfico. Promova um clima de respeito entre os estudantes.

Para pensar e discutir

1. A metade da bola representa 1 gol. Segundo o gráfico, Ronaldo fez 15 gols.
2. Estão sendo representados pelas bolas que indicam a quantidade de gols marcados por cada jogador.
3. Sugestão de resposta: Utilizando uma taça do tipo das que são entregues em campeonatos mundiais, pode-se compor o Brasil com 5 taças, seguido pela Itália com 4, empatada com a Alemanha. Argentina fica na 4ª posição, com 3 taças, seguida por França e Uruguai, ambos com 2 taças. Por último, vêm Inglaterra e Espanha, ambos com 1 taça.

Páginas 52-54

Atividades

1. Considerando que o círculo completo possui 360° e que o total dos dados representa um percentual de 100%, vamos adotar x como o ângulo e y cada percentual: $x = \frac{360y}{100}$, obtendo-se 40% correspondente ao ângulo de 144°; 30% correspondente ao ângulo de 108°; 15% correspondente ao ângulo de 54°; 10% correspondente ao ângulo de 36°; 5% correspondente ao ângulo de 18°.
2.
   a) A taxa de desocupação representa a proporção da força de trabalho de uma região (ou país) que está desempregada e ativamente procurando por emprego, logo, se aumenta a taxa de desocupação, consequentemente há o aumento da taxa de desemprego.
   b) Maior taxa: Bahia e Pernambuco, mais de 14%; Menor taxa: Rio Grande do Sul, Santa Catarina, Paraná, Mato Grosso do Sul, Rondônia e Mato Grosso até 6%.
3.
   a) A maior temperatura registrada no período foi de 12 °C.
   b) A temperatura ficou abaixo de 7 °C nos dias 3, 6 e 11 de julho, logo, 3 dias.
   c) A temperatura média foi de 8 °C nos dias 2, 4, 5 e 9 de julho, logo, 4 dias.
4.
   a) Períodos com aumento: janeiro-fevereiro aumentou R$ 0,80; março-abril aumentou R$ 0,90; abril-maio aumentou R$ 0,40; maio-junho aumentou R$ 0,90. Os maiores aumentos aconteceram em dois períodos: março-abril e maio-junho.
   b) Períodos com aumentos percentuais: janeiro-fevereiro

aumentou 8,4% aproximadamente; março-abril aumentou 9,4% aproximadamente; abril-maio aumentou 3,9% aproximadamente; maio-junho aumentou 8,3% aproximadamente. O maior aumento percentual ocorreu no período março-abril.

5.

População das regiões brasileiras (Censo 2022)		
Região	**População (em milhões)**	**Porcentagem (%)**
Sul	29,9	14,7
Sudeste	84,9	41,8
Centro-Oeste	16,3	8,1
Nordeste	54,6	26,9
Norte	17,3	8,5
Totais	203	100

6.

a) Falso, visto que, na categoria propaganda, o produto A recebeu a avaliação mais alta (nota 5), enquanto o produto B obteve uma nota 3.

b) Falso, pois o produto B foi considerado o mais útil (nota 5), porém o produto C foi o menos durável (nota 2).

c) Falso, pois o produto C liderou apenas em dois aspectos (qualidade e atendimento).

d) Falso, pois o produto A recebeu a melhor pontuação na assistência técnica (nota 4).

e) Verdadeiro. De fato o produto A recebeu a maior pontuação na propaganda (nota 5), mas apresentou a menor nota na categoria aparência (nota 1).

Alternativa **e**.

7. Seja x as porcentagens dos candidatos A e B:

$\frac{55}{85} = \frac{x}{100} \Rightarrow 85x = 5\,500 \Rightarrow x \cong 64{,}7$

Alternativa **c**.

8.

a) Falso, pois no mês de julho, Roberto e Mário tiveram percentuais de vendas equivalentes.

b) Falso, visto que a representação no gráfico é feita em porcentagem, porém os resultados dependem diretamente do total das vendas.

c) Falso, o pensamento é análogo à alternativa anterior.

d) Verdadeiro, pois a proporção de 50 para 20 equivale a 2,5 ou 250% em termos percentuais.

e) Falso, todos os valores são distintos.

Alternativa **d**.

9. Os períodos de maior rentabilidade foram identificados nos meses de julho com lucro de +2, setembro com lucro de +3 e dezembro com lucro de +4.
Alternativa **a**.

Página 55

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: O aumento pode estar relacionado à mudança na presidência da empresa. Entretanto, para uma análise mais profunda deve-se levar em consideração o contexto econômico.

2. Calculamos o aumento pela diferença entre os valores apresentados no gráfico: 7,52 – 4,70 = 2,82.

$4{,}70x = 2{,}82 \Rightarrow x = \frac{2{,}82}{4{,}70} = 0{,}6 = 60\%$

3. Sugestão de resposta: A altura da coluna correspondente ao dado de 2022 é a metade da altura da coluna correspondente ao dado de 2023. Com base nas alturas dessas colunas, o faturamento praticamente duplicou de 2022 para 2023, o que não é correto. Os valores do faturamento devem ser proporcionais à altura das colunas no gráfico.

Páginas 56-57

Atividades

10. Sugestão de resposta: O gráfico não está correto, pois a soma dos percentuais não é igual a 100%. Outra possível observação é que, por exemplo, 82% da medida 360° (correspondente a uma volta) equivale a um ângulo de 295,2°, isto é, um setor de mais de $\frac{3}{4}$ do círculo.

11.

a) Sim, pois 33% + 36% + 31% = 100%.

b) Sim. O motivo se deve ao fato de que a altura das colunas inicia em 28%; portanto, a altura de cada uma delas não é coerente com o percentual que representa.

c) Sugestão de resposta: A distorção é corrigida ao se refazer o gráfico com as colunas começando no zero.

12. Sugestão de resposta: Fica acentuado o crescimento dos juros.

13. Sugestão de resposta: A representação do gráfico de setores em perspectiva com o setor "ótimo" mais à frente distorce visualmente a comparação com o setor "regular", que aparece mais distante (mais atrás), embora os percentuais sejam os mesmos.

14. Essa é uma atividade de pesquisa que deve ser incentivada, pois amplia o conhecimento em relação à análise de um gráfico estatístico.

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: A vista de Paraisópolis contrastando com os imponentes edifícios de luxo oferece uma perspectiva das disparidades sociais presentes na cidade de São Paulo.

2. Sugestão de resposta: A imagem pode evidenciar o contraste na forma como as pessoas vivem e enxergam a vivência dentro de uma mesma cidade.

Página 59

Análise e contexto

1. O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é calculado a partir de três principais componentes: expectativa de vida ao nascer, educação e renda *per capita*. Cada componente é normalizado e combinado em um único número, variando de 0 a 1, em que 1 representa melhor qualidade de vida.

2. A resposta dependerá do ano que a pesquisa for realizada, uma sugestão é utilizar o *Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil* (disponível em: http://www.atlasbrasil.org.br/ranking. Acesso em: 3 set. 2024).

3. Sugestão de resposta: Uma comparação entre o IDH do Brasil e do estado de Goiás, por exemplo.

Página 60

Para pensar e discutir

1. Como os índices nos três primeiros meses são 0,53%, 0,84% e 0,71%, nessa ordem, para saber o índice acumulado devemos multiplicar $(1 + 0{,}0053) \cdot (1 + 0{,}0084) \cdot (1 + 0{,}0071) = 1{,}0053 \cdot 1{,}0084 \cdot 1{,}0071 \cong 1{,}0209$. Logo, o índice acumulado é de aproximadamente 2,09%. Ao adicionar 1 com 0,0053, por exemplo, estamos calculando 100% + 0,53%, isto é, já estamos atualizando o valor com o aumento de 0,53%. A mesma explicação para os outros dois fatores. O resultado é 1,0209, isto é, 1 + 0,0209, que corresponde a 100% + 2,09% (aumento de 2,09%).
2. Espera-se que os estudantes percebam que, em março de 2023, o INPC acumulado em 12 meses foi de 4,65%. O aumento salarial foi de 3,90%, portanto, inferior ao INPC acumulado no período. Logo, houve uma diminuição do poder de compra.

Página 61

Carrossel de imagens – Índices socioeconômicos

Este carrossel de imagens permite analisar a desigualdade social no Brasil. Cada imagem destaca um indicador, como o índice de Gini e o de habitação; além de subindicadores do IDH em educação e saúde. Esses dados revelam as condições socioeconômicas das regiões e promovem discussões críticas sobre a desigualdade social e seus impactos na população.

Análise e contexto

1. A resposta dependerá do ano em que a pesquisa for realizada.
2. A resposta dependerá dos países escolhidos. Uma sugestão é utilizar o *site* do Banco Mundial (disponível em: https://databank.worldbank.org/source/world-development-indicators; acesso em: 26 jun. 2024) escolhendo Database: World Development Indicators; Series: GDP *per capita* (current US$); em *Time* os últimos 10 anos e, por fim, os quatro países.
3. O gráfico dependerá dos valores dos PIBs *per capita* do Brasil e dos países escolhidos.
4. A análise dependerá principalmente dos países escolhidos. Aproveite para discutir: Em razão de o PIB *per capita* ser maior, necessariamente as pessoas têm mais qualidade de vida? O custo de vida nesses países é próximo? A desigualdade salarial nesses países é muito grande?

Página 62

Podcast – Um país de desigualdades

Apresente o *podcast* "Um país de desigualdades" aos estudantes. Ele explora como a desigualdade de renda afeta o Brasil, explicando o índice de Gini e a Curva de Lorentz, e discute diferenças regionais e soluções para reduzir a desigualdade.

Infográfico

1. Os índices socioeconômicos são essenciais para entender os desafios de um país, orientar políticas, medir progresso, atrair investimentos e impulsionar mudanças positivas.
2. Os índices socioeconômicos mostram as condições sociais e econômicas de uma região, incluindo saúde, educação, renda, desigualdade, emprego e qualidade de vida.

2. Linguagem estatística

Página 63

Para pensar e discutir

1. Uma interpretação da figura 1 pode ser: como a população brasileira está distribuída em certas categorias, como educação e saúde; já a figura 2 apresenta uma lupa, indicando um olhar mais detalhado sobre a informação.

Página 65

Para explorar

1. Sugestão de resposta:
   - Variável qualitativa nominal: "Qual é a sua cor de cabelo predominante? Loiro, castanho, preto, ruivo ou outro?".
   - Variável qualitativa ordinal: "Em uma escala de 1 a 5, como você classificaria a sua satisfação com o(a) professor(a) de História? Sendo 1 = Muito insatisfeito e 5 = Muito satisfeito".
2. Sugestão de respostas:
   - Variável quantitativa discreta: “Quantas vezes por semana você pratica exercícios físicos?”
   - Variável quantitativa contínua: “Qual é a sua altura em centímetros?”
3. Espera-se que os estudantes consigam explicar a diferença entre as variáveis, pois a elaboração das perguntas já parte dessa premissa.

Páginas 67-68

Atividades

15.

a) $70 + 40 + 30 + 20 + 40 = 200$; 200 estudantes

b) Frequências relativas:

Pop: $\frac{70}{200} = 35\%$; Eletrônica: $\frac{20}{200} = 10\%$;

Rock: $\frac{40}{200} = 20\%$; Sertanejo: $\frac{40}{200} = 20\%$.

Hip-hop: $\frac{30}{200} = 15\%$;

16. Frequência absoluta (*fa*) = 3

Frequência relativa (*fr*) $= \frac{3}{20} = 0{,}15 = 15\%$

17. Percentual: $\frac{1\,310 + 850}{300 + 640 + 500 + 1\,310 + 850} = 0{,}6 = 60\%$

18.

Disciplinas escolhidas pelos estudantes		
Disciplina	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**
Português	25	0,25
Matemática	15	0,15
História	20	0,20
Física	10	0,10
Química	30	0,30
TOTAL	100	1

19. $\frac{40}{200} = 0{,}2 \Rightarrow 1 - (0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}05) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$

$0{,}35 \cdot 200 = 70$; 70 candidatos

20. Nulo ou branco: $100\% - (26\% + 24\% + 22\%) = 28\%$
$28x = 26 \cdot 196 \Rightarrow 28x = 5\,096 \Rightarrow x = 182$.
Alternativa **b**.

21. Total de estudantes: $4 + 10 + 18 + 16 + 2 = 50$.
Estudantes aprovados: $18 + 16 + 2 = 36$.
$\frac{36}{50} = \frac{72}{100} = 72\%$
Alternativa **e**.

Para pensar e discutir

1. Faixa mais frequente é 40 kg.
2. A faixa menos frequente é 70 kg.
3. No ramo 3, o algarismo das unidades é repetido para cada valor representado.
4. Na coluna da esquerda, abaixo do número 7, que corresponde à massa dos 70 kg, insere-se o número 10, e à direita, nas "folhas", insere-se o número 2.

Página 69

Para explorar

1.

2	0 0 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 7 8 9
3	0 0 0 1 1 2 2 3 3 4 5 6 7 7 7 8 9 9 9
4	0 0 1 2 2 3 4 5 8 8 8 9
5	2 3 7

2. Espera-se que os estudantes percebam que, com um *software* de planilhas eletrônicas, ordenar os dados e compor o gráfico fica muito mais rápido que fazer à mão, principalmente para uma grande quantidade de dados.
3. Sugestão de resposta: Os dados em um histograma são visualmente melhores de ser interpretados.
4. O histograma é um gráfico mais comum de ser usado, mas a dificuldade de compô-los é semelhante.

Página 70

Atividades

22. Dados que completam o quadro:
Coluna **Frequência relativa** → 4%; 12%; 20%; 10%; 8%; 12%; 24%; 10%.
Linha **Total** → 50; 100%

23. Você pode solicitar a cada estudante que anote sua altura em uma folha de papel e coloque em um saquinho. Promova a leitura de todas as alturas, garantindo um ambiente de respeito entre os colegas.

24.

a) 65 anos

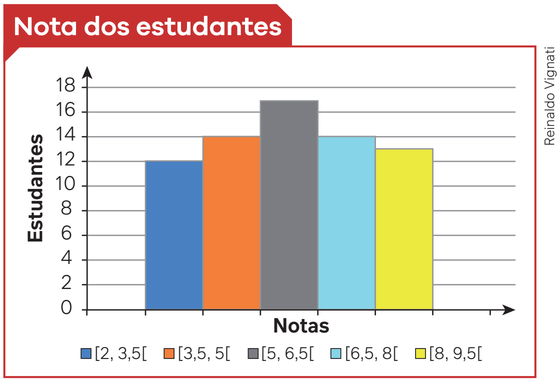
b) 33 anos

c) *fa*: 14; *fr*: $\frac{14}{40} = 0{,}35$; 35%

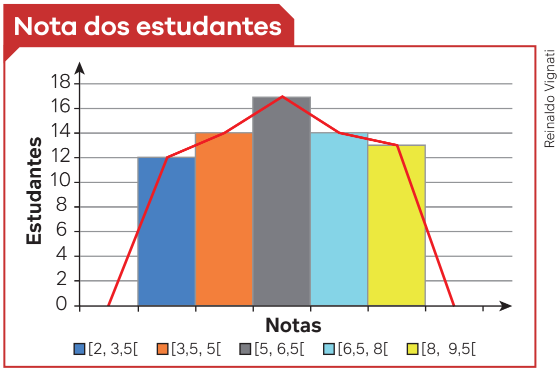
25. $f_{\text{acumulada}} = f_{2^{\text{a}}\text{ classe}} + f_{1^{\text{a}}\text{ classe}} \Rightarrow 26 - 12 = 14$
Alternativa **a**.

26.

a)



b)



Página 72

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Sim, o número de fogões em uma casa pode indicar o padrão de vida, o tamanho da família, o acesso a recursos, o estilo de vida e a infraestrutura residencial, fornecendo *insights* sobre a situação socioeconômica de um grupo de pessoas em uma localidade.
2. Sugestão de resposta: O número de banheiros pode representar um dado importante. Casas com 1 banheiro indicam certo grau de situação econômica completamente diferente de casas com 2 ou mais banheiros.
3. Sugestão de resposta: Qual é o nível educacional mais alto que você ou alguém na sua família alcançou?

Página 73

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Uma hipótese pode ser a falta de suporte familiar ou redes de segurança social, devido a fatores como pobreza extrema, desintegração familiar, abuso, negligência, falta de acesso à educação e falhas nos sistemas de proteção à infância.
2. Sugestão de resposta: A falta de vacinação de crianças pelos pais pode ser devido a desinformação, desconfiança nas autoridades de saúde, dificuldades de acesso ou medo de efeitos colaterais.

Página 75

Para pensar e discutir

1. Não, a pesquisa foi feita com a população toda, isto é, pesquisa censitária.

2. Amostral, pois foi entrevistada apenas uma parte representativa da população.
3. Sugestão de resposta: pesquisa sobre filmes, preços de algum item entre outros.
4. Sugestão de resposta: Por meio de gráficos compartilhando-os nas redes sociais.

Infográfico clicável – Coronavírus: um caso estatístico

Apresente o infográfico "Coronavírus: um caso estatístico" para os estudantes. Esse recurso didático mostra como gráficos e dados podem ser usados para analisar um período da pandemia de covid-19. O infográfico apresenta informações detalhadas de casos confirmados, óbitos e taxa de mortalidade no Brasil, possibilitando a visualização dos dados de maneira clara e objetiva para que os estudantes possam interpretá-los.

Atividades

27. Sugestão de resposta:

    Os estudantes podem, por exemplo, junto à área de Linguagens, pesquisar como as pessoas escrevem, comunicam e interpretam mensagens, ao utilizarem as redes sociais.

    Questão de pesquisa: Em que medida as redes sociais impactam a gramática, a sintaxe e o vocabulário da linguagem escrita?

    Nesse caso, eles poderiam, por meio de uma pesquisa amostral, utilizar um questionário *on-line* para saber:

    - Quem são os usuários ativos de redes sociais: Idade, gênero, localização, escolaridade, tempo de uso das redes, gosto por escrita à mão e dificuldade gramatical, entre outros.

3. Pensamento computacional

Página 76

Infográfico clicável – Pensamento computacional

Apresente o infográfico "Pensamento computacional" aos estudantes. Ele explora as etapas essenciais da resolução de problemas com coleta de dados, análise, decomposição, padrões, abstração, algoritmos e modelagem, mostrando como essas fases se conectam e se aplicam a contextos reais para desenvolver o pensamento estruturado e eficiente.

Para pensar e discutir

1. Não, o pensamento computacional está relacionado, principalmente, com as etapas que utilizamos para resolver um problema ou desafio.
2. Não, problemas do nosso dia a dia também podem ser resolvidos utilizando pensamento computacional.
3. Sugestão de resposta: Abrir uma confecção de roupas infantis e ter lucro. Você precisa coletar dados sobre o mercado que está entrando; analisar para verificar se faz sentido o investimento da forma que pensa; você pode decompor em problemas mais simples para facilitar a visualização das demandas presentes (onde comprar a matéria prima, como produzir, como vender seus produtos etc.); identificar locais mais confiáveis para compra, locais mais rentáveis para venda; definir aspectos que podem ser melhorados ou ajustados e, ao final disso, ter um modelo de como realizar esta atividade periodicamente.

Página 78

Análise e contexto

1. Sugestão de resposta: O pensamento computacional é dividir um macroproblema em partes para que se chegue à solução, ou seja, baseando-se em premissas (que são fatos aceitos como verdades) e utilizando regras bem definidas do sistema lógico que estamos utilizando, encontramos verdades (conclusões).
2. Sugestão de resposta: Na realização da lição de casa: 1º pegar o material de estudo; 2º escolher um lugar calmo para se concentrar; 3º rever a matéria; 4º resolver exercícios. Podemos destacar para o pensamento computacional: análise, compreensão, definição, modelagem, resolução, comparação e automatização de problemas e suas soluções. A interpretação de cada um deles é pessoal e, com base nela, os estudantes devem indicar as duas atividades do cotidiano.

Página 80

Para pensar e discutir

1. $h^2 = (c_1)^2 + (c_2)^2 \Rightarrow h = \sqrt{(c_1)^2 + (c_2)^2}$
2. Sugestão de resposta: Após a passagem 8, colocar: 9. Divida a medida obtida por 100. A passagem 10 seria a antiga passagem 9.

Página 81

Para explorar

1. Sugestão de resposta: Receita de um bolo de cacau.

   Ingredientes:
   1 xícara de farinha de trigo;
   1 xícara de açúcar mascavo;
   1/2 xícara de cacau em pó;
   1 colher de chá de fermento em pó;
   1/2 colher de chá de bicarbonato de sódio;
   1/2 colher de chá de sal;
   1/2 xícara de leite;
   1/4 xícara de óleo vegetal;
   1 ovo;
   1 colher de chá de extrato de baunilha;
   1/2 xícara de água quente.

   1. Pré-aqueça o forno a 180 °C. Unte e enfarinhe uma forma de bolo.
   2. Em uma tigela grande, misture a farinha, o açúcar mascavo, o cacau em pó, o fermento em pó, o bicarbonato de sódio e o sal. Em outra tigela, misture o leite, o óleo vegetal, o ovo e o extrato de baunilha.
   3. Adicione a água quente à massa e misture até que esteja bem incorporada e despeje-a na forma preparada.

4. Asse no forno pré-aquecido por 30-35 minutos, ou até que um palito inserido no centro do bolo saia limpo.
5. Deixe o bolo esfriar na forma por alguns minutos, depois transfira para uma grade até esfriar completamente. Após isso, decore e sirva!

Aproveite para conversar sobre a necessidade de uma alimentação saudável.

2. Sugestão de resposta:

1. Solicitar os valores dos coeficientes *a*, *b* e *c* da equação $ax^2 + bx + c = 0$
2. Calcular o discriminante
   $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$
3. Verificar o valor do discriminante:
   Se $\Delta > 0$, calcular as duas raízes reais e distintas.
   Se $\Delta = 0$, calcular a raiz real e dupla.
   Se $\Delta < 0$, indicar que a equação não possui raízes reais.
4. Calcule as raízes usando a fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}$

Página 82

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta:
1. Estou com fome.
2. Vou verificar se tenho comida.
3. Se “sim”, é só comer.
4. Se “não”, vou comprar comida e mato a fome.

2. A figura que indica tomada de decisão é o losango.

Para pensar e discutir

1. Se o cliente tem ou não cadastro.

2. Aparece a mensagem: “Compra não aprovada”.

3. Sugestão de resposta: Poderia aparecer, por exemplo, o prazo máximo de entrega, em dias.

Páginas 83-84

Podcast – Fluxogramas no dia a dia

Apresente o *podcast* "Fluxogramas no dia a dia" para os estudantes. Esse recurso didático explora o uso dos fluxogramas como ferramentas práticas na tomada de decisões e na organização de tarefas cotidianas. Nesse episódio, dois participantes discutem de forma descontraída e envolvente como essas ferramentas, geralmente associadas à programação, podem ser aplicadas em diversas situações do dia a dia, ajudando os estudantes a visualizar e resolver problemas de maneira estruturada e eficaz.

Atividades

28.

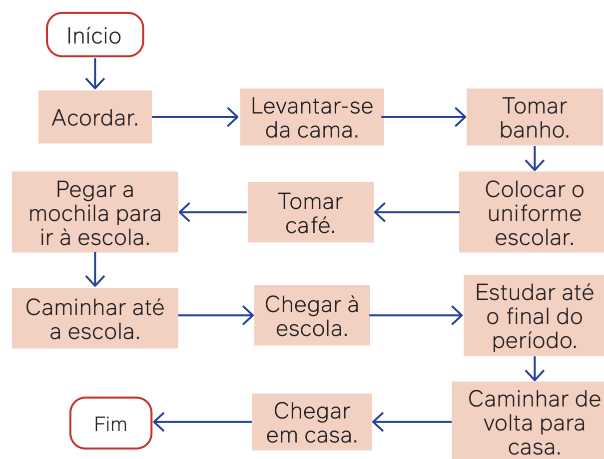
a) Sugestão de resposta: Entre com determinado valor, acrescente 10 a esse valor e exiba o novo valor.

b) Sugestão de resposta: O cálculo da mesada semanal, por exemplo: 1º: o valor inicial é R$ 50,00; 2º: acrescente R$ 10,00 aos R$ 50,00 (50 + 10); 3º: obtenha o novo valor, que é R$ 60,00.

29.

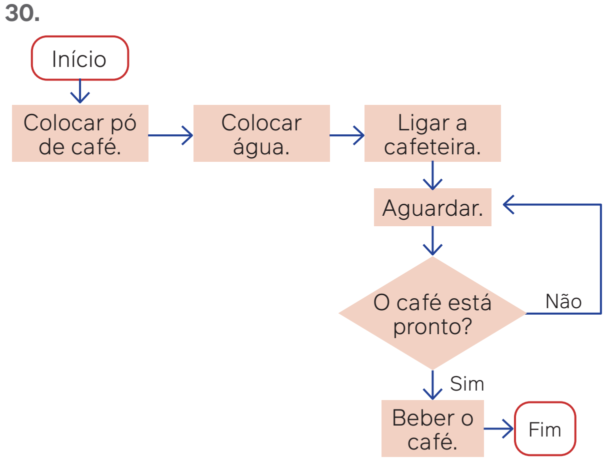
a) Sugestão de resposta:
1º: Acordar.
2º: Levantar-se da cama.
3º: Tomar banho.
4º: Colocar o uniforme escolar.
5º: Tomar café.
6º: Pegar a mochila para ir à escola.
7º: Caminhar até a escola.
8º: Chegar à escola.
9º: Estudar até o fim do período.
10º: Caminhar de volta para casa.
11º: Chegar em casa.

b) Sugestão de resposta:



Acervo editora

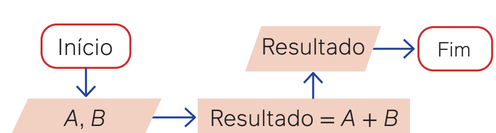
30.



Acervo editora

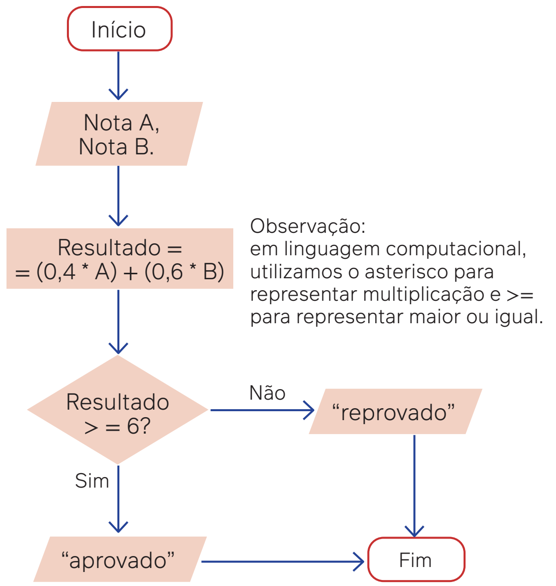
31. Sugestão de resposta: O fluxograma pode representar, por exemplo, o acesso eletrônico a determinada conta bancária. O usuário tem que entrar com o login. Caso ele acerte, o acesso é permitido; caso erre, ele terá ainda mais duas tentativas. Na quarta tentativa, encerra-se o processo.

32.



Acervo editora

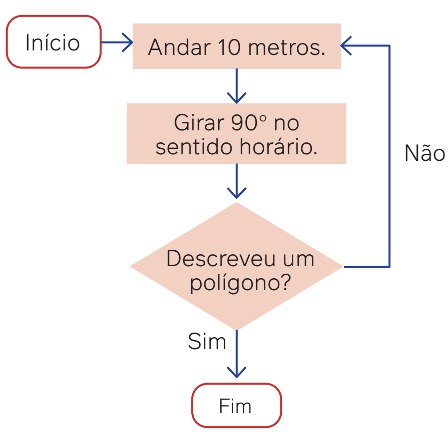
33. Sugestão de resposta:



Acervo editora

34. Esse fluxograma indica os passos para que uma pessoa descreva, andando, um percurso com forma de hexágono regular.

35. Sugestão de resposta:



Acervo editora

36. Sugestão de resposta:

1. Encha o recipiente A, com capacidade para 9 litros, com água.
2. Despeje água do recipiente A no recipiente B até que este esteja cheio, contendo 4 litros.
3. Despeje a água restante no recipiente A no recipiente C, que pode conter até 9 litros de água.
4. Esvazie o recipiente B, que contém 4 litros de água, regando as plantas no jardim.
5. Encha novamente o recipiente A, que está vazio, com 9 litros de água.
6. Usando o recipiente A cheio, com 9 litros de água, encha o recipiente B novamente até que este contenha 4 litros.
7. Esvazie novamente os 4 litros de água do recipiente B regando outras plantas.
8. Usando a água restante no recipiente A, que corresponde a 5 litros, encha o recipiente B novamente até que este contenha 4 litros.
9. Coloque os 5 litros restantes do recipiente A no recipiente C, que já contém 5 litros de água, totalizando 6 litros no recipiente C.

Página 85

Para explorar

1.

Parte 1

a) Sugestão de resposta: As linguagens mais usadas são Phyton, Java, Javascript, C#, PHP.

b)

Linguagens	Vantagens	Desvantagens
Phyton	Sintaxe clara e fácil de aprender.	Não é ideal para desenvolvimento de aplicativos móveis.
Java	Utilizada por diversas plataformas.	Possui sintaxe mais complexa quando comparada com outras linguagens.
Javascript	Executada em navegadores com facilidade, essencial para o desenvolvimento *web*.	É suscetível a problemas de segurança e *bugs*.
C#	Multiplataforma, especialmente voltada para jogos.	Requer maior conhecimento computacional.
PHP	Amplamente utilizada para geração de *layouts* na *web* com grande número de desenvolvedores.	Menos adequado para aplicações grandes.

Parte 2

Caso não consigam entrevistar alguém pessoalmente, é possível entrevistar alguém através de redes sociais.

Páginas 86-89

Atividades finais

1.

a) 42 é a quantidade correspondente ao setor B, pois tem a mesma abertura (ângulo reto) que o setor correspondente a 42.

b) $42x = 90° \cdot 30 \Rightarrow x \cong 64{,}3°$

$360° - 90° - 90° - 64{,}3° = 115{,}7°$

$90A = 115{,}7° \cdot 42 \Rightarrow A \cong 54$

2.

a) 25% correspondem a 90°, pois $\frac{360 \cdot 25}{100} = 90°$

15% correspondem a 54°, pois $\frac{360 \cdot 15}{100} = 54°$

60% correspondem a 216°, pois $\frac{360 \cdot 60}{100} = 216°$

b) $0{,}60 \cdot 400 = 240$; 240 pessoas

3.

a) Estamos representando a frequência absoluta, que mostra o número total de ocorrências de cada categoria dentro do conjunto de dados.

b) A utilização de percentual para representar uma categoria em uma pesquisa é uma forma de representar a frequência relativa.

4.

a) O lucro esteve acima de 3.000 reais em maio e junho.

b) Resposta esperada: Os lucros entre os meses de janeiro e junho cresceram.

5.

a) PIB (Produto Interno Bruto): indica a soma de todos os bens e serviços produzidos por um país, estado ou cidade em um determinado período de tempo, geralmente por ano.

b) Renda *per capita*: é a renda média por pessoa em uma determinada região, obtida dividindo a renda nacional pelo número de habitantes. É um indicador de desenvolvimento econômico.

c) Representação em relação ao todo: refere-se à apresentação de dados em que cada parte é mostrada em relação ao total, facilitando a compreensão da participação de cada componente no todo.

d) Gráfico de linhas: utilizado para analisar o comportamento de um dado ao longo do tempo, mostrando tendências e variações.

e) Fluxograma: uma representação visual que descreve o fluxo de um processo ou algoritmo, utilizando figuras para representar as etapas e decisões.

f) Algoritmo: procedimento que descreve as várias etapas ou instruções para a execução de determinado problema ou tarefa.

g) INPC ou IPCA: Índices de preços que medem a variação dos preços de uma cesta de produtos e serviços ao longo do tempo, usados para calcular a inflação.

h) Índice de Desenvolvimento Humano (IDH): Indicador composto que classifica os países em relação ao seu grau de desenvolvimento, considerando fatores como saúde, educação e renda *per capita*.

Questões de vestibulares e Enem

6. Variação: considerando que a distância entre duas linhas horizontais é de 0,02 podemos escrever que as variações em cada um dos intervalos são: Entre 1 e 2: –0,02; entre 2 e 3: + 0,04; entre 3 e 4: + 0,02; entre 4 e 5: menor que 0,02; entre 5 e 6: menor que –0,02 e maior que –0,04.

Portanto, a maior variação ocorreu entre as semanas 2 e 3.

Alternativa **a**.

7. De 20 a 24 anos: 70 – 26 – 25 = 19; 19 ciclistas.

De 25 a 29 anos: 60 – 22 – 18 = 20; 20 ciclistas.

Total de óbitos: 70 + 60 + 70 + 50 = 250; 250 óbitos.

$\frac{19 + 20}{250} \cdot 100 = 15{,}6\%$

Alternativa **a**.

8. O gráfico de setores é representado por um círculo dividido em setores circulares. Sabemos também que a soma dos ângulos internos dos setores circulares terá medida de 360°.

100% – 360°

36% – x

$x = \frac{360° \cdot 36\%}{100\%} = 129{,}6° \cong 130°$

Alternativa **c**.

9. Ao analisar o gráfico, é possível perceber que todas as colunas de cor escura (referente ao SUS) mostram-se com porcentagem acima de 50% e, assim, podemos afirmar que mais da metade das internações ocorrem pelo SUS, ou seja, a alternativa a é verdadeira.

Na região Sudeste, assim como nas demais regiões, a maioria das internações ocorreu no SUS e não fora dele, desta forma a alternativa b é falsa.

Na região Norte, a quantidade de internações ocorridas fora do SUS foi de 23,80%, e na região Nordeste foi de 22,20%, ambas inferiores a 30%, ou seja, a alternativa c é falsa.

Na região Sudeste, a quantidade de internações ocorridas no SUS foi de 56,40%, na região Sul foi de 63,90%, e na região Centro-Oeste foi de 62,30%, todas inferiores a 70%, ou seja, a alternativa d é falsa.

Alternativa **a**.

10. O conceito MM é relacionado a 15 estudantes.

40 – 360°

15 – x

$40x = 360° \cdot 15$

$x = \frac{5\,400°}{40} = 135°$

Alternativa **e**.

11. Quantidade total de peças: 50 + 65 + 80 + 20 + 10 = 225

Regiões P e Q: 50 + 65 = 115

Desta forma, temos que P = 65 e Q = 50. Assim, P se relaciona com o tipo II, e Q com o tipo I.

A região laranja se relaciona, visualmente, com o tipo III.

E a região rosa, que, como consta, pode ser dividida em duas partes, se relaciona com as regiões IV e V. Com isso, R se relaciona com IV.

Alternativa **d**.

12. Abaixo do peso: 0,10 · 320 = 32; 32 pessoas

Peso normal: 0,45 · 320 = 144; 144 pessoas

Sobrepeso: 0,30 · 320 = 96; 96 pessoas

Obesidade: 0,15 · 320 = 48; 48 pessoas

Portanto, há 144 pessoas com peso normal.

Alternativa **e.**

13. Como o ângulo total da circunferência é 360°, temos:

$40\% \cdot 360° = \frac{40}{100} \cdot 360° = \frac{14\,400°}{100} = 144°$

Alternativa **a**.

14. A torcida I teve um decréscimo entre 02/02/06 e 24/06/06; a torcida II teve um decréscimo entre 24/06/06 e 15/08/07; a torcida III se manteve constante entre 02/02/06 e 15/08/07; a torcida IV teve crescimento entre 02/02/06 e 15/08/07; a torcida V teve um decréscimo entre 02/02/06 e 24/06/06.

Alternativa **d**.

15. **2005**

$\frac{630}{90\,000} = 0{,}007$

2007

$\frac{960}{120\,000} = 0{,}008$

2009

$\frac{1\,350}{270\,000} = 0{,}005$

2011

$\frac{1\,800}{450\,000} = 0{,}004$

2013

$\frac{3\,240}{540\,000} = 0{,}006$

Assim, concluímos que a rentabilidade do aluguel foi maior em 2007.
Alternativa **b**.

16. Os lucros, em milhões, obtidos foram:
$L_{Janeiro} = 10 - 5 = 5$; $L_{Fevereiro} = 20 - 10 = 10$;
$L_{Março} = 15 - 10 = 5$;
$L_{Abril} = 20 - 15 = 5$; $L_{Maio} = 28 - 25 = 3$.
Portanto, o lucro precisa ser maior ou igual a 10 milhões, conforme se deu no mês de fevereiro.
Alternativa **b**.

17. O volume de vendas (em milhões) de 2009 foi de 519,2 e de 2005 foi de 236,0. Logo, $\frac{519{,}2}{236{,}0} = 2{,}2$
O volume de 2009 é 2,2 vezes maior que o de 2005, ou seja, teve um aumento de 1,2 vezes o valor de 2005, o qual também pode ser expresso por 120%.
Alternativa **c**.

18. Seja *x* o total da safra nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas em 2012.
$(0{,}383 + 0{,}372) \cdot x = 119{,}9 \Rightarrow x = 158{,}8$
Safra da região Sudeste: $0{,}114 \cdot 158{,}8 = 18{,}1$; 18,1 milhões de toneladas
Alternativa **e**.

19. Calculando os percentuais:
Empresa I: $\frac{6}{40} = 0{,}15 = 15\%$; Empresa II: $\frac{3}{15} = 0{,}2 = 20\%$; Empresa III: $\frac{2}{16} = 0{,}125 = 12{,}5\%$; Empresa IV: $\frac{5}{23} = 0{,}217 = 21{,}7\%$; Empresa V: $\frac{3}{28} = 0{,}107 = 10{,}7\%$.
Portanto, a empresa V tem o menor percentual de pessoas fumantes.
Alternativa **e**.

CAPÍTULO 3

Grandezas e medidas

Objetivos

- Utilizar as unidades de medida adotadas no Sistema Internacional de Unidades.
- Relacionar grandezas fundamentais e derivadas com suas respectivas unidades de medida.
- Identificar algarismos significativos na representação de uma medida.
- Utilizar a notação científica para expressar uma medida.
- Expressar a ordem de grandeza de uma medida dada.
- Retomar os conceitos de razão e proporção.
- Identificar quando duas grandezas relacionadas são direta ou inversamente proporcionais.
- Resolver problemas relacionados às grandezas direta ou inversamente proporcionais.

Justificativa

A exploração de situações reais envolvendo as unidades de medida do Sistema Internacional, além daquelas ligadas à transmissão de dados, possibilita aos estudantes que interpretem e compreendam tanto os textos científicos quanto os que são divulgados pela mídia. Além disso, ao se aprofundarem no uso da notação científica por meio de situações relacionadas às Ciências da Natureza e resolverem problemas envolvendo grandezas direta ou inversamente proporcionais, desenvolvem habilidades ligadas ao conhecimento científico, bem como à tomada de decisões relativas a situações cotidianas nos mais diversos aspectos.

Competências gerais da BNCC

Competência geral 2: Os estudantes mobilizam essa competência quando têm a oportunidade de propor uma solução diferente para problemas apresentados, como no caso da seção **Para pensar e discutir** da página 115. Eles precisam refletir e analisar criticamente a solução apresentada para, em seguida, utilizar a imaginação e a criatividade para propor uma nova solução.

Competência geral 4: Em várias situações propostas no capítulo os estudantes desenvolvem essa competência, uma vez que trabalham em duplas ou em grupos utilizando diferentes linguagens para se comunicar. Na seção **Para explorar** da página 106, por exemplo, eles utilizam a linguagem verbal (oral e escrita) e a linguagem matemática envolvendo a notação científica. Além disso, analisam e elaboram um fluxograma para verificação da ordem de grandeza de uma medida.

Competências gerais 7, 9 e 10: Logo na abertura do capítulo, os estudantes têm a oportunidade de conhecer os 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável e refletir sobre eles. Para atingir os Objetivos, é preciso medir grandezas e definir metas com o propósito de alterar essas medidas. Na retomada desse assunto, na seção **Para explorar**, da página 116, os estudantes analisam, em grupos, as metas ligadas ao ODS13, que diz respeito às mudanças climáticas e, utilizando os conceitos trabalhados no capítulo, criam uma proposta voltada para as necessidades da região em que vivem. Como precisam argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis para negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam a consciência socioambiental nos âmbitos local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta, desenvolvem a **competência 7**. Ao trabalharem em grupos, os estudantes exercitam também a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, valorizando a diversidade e acolhendo a perspectiva do outro, desenvolvendo assim a **competência 9**. Ao desenvolverem uma proposta que atenda às necessidades da região em que vivem, eles trabalham a **competência 10**, incorporando direitos e responsabilidades, ponderando sobre consequências e desenvolvendo uma postura ética em relação a soluções sustentáveis para problemas regionais e até globais.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 1

EM13MAT103: Como o capítulo trata de grandezas e medidas de modo geral, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), por meio de textos científicos e divulgados pelas mídias, todas as atividades contribuem para o desenvolvimento dessa habilidade. Vale chamar a atenção para as atividades relacionadas às unidades de medida de armazenamento e transferência de dados que se encontram na página 99 e para as atividades propostas nas páginas 100 e 101.

Competência específica 2

EM13MAT201: Essa habilidade está contemplada nos itens 2 e 3 da seção **Para explorar** da página 116. Nessa seção, os estudantes retomam a discussão acerca da importância do uso das unidades de medida para se estabelecerem as metas dos Objetivos do Desenvolvimento Sustentável e desenvolvem uma proposta relativa a uma meta para ser aplicada à sua região.

Competência específica 3

EM13MAT313: Essa habilidade está contemplada em grande parte do capítulo, mais especificamente da página 101 até 107.

EM13MAT314: Essa habilidade está contemplada nas páginas 93 a 95, de modo especial nas atividades da página 95.

EM13MAT315: Essa habilidade está contemplada na seção **Para explorar** da página 106, em que os estudantes elaboram um fluxograma para determinar a ordem de grandeza de uma medida.

Conexões com outras áreas do conhecimento

Na seção **Para explorar** da página 116, em parceria com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, os estudantes retomam a discussão acerca da importância do uso das unidades de medida para se estabelecerem as metas dos Objetivos do Desenvolvimento Sustentável, analisam uma das metas do ODS13, que diz respeito às mudanças climáticas, e fazem uma proposta para ser aplicada à região em que vivem.

Temas Contemporâneos Transversais

- O TCT **Educação ambiental** é trabalhado nesse capítulo por meio das atividades 2 e 3 desenvolvidas na seção **Para explorar** da página 116, quando os estudantes analisam uma das metas do ODS13, que diz respeito às mudanças climáticas, e fazem uma proposta para ser aplicada à sua região.

Resoluções e comentários

Página 91

Abertura

1. Espera-se que os estudantes compreendam que é necessária uma padronização. Esse assunto será abordado no início da unidade.
2. Sugestão de resposta: Uma vez estabelecidas as metas, é necessário utilizar medidas que apontarão se elas estão ou não sendo alcançadas.

   Esse assunto pode ser abordado com a participação dos professores de Geografia e/ou Biologia, inclusive para aprofundamento por meio de projetos que explorem algum Objetivo de Desenvolvimento Sustentável (ODS) específico.

1. Grandezas e unidades fundamentais

Página 92

Para pensar e discutir

1. Pressão máxima (SIS, vem de sistólica), pressão mínima (DIA, vem de diastólica) e batimentos por minuto (Pulso).
2. Sugestão de resposta: Quilômetro, jarda, palmo, metro, centímetro, milímetro, entre outras medidas.
3. Sugestão de resposta: De modo geral, tudo aquilo que pode ser medido. Exemplo de grandeza: massa.

Página 93

Para pensar e discutir

1. Metro quadrado (m^2).
2. Espera-se que os estudantes relembrem essas medidas de conteúdos abordados em Física e Química no Ensino Médio, além das aprendizagens trazidas do Ensino Fundamental. Na página 93 do Livro do Estudante abordamos essas grandezas.
3. Sugestão de resposta: É a razão entre as grandezas distância e tempo, nesta ordem. Verificar o conceito dado para velocidade na disciplina de Física.

Página 94

Vídeo – Ano-luz

Apresente o vídeo "Ano-luz" aos estudantes para explicar que o ano-luz é uma medida de distância astronômica, e não de tempo, usada para indicar a separação entre corpos celestes, como estrelas, e a relação entre tempo e velocidade da luz.

Para explorar

1.
   a) 89,7 kg (medida de massa).
   b) Quilograma (kg).
2.
   a) Sugestão de resposta: Massa é medida em quilogramas e não muda com a localização; peso é medido em Newton e varia com a gravidade. A unidade de peso é Newton (N), onde $1N = 1\ kg \cdot m/s^2$.
   b) Na Terra, o peso dessa pessoa é dado por meio do produto da sua massa pela aceleração da gravidade: $89{,}7 \cdot 9{,}8\ m/s^2 = 879{,}06\ kg \cdot m/s^2 = 879{,}06\ N$.

Página 95

Atividades

1. O *segundo* é a unidade base da grandeza *tempo* e o *metro por segundo* é a unidade base da grandeza *velocidade*.
Alternativa **c**.
2. Trata-se da grandeza *aceleração* que, no Sistema Internacional de Unidades (SI), tem como unidade o *metro por segundo ao quadrado*: m/s^2 ou $m \cdot s^{-2}$.
Alternativa **d**.
3. Lembrando que 1 ampere = 1 coulomb/segundo, temos que
1 coulomb = 1 ampere · segundo, ou seja, 1 coulomb = 1 A · s.
Lembrando também que
1 joule = 1 kg · m^2/s^2 e que
1 volt = 1 joule/coulomb, temos:
$$1\ V = 1\ \frac{J}{C} = \frac{1\ kg \cdot m^2}{A \cdot s^3}$$
4. 1 watt = 1 joule/segundo
1 joule = 1 kg · m^2/s^2
1 watt = 1 joule/segundo
$$1\ W = \frac{1\ kg \cdot m^2/s^2}{1\ s}$$
$$1\ W = 1\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$$
$$9\ W = 9\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$$
5. $\text{densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$
$$\frac{1{,}3\ kg}{1\ L} = \frac{1\,300\ kg}{1\,000\ L} =$$
$$= \frac{1\,300\ kg}{1\ m^3} = 1\,300\ kg/m^3$$
6. No SI, o *quilograma* é a unidade de medida de *massa*.
Alternativa **d**.
7. No SI, *Kelvin (K)* é a unidade fundamental da grandeza *temperatura*.
Alternativa **b**.
8. No SI, **m** (metro) é a unidade de medida de comprimento; **m²** (metro quadrado) é a unidade de medida de área; (**s** segundo) é a unidade de medida de tempo; e **N** (newton) é a unidade de medida de força.
Alternativa **d**.
9. Uma das formas de se determinar qual das alternativas apresenta uma unidade de medida para a nova grandeza física é escrever cada uma delas em função das unidades fundamentais e, em seguida, comparar com a unidade da grandeza inventada.
$$\frac{\text{quilograma} \cdot \text{segundo}}{\text{metro} \cdot \text{pascal}} = \frac{kg \cdot s}{m \cdot Pa}$$
$$\frac{kg \cdot s}{m\ \frac{kg}{m \cdot s^2}} \Rightarrow kg \cdot s \cdot \frac{s^2}{kg} \Rightarrow s^3$$
Portanto s^3 é a unidade de grandeza inventada.
a) Incorreto; $\frac{s^2}{kg} \neq s^3$
b) Incorreto; $\frac{J}{W} = \frac{J}{J/s} = s \neq s^3$
c) Correto; $\frac{J \cdot s^2}{W} = \frac{J}{W} \cdot s^2 =$
$= s \cdot s^2 = s^3$
d) Incorreto; $\frac{s^3}{W} \neq s^3$
e) Incorreto;
$$\frac{N \cdot m}{s^3} = \frac{\frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot m}{s^3} =$$
$$= \frac{kg \cdot m^2}{s^5} \neq s^3$$
Alternativa **c**.
10.
a) Correto. *Joule* = unidade da grandeza *energia* (*calor* é uma forma de energia).
b) Incorreto. *Kelvin* = unidade da grandeza *temperatura*.
c) Incorreto. Pascal = unidade da grandeza *pressão*.
d) Incorreto. *Newton* = unidade da grandeza *força*.
Alternativa **a**.
11. Uma opção, no Sistema Internacional de Unidades, é usar as unidades das grandezas envolvidas.
Tempo × velocidade: $s \cdot \frac{m}{s} = m \rightarrow$
→ unidade de comprimento.
Massa × tempo: kg · s → não é unidade de comprimento.
Massa × velocidade:
$kg \cdot \frac{m}{s} = kg \cdot m/s \rightarrow$ não é unidade de comprimento.
Tempo × massa × velocidade:
$s \cdot kg \cdot \frac{m}{s} = kg \cdot m \rightarrow$ não é unidade de comprimento. Portanto, a altura de uma pessoa seria dada em unidades de tempo × velocidade.
Alternativa **a**.
12. $1\ g/cm^3 = \frac{1\ g}{1\ cm^3}$
Sendo *V* o volume ocupado por 2 500 kg = $2{,}5 \cdot 10^6$ g de água, temos que:
$$1\ g/1\ cm^3 = \frac{2{,}5 \cdot 10^6\ g}{V}$$
$V = 2{,}5 \cdot 10^6\ cm^3 \Rightarrow V = 2{,}5\ m^3$
Alternativa **e**.

Página 96

Para pensar e discutir

1. O fator de multiplicação é 10^{-3}:
2. 18 hm = $18 \cdot 10^2$ m = 18 · 100 m = = 1 800 m

Página 97

Para pensar e discutir

1. A vírgula foi deslocada 15 casas decimais para a esquerda e 15 é o expoente correspondente da base 10.
2. Notação científica: $5 \cdot 10^{-10}$ g. A vírgula foi deslocada 10 casas para direita e, em correspondência, –10 passou a ser o expoente da base 10.
3. Sugerimos que, ao final, a turma socialize as respostas para que você as resuma, em uma única regra, na lousa.

Página 98

Podcast – A importância das grandezas e medidas

Ouça o *podcast* "A importância das grandezas e medidas" com os estudantes. Ele destaca como unidades como massa, peso e temperatura são essenciais na ciência e no dia a dia. O episódio detalha a diferença entre massa e peso, a padronização das unidades no Sistema Internacional (SI) e seu impacto em várias áreas do conhecimento.

Página 99

Análise e contexto

1. Sugestão de resposta: No SI, os prefixos indicam fatores de multiplicação por potências de base 10, enquanto nas unidades de dados representam potências de base 2.
2. 1 024 é o fator de multiplicação (que corresponde a 2^{10})
3. Sugestão de resposta: Ela indica quantos *bits* por segundo são transferidos e tem como unidade de medida o bps (*bit* por segundo).
4. As respostas variam conforme a pesquisa realizada. Os estudantes devem usar um aplicativo com medidor para comparar com os padrões da Anatel e verificar se o cabo corresponde à velocidade indicada pela operadora.
Nas **atividades 5** e **6**, é importante reservar tempo para que as duplas apresentem suas conclusões.

Páginas 100-101

Atividades

13.
a) $12\ m^3 = 12 \cdot (1\ m)^3 =$
$= 12\ m^3 = 12 \cdot 1\,000\,000\ cm^3 =$
$= 12\,000\,000\ cm^3$

b) $25\ m^2 = 25 \cdot (1\ m)^2$

$25\ m^2 = 25 \cdot 10\,000\ cm^2 =$

$= 250\,000\ cm^2$.

c) $4{,}5\ L = 4{,}5 \cdot (1\ L) =$

$= 4{,}5 \cdot (1\,000\ mL) = 4\,500\ mL$

d) $30\ m/s = 30\frac{m}{s} = 30 \cdot \left(\frac{1\ m}{1\ s}\right) =$

$= 30 \cdot \left(\frac{1\ m}{1\ s} \cdot \frac{3\,600\ s}{1\ h} \cdot \frac{1\ km}{1\,000\ m}\right)$

$= \frac{30\ m}{s} = 108\ km/h$

14.

a) 2 *kilobytes* = 2 · (1 *kilobyte*)

2 *kilobytes* = 2 · (1 024 *bytes*);

2 048 *bytes*

b) 2 km = 2 · (1 km) = 2 · (1 000 m) =

= 2 000 m.

15.

a) Verdadeira, pois 10^{12} é o fator de multiplicação do prefixo *tera*.

b) Verdadeira, pois 10^3 é o fator de multiplicação do prefixo *quilo*.

c) Falsa, pois 10^{-3} é o fator de multiplicação do prefixo *mili*.

d) Falsa, pois 10^{-3} é o fator de multiplicação do prefixo *micro*.

e) Falsa, pois 10^{-9} é o fator de multiplicação do prefixo *nano*.

16. 1 GB = 1 024 MB ⇒ 8 GB = 8 192 MB e 500 kB = 0,5 MB.

Calculando quantas fotos de 0,5 MB cabem em 8 192 MB.

$\frac{8\,192\ MB}{0{,}5\ MB} = 16\,384$; 16 384 fotos

Alternativa **b**.

17.

a) $300\,000\,000\ m/s = 3 \cdot 10^8\ m/s$

b) 203,1 milhões de habitantes = $= 2{,}031 \cdot 10^8$ habitantes

c) 70 micrômetros = $7 \cdot 10^{-5}$ m

d) A massa é igual a $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ m

18. 150 nm = $1{,}5 \cdot 10^{-7}$ m

19.

a) 92 000 000

b) 0,00081

c) 7 210 000

d) 0,0000402

20. Seja *c* o comprimento após a soldagem:

$c = (1{,}5\ m + 1\ m) + 18\ mm$

$c = (2{,}5\ m) + 18 \cdot 10^{-3}\ m = 2{,}518\ m$

Alternativa **d**.

21. 70 kg – 56 kg = 14 kg = 14 000 g

$\frac{14\,000}{200} = 70$; 70 semanas

22. $25\ km/h = 25 \cdot \left(\frac{1\,000\ m}{3\,600\ s}\right) =$

$= 25\frac{km}{h} \cong 6{,}94\ m/s$

23. $1\ dm^3 = (10\ cm)^3 = 1\,000\ cm^3 = 1\ L$

625 mil cm^3 = 625 L

24. $1\ m^3 = (10\ dm)^3 = 1\,000\ dm^3 = 1\,000\ L$

$92\ m^3 = 92\,000\ L$

25. 1 kb = 1 024 *bytes*. Alternativa **b**.

26. Rio de Janeiro: 365 hab/km²; São Paulo: 179 hab/km²; Pernambuco: 92 hab/km²; Ceará: 59 hab/km²; Paraná: 58 hab/km²; Rio Grande de Sul: 39 hab/km²; Minas Gerais: 35 hab/km²; Bahia: 25 hab/km²

27. A criança precisa de 500 mg de medicamento por kg de massa. Com 20 kg, serão 10 000 mg por dia (500 · 20 = 10 000). Para 5 dias, são 50 000 mg (5 · 10 000 = 50 000), ou seja, 50 g. Como 1 g ocupa 1 cm^3, 50 g ocupam 50 cm^3, equivalente a 50 mL. Assim, os pais devem comprar o frasco de 50 mL.

Alternativa **b**.

28. 400 · 28 mL = 11 200 mL

1 mL = 1 cm^3

11 200 mL = 11 200 cm^3

Alternativa **a**.

29. Seja N o número de planetas semelhantes à terra. Logo:

N = 10,05% de 400 bilhões

$N = \frac{10{,}05}{100} \cdot 400$ bilhões

N = 0,20 bilhão = $2 \cdot 10^8$

Alternativa **c**.

Página 102

Para pensar e discutir

1. A régua está indicando 7,1 cm.
2. $5\sqrt{2} \cong 5 \cdot 1{,}4142 = 7{,}071$; 7,071 cm
3. 7,1 – 7,071 = 0,029; 0,029 cm

Página 103

Para pensar e discutir

1. O algarismo duvidoso é 3.
2. Os dois algarismos significativos são o 9 e o 1.
3. Na medida 62,0023 h, todos os seis algarismos são significativos. Em 0,0099720 N, apenas 9, 9, 7, 2 e 0 são significativos. Estudantes podem confundir algarismos significativos com precisos, achando que o duvidoso não conta. Deixe claro que algarismos significativos incluem tanto os precisos quanto o primeiro duvidoso, usando exemplos, se necessário.

Página 104

Atividades

30.

a) O centímetro indica a precisão da medida, já que a régua só mede em centímetros.

b) 8 cm, pois está entre 8 cm e 9 cm.

c) A medida duvidosa é 0,2 cm.

31.

a) Os três algarismos são significativos.

b) O algarismo duvidoso é o 7.

c) Não, pois 0,07 cm é uma medida duvidosa.

32.

a) São 3 algarismos significativos.

b) A medida precisa é 37 °C.

33. $0{,}009\ s = 9 \cdot 10^{-4}\ s$ ⇒ 1 algarismo significativo

$148\ cm = 1{,}48 \cdot 10^2\ cm$ ⇒ 3 algarismos significativos

$165{,}0\ mm = 1{,}650 \cdot 10^2\ mm$ ⇒ 4 algarismos significativos

$20{,}00\ m/s = 2{,}000 \cdot 10\ m/s$ ⇒ 4 algarismos significativos

$4\,500\ g = 4{,}5 \cdot 10^3\ g$ ⇒ 2 algarismos significativos

$0{,}00120\ kg = 1{,}20 \cdot 10^{-3}\ kg$ ⇒ 3 algarismos significativos

34.

a) Notação científica:
$1{,}2589 \cdot 10^2\ km^2$. Algarismos significativos: 1, 2, 5, 8 e 9.

b) $125{,}86\ km^2 = 125{,}89 \cdot 10^6\ m^2$
Em notação científica:
$1{,}2589 \cdot 10^8\ m^2$. Algarismos significativos: 1, 2, 5, 8 e 9.

35.

a) Notação científica: $4{,}558 \cdot 10^{-3}$ N. Quantidade de algarismos significativos: 4.

b) 0,004558 está mais próximo de 0,00456 que de 0,00455. Por sua vez, 0,00456 está mais próximo de 0,0046 que de 0,0045.
Portanto 0,004558 N ≅ 0,0046 N, e essa medida tem apenas dois algarismos significativos (4 e 6).

Página 105

Para pensar e discutir

1. Está mais próximo de 10^8.
2. A ordem de grandeza é 10^8.
3. $\sqrt{10} \cong 3{,}16$, então $\sqrt{10}$ está entre 10^0 e 10^1

Carrossel de imagens – Quantidades astronômicas

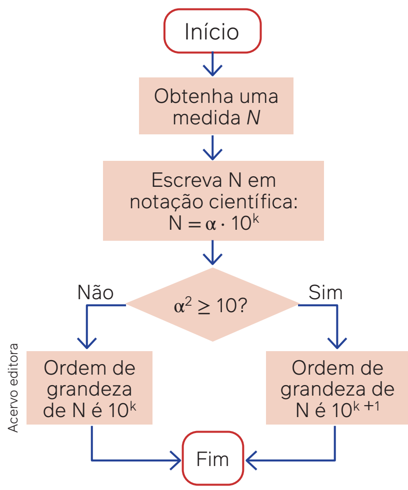
Apresente o carrossel de imagens "Quantidades astronômicas" aos estudantes. Esse recurso permite visualizar galáxias distantes e explorar a imensidão do Universo, destacando o número de estrelas e a distância dessas galáxias da Terra, facilitando a compreensão das escalas e distâncias astronômicas.

Página 106

Para explorar

1.

a) Sugestão de resposta:



2.

a) 384 400 km $= 3{,}844 \cdot 10^8$ m

b) 70 μm $= 7 \cdot 10^{-5}$ m

c) 20 min = 1 200 s $= 1{,}2 \cdot 10^3$ s

3.

a) $3{,}844 \cdot 10^8$ m tem ordem de grandeza 10^9, pois $3{,}844 > 3{,}16$

b) $7 \cdot 10^{-5}$ m tem ordem de grandeza 10^{-4}, pois $7 > 3{,}16$ e $10^{-5+1} = 10^{-4}$

c) $1{,}2 \cdot 10^3$ s tem ordem de grandeza 10^3, pois $1{,}2 < 3{,}16$

4. Essa atividade favorece o desenvolvimento da **habilidade EM13MAT103**.

Página 107

Para pensar e discutir

1. Atividade apropriada para valorizar estratégias próprias dos estudantes.

2. Não. A ordem de grandeza de 28 trilhões é 10^{13} e a de 1 trilhão é 10^{12}, pois 28 trilhões $= 28 \cdot 10^{12} = 2{,}8 \cdot 10^{13}$.

3. Não, pois 20 000 L $= 2 \cdot 10^4$ L tem ordem de grandeza $= 10^4$, enquanto 20 m³ $= 2 \cdot 10^1$ m³ tem ordem de grandeza $= 10^1$.

Atividades

36.

a) No intervalo a ordem de grandeza pode variar dependendo do número. Por exemplo, para 0,1 será 10^{-1}, para 0,001 será 10^{-3}, para 0,9 será 10^0.

b) A ordem de grandeza pode ser 10^0 ou 10^1, dependendo do número no intervalo.

c) A ordem de grandeza pode ser 10^0, 10^1 ou 10^2, dependendo do número no intervalo.

37.

a) 10^{-5}, pois $3{,}4 > 3{,}16$ e $10^{-5+1} = 10^5$

b) 10^6, pois $2{,}4 < 3{,}16$

c) 0^{-16}, pois $3{,}1 < 3{,}16$

d) 10^{13}, pois $7{,}0 > 3{,}16$ e $10^{12+1} = 10^{13}$

38.

a) 203 100 000

b) $2{,}031 \cdot 10^8$ habitantes

c) 4 algarismos significativos: 2, 0, 3, 1.

d) 10^8, pois $2{,}031 < 3{,}16$.

39. 10^{14}, pois 1 000 · 100 bilhões = = 100 000 bilhões $= 10^5$ bilhões = $= 10^5 \cdot$ (1 bilhão) $= 10^5 \cdot (10^9) = 10^{14}$

40.

I. Verdadeira, pois $200 = 2 \cdot 10^2$ e $2 < 3{,}16$. Assim, 10^2 é a ordem de grandeza.

II. Verdadeira, pois $48.201 = 4{,}8201 \cdot 10^4$ e $4{,}8201 > 3{,}16$. Assim, $10^{4+1} = 10^5$ é a ordem de grandeza.

III. Falsa, 10^{-9} é a ordem de grandeza, pois $0{,}000000001 = 1 \cdot 10^{-9}$ e $1 < 3{,}16$.

41.

a) São três algarismos significativos na medida 450 m²: 4, 5 e 0. O zero é significativo porque é o único duvidoso. Já o número 450 tem apenas dois algarismos significativos (4 e 5).

b) $450 = 4{,}50 \cdot 10^2$ e $4{,}50 > 3{,}16$. Ordem de grandeza é 10^3.

42.

a) $\left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{10^9}\text{m}\right) = 10^{-10}$ m

b) 10^{-10} m $= 1 \cdot 10^{-10}$ m e $1 < 3{,}16$
Ordem de grandeza é 10^{-10}.

43. 2 h = 7 200 s $= 7{,}2 \cdot 10^3$ s e $7{,}2 > 3{,}16$
Ordem de grandeza é 10^4.

44.

a) 4 500 000 000 de anos

b) $4{,}5 \cdot 10^9$ anos

c) $4{,}5 > 3{,}16$ e $10^{9+1} = 10^{10}$
Ordem de grandeza é 10^{10}.

45. 3 h = 180 min = 180 · 60 s = 10 800 s
$500\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot 10\,800\ \text{s} = 5\,400\,000\ \text{m}^3 =$
$= 5{,}4 \cdot 10^6$ m³
$5{,}4 \cdot 10^6$ m³ $= 5{,}4 \cdot 10^9$ L
Passam $5{,}4 \cdot 10^9$ litros de água. Como $5{,}4 > 3{,}16$, temos que $10^{9+1} = 10^{10}$ é a ordem de grandeza.
Alternativa **b**.

46. Considere um ano com 365 dias.
$20\ \frac{\text{cigarros}}{\text{dia}} \cdot 20\ \text{anos} \cdot 365\ \frac{\text{dias}}{\text{ano}} =$
$= 146\,000$ cigarros $= 1{,}46 \cdot 10^5$ cigarros
$1{,}46 < 3{,}16$; então, 10^5 é a ordem de grandeza.
Alternativa **c**.

2. Grandezas direta e inversamente proporcionais

Página 108

Para pensar e discutir

1. Resposta sugerida: uma situação em que não existem outras variáveis para interferir. No caso, um carro manter a velocidade constante é (na prática) algo pouco provável, pois há diversas variáveis que podem interferir e o carro não conseguir manter essa velocidade.

2. Em 2 horas, o carro percorre a distância de 180 km; em 30 minutos, percorre a distância de 45 km.
$\frac{45\ \text{km}}{90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}5$; 0,5 h = 30 min

3. Também se reduz pela metade.

Página 109

Para pensar e discutir

1. Na escala 1 : 45 000 000, cada unidade medida no desenho corresponde, no real, a 45 000 000 da mesma unidade. Já na escala 1 : 8 000 000, cada unidade medida no desenho corresponde, no real, a 8 000 000 da mesma unidade.

2. 450 km, pois 1 cm · 45 000 000 = $= 1 \cdot 10^{-5}$ km · 45 000 000 = 450 km

3. 80 km, pois 1 cm · 8 000 000 =
= 8 000 000 cm = 80 km

Páginas 111-112

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: pode-se deixar as medidas em quilômetros para obter a escala, isto é, transforma-se 8 cm em quilômetros.
2. Não, pois em 2014 a razão entre as idades é $\frac{2}{5}$; a razão entre as idades em 2024 é $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{5} \neq \frac{1}{2}$.

Atividades

47. $\frac{20\ \text{g}}{5\ \text{cm}^3} = \frac{20}{5} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 4\ \text{g/cm}^3$

48.

a) Se, C indicar o comprimento, e D o diâmetro de uma mesma circunferência, então $\frac{C}{D} = \pi$.

b) $d^2 = L^2 + L^2 \Rightarrow d = L^2 \cdot 2$

$d = L\sqrt{2} \Rightarrow \frac{d}{L} = \sqrt{2}$

49. Seja M o número de médicos e H o número de habitantes, temos:

$\frac{M}{H} = \frac{500}{90.000} = \frac{5}{900} = \frac{1}{180}$

Portanto, 1 médico para cada 180 habitantes.

50. Seja N o total de questões, A os acertos, e E os erros, temos:

$N = 40$, $A = 32$ e $E = 8$.

a) $\frac{A}{N} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{E}{N} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$

51.

a) $\frac{x-1}{2} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5 \cdot (x-1) = 2 \cdot 4$

$5x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{5}$

b) $\frac{2x+1}{5} = \frac{4-2x}{3}$

$3 \cdot (2x+1) = 5 \cdot (4-2x)$

$16x = 17 \Rightarrow x = \frac{17}{16}$

c) $\frac{10}{2-x} = \frac{9}{12} \Rightarrow 4 \cdot 10 = 3 \cdot (2-x)$

$3x = -34 \Rightarrow x = -\frac{34}{3}$

d) $\frac{15}{7} = \frac{4x-1}{14} \Rightarrow 14 \cdot \frac{15}{7} = 4x - 1$

$31 = 4x \Rightarrow x = \frac{31}{4}$

52. No ínicio havia 14,4 L de água no tonel, pois 0,2 = 72 L = 14,4 L.

Após retirar um balde com C litros da mistura e adicionar C litros de água, o tonel passou a ter 19,6 L de água. Como a água corresponde a 20% da mistura, a capacidade do balde é:

$14{,}4 - 0{,}2 \cdot C + C = 19{,}6$

$C = 6{,}50$; 6,50 L

53. 1 cm na planta corresponde a 500 cm = 5 m no real.

Área na planta: $10\ \text{cm}^2 = 10 \cdot 1\ \text{cm}^2$

Área real: $10 \cdot (5\ \text{m})^2 = 250\ \text{m}^2$

Alternativa **d**.

54.

1ª xícara: $\frac{2\ \text{g}}{50\ \text{mL}} = \frac{6\ \text{g}}{150\ \text{mL}}$

2ª xícara: $\frac{3\ \text{g}}{70\ \text{mL}} = \frac{6\ \text{g}}{140\ \text{mL}}$

3ª xícara:

$\frac{4\text{g}}{90\ \text{mL}} = \frac{2\text{g}}{45\ \text{mL}} = \frac{6\text{g}}{135\ \text{mL}}$

4ª xícara: $\frac{5\ \text{g}}{120\ \text{mL}} = \frac{10\ \text{g}}{240\ \text{mL}} =$

$= \frac{1\ \text{g}}{24\ \text{mL}} = \frac{6\ \text{g}}{144\ \text{mL}}$

A 3ª xícara terá o café mais doce.

Alternativa **c**.

55. $\frac{H}{M} = \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \ldots \Rightarrow \begin{cases} H = 3n \\ M = 4n \end{cases}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$.

$N = H + M = 3n + 4n = 7n$

N é um múltiplo de 7.

Só 49 é múltiplo de 7.

Alternativa **d**.

56. $\frac{2\ \text{cm}}{5\ \text{km}} = \frac{1\ \text{cm}}{2{,}5\ \text{km}} = \frac{2\ \text{cm} + 1\ \text{cm}}{5\ \text{km} + 2{,}5\ \text{km}} =$

$= \frac{3\ \text{cm}}{7{,}5\ \text{km}}$

Área = $(7{,}5\ \text{km})^2 = 56{,}25\ \text{km}^2$

Alternativa **b**.

Página 113

Para pensar e discutir

1. Divide-se a quantia de 4 590 reais pelo número de pessoas (45).
$\frac{4\,590}{45} = 102$; 102 reais/pessoa
2. O valor será multiplicado por 3, isto é, cada pessoa pagará 306 reais.
$\frac{4\,590}{15} = 306 =$
$= 3 \cdot 102$ reais/pessoa
3. 1 min → 15 L ⇒150 L em 10 min
4. A quantidade de litros despejados também será triplicada, isto é, ficará multiplicada por 3.

Página 115

Para pensar e discutir

1. Resulta na distância percorrida.
2. A ideia é incentivar os estudantes a utilizar diferentes representações da proporção para resolver o problema. Sugestão:

	Ralos abertos	Tempo (em h)	
	3	3	×3
÷3	1	30	
×2	2	15	÷2

3. Espera-se que os estudantes notem que o procedimento é o mesmo, mas, ao reduzir 3 kg para 150 g, o quadro mostrará uma diminuição proporcional, em vez de aumento.

Página 116

Para explorar

1.

a) 155,8 mm de precipitação corresponde a 155,8 L/m².

b) $1\ \text{m}^2 \Rightarrow 155{,}8$ L

$12\ \text{m}^2 = 12 \cdot 155{,}8\ \text{L} = 1\,869{,}6$ L

c) São diretamente proporcionais, pois ao dobrar os "mm de chuva" (altura da água por metro quadrado), os "litros de água de chuva" também dobram.

Professor, nos itens **2** e **3** auxilie os estudantes a localizar e entender os 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável propostos e como eles se relacionam com a vivência dos estudantes. Converse com professores da área de Ciências da Natureza para complementar e auxiliar na proposta de intervenção a ser elaborada pela turma.

Página 117

Atividades

57.

I. Falsa. Mesmo que ambas aumentem, não serão diretamente proporcionais se não tiverem aumentado na mesma proporção. Grandezas diretamente proporcionais aumentam (ou diminuem) na mesma proporção.

II. Falsa. Se duas grandezas são inversamente proporcionais, quando uma aumenta (ou diminui), a outra diminui (ou aumenta) proporcionalmente.

III. Verdadeira.

IV. Verdadeira.

58.

a) Não há como saber qual será a massa da criança quando ela estiver com dois anos de idade apenas com base nessas informações.

b) Idade e massa não são grandezas proporcionais.

59.

a) $30 \cdot 6 = 180$; 180 L

$\frac{180}{3} = 60$; 60 vezes

b) $\frac{60}{75} = \frac{t}{2,5}$

$t = 2$; 2 horas

c) $\frac{1}{x} = \frac{15}{90}$

$15x = 90 \cdot 1 = 6$; 6 kg de pães

d) $\frac{4}{24} = \frac{900}{x}$

$x = 5\,400$; 5 400 m = 5,4 km

60. $\frac{A}{4} = \frac{B}{6} = \frac{C}{8} =$

$= \frac{A+B+C}{4+6+8} = \frac{288\,000}{18} = 16\,000$

$A = 4 \cdot 16\,000 = 64\,000$

$B = 6 \cdot 16\,000 = 96\,000$

$C = 8 \cdot 16\,000 = 128\,000$

Portanto, A receberá R$ 64.000,00; B receberá R$ 96.000,00; e C receberá R$ 128.000,00.

61. Consideremos que x, y e z são as medidas inversamente proporcionais a 1, 3 e 6, respectivamente, com $x + y + z = 180°$.

$$x \cdot 1 = y \cdot 3 = z \cdot 6 = k \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = \frac{k}{3} \\ z = \frac{k}{6} \end{cases}$$

$x + y + z = k + \frac{k}{3} + \frac{k}{6} = \frac{9k}{6} =$

$= 180° \Rightarrow k = 120°$

$x = k = 120°$

$y = \frac{k}{3} = \frac{120°}{3} = 40°$

$z = \frac{k}{6} = \frac{120°}{6} = 20°$

62. As grandezas são inversamente proporcionais.

$\frac{15}{24} = \frac{x}{720}$

$x = 450$; R$ 450,00

Alternativa **c**.

63. $2,5 \cdot 12 = 30$; 30 cm

$2,5 \cdot 16 = 40$; 40 cm

Alternativa **c**.

64. $\frac{350}{1\,500} = \frac{35}{x}$

$x = 150$; 150 mg

Considerando 500 mg como a quantidade diária necessária:

$\frac{150}{500} = 0,3 = 30\%$

Alternativa **d**.

65. Dado que a velocidade da água se mantém constante, o tempo necessário para encher o mesmo reservatório e a área da secção transversal da tubulação cilíndrica são grandezas inversamente proporcionais.

$\frac{\pi r^2}{\pi (2r)^2} = \frac{t}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{t}{4} \Rightarrow t = 1$; 1 h

Alternativa **a**.

66. $18 \text{ L/h} = \frac{18 \text{ L}}{1 \text{ h}} = \frac{180 \text{ L}}{10 \text{ h}}$

Em 10 horas, o trator consumirá 180 litros de combustível. A área arada e o consumo de combustível são diretamente proporcionais. Então:

$\frac{15}{180} = \frac{1}{x} \Rightarrow 15x = 180$

$x = 12$; 12 ha

Alternativa **a**.

Páginas 118-121

Atividades finais

1.

a) $1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$

$1 \text{ ha} = 10^4 \cdot (1 \text{ m})^2$

$1 \text{ ha} = 10^4 \cdot 10^{-6} \text{ km}^2$

$1 \text{ ha} = 10^{-2} \text{ km}^2$

$1 \text{ ha} = 0,01 \text{ km}^2$

Corresponde a $0,01 \text{ km}^2$.

b) $0,01 \text{ km}^2 = 1 \text{ ha} \Rightarrow 1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha}$

2.

a) $1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$

$720 \text{ mL} = 720 \text{ cm}^3$

b) $1,5 \text{ L} = 1\,500 \text{ mL}$

$1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$

$1\,500 \text{ mL} = 1\,500 \text{ cm}^3$

c) $5 \text{ L} = 5\,000 \text{ mL} = 5\,000 \text{ cm}^3$

3.

a) $120 \text{ km/h} = \frac{120\,000 \text{ m}}{60 \text{ min}} =$

A velocidade era de 2 000 m/min.

b) $120 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{120\,000 \text{ m}}{60 \cdot 60 \text{ s}} \cong$

$\cong 33,33 \text{ m/s}$

4.

I. Verdadeira. São 4 algarismos precisos e 5 algarismos significativos.

II. Verdadeira. São 2 algarismos precisos e 3 algarismos significativos.

III. Falsa. São 3 algarismos precisos e 4 algarismos significativos.

IV. Verdadeira. O número não tem nenhum algarismo preciso e 1 algarismo significativo.

V. Verdadeira. O número tem 1 algarismo preciso e 2 algarismos significativos.

VI. Verdadeira. São 4 algarismos precisos e 5 algarismos significativos.

5.

a) $6\,000 \text{ kg} = 6 \cdot 1\,000 \text{ kg} = 6 \cdot 10^3 \text{ kg}$

b) Um algarismo significativo.

c) $6 > 3,16$. Então, $10^{3+1} = 10^4$ é a ordem de grandeza.

6.

a) $\alpha < 3,16$

b) $\alpha \geq 3,16$

7.

a) $1\,700 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1,7 \cdot \frac{1\,000 \text{ km}}{\text{h}} =$

$= 1,7 \cdot 10^3 \text{ km/h}$

b) Dois algarismos significativos.

c) $1,7 < 3,16$

10^3 é a ordem de grandeza

8. Se p e f indicam as idades do pai e do filho, respectivamente, então existe uma constante k positiva tal que

$\frac{p}{f} = \frac{7}{2} = \frac{7k}{2k}$, com $p = 7k$ e $f = 2k$.

Assim:

$p + f = 45 \Rightarrow 7k + 2k = 45 \Rightarrow 9k = 45$

$k = 5 \Rightarrow p = 7 \cdot 5 = 35$; 35 anos

$f = 2 \cdot 5 = 10$; 10 anos

9.

a) Quando o quociente das medidas correspondentes for uma constante positiva.

b) Quando o produto das medidas correspondentes for uma constante e diferente de zero.

Questões de vestibulares e Enem

10. Indicando por x a distância real:

$\frac{1}{95\,000} = \frac{55}{x}$

$x = 522\,500$; 522 500 cm =

= 52,25 km

Alternativa **c**.

11.

01) Incorreto, pois possui 8 algarismos significativos.

02) Correto.

04) Correto.

08) Incorreto, pois possui 6 algarismos significativos.

Soma das alternativas corretas: 06 (02 + 04)

12. 0,05% = 0,0005

$0{,}0005 \cdot 4 \cdot 10^{11} = 2 \cdot 10^8$

Alternativa **c**.

13. 28 cm = 280 mm

$1{,}4x = 280$

$x = 200$; 200 min =

= 3h 20 min

Alternativa **a**.

14. 2 h 29 min 30 s = 2 h + 29,5 min

$\frac{29{,}5}{60} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \frac{29{,}5}{60} \cong 0{,}4916$

O total será 2,4916 h.

Alternativa **c**.

15. Considerando 10 m/s² a aceleração da gravidade na Terra e *g* a aceleração da gravidade no planeta *P*.

$\frac{5^2}{8^2} = \frac{10}{g} \Rightarrow g = 25{,}6\ m/s^2$

$25{,}6\ m/s^2 \cong 26\ m/s^2$

A aceleração mais próxima é a de Júpiter.

Alternativa **a**.

16. $\frac{110}{100} = \frac{n+2}{n}$

$n = 20$

$n + 2 = 20 + 2 = 22$; 22 diárias na acomodação B

Cálculo do valor gasto em cada dia de estadia (diária + alimentação):

100 + 150 = 250; R$ 250,00

22 · 250,00 = 5 500; R$ 5.500,00.

5 300 < 5 500 < 5 900

Alternativa **e**.

17. $\frac{30\ L}{15\ partes} = \frac{2\ L}{1\ parte}$

Solução original:

$\left\{\begin{array}{l} \text{Água} = 1 \cdot 2\ L = 2\ L \\ \text{Álcool} = 14 \cdot 2\ L = 28\ L \end{array}\right. \Rightarrow 30\ L$

Nova solução:

Água = $(2 + x)$ L

Álcool = 28 L

$30 + x$ litros

Se a solução passa a ter 70% de álcool, então:

$28 = \frac{70}{100} \cdot (30 + x)$

$x = 10$

Devem ser adicionados 10 litros de água.

Alternativa **b**.

18. No processo perdem-se 15% do total a ser envazado; temos:

100% – 15% = 85% = 0,85

0,85 · 582 = 494,7; L = 494 700 mL

$\frac{330}{1} = \frac{494\,700}{N}$

$N = \frac{494\,700}{300}$

$N = 1\,499{,}0909... \cong 1\,500$;

1 500 garrafas

Alternativa **a**.

19. Inicialmente:

$\underbrace{\frac{20}{100} \cdot 120 = 24;\ 24\ kg}_{\text{20\% da massa gordura corporal}}$

120 – 24 = 96; 96 kg → 80% da massa

Após atingir o objetivo e perder gordura corporal:

gordura corporal → 15% da massa

96 kg → 85% da massa

x kg → 100% da massa

$\frac{x}{96} = \frac{100}{85}$

$x = \frac{9\,600}{85}\ x \cong 113$; 113 kg

Considerando a altura de 1,80 m.

$IMC = \frac{113}{1{,}8^2} = 34{,}8765...$

IMC ≅ 34,9

34 < IMC < 35

Alternativa **a**.

20. Para determinar o tempo que leva para o arquivo ser baixado, basta dividir o tamanho desse arquivo pela velocidade de *download*:

1,5 GB = 1,5 · 1 024 MB = 1 536 MB

$\frac{1\,536\ MB}{20\ MB/s} = 76{,}8\ s$

Alternativa **c**.

21. $\frac{2\,120}{265} = 8$; 8 módulos

8 · 1,65 = 13,2; 13,2 m²

Alternativa **b**.

22. Se a velocidade original for multiplicada por 1,5, o tempo de reprodução será dividido por 1,5.

$t = \frac{3}{1{,}5} = 2$; 2 min

Alternativa **c**.

23. Se *k* for a constante de proporcionalidade, então:

$Q = k \cdot \frac{(S) \cdot (\Delta T)}{(D)}$

Dobrando S, quadruplicando D e mantendo constante ΔT, a nova quantidade de calor será:

$k \cdot \frac{(2S) \cdot (\Delta T)}{(4D)} = \frac{2}{4} \cdot k \cdot \frac{(S) \cdot (\Delta T)}{(D)} =$

$= \frac{2}{4} \cdot Q = \frac{Q}{2}$

Ou seja, será reduzida à metade.

Alternativa **c**.

24. Há chocolate suficiente para fazer (no máximo) 58 bombons, pois:

$\frac{2\ kg}{34\ g} = \frac{2\,000\ g}{34\ g} \cong 58{,}8$

Há creme de leite para fazer (no máximo) 83 bombons, pois:

$\frac{1\ L}{12\ mL} = \frac{1\,000\ mL}{12} \cong 83{,}3$

Utilizando o máximo que puder dos ingredientes comprados, a doceria poderá fazer um total de 58 bombons.

Alternativa **c**.

25. 3 – 0,9 = 2,1; 2,1 ha = 21 000 m²

$\frac{21\,000}{300} = 70$; 70 m²

20 · 20 000 = 400 000;

R$ 400.000,00

50 · 30 000 = 1 500 000;

R$ 1.500.000,00

400 000 + 1 500 000 = 1 900 000;

R$ 1.900.000,00

Alternativa **c**.

26. Antiga área de plantio:

50 · 240 = 12 000; 12 000 m²

Nova área de plantio:

100 · 200 = 20 000; 20 000 m²

Aumento da área de plantio:

20 000 – 12 000 = 8 000; 8 000 m²

Área destinada ao plantio de cada muda:

10 · 20 = 200; 200 cm² = 0,02 m²

Se *x* indicar a quantidade máxima de mudas (a mais) que poderão ser plantadas, então, sabendo que essa quantidade é diretamente proporcional à área plantada; 400 000 mudas

$\frac{x}{1} = \frac{8\,000}{0{,}02}$

$x = 400\,000$; 400 000 mudas

Alternativa **b**.

27. 4 m³ = 4 000 000 mL

$\frac{4\,000\,000}{4\,000} = 1\,000$;

1 000 mL/embalagem

Alternativa **e**.

28. 3,25 min = 3,25 · 60 s = 195 s

3,4 min = 3,4 · 60 s = 204 s

$\underbrace{204\ s}_{\text{tempo do último}} > 195\ s > \underbrace{191\ s}_{\text{tempo do primeiro}}$

204 – 191 = 13; 13 s

Alternativa **a**.

29. $1\ \text{cm/min} = \dfrac{1\ \text{cm}}{1\ \text{min}\dfrac{10^{-2}\,\text{m}}{60\text{s}}}$

$10^{-2} \cdot 60^{-1}$ é o fator de conversão.

Alternativa **b**.

30. 5 trilhões = 5 000 000 000 000;

12 zeros

Alternativa **d**.

31. $\dfrac{\text{oxigênio}}{\text{massa}} = \dfrac{\text{mL/min}}{\text{kg}} = \dfrac{\text{mL}}{\text{min} \cdot \text{kg}}$

Alternativa **b**.

32. Neste ano, a lista tem 440 nomes:

$400 + \dfrac{10}{100} \cdot 400 = 400 + 40 = 440$

Estima-se que a lista do próximo ano também terá 440 nomes. Para que seja 25% menor, deverão ser criadas vagas para 110 crianças: $\dfrac{25}{100} \cdot 440 = 110$.

Se cada sala tem capacidade para atender 10 crianças, então deverão ser criadas pelo menos 11 salas.

Alternativa **b**.

33. 5 km = 500 000 cm → altitude máxima

No gráfico, a altitude máxima representada equivale a 1 cm

$\text{Escala} = \dfrac{1}{500\,000} = 1 : 500\,000$

Alternativa **e**.

34. $20\ \text{ciclos} \cdot \dfrac{52\ \text{anos Haab}}{\text{ciclo}} \cdot$

$\cdot \dfrac{365\ \text{dias}}{\text{ano Haab}} = 379\,600\ \text{dias}$

$\dfrac{379\,600\ \text{dias}}{\dfrac{260\ \text{dias}}{\text{ano}}\ \text{Tzolkim}} = 1\,460;$

1 460 anos Tzolkim

Durante 1 460 anos, a comunidade de Tzolkim foi governada por tal família.

Alternativa **c**.

CAPÍTULO 4

Função afim

Objetivos

- Compreender o conceito de função como relação entre duas grandezas.
- Identificar, em gráficos ou diagramas, o domínio, o contradomínio e a imagem de uma função.
- Compreender e analisar gráficos de funções quanto ao crescimento e decrescimento.
- Conhecer função afim, identificar situações que podem ser modeladas por ela e usar procedimentos algébricos e gráficos para resolvê-las.
- Compreender o significado de taxa de crescimento de uma função afim.
- Resolver e elaborar problemas que envolvem função afim.
- Compreender que as funções do 1º grau são casos particulares de função afim.
- Identificar que a função linear relaciona grandezas diretamente proporcionais.
- Resolver inequações do 1º grau com base no estudo do sinal de uma função do 1º grau e também por procedimentos algébricos.

Justificativa

O estudo introdutório das funções por meio de suas características algébricas e gráficas visa contribuir para o desenvolvimento de habilidades relacionadas aos diversos tipos de funções que serão estudadas ao longo do Ensino Médio. Já o trabalho com a função afim, por meio de situações reais representadas algébrica ou graficamente, visa contribuir para a formação de jovens que se apropriem do conhecimento matemático, utilizando-o com propriedade em diversas situações, seja dentro ou fora da escola.

Competências gerais da BNCC

Competência geral 2: Nesse capítulo, os estudantes realizam diversas atividades de investigação por meio das quais exercitam a reflexão, a análise crítica e a criatividade, como as atividades da seção **Para explorar** das páginas 153 e 160.

Competências gerais 4 e 9: Ao realizar atividades em duplas ou em grupos, como ocorre nas seções **Para explorar** e **Para pensar e discutir**, que permeiam todo o capítulo, os estudantes utilizam diferentes linguagens, como a verbal, a visual e a matemática, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos, produzindo sentidos que levam ao entendimento mútuo, o que contempla a **competência 4**. Esse tipo de atividade promove também a **competência 9**, uma vez que os estudantes exercitam a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e seus saberes.

Competência geral 5: A seção **Análise e contexto** das páginas 137 e 138 apresenta um texto acerca de um *software* de geometria dinâmica, seguido de algumas atividades por meio das quais os estudantes exploram esse recurso tecnológico. A partir de então, eles utilizam esse *software* para realizar várias atividades, como as da seção **Para explorar** da página 148.

Competência geral 6: Essa competência é mobilizada nas páginas 161 e 162 quando são abordados assuntos relativos à abertura de uma empresa, tais como estimativas de orçamentos e levantamento de custos para a determinação de lucros que possibilitem que empresas sobrevivam.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 1

EM13MAT101: As atividades propostas na página 154 contemplam essa habilidade.

Competência específica 3

EM13MAT302: Essa habilidade está contemplada nas atividades da página 144, em que os problemas propostos, de variados contextos, podem ser modelados e resolvidos por meio de uma função do 1º grau.

Competência específica 4

EM13MAT401: Essa habilidade é contemplada nas atividades das páginas 157 e 158.

EM13MAT404: Essa habilidade está contemplada em grande parte desse capítulo, como nas atividades das páginas 139 e 140.

Competência específica 5

EM13MAT501: Essa habilidade é mobilizada nas atividades que constam nas páginas 134 a 136.

EM13MAT510: Essa habilidade está contemplada em várias situações exploradas ao longo do capítulo, como nas páginas 145 a 147.

Conexões com outras áreas do conhecimento

A abertura do capítulo, nas páginas 122 e 123, aborda alguns dados apresentados pelo IBGE de acordo com o Censo Demográfico de 2022. As questões propostas para os estudantes discutirem com base no texto apresentado podem ser enriquecidas e ampliadas com a participação dos professores da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**.

Temas Contemporâneos Transversais

O TCT **Educação financeira** foi mobilizado na situação envolvendo a produção e venda de trufas que consta nas páginas 161 e 162.

Resoluções e comentários

Página 123

Abertura

1. Sugestão de resposta: Esses dados permitem planejar a distribuição de verbas públicas que dependam do número de habitantes da região.
2. Espera-se que os estudantes apresentem exemplos ligados tanto às políticas públicas como à iniciativa privada. A discussão das questões propostas pode ser enriquecida com a participação dos professores da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, em especial de Geografia.

1. A ideia de função

Página 124

Para pensar e discutir

1. Exemplo de respostas: bancos, aparelhos para exercício, quadra esportiva, parquinho infantil.
2. A grandeza usada para representar superfície é a área.
3. Exemplo de resposta: Para uma superfície circular, depende do raio; a área do círculo é πr^2.

Página 126

Para pensar e discutir

1. A variável dependente é P (valor a pagar) e a variável independente é x (consumo de água em metros cúbicos).
2. $f(x) = 12,50x$
3. $f(23) = 12,50 \cdot 23 = 287,50$; R$ 287,50
4. O valor de x poderá ser qualquer número real não negativo, isto é, $x \geq 0$.

Página 128-129

Para explorar

Aproveite este contexto para expor aos estudantes o conceito de bandeira tarifária, a qual pode acabar encarecendo ou barateando o valor da conta e esta se apresenta diretamente relacionada ao consumo e/ou a questões desfavoráveis tanto no contexto hídrico quanto energético.

Atividades

1.

a) A área do círculo em função do raio r.

b) $A = f(10) = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$

Esse valor representa a área de um círculo de raio medindo 10 u.c.

c) $A = f(20) = \pi \cdot 20^2 = 400\pi$

Esse valor representa a área de um círculo de raio medindo 20 u.c.

d) $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{f(2r)}{f(r)} = \dfrac{\pi \cdot (2r)^2}{\pi \cdot r^2} = 4$

O valor quadruplica.

2.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x^2 - 3$

c) $f(r) = 4r$

d) $f(\ell) = \ell\sqrt{2}$

3.

a) $V = f(t) = 300 + 45t$

b) $V = f(5) = 300 + 45 \cdot 5$

$V = 525$; R$ 525,00

c) $480 = 300 + 45t \Rightarrow t = 4$;

4 horas

4.

I. Verdadeira, pois $d = \ell\sqrt{2}$.

II. Verdadeira, pois o perímetro é a soma dos lados.

III. Falsa, pois a função da diagonal é dada por $d = f(\ell) = \sqrt{2}$.

5.

a) $f(-30) = |-30| = 30$

b) $f(2) + f(-2) = |2| + |-2| = 4$

c) $|x| = 4 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -4$

d) $|x| = 7\sqrt{2}$

$x = 7\sqrt{2}$ ou

$x = -7\sqrt{2}$

6.

a) Como Rosa não vendeu nada, ela receberá R$ 1.500,00.

b) Rosa vendeu R$ 90.000,00, temos:

$f(90\,000) = 1\,500 + 0,05 \cdot 90\,000$

$f(9\,000) = 6\,000$; R$ 6.000,00

c) Seja S e V salário e vendas, respectivamente.

$S = f(V) = 1\,500 + 0,05V$

7.

a) $y = f(x) = 4\sqrt{x}$

b) $f(4) = 4 \cdot \sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8$

c) A variável independente é o radicando de uma raiz quadrada, logo $x \geq 0$. O menor valor possível para x é 0.

d) Para os valores que são inteiros e quadrados perfeitos ao mesmo tempo.

e) $40 = 4\sqrt{x}$

$x = 100$

8.

a) $d = f(4) = \dfrac{4 \cdot (4 - 3)}{2} = 2$

O número de diagonais de um quadrilátero.

b) $d = f(9) = \dfrac{9 \cdot (9 - 3)}{2} = 27$;

27 diagonais

9.

a) $V = f(t) = \dfrac{500}{t}$

b) $V = f(8) = \dfrac{500}{8} = 62,5$; 62,5 km/h

Página 130

Para pensar e discutir

1. B é o quadrado do valor correspondente de A.
2. Sim, todos os elementos de A estão relacionados com algum elemento em B.
3. Sim, cada elemento de A está associado a um único elemento de B.
4. $y = x^2$
5. Não, pois os elementos –1, 47 e 48 são elementos de B que não estão relacionados com elementos de A.

Página 132

Atividades

10.
- **a)** Sim, todos estão relacionados.
- **b)** Sim, pois todos os elementos de A estão relacionados a um único elemento em B.

11.
- **a)** $D(f) = \{1, 2, 3\} = A$,
  $CD(f) = B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e
  $Im(f) = \{2, 4, 6\}$
- **b)** $f(1) + f(2) + f(3) = 2 + 4 + 6 = 12$

12. Não, pois existe um elemento de A relacionado com dois elementos distintos em B.

13.
- **a)** $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) =$
  $= 3 + 6 + 9 + 12 = 30$
- **b)** $f(x) = 3x$

14. São funções injetoras: 2 e 4.
São funções sobrejetoras: 3 e 4.
São funções bijetoras: apenas 4.

Página 133

Para pensar e discutir

1. No 1º e 4º quadrantes.
2. No 3º e 4º quadrantes.
3. Para pertencer ao eixo das abscissas, a ordenada deve ser igual a zero e, ao eixo das ordenadas, a abscissa deve ser igual a zero.

Para pensar e discutir

1. Velocidade e tempo.
2. O automóvel saiu da velocidade zero e atingiu a velocidade de 30 m/s.
3. No intervalo de 40 a 50 s.
4. Durante 20 s, isto é, no intervalo de 20 s a 40 s.
5. A velocidade é de 108 km/h. Basta substituir, na relação, 1 m por $\frac{1}{1\,000}$ km e 1 s por $\frac{1}{3\,600}$ h:

$$V = 30\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 30 \cdot \frac{\frac{1}{1\,000}\ \text{km}}{\frac{1}{3\,600}\ \text{h}}$$

$$V = 30 \cdot \frac{\frac{3\,600}{1\,000}\ \text{km}}{1\text{h}} = 108\ \text{km/h}$$

Página 134

Para pensar e discutir

1. Pontos isolados em coordenadas inteiras, como (0, 0), (–1, –2), (2, 4), entre outras, e alinhados. Além da origem, os pontos estariam no 1º e no 3º quadrantes.
2. Pontos isolados em coordenadas inteiras e positivas. Estariam alinhados e, além da origem, estariam no 1º quadrante.

Página 136

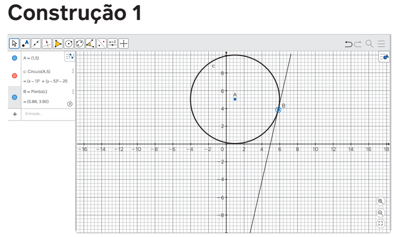
Para pensar e discutir

1. $f(x) = 2x$, temos que $Im(f) = \mathbb{R}$;
   $g(x) = \sqrt{x}$, temos que $Im(f) = \mathbb{R}_+$;
   $h(x) = x^2$, temos que $Im(f) = \mathbb{R}_+$.
2. $g(2) = \sqrt{2}$
3. Da função $f(x) = 2x$, temos que $D(f) = \mathbb{R}$;
   da função $g(x) = \sqrt{x}$, temos que $D(g) = \mathbb{R}_+$;
   da função $h(x) = x^2$, temos que $D(h) = \mathbb{R}$.
4. Nas funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Já na função $h(x) = x^2$, existem valores diferentes de x com a mesma imagem.

Páginas 137-138

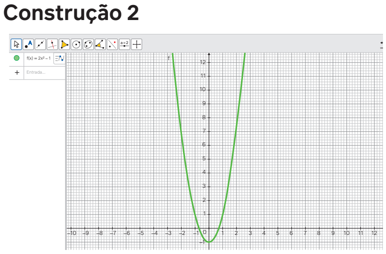
Análise e contexto

Construção 1



Reinaldo Vignati

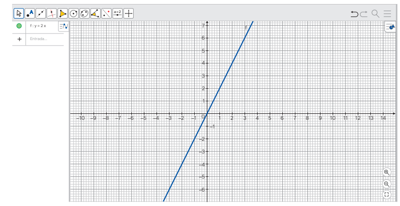
Construção 2



Reinaldo Vignati

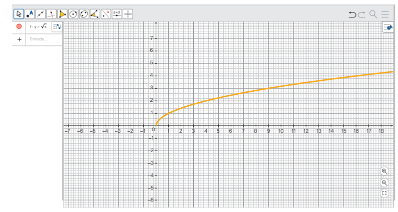
Construção 3

- **a)** $f(x) = 2x$



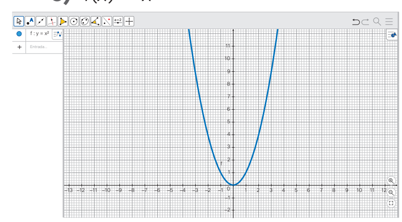
Reinaldo Vignati

- **b)** $f(x) = \sqrt{x}$



Reinaldo Vignati

- **c)** $f(x) = x^2$



Reinaldo Vignati

Construção 4

Os estudantes devem apresentar funções semelhantes às estudadas, com pequenas variações nos gráficos.

Páginas 139-140

Atividades

15.
- **a)** $f(0) = -1$
- **b)** $f(2) = 3$
- **c)** $f(-2) = -1$
- **d)** $f(3) + f(4) + f(-2) + f(-3) =$
  $= 3 + 3 + (-1) + (-1) = 4$

16.
- **a)** $Im(f) = [-2, 3]$
- **b)** $f(-1) = 3$, $f(0) = 1$ e $f(8) = -2$
- **c)** $x = 2$, $x = 4$ e $x = 7$
- **d)** $x \in\ ]2, 4[$ ou $x \in\ ]7, 8]$

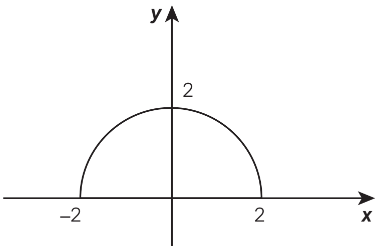
17.
- **a)** Sugestão de resposta: O gráfico é formado por pontos que pertencem a uma reta que é a bissetriz dos quadrantes ímpares.
- **b)** Uma vez, no ponto (0, 0).
- **c)** Para $x = 0$.
- **d)** Para $x > 0$.
- **e)** Para $x < 0$.

18. A relação não é função, pois existem valores de x com mais de uma imagem. Exemplo:
para $x = 4$, tem-se $y = 1$ e $y = 7$.

19.

a) $D(f) = [-2, 2]$

b) O gráfico dessa função é:



Reinaldo Vignati

c) $Im(f) = [0, 2]$

20.

I. Verdadeira; pois, pelo gráfico, o automóvel permaneceu parado nos primeiros 5 s.

II. Verdadeira; pois, pelo gráfico, o automóvel atingiu a mesma velocidade no instante 10 s, e entre os instantes 20 s e 25 s.

III. Falsa; pois, pelo gráfico, nos instantes 12 s e 20 s a velocidade foi constante.

IV. Falsa; pois, pelo gráfico, o automóvel movimentou-se a uma velocidade de 60 m/s.

São verdadeiras I e II, e são falsas III e IV.

21. Tempo: 15 – 5 = 10; 10 min.

Litros de O_2: $10 \cdot 1{,}4 = 14$; 14 L.

Energia liberada: $14 \cdot 4{,}8 = 67{,}2$.

A energia liberada é de 67,2 kcal.

22. $k = f(-3) + f(-1) + f(3) - f(4) + f(5)$

$f(x) = k = -2 + 3 + 7 - 4 + 2 = 6$

$x = 1$

Alternativa **e**.

23.

Venceu (28/1): 3 pontos.

Perdeu (4/2): 0 ponto.

Empatou (11/2): 1 ponto.

Perdeu (18/2): 0 ponto.

Venceu (25/2): 3 pontos.

Venceu (4/0): 3 pontos.

Empatou (11/3): 1 ponto.

Venceu (18/3): 3 pontos.

Empatou (25/3): 1 ponto.

Venceu (1/4): 3 pontos.

No total, temos 18 pontos.

Alternativa **c**.

24. Podemos notar que a velocidade do corredor é praticamente constante entre 5 e 8 segundos.

Alternativa **c**.

2. Função afim

Página 141

Para pensar e discutir

1. Para $t = 0$ a carga da bateria é de 100%.

2. Em duas horas.

3. A cada duas horas, a redução é de 20 pontos percentuais. A cada uma hora, é de 10 pontos percentuais.

4. Em 10 horas, pois se perde 10% a cada hora.

Páginas 143-144

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta:

Tendo os pontos no plano cartesiano $P(1, 5)$ e $Q(-2, 15)$, calculando a variação entre as coordenadas, teríamos:

$$a = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{5 - 15}{1 - (-2)} = \frac{-10}{3}$$

O restante do procedimento é análogo ao exposto.

2. Precisamos achar o zero da função.

$50x - 12\,000 = 0 \Rightarrow 50x = 12\,000$

$x = \dfrac{12\,000}{50} \Rightarrow x = 240$

Outros valores menores do que 240 gerariam prejuízo.

Atividades

25.

a) $f(4) = -2 \cdot 4 + 5 = -3$

b) $f(0) = -2 \cdot 0 + 5 = 5$

c) $f(x) = 0 \Rightarrow -2x + 5 = 0 \Rightarrow x = 2{,}5$

d) $f(x) = 2 \Rightarrow -2x + 5 = 2 \Rightarrow x = 1{,}5$

26.

a) $\begin{cases} a \cdot 3 + b = 10 \\ a \cdot 5 + b = 10 \end{cases}$

$a = 0$ e $b = 10$

Logo, $f(x) = 10$ e se trata de uma função constante.

b) $\begin{cases} a \cdot 4 + b = 15 \\ a \cdot 8 + b = 30 \end{cases}$

$a = \dfrac{15}{4}$ e $b = 0$

Logo, $f(x) = 3{,}75x$ e se trata de uma função linear.

c) $\begin{cases} a \cdot 0 + b = 7 \\ a \cdot 2 + b = 21 \end{cases} \Rightarrow b = 7$ e $a = 7$

Logo, $f(x) = 7x + 7$.

27.

I. Verdadeira. $f(3x) = 4 \cdot (3x) = 12x$; logo, triplicando x, y também triplica.

II. Verdadeira. $f(2x) = 4 \cdot (2x) = 8x$; logo, duplicando x, y também duplica.

III. Verdadeira. $f(0) = 4 \cdot 0 = 0$

28.

I. Falsa.

$f(3x) = 4 \cdot (3x) - 3 = 12x - 3$

II. Falsa.

$f(2x) = 4 \cdot (2x) - 3 = 8x - 3$

III. Falsa.

$f(0) = 4 \cdot 0 - 3 = -3$

29.

a) $a = 0$ e $b = 25$

b) y é sempre igual a 25

30.

a) $Q(t) = 10\,000 - 200t$

b) $Q(t) = 5\,000$

$5\,000 = 10\,000 - 200t$

$t = \dfrac{5\,000 - 10\,000}{-200}$

$t = 25$; 25 min

c) $0 = 10\,000 - 200t$

$t = \dfrac{10\,000}{200} = 50$; 50 min

31.

a) O carro desvalorizou R$ 15.000,00 a cada ano.

$V(t) = 150\,000 - 15\,000t$

b) $V(5) = 150\,000 - 75\,000 = 75\,000$; R$ 75.000,00

32.

a) $L(x) = 14x - 21\,000$

b) $L(1\,000) = 14 \cdot 1\,000 - 21\,000 =$
$= -7\,000$; prejuízo: R$ 7.000,00.

c) $L(x) = 0 \Rightarrow 14x - 21\,000 = 0$

$14x = 21\,000 \Rightarrow x = 1\,500$;

1 500 peças

33. $L(x) = 4\,000 \Rightarrow 4\,000 = 75x - 3\,000$

$x = 93{,}333...$, portanto, o menor número de camisetas a serem vendidas é 94.

Alternativa **d**.

34. $R(x) = 2x + 5 \cdot 10 \Rightarrow 410 = 2x + 50$

$x = 180$; 180 km

Média: $\dfrac{180}{10} = 18$; 18 km/corrida

Alternativa **c**.

35. Usando os pontos (2 000, 30) e (3 000, 35), temos:

$\begin{cases} a \cdot 2\,000 + b = 30 \\ a \cdot 3\,000 + b = 35 \end{cases}$

$a = \dfrac{1}{200}$ e $b = 20$

$Q = \dfrac{1}{200}R + 20$

Alternativa **a**.

36. Usando os pontos (2, 2) e (4, –2).

$\begin{cases} a \cdot 2 + b = 2 \\ a \cdot 4 + b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = -2$ e $b = 6$

$a + b = -2 + 6 = 4$

Alternativa **c**.

37. $L(x) = V(x) - C(x)$

$V(x) = 5{,}10x$ e $C(x) = 2{,}60x + 8\,000$

$L(x) = 5{,}10x - (2{,}60x + 8\,000)$

$L(x) = 2{,}50x - 8\,000$

$2{,}50x - 8\,000 > 0 \Rightarrow x > 3\,200$;

Alternativa **a**.

38. $P = 60 + 1{,}5x$

Alternativa **c**.

Página 145

Para pensar e discutir

1. Os valores de x aumentam de 1 em 1; os valores de y aumentam de 2 em 2.
2. Sim.
3. Os valores de y também diminuirão.

Página 147

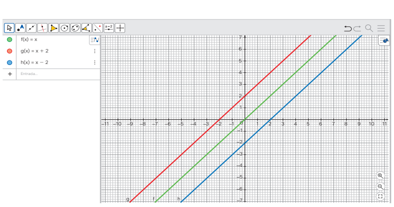
Para pensar e discutir

1. Na função definida por $f(x) = 3x + 1$;
2. Na função definida por $g(x) = -2x + 2$.
3. Na função definida por $h(x) = 5$

Páginas 148-149

Para explorar

1.



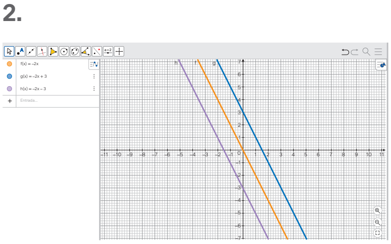
Reinaldo Vignati

a) São três retas paralelas.

b) O deslocamento na vertical.

c) Representam as ordenadas dos pontos em que as retas intercectam o eixo y.

2.



Reinaldo Vignati

a) Sim.

b) Representam a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo y.

c) À medida que aumenta o valor de x, diminui o valor de y.

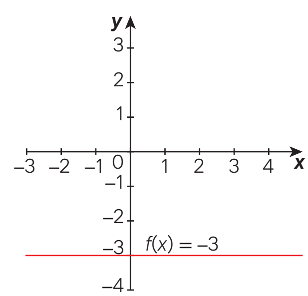
Reinaldo Vignati

Solicite aos estudantes que comparem as retas obtidas nos itens 1 e 2 e as respectivas expressões algébricas, em especial o valor de a em cada uma. Eles podem concluir que para valores positivos de a as retas são crescentes e, para valores negativos, são decrescentes. Dessa forma, antecipam as ideias que serão discutidas no tópico seguinte.

Atividades

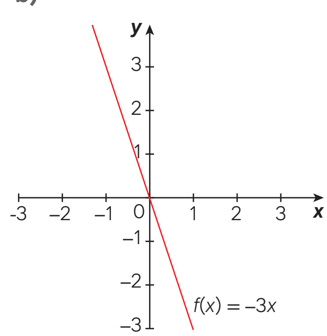
39.

a)



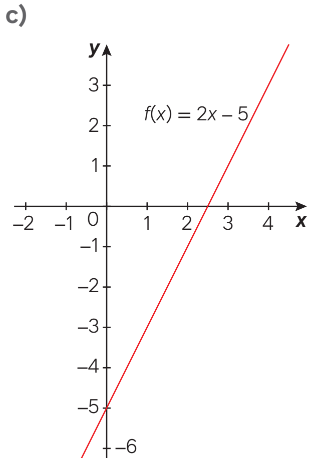
Reinaldo Vignati

b)



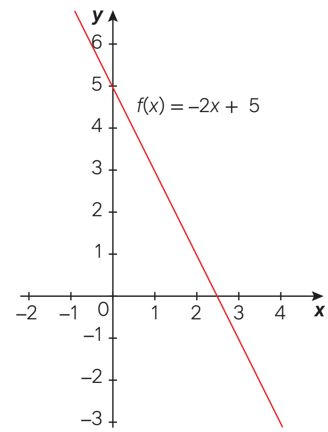
Reinaldo Vignati

c)



Reinaldo Vignati

d)



Reinaldo Vignati

40.

a) (0, –3)

b) (0, 0)

c) (0, –5)

d) (0, 5)

41.

a) A reta intersecta o eixo y em:

$(0, 4) \Rightarrow b = 4$

$(-2, 0) \Rightarrow a \cdot (-2) + 4 = 4 \Rightarrow a = 2$

$f(x) = 2x + 4$

b) Eixo das abscissas: (–2, 0); eixo das ordenadas: (0, 4).

42.

a) Pontos pertencentes à reta

(0, 1); (1, 3); (2, 5): $b = 1$ e $f(1) = 3$

$a \cdot 1 + 1 = 3 \Rightarrow a = 2$. $f(x) = 2x + 1$

b) Resposta esperada: Para encontrar as coordenadas onde o gráfico intercepta o eixo y, basta substituir x por zero na equação da função e resolvê-la para y.

c) $f(x) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

43. $f(0) = 3 \Rightarrow b = 3$

$f(5) = 0 \Rightarrow a \cdot 5 + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{5}$

$a + b = -\frac{3}{5} + 3 = \frac{12}{5}$

44.

a) $f(x) = x$, $g(x) = x + 2$, $h(x) = x - 2$

b) Nas três funções.

c) Basta deslocá-lo 2 unidades verticalmente para cima.

d) Basta deslocá-lo 2 unidades verticalmente para baixo.

45. Usando os pontos (0, 100) e (16, 40), obtemos duas equações.

$a \cdot 10 + b = 100 \Rightarrow b = 100 - 10a$ (I)

$a \cdot 16 + b = 40$ (II)

Substituindo I em II, obtemos:

$16a + 100 - 10a = 40 \Rightarrow a = -10$

$b = 100 - 10(-10) \Rightarrow b = 200$

$f(x) = -10x + 200$

$f(x) = 10 \Rightarrow x = 19$; 19 h

Alternativa **b**.

46. $y = f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

$f(0) = 50 \Rightarrow b = 50$

$f(500) = 0 \Rightarrow a \cdot 500 + 50 = 0$

$a = -\frac{1}{10}$

$y = f(x) = -\frac{x}{10} + 50$

Alternativa **b**.

47. $1\,200 - 900 = 300$; 300 dólares

$10 - 8 = 2$; 2 anos.

$\frac{300}{x} = \frac{10}{2} \Rightarrow x = 60$; 60 dólares

Alternativa **b**.

48. $R(x)$ que passa pelos pontos (0, 0) e (1 000, 15 000):

$R(0) = 0 \Rightarrow 1\,000 \cdot a + 0 = 15\,000$

$a = 15 \Rightarrow R(x) = 15x$

(0, 5 000) e (1 000, 15 000):

$C(0) = 5\,000 \Rightarrow b = 5\,000$

$C(1\,000) = 1\,500$

$1\,000a + 5\,000 = 15\,000 \Rightarrow a = 10$

$C(x) = 10x + 5\,000$

$L(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow L(x) = 5x - 5\,000$

$L(1\,350) = 5 \cdot 1\,350 - 5\,000 = 1\,750$; R$ 1.750,00

Alternativa **b**.

Página 150

Para pensar e discutir

1. Função decrescente.
2. Função crescente.
3. Com base na discussão feita na seção **Para explorar** da página 148, os estudantes podem relacionar ao sinal de a. No desenvolvimento da teoria, como será visto adiante, explicaremos que isso pode ser constatado a partir do valor da taxa de crescimento médio da função afim.

Página 152

Para pensar e discutir

1. A medida F aumenta 1,8 grau.
2. Os valores de y aumentam de 10 em 10.

Páginas 153-154

Para explorar

1. Exemplos de resposta:
   a) $f(x) = 2x + 3 \rightarrow (a > 0)$
   b) $g(x) = -x + 2 \rightarrow (a < 0)$
   c) $h(x) = 5 \rightarrow (a = 0)$
2. Com base nos exemplos.
   a) A imagem aumenta de 2 em 2.
   b) A imagem diminui de 1 em 1.
   c) A imagem permanece constante, igual a 5.
3. Com base nos exemplos.
   a) A imagem aumenta de 4 em 4.
   b) A imagem diminui de 2 em 2.
   c) A imagem permanece constante, igual a 5.
4. Com base nos exemplos.
   a) A imagem aumenta de 10 em 10.
   b) A imagem diminui de 5 em 5.
   c) A imagem permanece constante, igual a 5.
5. Incentive os estudantes a apresentar argumentos matemáticos que comprovem a interpretação dos resultados.

Atividades

49.

a) $f(x) = 0 \Rightarrow 7x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$

b) Não admite x inteiro.

c) $f(x) = 0 \Rightarrow -7x = 0 \Rightarrow x = 0$

d) $f(x) = 0 \Rightarrow -7x = 0 \Rightarrow x = 0$

e) Não admite x real.

50.

a) Triângulo retângulo com vértices $A(0, 0)$, $B(0, 10)$ e $C(10, 0)$.

b) $D_{AB} = \sqrt{(0-0)^2 + (10-0)^2}$

$D_{AB} = 10$

$D_{AC} = \sqrt{(10-0)^2 + (0-0)^2}$

$D_{AC} = 10$

$D_{BC} = \sqrt{(10-0)^2 + (0-10)^2}$

$D_{BC} = 10\sqrt{2}$

$P = 20 + 10\sqrt{2}$

c) $A = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$; 50 u.a.

51.

I. Falsa, pois $a < 0$. A função é decrescente. Aumentar x resulta em uma diminuição das imagens.

II. Verdadeira, pois $a < 0$. A função é decrescente em todo seu domínio.

III. Verdadeira. A função é decrescente. $a < 0$ e $b > 0$, pois intercepta o eixo y na parte positiva.

IV. Falsa. b intercepta o eixo y na parte positiva, logo $b > 0$.

52.

I. Verdadeira. $a > 0$; logo, a função é crescente.

II. Verdadeira. Para $x = 0$, temos $f(0) = a \cdot 0 + b = b$.

III. Falsa, pois b intersecta o eixo y na parte negativa.

IV. Falsa, pois $b < 0$, então $f(0) = 0 - b = -b$

53. $f(0) = P \Rightarrow a \cdot 0 + b = P \Rightarrow P(0, b)$

$Q = f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0$

$Q\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$

54. $f(100) = 20$ e $f(500) = 8$

$a = \frac{8 - 20}{500 - 100} = -\frac{3}{100}$

A cada 100 m a temperatura diminui 3 °C.

55. $E(0) = 16 \Rightarrow b = 16$

$E(80) = 41 \Rightarrow 80 \cdot a + 16 = 41$

$a = \frac{5}{16}$

Temperatura de solidificação da água: 0 °C.

$E(x) = 0 \Rightarrow \frac{5}{16}x + 16 = 0$

$x \cong -51$; $\cong -51$ °E

Alternativa **d**.

56. $f(0) = 7 \Rightarrow b = 7$

$a = \frac{7 - 0}{0 - 35} \Rightarrow a = -0{,}2$

$f(x) = -0{,}2x + 7$

$f(28) = -0{,}2 \cdot 28 + 7 = 1{,}4$

Alternativa **e**.

57. $f(0) = 24 \Rightarrow b = 24$

$a = \frac{0 - 24}{48 - 0} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 24$

$f(x) = -18$

$-\frac{1}{2}x + 24 = -18 \Rightarrow x = 84$; 84 min

Alternativa **b**.

58. $L_A(t) = L_B(t) \Rightarrow 3t - 1 = 2t + 9$

$t = 10$; décimo mês

Alternativa **d**.

59. $L(0) = -1\,000 \Rightarrow b = -1\,000$

$a = \frac{3\,000 - 0}{20 - 5} \Rightarrow a = 200$

$L(t) = 200t - 1\,000$

Alternativa **d**.

3. Função afim e consequências

Página 155

Para pensar e discutir

1. É o valor em que o gráfico intersecta o eixo y.
2. Sim, pois é uma função afim com $b = 0$. Sim, pois é uma função do 1º grau com $b = 0$.

Página 156

Para pensar e discutir

1. Duplica também.
2. Triplica ou quadruplica também.

3. Sim, pois as duas grandezas estão relacionadas por meio de uma função afim e $a = \frac{y}{x} = 7{,}5 > 0$.
4. Significa constante de proporcionalidade.

Páginas 158-159

Atividades

60.

a) $d = f(4) = 80 \cdot 4 = 320$; 320 km

b) $f(t) = 400 \Rightarrow 400 = 80t$

$t = 5$; 5 horas

c) $d = 80t \Rightarrow \frac{d}{t} = V = 80$; 80 km/h

61.

a) Não. $f(2x) = 5 \cdot (2x) - 1$

$f(2x) = 10x - 1$

b) Não. $f(3x) = 5 \cdot (3x) - 1$

$f(3x) = 15x - 1$

c) Não. $f(k \cdot x) = 5kx - 1 \neq k \cdot f(x) =$
$= 5kx - k$

d) Não. A função não é da forma $f(x) = ax$.

62.

a) $N(x) = x$

b) A taxa é 100% ($a = 1$).

63.

a) Sim, pois se trata de uma função linear.

b) $C(t) = 5{,}25t$

c) $\frac{C(t)}{t} = 5{,}25$; 5,25 L/min

64. Sim, são diretamente proporcionais e 1,25 representa a velocidade em m/s, pois $y = 1{,}25x$. A constante de proporcionalidade $\frac{y}{x} = 1{,}25$ com $x \neq 0$.

65.

I. Falsa. A função não é linear.

II. Verdadeira. Enquanto o tempo t aumenta, o volume V diminui.

III. Falsa. $V = 3\,000t$ é uma função linear.

IV. Verdadeira. $V = 3\,000 - 100t$ é uma função afim, com $a = -100$ e $b = 3\,000$.

66. As duas afirmações estão incorretas. No gráfico 1, y e x não são diretamente proporcionais, pois quando x duplica, y não. O quociente entre eles também não é constante: $\frac{40}{4} \neq \frac{60}{8}$. No gráfico 2, y e x não são inversamente proporcionais, já que o produto entre seus valores não é constante: $3 \cdot 6 \neq 6 \cdot 0$.

67.

I. Verdadeira. O lado do quadrado é x, portanto o seu perímetro é $4x$.

II. Falsa. O domínio dessa função é $\mathbb{N}^*$.

III. Verdadeira. $f(x) = 4x$ é uma função linear.

IV. Verdadeira. $f(3x) = 4 \cdot (3x)$

$f(3x) = 12x$; logo, triplicando x, y também triplica.

68. $R(20) = 20\,000 \Rightarrow a \cdot 20 = 20\,000$

$a = 1000 \Rightarrow R(x) = 1000x$

$C(x) = 900x + 50$

$C(1) = 900 \cdot 1 + 50 = 950$

$L(x) = R(x) - C(x)$

$L(1) = 1\,000 - 950 = 50$

$\frac{50}{1\,000} = 0{,}05 = 5\%$

Alternativa **a**.

69. $a = \frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x$

$f(2\,350) = \frac{1}{2} \cdot 2\,350 = 1\,175$;

R$ 1.175,00

Alternativa **e**.

70. Seja x, y, z o número de embalagens de 50 g, 100 g e 200 g.
A soma S deve ser mínima:

$S = 2x + 3{,}6y + 6{,}4z + 10$

$2x + 4y + 6z = 12$

Testando as combinações (x, y, z): (6, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 2), (4, 1, 0), (3, 0, 1), (2, 2, 0) e (1, 1, 1). Atende as duas condições: (0, 3, 0). $S = 20{,}80$; R$ 20,80.
Alternativa **c**.

71. Com base na análise do gráfico, é mais viável a escolha do plano C para a esposa, e do plano B para o marido.
Alternativa **e**.

Página 160

Para explorar

1.

a) $y = f(x)$: –5, –3, –1, 1, 3, 5, 7

b) Os valores vão aumentando de 1 em 1.

c) Os valores vão aumentando de 2 em 2.

d) Exemplo de resposta: A taxa de crescimento da função representa como os valores de y, na sequência, vão aumentando.

2.

a) $f(1) = 7 \cdot 1 - 2 = 5$

$f(2) = 7 \cdot 2 - 2 = 12$

$f(3) = 7 \cdot 3 - 2 = 19$

$f(n) = 7 \cdot n - 2 = 7n - 2$

$(f(1), f(2), f(3), \dots f(n), \dots) =$

$= (5, 12, 19, \dots, 7n - 2, \dots)$

b) Basta substituir n por 100 na relação $7n - 2$.

c) Cada termo, a partir do 2º termo, é o termo imediatamente anterior acrescido da razão constante 7.

d) Indica a razão constante 7, acrescida a cada termo para obter o seguinte.

3.

a) $f(1) = -10 \cdot 1 + 15 = 5$

$f(2) = -10 \cdot 2 + 15 = -5$

$f(3) = -10 \cdot 3 + 15 = -15$

$f(n) = -10 \cdot n + 15 = -10n + 15$

$(f(1), f(2), f(3), \dots f(n), \dots) =$

$= (5, -5, -15, \dots, -10n + 15, \dots)$

b) Basta substituir n por 50 na relação $-10n + 15$.

c) Cada termo a partir do 2º é o anterior acrescido da razão constante –10, ou seja, cada termo é o anterior diminuído de 10.

d) Indica a razão constante –10, acrescida a cada termo para obter o seguinte.

4. Funções e inequações

Página 161

Para pensar e discutir

1. Chocolate meio amargo, achocolatado e creme de leite.
2. Valor pode variar de acordo com a região.
3. Em um ambiente apropriado para a produção de alimentos e temperatura ambiente entre 22 °C e 25 °C.
4. Trufas prontas devem ser embrulhadas e armazenadas fora da geladeira, em ambiente fresco.
5. O valor depende da região e do custo dos ingredientes.
6. Sugestão de resposta: Qual é a validade de uma trufa após a fabricação?

Página 162

Para pensar e discutir

1. $L = V - C$
2. Marta tem um custo de R\$ 1.600,00 mais R\$ 0,90 por trufa. Produzindo 200 trufas. Custo total:
   $C = 1600 + 0{,}90 \cdot 200 = 1780$
   Valor arrecadado:
   $V = 3{,}50 \cdot 200 = 700$
   Lucro:
   $L = V - C = 700 - 1780 = -1080$;
   –R\$ 1.080,00
3. $C = 1600 + 0{,}90 \cdot 800 = 2320$
   $V = 3{,}50 \cdot 800 = 2800$
   $L = V - C = 2800 - 2320 = 480$; R\$ 480,00
4. $L(x) > 0 \Rightarrow 2{,}60x - 1600 > 0$
   $x > \dfrac{1600}{2{,}60} \cong 615 \Rightarrow x > 615$
   Ela deverá vender, no mínimo, 616 trufas.

Página 163

Para pensar e discutir

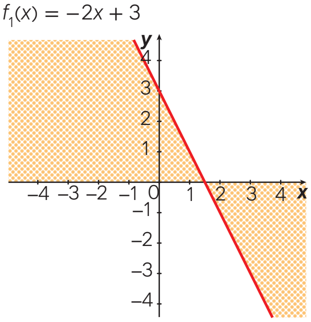
1. Para que a função seja constante, devemos ter $a = 0$.
2. Para que a função seja crescente, devemos ter $a > 0$ e, para ser decrescente, $a < 0$.
3. Quando o coeficiente do termo em x for diferente de zero.
4. Pode haver apenas um ponto em comum, ou nenhum ponto em comum com o eixo das abscissas quando o domínio da função for o conjunto dos números reais.
5. O gráfico é o próprio eixo das abscissas, portanto haverá infinitos pontos em comum com o eixo das abscissas.

Página 164

Para explorar

1 e 2.

- $f_1(x) = -2x + 3$



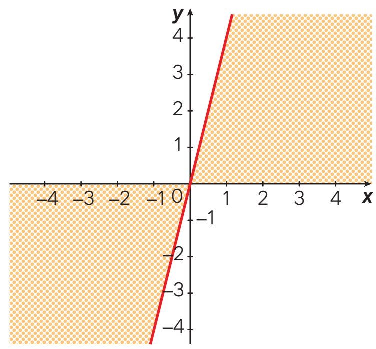
Tarcísio Garbellini

a) $y = 0; x = \frac{3}{2}$

b) $y > 0; x < \frac{3}{2}$

c) $y < 0; x > \frac{3}{2}$

- $f_2(x) = 4x$



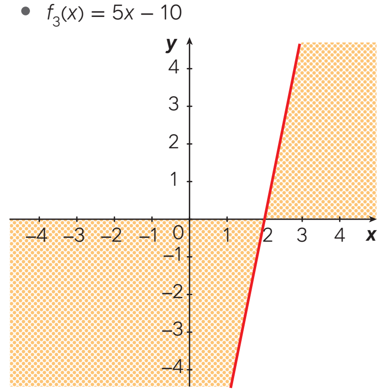
Tarcísio Garbellini

a) $y = 0; x = 0$

b) $y > 0; x > 0$

c) $y < 0; x < 0$

- $f_3(x) = 5x - 10$



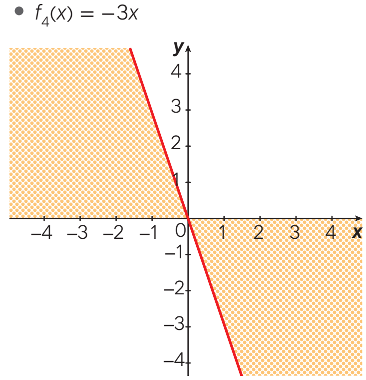
Tarcísio Garbellini

a) $y = 0; x = 2$

b) $y > 0; x > 2$

c) $y < 0; x < 2$

- $f_4(x) = -3x$



Tarcísio Garbellini

a) $y = 0; x = 0$

b) $y > 0; x < 0$

c) $y < 0; x > 0$

3.

a) Os estudantes devem elaborar gráficos de uma função afim $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Devem identificar os valores de x para $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$.

c) Sugestão de resposta:
Ao estudar o sinal das funções do 1º grau, podemos notar que:
- funções com inclinação positiva são crescentes, e com inclinação negativa são decrescentes;
- O estudo dos sinais da função do 1º grau depende do valor da abscissa para o qual a função se anula.

Essas características possibilitam que sejam feitas previsões sobre o comportamento da função, sem precisar elaborar seu gráfico.

Página 165

Atividades

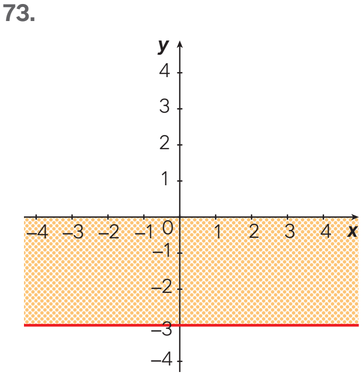
72. Se $f(x) = 2$ é uma função constante; logo, para qualquer valor de x, y será igual a 2.

a) Para nenhum valor de x.

b) Para todos os valores de x.

c) Para nenhum valor de x.

73.



Tarcísio Garbellini

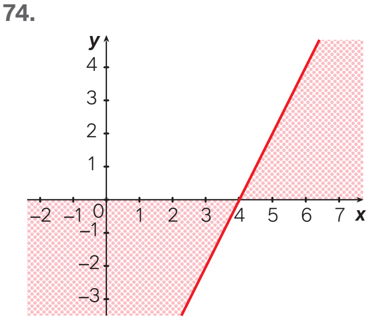
Se $f(x) = -3$ é uma função constante; logo, para qualquer valor de x, y será igual a -3.

a) Para nenhum valor de x.

b) Para nenhum valor de x.

c) Para todos os valores de x.

74.



Tarcísio Garbellini

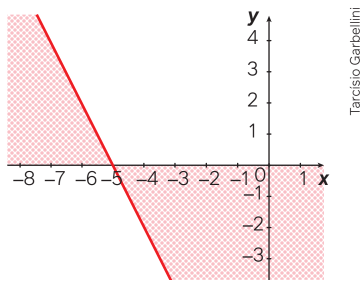
a) $y = 0; x = 4$

b) $y > 0; x > 4$

c) $y < 0; x < 4$

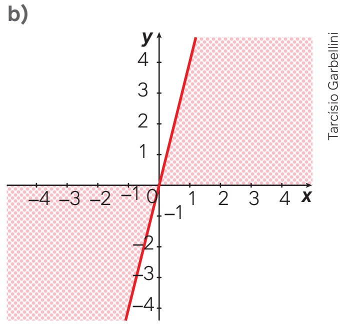
75.

a)



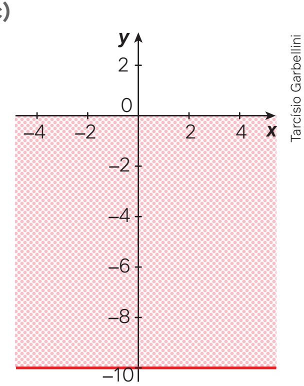
$y = 0; x = -5$ $y < 0; x > -5$
$y > 0; x < -5$

b)



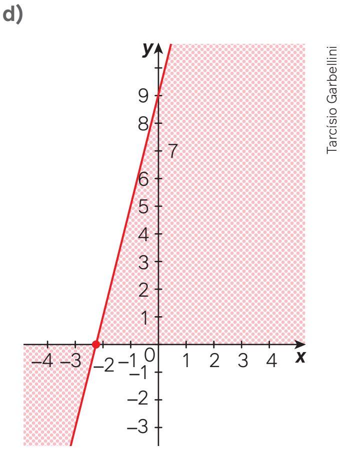
$y = 0; x = 0$ $y < 0; x < 0$
$y > 0; x > 0$

c)



Se $f(x) = -10$ é uma função constante; logo, para qualquer valor de x, y será igual a -10.
$y < 0$ para qualquer valor de x.

d)

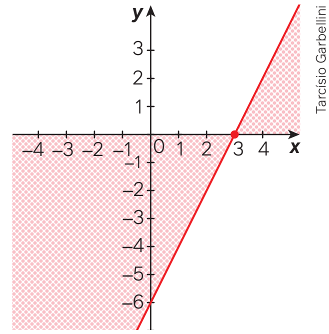


$y = 0; x = -\frac{9}{4}$

$y > 0; x > -\frac{9}{4}$

$y < 0; x < -\frac{9}{4}$

76. Exemplo de resposta: $f(x) = 2x-6$.



$y = 0; x = 3$ $y < 0; x < 3$
$y > 0; x > 3$

77.

a) Exemplo de resposta: $x = -4$ e $x = -10$.

b) Exemplo de resposta: $x = 4$ e $x = 5$.

c) $x < 3$ **d)** $x > 3$ **e)** $x = 3$

78. $f(6) = 0 \Rightarrow 0 = a \cdot 6 + 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

I. Falsa, pois $f(0) = 3$.

II. Verdadeira, pois:
$f(\pi) = -\frac{1}{2} \cdot \pi + 3 = \frac{6 - \pi}{2}$
$f(\pi) \cong 1{,}43 > 0$

III. Verdadeira, pois:
$f(10) = -\frac{1}{2} \cdot 10 + 3 = -2 < 0$

IV. Verdadeira, pois como o gráfico é decrescente e toca no eixo x no ponto (6, 0), para todo $x > 6$, $f(x) < 0$.

V. Verdadeira, pois como o gráfico é decrescente e toca no eixo x no ponto (6, 0), para todo $x < 6$, $f(x) > 0$.

79.

a) $f(0) = 2 \Rightarrow b = 2$
$a = \frac{2 - 0}{0 - (-3)} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$
$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

b) $f(1) = \frac{2}{3} \cdot 1 + 2 = \frac{8}{3}$
$f(-1) = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$
$f(-1) + f(1) = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$

c) $f(x) > 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x + 2 > 0 \Rightarrow x > -3$

d) $f(x) < 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x + 2 < 0 \Rightarrow x < -3$

Página 166

Para pensar e discutir

1. $L(x) = 0 \Rightarrow 2{,}60x - 1\,600 = 0$
$x \cong 615{,}38$

2. Os valores de x são positivos e estão relacionados a valores positivos para L.

3. Representa a quantidade de trufas produzidas e vendidas.

4. É necessário produzir e vender pelo menos 616 trufas.

Página 169

Para pensar e discutir

1. Quando temos "x maior ou igual a 20", x pode ser 20 ou qualquer valor maior. Para $x > 20$, apenas valores maiores que 20 são considerados. Da mesma forma, para "x menor ou igual a 20", x pode ser 20 ou qualquer valor menor. Se $x < 20$, consideramos apenas valores menores que 20.

2. Os dois membros de cada inequação foram multiplicados por 7.

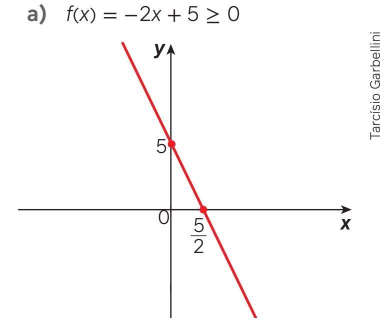
3. Os termos em x foram agrupados no primeiro membro e os independentes, no segundo, para encontrar o valor ou valores de x que satisfazem as inequações.

4. Considerando que x representa a quantidade de produtos, ele deve ser um número natural. Assim, $x = 18$ seria a resposta.

Atividades

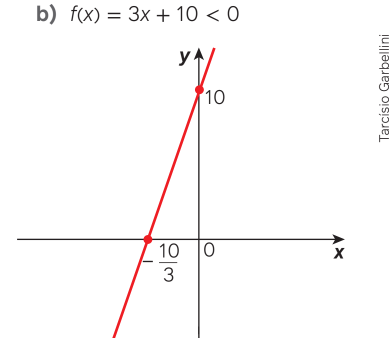
80.

a) $f(x) = -2x + 5 \geq 0$



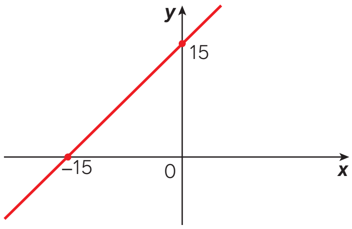
$y \geq 0$ para $x \leq \frac{5}{2}$

b) $f(x) = 3x + 10 < 0$



$y < 0$ para $x < -\frac{10}{3}$

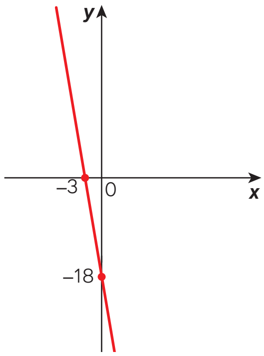
c) $f(x) = x + 15 \le 0$



Tarcísio Garbellini

$y \le 0$ para $x \le -15$

d) $f(x) = -6x - 18 < 0$



Tarcísio Garbellini

$y < 0$ para $x > -3$

81.

a) Juliana dividiu todos os termos da inequação por 2.

b) $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$; $\left]\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right[$

c) Infinitas soluções reais.

d) 1, 2 e 3.

82.

a) $-3 \le 4x \le 8$

$-\frac{3}{4} \le x \le 2$; $\left[-\frac{3}{4}, 2\right]$

b) 3 soluções inteiras: 0, 1 e 2.

83. $P = 4L$; $20 \le P \le 80 \Rightarrow 20 \le 4L \le 80$

$20 \le 4L \le 80 \Rightarrow 5 \le L \le 20$

L pertencem ao intervalo [5, 20].

84. $3 - 2x \le 2 \Rightarrow x \ge -\frac{1}{2}$

$x - 5 < 1 - x \Rightarrow x < 3$

$-\frac{1}{2} \le x < 3$. Logo, $\sqrt{10} \cong 3{,}15$ é a única das alternativas que não satisfaz.

Alternativa **d**.

85. Seja x o número de horas contratadas.

Custo total de Renato:

$f(x) = 20x + 150$

Custo total de Raimundo:

$g(x) = 25x + 120$

$f(x) \le g(x) \Rightarrow 20x + 150 \le 25x + 120$

$x \ge 6$

Alternativa **a**.

86. $A_p = 6 \cdot 3 = 18$; 18 m²

$E_{gerada} = 18 \cdot 5 = 90$; 90 MWh

Seja x a área do retângulo para gerar 150 MWh:

$\frac{18}{x} = \frac{90}{15} \Rightarrow x = 30$; 30 m²

Considere y a medida adicional da largura do retângulo que devemos acrescentar para obter a área de 30 m².

$6 \cdot (3 + y) = 30 \Rightarrow y = 2$; 2 m

Alternativa **a**.

Páginas 170-173

Atividades finais

1. O elemento x de A corresponde a 2 elementos distintos de B.

2.

a) $f(0) = (0 - 2)^2 - (0 + 2)^2$

$f(0) = 4 - 4 = 0$

b) $f(2) = (2 - 2)^2 - (2 + 2)^2$

$f(2) = 0 - 16 = -16$

c) $f(-2) = (-2 - 2)^2 - (-2 + 2)^2$

$f(-2) = 16 - 0 = 16$

3.

a) $Im(f) = \{0, 2, 4\}$

b) $f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$

$f(1) = 0 + 2 + 2 + 4 = 8$

4.

a) $\begin{cases} a \cdot (-1) + b = 4 \\ a \cdot 2 + b = 1 \end{cases}$

$a = -1$ e $b = 3$

b) $f(x) = -x + 3$

$f(0) = -0 + 3 = 3$

c) $f(0) = 0 \Rightarrow -x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

d) $f(0) > 0 \Rightarrow -x + 3 > 0 \Rightarrow x < 3$

e) $f(0) < 0 \Rightarrow -x + 3 < 0 \Rightarrow x > 3$

5.

a) $D(f) =]-2,\ 3]$

b) $Im(f) = [-2,\ 2]$

6. Da função f, deriva que a taxa é –1; da função g, que a taxa é 2; e da função h, que a taxa é 1.

7.

I. Verdadeira. $f(x) = 7x$ e $g(x) = 7x + 3$ são funções lineares com coeficientes angulares positivos, o que implica que são crescentes.

II. Falsa. $g(2x) = 7 \cdot (2x) + 3 = 14x + 3$; logo, duplicando x, y não duplica.

III. Falsa. Em $g(x) = 7x + 3$, o termo constante 3 não varia diretamente com x, o que impede que a função seja diretamente proporcional.

IV. Verdadeira. A lei de formação dessa função é $f(x) = 7x$, o que significa que a relação entre y e x é diretamente proporcional. O coeficiente angular é 7, indicando que a cada aumento unitário em x, y aumenta 7 unidades.

Questões de vestibulares e Enem

8. Custo de compra de uma unidade: $\frac{7}{3}$

Preço por venda de uma unidade: $\frac{18}{5}$

Lucro por unidade:

$L = \frac{18}{5} - \frac{7}{3} = \frac{19}{15}$

Do enunciado, temos que o lucro total foi de R$ 342,00.

$N = \dfrac{342}{\frac{19}{15}} = 270$; 270 unidades

Alternativa **c**.

9. $f(0) = 180\,000 \Rightarrow b = 180\,000$

$f(3) = 135\,000$

$135\,000 = a \cdot 3 + 180\,000$

$a = -15\,000$

$f(x) = -15\,000x + 180\,000$

Em dois anos:

$f(5) = -15\,000 \cdot 5 + 180\,000$

$f(5) = 105\,000$; R$ 105.000,00

Alternativa **a**.

10. Aumentando-se a massa, a reta do gráfico do ICM tende a ser crescente.

Alternativa **b**.

11. Estacionamento A:

$f(t) = 5 + 3(t - 1) = 3t + 2$

Estacionamento B:

$g(t) = 4t$

Estacionamento C:

$h(t) = 6 + 2(t - 1) = 2t + 4$

Comparando as funções:

$f(t) < g(t) \Rightarrow 3t + 2 < 4t \Rightarrow t > 2$

$f(t) < h(t) \Rightarrow 3t + 2 < 2t + 4 \Rightarrow t < 2$

$g(t) < h(t) \Rightarrow 4t < 2t + 4 \Rightarrow t < 2$

Analisando as alternativas, temos:

a) Falsa, pois para ser vantajoso no estacionamento A, o tempo tem que ser inferior a 2 horas.

b) Falsa, pois para ser vantajoso no estacionamento B, o tempo tem que ser inferior a 2 horas.

c) Falsa, pois para 1 hora, é mais vantajoso ficar no estacionamento B.

d) Verdadeira, pois para o tempo igual a 2 horas, será cobrado o mesmo valor em qualquer um dos estacionamentos.

e) Falsa, pois para 1 hora, é mais vantajoso ficar no estacionamento B.

Alternativa **d**.

12. $f(60) = 100 \Rightarrow a \cdot 60 + b = 100 \Rightarrow b = 100 - 60a$

$f(10) = 60 \Rightarrow a \cdot 10 + b = 60 \Rightarrow b = 60 - 10a$

$100 - 60a = 60 - 10a \Rightarrow a = \frac{4}{5}$

$b = 60 - 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow b = 52$. Logo, $y = \frac{4}{5}x + 52$.

O estudante que alcançou 30 teve a nota alterada para:

$y = \frac{4}{5} \cdot 30 + 52 \Rightarrow y = 76$

Alternativa **c**.

13.

a) Falsa, pois as funções f e g são funções afim. Funções afim não têm pontos de máximo ou mínimo.

b) Falsa, pois a função g é decrescente.

c) Falsa, pois as funções f e g têm o mesmo domínio $\mathbb{R}$.

d) Verdadeira, pois $f(1) = g(1) = 5$, logo ambas as funções passam pelo ponto (1, 5).

e) Falsa, pois as funções se interceptam no ponto (1, 5).

Alternativa **d**.

14. $\begin{cases} 6a + b = 55 \\ 8a + b = 25 \end{cases} \Rightarrow a = -15 \text{ e } b = 145$

Portanto, $f(x) = -15x + 145$.

Vendendo a fatia por R$ 5,00, obtemos:

$f(5) = -15 \cdot 5 + 145 = 70 \rightarrow$ R$ 70,00

Alternativa **a**.

15. Valor fixo: 3,20 + 1,4 = 4,60; R$ 4,60.

Valor variável: 1,10x.

$f(x) = 1{,}10x + 4{,}60$

Alternativa **b**.

16.

I. Verdadeira. Seja F' a nova temperatura em Fahrenheit, e C' em Celsius, teremos:

$F' = F + 1 = \frac{9}{5}C' + 32 \Rightarrow C' = C + \frac{5}{9}$

II. Verdadeira. Seja F'' a nova temperatura em Fahrenheit, e C'' em Celsius, teremos:

$C'' = C + 1 = (F'' - 32) \cdot \frac{5}{9} \Rightarrow F'' = F + 1{,}8$

III. Falsa. Seja F''' a nova temperatura em Fahrenheit, e C''' em Celsius, teremos:

$F''' = F + \frac{5}{9} = \frac{9}{5C''} + 32 \Rightarrow C''' = C + \frac{25}{81}$

Alternativa **b**.

17. $V(8) = 2\,000 \Rightarrow 2\,000 = 5\,000 - 8k \Rightarrow k = 375$

$V(t) = 5\,000 - 375t \Rightarrow 2\,750 = 5\,000 - 375t \Rightarrow t = 6$

10 + 6 = 16; 16 h

Alternativa **c**.

18. Custo inicial: 160; metro do arame: $2 \cdot 15x = 30x$.

$f(x) = 160 + 30x$

Alternativa **d**.

19. Seja x o número de pacotes de A, e y o número de pacotes de D.

Quantidade ideal de vitamina C: $2x + 7y \geq 9$

Quantidade ideal de vitamina B: $4x + 10y \geq 50$

Alternativa **b**.

20. $R(x) > C(x) \Rightarrow \frac{7x}{6} > 30 + \frac{x}{2} \Rightarrow x > 45$

O número mínimo de unidades produzidas é 46.

Alternativa **a**.

21. Seja a o crescimento anual, e b o valor fixo.

$a = \frac{9{,}6 - 8{,}1}{25 - 0} = 0{,}06$; $b = 8{,}1$. Logo, $H = 0{,}060 \cdot A + 8{,}1$.

Alternativa **a**.

22. Cidade A: valor fixo de R$ 3,45 mais R$ 2,05 por quilômetro rodado; cidade B: valor fixo de R$ 3,60 mais R$ 1,90 por quilômetro rodado.

Para 6 km:

Cidade A: $V_A = 3{,}45 + 6 \cdot 2{,}05 = 15{,}75$; R$ 15,75.

Cidade B: $V_B = 3{,}60 + 6 \cdot 1{,}90 = 15$; R$ 15,00.

Custo médio por quilômetro rodado em cada corrida.

Cidade A: $\frac{15{,}75}{6} \cong 2{,}63$; R$ 2,63 de lucro

Cidade B: $\frac{15}{6} = 2{,}5$; R$ 2,50 de lucro

$2{,}63 - 2{,}50 = 0{,}13$; R$ 0,13

Alternativa **e**.

23. $y = 250x + 500$

Alternativa **d**.

24. Sendo V o valor cobrado por anúncios, e CP a taxa por cliques, temos:

Provedor A: $V_A(100) = 50 + 0{,}10 \cdot 100 = 60$

Provedor B: $V_B(100) = 20 + CP_B \cdot 100 = 20 + 100CP_B$

$V_A = V_B \Rightarrow 60 = 20 + 100CP_B \Rightarrow CP_B = 0{,}40$; R$ 0,40

Alternativa **d**.

25. Analisando o gráfico, temos que, para um gasto de 30 reais, o plano mais em conta é o C, que chega a quase 30 minutos.

Alternativa **c**.

CAPÍTULO 5

Função quadrática

Objetivos

- Compreender e utilizar a resolução de equações do 2º grau para resolver problemas.
- Obter relações entre raízes e coeficientes de uma equação do 2º grau.
- Utilizar funções do 2º grau para modelar e resolver problemas.
- Construir gráficos de funções quadráticas, assim como identificar e calcular as coordenadas do ponto extremo.
- Resolver problemas envolvendo inequações do 2º grau utilizando o estudo do sinal da função quadrática.
- Resolver problemas envolvendo funções definidas por mais de uma sentença.

Justificativa

A fim de que, além de modelar, estejam aptos a resolver problemas dos mais diversos contextos, inclusive de outras áreas de conhecimento que envolvem a função quadrática, os estudantes precisam dominar algumas técnicas de resolução de equações do 2º grau que serão trabalhadas no início desse capítulo. Eles também investigam algumas propriedades da função quadrática, cujo objetivo é assegurar o domínio de recursos que os permitam, além reconhecer o tipo de modelo que resolve determinado problema, usar as técnicas necessárias para resolvê-lo.

Competências gerais da BNCC

Competências gerais 2, 4 e 5: Ao longo de todo o capítulo, são propostos problemas por meio dos quais os estudantes discutem ideias, elaboram e testam hipóteses. Assim, exercitando a curiosidade intelectual, a reflexão, a imaginação e a criatividade, desenvolvem a **competência 2**. Por exemplo, na seção **Para explorar** da página 217, em grupos, eles utilizam um *software* de geometria dinâmica para construir gráficos de funções do 2º grau e fazer seu estudo de sinais. Em seguida, elaboram a lei de formação de três funções quadráticas sob determinadas condições e escrevem um texto com suas conclusões a respeito do estudo de sinais de uma função quadrática. Pelo fato de trabalharem em grupos, utilizam diferentes linguagens, como a verbal, a visual e a matemática, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos, produzindo sentidos que levem ao entendimento mútuo, o que desenvolve a **competência 4**. Como utilizam a tecnologia digital, desenvolvem também a **competência 5**. Essa competência é potencializada por meio de outras atividades em que utilizam um *software* de geometria dinâmica como as que constam na página 197.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 3

EM13MAT302: O trabalho de elaboração de modelos que empregam a função do 2º grau para resolver problemas é feito de forma sistemática ao longo do capítulo. Esse trabalho fica evidente, por exemplo, nas atividades das páginas 211 e 212, em que são propostos problemas em diversos contextos para serem modelados e resolvidos por meio de funções do 2º grau.

Competência específica 4

EM13MAT402: Ao longo de todo o capítulo, a partir da página 192, os estudantes convertem representações algébricas de funções polinomiais do 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, recorrendo ou não a *softwares* de geometria dinâmica. Em algumas situações, como no caso das atividades 52 e 53 das páginas 200 e 201, eles estudam casos em que uma variável é diretamente proporcional ao quadrado da outra.

EM13MAT404: As funções definidas por mais de uma sentença são estudadas da página 221 à 225, inclusive com a análise de contas de água ou consumo de energia elétrica, conforme consta na seção **Análise e contexto** da página 225.

EM13MAT405: Na atividade 91 da página 220, os estudantes implementam um algoritmo para resolver uma inequação do 2º grau.

Competência específica 5

EM13MAT502: Em diversos momentos nesse capítulo, os estudantes investigam relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando quando representam uma função do 2º grau, como nas atividades resolvidas que constam na página 193 e na atividade 53 da página 201.

EM13MAT503: Da página 209 à 213, os estudantes investigam pontos de máximo ou mínimo da função quadrática e os utilizam para resolver problemas de diversos contextos.

EM13MAT506: A habilidade é contemplada por meio das atividades 53 e 54 que constam na página 201.

Conexões com outras áreas do conhecimento

A atividade proposta na seção **Análise e contexto** sobre o consumo consciente de água que consta na página 225 pode ser desenvolvida e ampliada com a participação dos professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Temas Contemporâneos Transversais

O TCT **Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras** está contemplado no trabalho desenvolvido com base no infográfico que consta nas páginas 186 e 187 e aborda um ritual praticado por indígenas de algumas etnias. Foi solicitado aos estudantes que façam uma pesquisa para se aprofundar no assunto.

O TCT **Educação para o consumo** está contemplado na seção **Análise e contexto** na página 225, uma vez que os estudantes analisam contas de água ou de luz, e, com base nas contas analisadas, elaboram situações-problema envolvendo redução de consumo para outro grupo resolver. Elaboram também uma proposta de redução do consumo de água em suas residências.

Resoluções e comentários

Página 175

Abertura

Incentive os estudantes a observarem as construções de sua cidade. Em seguida, solicite que se organizem em grupos para compartilhar suas listas, indicando os elementos matemáticos presentes.

Você pode solicitar que desenhem as construções observadas e, inclusive, envolver o professor de Arte.

1. O estudo de equações do 2º grau

Página 176

Para pensar e discutir

1. Sim. Exemplo de resposta: A medida do lado da peça inteira é a maior medida do lado do retângulo $(10 + x)$ mais a menor medida do lado do retângulo (10). Assim, a medida de cada lado da peça quadrada completa será $20 + x$, isto é, um quadrado de lado $(20 + x)$ cm.

2. Exemplo de resposta:
$(20 + x)^2 = 900$

3. Essa questão possibilita que você verifique o conhecimento prévio dos estudantes.
Exemplo de resolução:
Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da equação:
$(20 + x)^2 = 900$
$20 + x = 30 \Rightarrow x = 10$
$20 + x = -30 \Rightarrow x = -50$
Pelo contexto, $x = 10$; 10 cm.

Página 177

Para pensar e discutir

1. $(x + 7)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 =$
$= x^2 + 14x + 49$
$(x - 7)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 =$
$= x^2 - 14x + 49$

2. $x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 =$
$= (x - 5)^2$
O trinômio $x^2 - 10x + 25$ é um trinômio quadrado perfeito, pois pode ser transformado em $(x - 5)^2$, isto é, o quadrado de uma diferença.

3. $4x^2 + 12x + 9 =$
$= (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2$
O trinômio $4x^2 + 12x + 9$ pode ser transformado no quadrado da soma de dois termos, pois corresponde a $(2x + 3)^2$.

Página 178

Para pensar e discutir

1. Não existe número real cujo quadrado seja negativo.

2. Utilizando propriedades operatórias da radiciação.
$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

Página 179

Atividades

1.

a) Extraindo as raízes de ambos os membros da igualdade:
$(x - 3)^2 = 25$
$x - 3 = 5 \Rightarrow x = 8$ ou
$x - 3 = -5 \Rightarrow x = -2$
$S = \{8, -2\}$

b) Extraindo as raízes de ambos os membros da igualdade:
$(3x - 2)^2 = 1$
$3x - 2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou
$3x - 2 = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$
$S = \left\{1, \frac{1}{3}\right\}$

c) Extraindo as raízes de ambos os membros da igualdade:
$(x + 5)^2 = 100$
$x + 5 = 10 \Rightarrow x = 5$ ou
$x + 5 = -10 \Rightarrow x = -15$
$S = \{5, -15\}$

d) Extraindo as raízes de ambos os membros da igualdade:
$(4x - 1)^2 = 49$
$4x - 1 = 7 \Rightarrow x = 1$ ou
$4x - 1 = -7$
$x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$
$S = \left\{2, \frac{3}{2}\right\}$

2.

a) $x^2 - 10x + k = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2$
$k = 5^2 \Rightarrow k = 25$
Portanto, devemos adicionar 25, e o quadrado da diferença é $(x - 5)^2$.

b) $x^2 + 30x + k = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 15^2$
$k = 15^2 \Rightarrow k = 225$
$x^2 + 30x + 225 = (x + 15)^2$

c) $x^2 - 8x + k = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2$
$k = 4^2 \Rightarrow k = 16$
$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$

d) $x^2 + 3x + k = 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$
$k = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow k = \frac{9}{4}$
$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$

e) $x^2 - 7x + k =$
$= x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2$
$k = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \Rightarrow k = \frac{49}{4}$
$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$

f) $4x^2 - 4x + k = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot 1 + 1^2$
$k = 1^2 \Rightarrow k = 1$
$4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

g) $9x^2 + 12x + k = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 2 + 2^2$
$k = 2^2 \Rightarrow k = 4$
$9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2$

3.

a) $4x^2 - 4x + k = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot 1 + 1^2$
$k = 1^2 \Rightarrow k = 1$

b) $x^2 + 10x + k = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2$
$k = 5^2 \Rightarrow k = 25$

c) $y^2 + k + 4^2 = y^2 \pm 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2$
$k \pm 2 \cdot y \cdot 4 \Rightarrow k = 8y$ ou $k = -8y$

d) $9y^2 + k - 4^2 =$
$= (3y)^2 \pm 2 \cdot (3y) \cdot 4 - 4^2$
$k = \pm 2 \cdot (3y) \cdot 4 \Rightarrow k = 24y$ ou
$k = -24y$

4.

a) $x^2 - 4x + 4 = 0$
$x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = 0$
$(x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$
$x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$
$x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = 0$
$(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x - 3 = 0$
$x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$

c) $x^2 + 2x - 3 = 0$
$x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 3 = 0$
$(x + 1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 4$
$x + 1 = \pm\sqrt{4}$
$x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$ ou
$x + 1 = -2 \Rightarrow x = -3$
$S = \{-3, 1\}$

d) $x^2 - 10x + 21 = 0$
$x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 - 5^2 + 21 = 0$
$(x - 5)^2 - 25 + 21 = 0$
$(x - 5)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 5)^2 = 4$
$x - 5 = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x - 5 = 2 \Rightarrow x = 7$
ou $x - 5 = -2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{3, 7\}$

e) $x^2 + 10x + 16 = 0$
$x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 - 5^2 + 16 = 0$
$(x + 5)^2 - 25 + 16 = 0$
$(x + 5)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 5)^2 = 9$
$x + 5 = 3 \Rightarrow x = -2$ ou
$x + 5 = -3 \Rightarrow x = -8$
$S = \{-8, -2\}$

f) $x^2 + 12x + 46 = 0$
$x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 - 6^2 + 46 = 0$
$(x + 6)^2 - 36 + 46 = 0$
$(x + 6)^2 + 10 = 0 \Rightarrow (x + 6)^2 = -10$
$S = \{\ \}$ ou $S = \varnothing$

g) $x^2 + 16x + 100 = 0$
$x^2 + 2 \cdot x \cdot 8 + 8^2 - 8^2 + 100 = 0$
$(x + 8)^2 - 64 + 100 = 0$
$(x + 8)^2 + 36 = 0 \Rightarrow (x + 8)^2 = -36$
$S = \{\ \}$ ou $S = \varnothing$

5.

a) Sugestão de resposta: Da etapa 1 para a etapa 2, Júlia tentou fazer aparecer em b o mesmo número da constante c, separando $-10x$ em $-x - 9x$; da etapa 2 para a etapa 3, colocou os termos semelhantes em evidência, no caso, era a variável x dos dois primeiros elementos, e a constante -9, no caso dos dois últimos elementos –; da etapa 3 para a etapa final, colocou os elementos semelhantes em evidência, no caso o $x - 1$.

b) $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou
$x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$
$S = \{1, 9\}$

6.

a) Para a etapa seguinte, pode-se colocar elementos semelhantes em evidência, obtendo:

$x(x + 9) + 4(x + 9)$

Para a próxima etapa, novamente pode-se colocar em evidência as partes que se repetem, obtendo:

$(x + 9)(x + 4)$

b) $x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$ ou

$x = -4 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow S = \{-9, -4\}$

7.

a) $4x^2 - 900 = 0$

b) $4x^2 - 900 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 900$

$x^2 = \frac{900}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{900}{4}}$

Pelo contexto, $x = 15$

c) $2 \cdot 15 + 1 = 31$; 31 m

$2 \cdot 15 - 1 = 29$; 29 m

8.

a) **Situação 1**

Seja y o valor ganho por hora.

Emprego antigo:

$x \cdot y = 600 \Rightarrow y = \frac{600}{x}$ (I)

Emprego novo:

$(x + 4) \cdot (y - 4) = 960$ (II)

Substituindo (I) em (II)

$(x + 4) \cdot \left(\frac{600}{x} - 4\right) = 960$

$\frac{600x}{x} - 4x + \frac{600}{x} \cdot 4 - 16 = 960$

$600 - 4x + \frac{2\,400}{x} - 16 = 960$

$-4x^2 + 2\,400 = 376x$

$4x^2 + 376x - 2\,400 = 0$

Dividindo os membros por 4:

$x^2 + 94x - 600 = 0$

Utilizando o procedimento de completar trinômio.

$x^2 + 2 \cdot x \cdot 47 + 47^2 - 47^2 - 600 = 0$

$(x + 47)^2 - 2\,209 - 600 = 0$

$(x + 47)^2 = 2\,809$

$x + 47 = \pm\sqrt{2809}$

$x + 47 = 53 \Rightarrow x = 6$ ou

$x + 47 = -53 \Rightarrow x = -100$

Pelo contexto, $x = 6$.

Situação 2

Seja x o número de acionistas preferenciais e y o de acionistas ordinários.

$x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$ (I)

$\frac{600}{x} + 80 = \frac{600}{y}$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\frac{600}{x} + 80 = \frac{600}{20 - x}$

$80 = \frac{600}{20 - x} - \frac{600}{x}$

Dividindo os membros por 40:

$2 = \frac{15}{20 - x} - \frac{15}{x}$

$2 = \frac{15x - 15(20 - x)}{(20 - x) \cdot x}$

$2(20 - x)x =$

$= 15x + 15x - 300 - 2x^2 + 40x =$

$= 30x - 300$

Dividindo os membros por 2:

$x^2 - 5x - 150 = 0$

Utilizando o procedimento de completar trinômio.

$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 +$

$- 150 = 0$

$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 150 = 0$

$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{625}{4}$

$x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{625}{4}}$

$x - \frac{5}{2} = \frac{25}{2} \Rightarrow x = \frac{30}{2} \Rightarrow x = 15$

ou

$x - \frac{5}{2} = -\frac{25}{2} \Rightarrow x = \frac{20}{2}$

$x = -10$

Pelo contexto, $x = 15$.

Situação 3

Como o terreno é retangular e um lado é 10 metros maior que o outro, temos:

$x^2 + 10x = 875$

$x^2 + 10x - 875 = 0$

$x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 - 5^2 - 875 = 0$

$(x + 5)^2 - 25 - 875 = 0$

$(x + 5)^2 = 900 \Rightarrow x + 5 = \pm\sqrt{900}$

$x + 5 = 30 \Rightarrow x = 25$ ou

$x + 5 = -30 \Rightarrow x = -35$

Pelo contexto, $x = 25$; 25 m.

$25 + 10 = 35$; 35 m

9. Seja x a quantidade de peças e y o preço unitário.

Janeiro: $x \cdot y = 192 \Rightarrow y = \frac{192}{x}$ (I)

Fevereiro: $(x - 2) \cdot (y + 16) = 192$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$(x - 2) \cdot \left(\frac{192}{x} + 16\right) = 192$

$x \cdot \frac{192}{x} + 16x - \frac{384}{x} - 32 = 192$

$16x^2 - 32x - 384 = 0$

Dividindo os membros por 16:

$x^2 - 2x - 24 = 0$

Utilizando o procedimento de completar trinômio:

$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 24 = 0$

$(x - 1)^2 - 1 - 24 = 0$

$(x - 1)^2 = 25 \Rightarrow x = 6x - 1 = \pm\sqrt{25}$

$x - 1 = 5 \Rightarrow x = 6$ ou

$x - 1 = -5 \Rightarrow x = -4$

Pelo contexto, $x = 6$.

Substituindo na equação (I):

$y = \frac{192}{6} = 32$; R\$ 32,00 (preço unitário em janeiro)

$y + 16 = 32 + 16 = 48$; R\$ 48,00 (preço unitário em fevereiro)

Página 180

Para pensar e discutir

1. $4a^2x^2 + 4abx + b^2$

2. $x^2 + 4x + 3 = 0$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 2}{2}$

$\begin{cases} x = \frac{-4 + 2}{2} = -\frac{2}{2} \Rightarrow x = -1 \\ x = \frac{-4 - 2}{2} = -\frac{6}{2} \Rightarrow x = -3 \end{cases}$

$S = \{-1, -3\}$

3. Se $b^2 - 4ac < 0$, não existe raiz quadrada de número negativo no conjunto dos números reais, portanto não haverá solução no conjunto dos reais.

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Primeiro, podemos forçar que apareça um termo igual ao da constante c – por exemplo, $x^2 - x - 7x + 7$. Colocando as partes similares em evidência, temos $x(x - 1) - 7(x - 1)$. Repetindo o processo, temos $(x - 1)(x - 7)$

Assim, obtemos as raízes 1 e 7.

2. Sugestão de resposta: Colocando as partes similares em evidência, temos: $x(x - 9)$ e, com isso, temos que as raízes poderiam ser 0 ou 9.

Páginas 181-182

Atividades

10.

a) $x^2 - x - 12 = 0$

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 7}{2}$

$\begin{cases} x = \frac{1 + 7}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow x = 4 \\ x = \frac{1 - 7}{2} = -\frac{6}{2} \Rightarrow x = -3 \end{cases}$

$S = \{4, -3\}$

b) $9x^2 - 63x + 54 = 0$

Dividindo os membros por 9

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow x = \frac{7 \pm 5}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} \Rightarrow x = 6 \\ x = \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$S = \{6, 1\}$

c) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)\ 2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} \Rightarrow x = 2 \\ x = \frac{3-5}{4} = -\frac{2}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$S = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$

d) $2x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 - 24}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-16}}{4}$$

Portanto, $S = \{\ \}$ ou $S = \varnothing$.

e) $x^2 + 3x - 10 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2 \\ x = \frac{-3-7}{2} = -\frac{10}{2} \Rightarrow x = -5 \end{cases}$$

$S = \{-5, 2\}$

f) $3x^2 - x - 1 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12}}{6} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \\ x = \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \end{cases}$$

$S = \left\{\frac{1 + \sqrt{13}}{6}, \frac{1 - \sqrt{13}}{6}\right\}$

g) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{18} \Rightarrow x = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}$$

$S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

11.

a) $x^2 = \frac{4x}{5} + \frac{1}{5}$

$5x^2 = 4x + 1$

$5x^2 - 4x - 1 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1)}}{2 \cdot 5}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{10}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{10} \Rightarrow x = \frac{4 \pm 6}{10}$$

$$\begin{cases} x = \frac{4+6}{10} = \frac{10}{10} \Rightarrow x = 1 \\ x = \frac{4-6}{10} = -\frac{2}{10} \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$S = \left\{1, -\frac{1}{5}\right\}$

b) $\frac{2x + 11}{3} - 1 = \frac{x^2 - 5x}{6}$

$$\frac{2x + 11 - 3}{3} = \frac{x^2 - 5x}{6}$$

$$\frac{2x + 8}{3} = \frac{x^2 - 5x}{6}$$

$4x + 16 = x^2 - 5x$

$x^2 - 9x - 16 = 0$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 64}}{2} \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{145}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{9 + \sqrt{145}}{2} \\ x = \frac{9 - \sqrt{145}}{2} \end{cases}$$

$S = \left\{\frac{9 + \sqrt{145}}{2}, \frac{9 - \sqrt{145}}{2}\right\}$

c) $(x - 1) \cdot (x - 2) = 6$

$x^2 - 2x - x + 2 = 6$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow x = 4 \\ x = \frac{4-6}{2} = -\frac{2}{2} \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$S = \{4, -1\}$

d) $(x - 8) \cdot (2x - 3) = 34$

$x^2 - 3x - 16x + 24 = 34$

$2x^2 - 19x - 10 = 0$

$$x = \frac{-(-19) \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{361 + 80}}{4}$$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{441}}{4} \Rightarrow x = \frac{19 \pm 21}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{19+21}{4} = \frac{40}{4} \Rightarrow x = 10 \\ x = \frac{19-21}{4} = -\frac{2}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$S = \left\{10, -\frac{1}{2}\right\}$

e) $(x - 2)^2 = x + 1$

$x^2 - 4x + 4 = x + 1$

$x^2 - 5x + 3 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2} \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$S = \left\{\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right\}$

12. Problema 1: $x + x^2 = 30$

$x^2 + x - 30 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 11}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1+11}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow x = 5 \\ x = \frac{-1-11}{2} = -\frac{12}{2} \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

Problema 2: $x^2 - 2x = 15$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 8}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow x = 5 \\ x = \frac{2-8}{2} = -\frac{6}{2} \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

$x > 0 \Rightarrow x = 5$

Problema 3: $x^2 + 2x = 35$

$x^2 + 2x - 35 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 12}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-2+12}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow x = 5 \\ x = \frac{-2-12}{2} = -\frac{14}{2} \Rightarrow x = -7 \end{cases}$$

Pelo contexto, $x = 5$; 5 m.

Problema 4: $(x + 5) \cdot x = 84$

$x^2 + 5x - 84 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-84)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 336}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{361}}{2} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm 19}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-5+19}{2} = \frac{14}{2} \Rightarrow x = 7 \\ x = \frac{-5-19}{2} = -\frac{24}{2} \Rightarrow x = -12 \end{cases}$$

Pelo contexto, $x = 7$; 7 cm.

$7 + 5 = 12$; 12 cm

13.

a) $n = 4 \Rightarrow \frac{4 \cdot (4-1)}{2} = 6$; 6 jogos

A × B, A × C, A × D, B × C, B × D, C × D.

b) $n = 5 \Rightarrow \frac{5 \cdot (5-1)}{2} = 10$; 10 jogos

A × B, A × C, A × D, A × E, B × C, B × D, B × E, C × D, C × E e D × E.

14.

a) $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 28$

$n \cdot (n-1) = 56$

$n^2 - n = 56 \Rightarrow n^2 - n - 56 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-56)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 224}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{225}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 15}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1+15}{2} = \frac{16}{2} \Rightarrow x = 8 \\ x = \frac{1-15}{2} = -\frac{14}{2} \Rightarrow x = -7 \end{cases}$$

Pelo contexto, $x = 8$; 8 times.

b) $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 66$

$n \cdot (n-1) = 132$

$n^2 - n = 132 \Rightarrow n^2 - n - 132 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-132)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 528}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{529}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 23}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1+23}{2} = \frac{24}{2} \Rightarrow x = 12 \\ x = \frac{1-23}{2} = -\frac{22}{2} \Rightarrow x = -11 \end{cases}$$

Pelo contexto, $x = 12$; 12 times.

15.

a) $40 = \frac{80}{h^2} \Rightarrow 40h^2 = 80$

Equação: $40h^2 - 80 = 0$.

$40h^2 = 80 \Rightarrow h^2 = 2$

$h = \pm\sqrt{2} \cong \pm 1{,}41$

Pelo contexto, $h \cong 1{,}41$; 1,41 m.

b) $30 = \frac{m}{(1{,}60)^2} \Rightarrow m = 30 \cdot 2{,}56$

$m = 76{,}8$; 76,8 kg

16.

a) Área do retângulo:

$x \cdot y = 600 \Rightarrow y = \frac{600}{x}$ (I)

Perímetro do retângulo:

$2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50$ (II)

Substituindo o valor de y na equação (II), temos:

$x + \frac{600}{x} = 50$

$x^2 - 50x + 600 = 0$

b) $x^2 - 50x + 600 = 0$

$$x = \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 600}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 2400}}{2}$$

$$x = \frac{50 \pm \sqrt{100}}{2} \Rightarrow x = \frac{50 \pm 10}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{50+10}{2} = \frac{60}{2} \Rightarrow x = 30 \\ x = \frac{50-10}{2} = \frac{40}{2} \Rightarrow x = 20 \end{cases}$$

Para $x = 30$:

$30 \cdot y = 600 \Rightarrow y = \frac{600}{30} = 20$

Para $x = 20$:

$20 \cdot y = 600 \Rightarrow y = \frac{600}{20} = 30$

$x > y \Rightarrow x = 30$; 30 m e $y = 20$; 20 m

17.

a) Seja n o número de amigos e x o valor que cada amigo vai pagar

Todos os amigos:

$n \cdot x = 10\,800 \Rightarrow x = \frac{10\,800}{n}$ (I)

Faltando dois amigos:

$(n-2) \cdot (x + 32) = 10\,800$ (II)

Substituindo (I) em (II):

$(n-2) \cdot \left(\frac{10\,800}{n} + 32\right) = 10\,800$

$10\,800 + 32n - \frac{43\,200}{n} - 64 =$

$= 10\,800$

$32n - \frac{21\,600}{n} = 64$

$32n^2 - 21\,600 = 64n$

$32n^2 - 64n - 21\,600 = 0$

Dividindo os membros por 32:

$n^2 - 2n - 675 = 0$

b) $n^2 - 2n - 675 = 0$

$$n = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-675)}}{2 \cdot 1}$$

$$n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 2\,700}}{2}$$

$$n = \frac{2 \pm \sqrt{2\,704}}{2} \Rightarrow n = \frac{2 \pm 52}{2}$$

$$\begin{cases} n = \frac{2+52}{2} = \frac{54}{2} \Rightarrow n = 27 \\ n = \frac{2-52}{2} = -\frac{50}{2} \Rightarrow n = -25 \end{cases}$$

Pelo contexto, $n = 27$; 27 amigos.

$S = \{27\}$

18.

a) Área do terreno com ampliação:

$(x + 16) \cdot (x + 26) = 816$

$x^2 + 26x + 16x + 416 = 816$

$x^2 + 42x - 400 = 0$

b) $x^2 + 42x - 400 = 0$

$$x = \frac{-42 \pm \sqrt{42^2 - 4 \cdot 1(-400)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-42 \pm \sqrt{1764 + 1600}}{2}$$

$$x = \frac{-42 \pm \sqrt{3\,364}}{2}$$

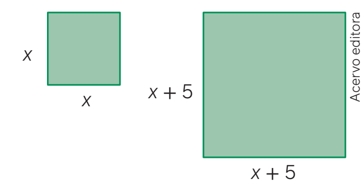
$$x = \frac{-42 \pm 58}{2} =$$

$$\begin{cases} x = \frac{-42+58}{2} = \frac{16}{2} \Rightarrow x = 8 \\ x = \frac{-42-58}{2} = -\frac{100}{2} \Rightarrow x = -50 \end{cases}$$

Pelo contexto, $x = 8$.

19.

a)



b) $A_{menor} = x \cdot x = x^2$

$A_{maior} = (x + 5) \cdot (x + 5) =$

$= x^2 + 10x + 25$

$A_{maior} = 4 \cdot A_{menor}$

$x^2 + 10x + 25 = 4x^2$

$3x^2 - 10x - 25 = 0$

c) $3x^2 - 10x - 25 = 0$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 3(-25)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 300}}{6}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{400}}{6} \Rightarrow x = \frac{10 \pm 20}{6}$$

$$\begin{cases} x = \frac{10+20}{6} = \frac{30}{6} \Rightarrow x = 5 \\ x = \frac{10-20}{6} = -\frac{10}{6} \Rightarrow x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Pelo contexto, $x = 5$; 5 cm.

Página 183

Para pensar e discutir

1.

$x^2 - 4x + 5 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$

$\Delta = -4 \Rightarrow \Delta < 0$

$S = \{\ \}$

2.

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

3. $2x^2 - 5x + 3 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \Rightarrow \Delta > 0$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Páginas 184-185

Atividades

20. $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$ ou

$9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$

21.

a) $x^2 - 4x + 5 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 \Rightarrow \Delta < 0$

Não tem raiz real.

b) $3x^2 - x + 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -13 \Rightarrow \Delta < 0$

Não tem raiz real.

c) $-2x^2 + 2x + 3 = 0$

$\Delta = (2)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 28 \Rightarrow \Delta > 0$

Tem duas raízes reais e distintas.

d) $4x^2 - 0{,}5x + 0{,}1 = 0$

$\Delta = (-0{,}5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 0{,}1 = -1{,}35 \Rightarrow \Delta < 0$

Não tem raiz real.

e) $x^2 + 25 = 0$

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = -100 \Rightarrow \Delta < 0$

Não tem raiz real.

f) $x^2 - 12x + 36 = 0$

$\Delta = (12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 144 - 144 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$

Tem duas raízes reais e iguais.

g) $x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 0$

$\Delta = \left(-4\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8$

$\Delta = 32 - 32 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$

Tem duas raízes reais e iguais.

22.

a) $x^2 + 7x + 7k = 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7k = 0$

$49 - 28k = 0$

$-28k = -49$

$k = \frac{49}{28} = \frac{7}{4}$

b) $x^2 + 7x + 7k = 0$

$\Delta < 0 \Rightarrow 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7k < 0$

$49 - 28k < 0 \Rightarrow -28k < -49$

$k > \frac{49}{28} \Rightarrow k > \frac{7}{4}$

c) $x^2 + 7x + 7k = 0$

$\Delta > 0 \Rightarrow 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7k > 0$

$49 - 28k > 0 \Rightarrow -28k > -49$

$k < \frac{49}{28} \Rightarrow k < \frac{7}{4}$

23. $\Delta = 2^2 - 4 \cdot a \cdot 3 \Rightarrow \Delta = 4 - 12 \cdot a$

a) Para $a = 5$:

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 \Rightarrow \Delta = -56$

Não admitirá raiz real.

b) Para $a = -5$:

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 3 \Rightarrow \Delta = 64$

Admitirá duas raízes reais e distintas.

c) Admitirá duas raízes reais e distintas se $\Delta = 0$.

$4 - 12 \cdot a = 0 \Rightarrow -12a = -4 \Rightarrow 12a = 4$

$a = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

d) Admitirá sempre duas raízes reais e distintas.

24.

a) $5x^2 + mx - 2 = 0$

$\Delta = m^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) \Rightarrow \Delta = m^2 + 40$

b) Sim. Uma justificativa: como m representa um número real qualquer, então m^2 sempre será positivo ou igual a zero. Adicionando esse número positivo ou igual a zero ao número 40, sempre teremos um número maior ou igual a 40. Assim, sendo o discriminante positivo, podemos concluir que a equação admite duas raízes reais e distintas, independentemente do valor real de m.

25. $x^2 + (k - 1)x + k - 2 = 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow (k - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k - 2) = 0$

$k^2 - 2k + 1 - 4k + 8 = 0$

$k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow (k - 3)^2 = 0$

$k - 3 = 0 \Rightarrow k = 3$

26. $3x^2 - 3x + 3 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow \Delta = -37$

Não possui raízes reais.

Alternativa **a**.

27.

a) Pode ser qualquer valor real maior que 1, isto é, $k > 1$.

b) Pode ser qualquer valor real menor ou igual a 1, isto é, $k \leq 1$.

28.

a) $x^2 + kx + 2 = 0$

$\Delta = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \Rightarrow \Delta = k^2 - 8$

b) Valores possíveis: $k = -2$, $k = -1$, $k = 0$, $k = 1$ e $k = -2$.

c) Pode ser qualquer número inteiro tal que: $k \leq -3$ ou $k \geq 3$.

29.

a) $n(n - 1)$

b) $10 \cdot (10 - 1) = 10 \cdot 9 = 90$; 90 mensagens

c) $10 \cdot (12 - 1) = 10 \cdot 11 = 132$; 132 mensagens

d) $n \cdot (n - 1) = 420 \Rightarrow n^2 - n - 420 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-420)}}{2a}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 1680}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1681}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 41}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 + 41}{2} = \frac{42}{2} \Rightarrow x = 21 \\ x = \frac{1 - 41}{2} = -\frac{40}{2} \Rightarrow x = -20 \end{cases}$$

Pelo contexto, $x = 21$; 21 estudantes.

Uma possível resolução dos estudantes é atribuir valores a n até determinar que o produto de n pelo seu antecessor resulte 420.

30.

a) Não. Fazendo $n \cdot (n - 1) = 7$:

$n^2 - n - 7 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 29$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

Outra maneira é pensar que não existem dois números inteiros consecutivos cujo produto seja 7.

b) Sim. Fazendo $n \cdot (n - 1) = 20$ para $n = 5$, temos a igualdade correspondente verdadeira.

$n^2 - n - 20 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2a}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 9}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1+9}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow x = 5 \\ x = \frac{1-9}{2} = -\frac{8}{2} \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

Como n tem que ser um número natural, $n = 5$.

31.

Parte 1

a) $x = 1$ cm

$A_{base} = (20 - 2) \cdot (16 - 2)$

$A_{base} = 18 \cdot 14 = 252$; 252 cm^2

b) $x = 2$ cm

$A_{base} = (20 - 4) \cdot (16 - 4)$

$A_{base} = 16 \cdot 12 = 192$; 192 cm^2

Parte 2

a) $A_{base} = (20 - 2x) \cdot (16 - 2x)$

$A_{base} = 320 - 72x + 4x^2$

b) $320 - 72x + 4x^2 = 60$

$80 - 18x + x^2 = 15$

$x^2 - 18x + 65 = 0$

$$x = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 65}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow x = \frac{18 \pm 8}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{18+8}{2} = \frac{26}{2} \Rightarrow x = 13 \\ x = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

$A = (20 - 2x) \cdot (16 - 2x)$

Restrições quanto às medidas da base:

$20 - 2x > 0$ e $x < 8$

$x = 5$; 5 cm (alt.)

$20 - 2 \cdot 5 = 10$; 10 cm (comp.)

$16 - 2 \cdot 5 = 6$; 6 cm (larg.)

Páginas 186-187

Infográfico

1. $h = -40t^2 + 200t = 0 \Rightarrow 40t^2 - 200t = 0$
   $t^2 - 5t = 0 \Rightarrow t \cdot (t - 5) = 0$
   $t = 0$ ou $t = 5$
   Pelo contexto, $t = 5$; 5 cm.
2. Essa atividade pode contar com a participação dos professores da área de Ciências Humanas para aprofundar o tema sobre as etnias dos povos originários que vivem em seu estado.

Infográfico clicável – Arco e flecha

Apresente-o para os estudantes. Esse recurso didático explora a relação entre a Matemática e a Física no lançamento de uma flecha, ampliando também o estudo sobre os povos indígenas apresentado no livro. Ele mostra como conceitos de lançamento oblíquo, trajetórias parabólicas e equações do movimento aplicam-se a um objeto lançado sob a influência da gravidade. Também aborda a decomposição da velocidade em componentes horizontal e vertical e como calcular a altura máxima da trajetória.

Página 188

Para pensar e discutir

1. $2x^2 - 5x - 3 = 0.$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2a}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} \Rightarrow x = 3 \\ x = \frac{5-7}{2} = -\frac{2}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

2. A soma das raízes: $-\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$
   O produto das raízes: $-\frac{1}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{2}$
3. Você pode incentivar a investigação por parte dos estudantes. Isso será trabalhado logo a seguir no desenvolvimento do assunto. Aqui é interessante propor outras equações para que os estudantes obtenham tanto a soma $\left(S = -\frac{b}{a}\right)$ das raízes quanto o produto $\left(P = \frac{c}{a}\right)$ delas.

Página 190

Atividades

32.

a) $4x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{8}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \\ x = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

$$S = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right\}$$

b) $4x^2 - 2x - 1 = 0$

$$S = \frac{-(-2)}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

c) $x_1 + x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} + \frac{1-\sqrt{5}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

33. $(x - (-10)) \cdot (x - 5) = 0 \Rightarrow (x + 10) \cdot (x - 5) = 0$

$x^2 - 5x + 10x - 50 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 50 = 0$

34. $2x^2 + 4x - 1 = 0$

a) $S = -\frac{4}{2} = -2$

b) $P = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

35. $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 19x + 88 = 0$

36. Espera-se que o estudante utilize as relações para determinar as equações do 2º grau mentalmente.

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

$S = \{3, 1\}$

b) $x^2 + 9x - 10 = 0$

$S = \{-10, 1\}$

c) $x^2 + 13x + 36 = 0$

$S = \{-9, -4\}$

d) $x^2 - 13x + 36 = 0$

$S = \{9, 4\}$

37. O primeiro estudante errou apenas o termo independente de x, ou seja, errou o termo c da equação. Então:

$2 - 14 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a} = -12 \Rightarrow b = 12a$

O segundo estudante errou apenas o coeficiente do termo de primeiro grau, ou seja, errou o termo b da equação. Então:

$2 \cdot 16 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = 32 \Rightarrow c = 32a$

$ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + 12ax + 32a = 0 \Rightarrow a \cdot (x^2 + 12x + 32) = 0$

Dividimos ambos os membros por a: $x^2 + 12x + 32 = 0$.

Utilizando a forma fatorada, obtemos as raízes da equação:

$x^2 + 4x + 8x + 8 \cdot 4 = 0 \Rightarrow x \cdot (x + 4) + 8 \cdot (x + 4) = 0$

$(x + 4) \cdot (x + 8) = 0$

$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ ou $x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$

Alternativa **b**.

38. $3x^2 + 7x - 18 = 0$

Primeiro, vamos fatorar a expressão:

$a^2b + ab^2 - a - b$

$ab \cdot (a + b) - 1 \cdot (a + b) = (a + b) \cdot (b - 1) = S \cdot (P - 1)$ (I)

Agora, vamos determinar a soma e o produto das raízes da equação $3x^2 + 7x - 18 = 0$

$S = -\frac{7}{3}$

$P = \frac{-18}{3} = -6$

Substituindo o valor de S e P na equação (I):

$S \cdot (P - 1) = \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot (-6 - 1) = \frac{49}{3}$

$a^2b + ab^2 - a - b = \frac{49}{3}$

Alternativa **b**.

2. Função quadrática

Página 191

Para pensar e discutir

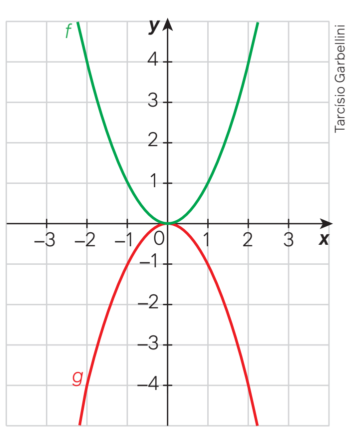
1. $P = 9 + 18 + 9 + 18 = 54$; 54 m
2. $A = 9 \cdot 18 = 162$; 162 m^2
3. Sim. Você pode propor que os estudantes utilizem um barbante para fazerem experimentações.

Página 192

Para explorar

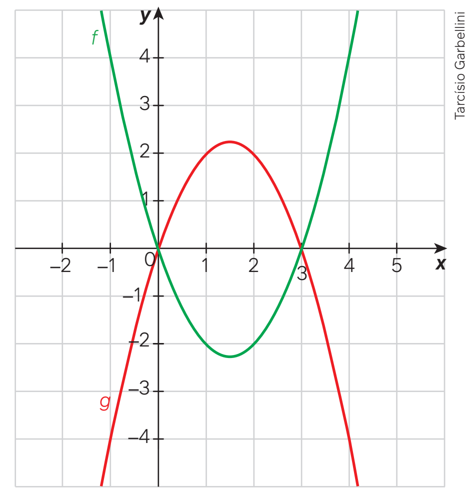
Construção 1

Em um mesmo plano cartesiano, as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$.



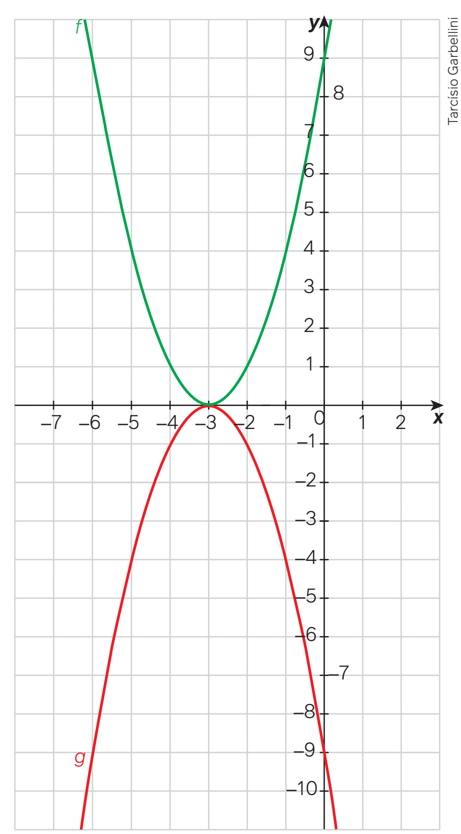
Construção 2

Em um mesmo plano cartesiano, as funções $f(x) = x^2 - 3x$ e $g(x) = -x^2 + 3x$.



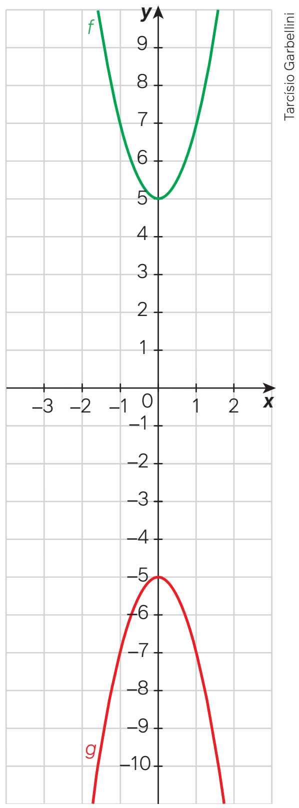
Construção 3

Em um mesmo plano cartesiano, as funções $f(x) = x^2 + 6x + 9$ e $g(x) = -x^2 - 6x - 9$.



Construção 4

Em um mesmo plano cartesiano, as funções $f(x) = 2x^2 + 5$ e $g(x) = -2x^2 - 5$.



1. Espera-se que os estudantes informem que, na função afim, o gráfico é uma linha reta, enquanto na função quadrática é uma linha curva.
2. Você pode explicar aos estudantes que a denominação é parábola.
3. Espera-se que notem que os gráficos são refletidos em relação ao eixo das abscissas (o eixo das abscissas representa, em tais situações, um eixo de simetria). Chame a atenção deles para o fato de que, na função *f*, a concavidade da parábola é voltada para cima, enquanto na função *g* a concavidade é voltada para baixo.
4. São três possibilidades: há um ponto em comum com o eixo das abscissas (tangência); há dois pontos em comum com o eixo das abscissas; não há ponto em comum com o eixo das abscissas.

Páginas 194-195

Análise e contexto

Ao final da atividade, você pode propor aos estudantes que exponham seus desenhos e justifiquem o porquê das diferenças, sendo que todos seguiram o mesmo algoritmo.

Páginas 196-197

Atividades

39.

a) $f(0) = -3$, ou seja, é o ponto $(0, -3)$ onde o gráfico da parábola intersecta o eixo *y*.

b) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Verifique se os estudantes chegam à abscissa desse ponto de simetria pela média aritmética das raízes.

c) Coordenadas do ponto $(1, -1)$.

d) Para $x = -3$ e para $x = 2$. Nesses dois últimos itens, os pontos devem ser observados pela leitura adequada do gráfico.

40.

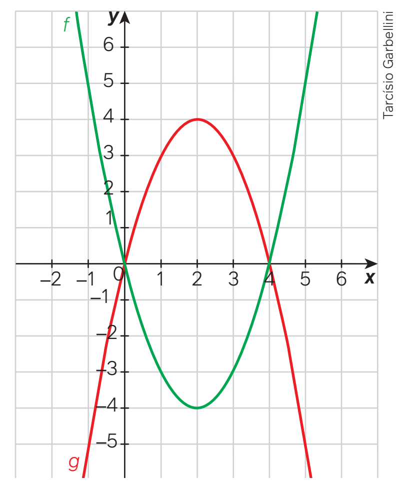
a) $f(0) = -4$

b) No ponto $(0, 0)$.

c) Coordenadas do ponto $(3, 5)$.

d) Para $x = -2$ e para $x = 2$.

41. A atividade requer a construção em folha de papel, de preferência, quadriculado. É evidente que os estudantes podem, caso queiram, construir utilizando recursos digitais. Entretanto, eles acabam fazendo esboços de gráficos, o que também pode ser considerado aqui. Nesse caso, peça que destaquem os pontos em que o gráfico intersecta os eixos coordenados.

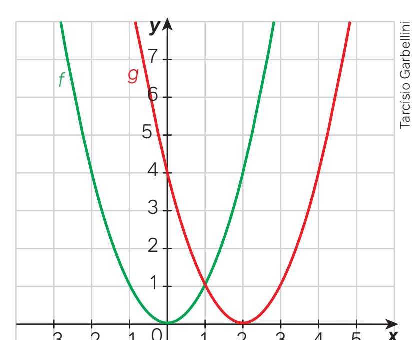


a) Têm dois pontos em comum.

b) $(0, 0)$ e $(4, 0)$. Explique aos estudantes que podem também obter as coordenadas desses pontos igualando as leis de formação das duas funções.

c) Ao igualarmos as leis de formação dessas funções e resolvermos a equação do 2º grau correspondente, obtemos os valores de *x*. Substituindo *x* nas funções, obtemos os correspondentes valores de *y*, como fizemos no item *b*.

42.



a) Não. Enquanto o eixo de simetria do gráfico de *f* é o eixo *y*, o eixo de simetria do gráfico de *g* é paralelo ao eixo *y* passando pelo ponto de abscissa 2.

b) Não. Enquanto o gráfico de *f* intersecta o eixo *x* na origem, o gráfico de *g* intersecta o eixo *x* no ponto de abscissa 2.

c) Sim. O gráfico da função g pode ser obtido do gráfico da função f deslocando-o (sem deformar) horizontalmente duas unidades para a direita no plano cartesiano.

43.

a) Como devemos utilizar $x = -2$ na função g, temos $(k - 2)^2$, assim concluímos que $k = 2$.

b) Como devemos utilizar $x = 2$ na função g, temos $(k + 2)^2$, assim concluímos que $k = -2$.

c) Igualando as duas funções, temos:

$g(x) = h(x) \Rightarrow (x + 2)^2 = (x - 2)^2$

$x^2 + 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 8x = 0$

$g(0) = (0 + 2)^2 \Rightarrow g(0) = 4$

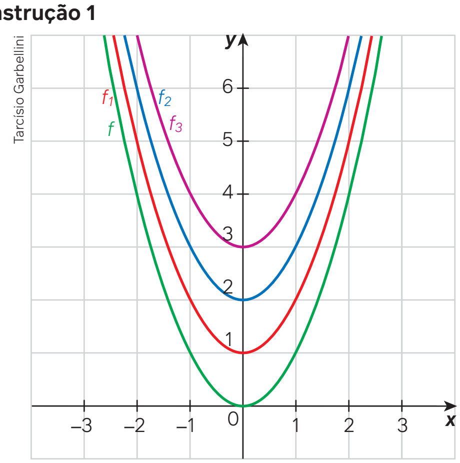
$f(0) = 0^2 + b \cdot 0 + c = 4 \Rightarrow c = 4$

$\Delta = 0$: $b^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow b = \pm 4$,

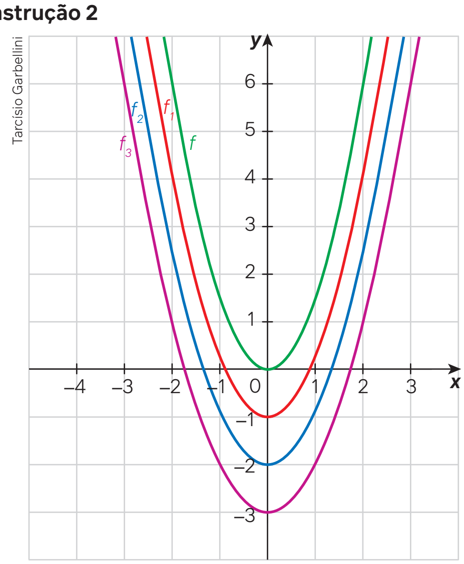
$b = -4$, pois a raiz é 2. Portanto, $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

44.

Construção 1



Construção 2

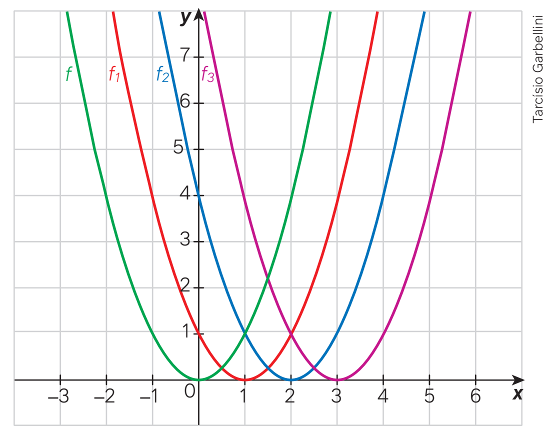


a) Espera-se que os estudantes tenham observado que os gráficos das funções $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ podem ser obtidos do gráfico da função $f(x)$ deslocando 1, 2 e 3 unidades, respectivamente, para cima no plano cartesiano.

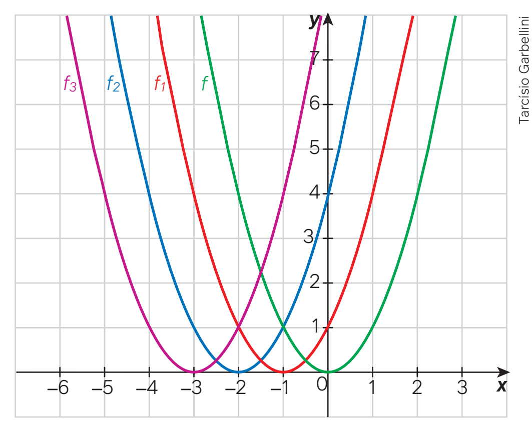
b) Espera-se que os estudantes tenham observado que, nesse caso, houve um deslocamento para baixo de 1, 2 e 3 unidades, respectivamente, no plano cartesiano. É importante destacar que, para toda função $g(x)$ da forma $g(x) = f(x) + k$, sendo k um número real não nulo, o gráfico correspondente é obtido do gráfico da função $f(x)$ deslocando-o k unidades para cima ($k > 0$) ou k unidades para baixo ($k < 0$).

45.

Construção 1



Construção 2



a) Espera-se que os estudantes tenham observado que os gráficos das funções $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ podem ser obtidos do gráfico da função $f(x)$ deslocando 1, 2 e 3 unidades, respectivamente, para a direita no plano cartesiano.

b) Espera-se que eles tenham percebido que, nesse caso, houve um deslocamento para a esquerda de 1, 2 e 3 unidades, respectivamente, no plano cartesiano. É importante destacar que, para toda função $g(x)$ da forma $g(x) = f(x + k)$, sendo k um número real não nulo, o gráfico correspondente é obtido com base no gráfico da função $f(x)$ deslocando-o k unidades para a esquerda ($k > 0$) ou k unidades para a direita ($k < 0$). Essa situação pode ser explorada sugerindo aos estudantes que simulem outras funções.

46.

$2x + 2y = 60 \Rightarrow x + y = 30 \Rightarrow y = 30 - x$

$A(x) = x \cdot (30 - x) \Rightarrow A(x) = -x^2 + 30x$

47.

$x + 2y = 60 \Rightarrow 2y = 60 - 0{,}5$

$A(x) = x \cdot (30 - 5x) \Rightarrow A(x) = -0{,}5x^2 + 30x$

Página 199

Para pensar e discutir

1. No máximo dois pontos em comum.
2. O valor de $x = 3$ anula a função, isto é, ele é o zero da função quadrática e coincide com a abscissa do vértice.
3. Sempre será positivo, para qualquer valor de x no domínio da função.

Página 200

Para pensar e discutir

1.

$f(x) = -x^2 + 4x - 3$ e $g(x) = -f(x)$

Pontos em comum: $f(x) = -f(x)$

$-x^2 + 4x - 3 = +x^2 - 4x + 3$

$-x^2 + 4x - 3 - x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow -2x^2 + 8x - 6 = 0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{-4} \Rightarrow x = \frac{-8 \pm 4}{-4}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-8+4}{-4} = \frac{-4}{-4} \Rightarrow x = 1 \\ x = \frac{-8-4}{-4} = \frac{-12}{-4} \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Apenas os zeros das funções, isto é, (1,0) e (3,0).

2. $f(x) = 2x^2 + kx + 3$, se não intersecta o eixo das abscissas, logo $\Delta < 0$.

$k^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 < 0 \Rightarrow k^2 < 40$

Páginas 200-201

Atividades

48.

a) $f(x) = x^2 + 5$

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$

$\Delta = -20$

Como $\Delta < 0$, o gráfico da função quadrática não intersecta o eixo das abscissas.

b) $f(x) = x^2 + 10x + 25$

$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0$

Como $\Delta = 0$, o gráfico da função quadrática intersecta o eixo das abscissas em apenas um ponto.

c) $f(x) = -x^2 + 10x + 10$

$\Delta = 10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 10 = 140$

Como $\Delta > 0$, o gráfico da função quadrática intersecta o eixo das abscissas em dois pontos distintos.

49.

a) Intersecta o eixo das ordenadas: $(0, y)$

$f(x) = x^2 - 4x$

$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0$

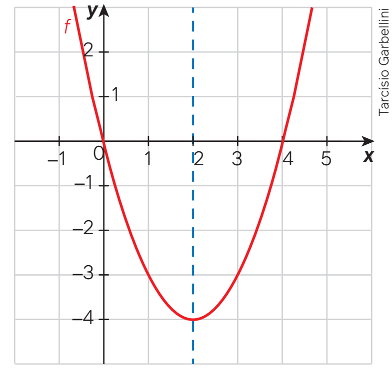
A coordenada é: (0, 0).

b) Intersecta o eixo das abscissas: $(x, 0)$

$f(x) = x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4$

As coordenadas são: (0, 0) e (4, 0).

50.



a) Coordenadas do ponto (2, –4).

b) Espera-se que, com base nos zeros da função quadrática (raízes da equação do 2º grau correspondente), o estudante observe que a abscissa é a média aritmética entre as raízes, já que está localizada no eixo de simetria.

51. Explique aos estudantes que, em uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, a parábola intersecta o eixo das ordenadas no valor do coeficiente c, ou seja, o ponto será $(0, c)$.

a) $f(x) = 4x^2 + 5$. O ponto será (0, 5).

b) $f(x) = x^2 + 10x + 25$. O ponto será (0, 25).

c) $f(x) = -x^2 + 10x + 10$. O ponto será (0, 10).

52.

a) As funções e os gráficos são: f_1 cor roxa, f_2 cor azul, f_3 cor laranja e f_4 cor verde. Espera-se que os estudantes observem que quanto maior o coeficiente do termo em x^2, menor a "abertura" da parábola; quanto menor o coeficiente do termo em x^2, maior a "abertura" da parábola.

b) Nas quatro funções, temos que y é diretamente proporcional ao quadrado de x, isto é:

$y = \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow \frac{y}{x^2} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$ representa a constante de proporcionalidade em $f_1(x)$.

$y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \frac{y}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ representa a constante de proporcionalidade em $f_2(x)$.

$y = 2x^2 \Rightarrow \frac{y}{x^2} = 2$

2 representa a constante de proporcionalidade em $f_3(x)$.

$y = 4x^2 \Rightarrow \frac{y}{x^2} = 4$

4 representa a constante de proporcionalidade em $f_4(x)$.

53.

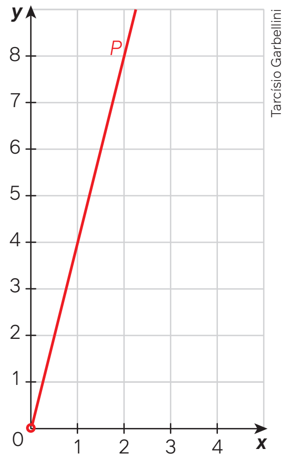
a)

Lado (cm)	Perímetro (cm)	Área (cm²)
1,0	4	1
1,5	6	2,25
2,0	8	4
2,5	10	6,25
3,0	12	9
3,5	14	12,25
4,0	16	16
4,5	18	20,25
5,0	20	25

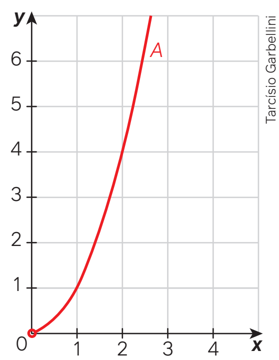
b) $P(x) = x + x + x + x \Rightarrow P(x) = 4x$

c) $A(x) = x \cdot x \Rightarrow A(x) = x^2$

d) $P(x) = 4x$ (x deve ser positivo)



e) $A(x) = x^2$ (x deve ser positivo)

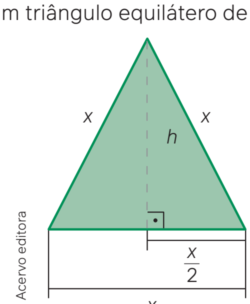


f) A medida do lado de um quadrado e seu perímetro estabelecem uma relação de proporcionalidade direta, expressa por meio de uma função de 1º grau. Por esse motivo, o gráfico é uma semirreta (x é positivo). Já a relação entre a medida do lado de um quadrado e sua área é expressa por uma função de 2º grau, logo o gráfico será uma parte da parábola (x é positivo). Lembre-se de que medidas de comprimento não são expressas em valores negativos, assim temos o gráfico desenhado apenas no primeiro quadrante do plano cartesiano. Nos dois gráficos, a origem deve ser excluída, pois não podemos ter lado do quadrado igual a zero.

g) Aqui é possível observar se os estudantes compreendem as relações algébrica e gráfica de grandezas envolvendo perímetro, área e medida de lado do quadrado.

54. Parte 1: triângulo equilátero

1. Considere um triângulo equilátero de lado x.



Para determinar a altura do triângulo equilátero, aplicamos o teorema de Pitágoras.

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = h^2 + \frac{x^2}{4}$$

$$x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3}{4}x^2$$

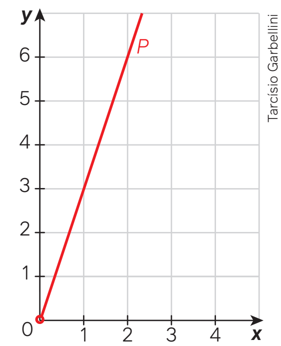
$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Para determinar a área do triângulo equilátero, aplicamos a fórmula da área do triângulo:

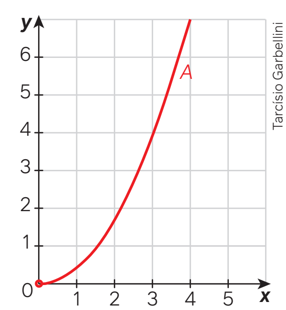
$$A = \frac{b \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

$P = 3x$

2. $P = 3x$ (x deve ser positivo)



3. $A = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ (x deve ser positivo)



4. A área do triângulo equilátero não é proporcional ao lado do triângulo equilátero, pois, como o lado x é variável, temos:

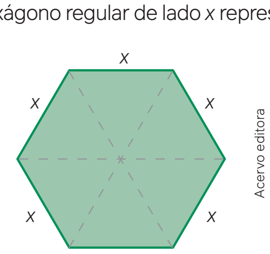
$$A = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

$\frac{A}{x} = \frac{x\sqrt{3}}{4}$ (o segundo membro não é uma constante, mas uma variável). A área do triângulo equilátero é diretamente proporcional ao quadrado do lado do triângulo, isto é:

$\frac{A}{x^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (o segundo membro é uma constante: constante de proporcionalidade).

Parte 2: hexágono regular

1. Considere o hexágono regular de lado x representado a seguir.

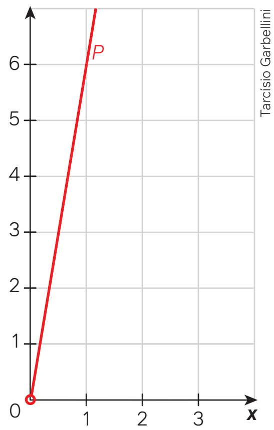


Observe que o hexágono regular é composto de 6 triângulos equiláteros. Logo, a área e o perímetro do hexágono regular podem ser calculados, respectivamente, por meio das fórmulas:

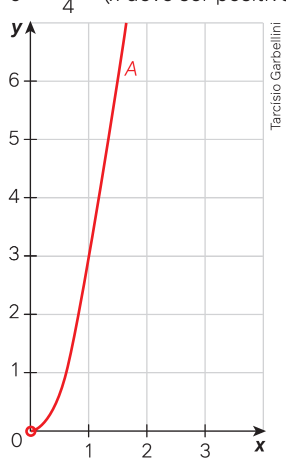
$A = 6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

$P = 6x$

2. $P = 6x$ (x deve ser positivo)



3. $A = 6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ (x deve ser positivo)



4. A relação entre o perímetro e a medida dos lados de um polígono é expressa por uma função de 1º grau. Por esse motivo, o gráfico é uma semirreta (x é positivo). Já a relação entre a medida do lado do polígono e sua área é expressa por uma função de 2º grau. Por esse motivo, o gráfico é uma parte de parábola (x é positivo). Lembre-se de que não há valores negativos para expressar unidades de medida de comprimento. Assim, temos o gráfico desenhado apenas no primeiro quadrante do plano cartesiano. Observações importantes para o hexágono:

(1) O perímetro é diretamente proporcional à medida do lado x do hexágono.

$P = 6x$

$\frac{P}{x} = 6$ (constante de proporcionalidade).

(2) A área é diretamente proporcional à medida do quadrado do lado x do hexágono.

$A = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{A}{x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Página 202

Análise e contexto

Caso julgue oportuno, você pode conduzir os estudantes à sala de informática e auxiliá-los no acesso ao artigo via internet (vide atividade **1**). Após regressarem à sala de aula, solicite que se juntem em pequenos grupos para conversarem sobre suas impressões e realizarem a produção do resumo solicitado na atividade **2**.

Página 203

Para pensar e discutir

Sim, o arco se assemelha a uma parábola. A ideia das duas questões é conduzir uma pequena discussão. Uma forma de chegar aos comprimentos aproximados dos pilares menores que aparecem na fotografia é usar proporção. Como conhecemos o comprimento real de AB, podemos determinar o comprimento correspondente na fotografia. Assim, a partir dos comprimentos dos pilares maiores na fotografia, podemos, por meio de proporção, encontrar os valores aproximados reais dos comprimentos dos pilares que ligam a superfície da ponte com a estrutura em forma de parábola. Claro que haveria distorções, por causa do ângulo em que a fotografia foi tirada.

Página 204

Para pensar e discutir

1. Duas fatorações foram feitas: na primeira, x foi colocado em evidência; já na segunda, $-x_2$ foi colocado em evidência.

2. Na passagem (II), foram tomados os termos x^2 e x_1x, colocando x em evidência e os termos x_2x e x_1x_2, colocando x_2 em evidência; e na passagem (III) a expressão $(x - x_1)$ foi colocada em evidência.

3. São os zeros da função, isto é, os pontos do plano cartesiano em que a parábola corta o eixo das abscissas.

Página 205

Para pensar e discutir

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 3x - x + 3$

$f(x) = x(x - 3) - 1(x - 3) = (x - 3)(x - 1)$

$f(x) = (x - 3)(x - 1)$

Atividades

55.

a) A parábola intersecta o eixo y: $(0, -1)$. Zeros ou raízes da função: -1 e 1.

$-1 = a(0 + 1)(0 - 1) \Rightarrow a = 1$

Forma geral: $y = 1(x + 1)(x - 1)$

Forma polinomial: $f(x) = x^2 - 1$.

Portanto, na forma geral, temos: $f(x) = (x + 1)(x - 1)$; e na forma polinomial: $f(x) = x^2 - 1$.

b) $g(x) = -f(x) \Rightarrow g(x) = -(x^2 - 1)$

$g(x) = -x^2 + 1$

c) O gráfico de f ficará refletido em torno do eixo x.

56.

a) O eixo de simetria da parábola coincide com o vértice $(3, 9)$, ou seja, intersecta o eixo da abscissa no valor do x do vértice. Logo, a parábola intersecta o eixo das abscissas em 0 e 6, que são os zeros da função.

b) Substituindo $(3, 9)$ na equação fatorada:

$9 = a(3 - 0)(3 - 6) \Rightarrow 9 = -9a$

$a = -1$

$y = -1(x - 0)(x - 6)$

$y = f(x) = -x(x - 6)$

57. $y = -1(x + 8)(x - 2)$

$y = -(x + 8)(x - 2)$

$y = -(x^2 - 2x + 8x - 16)$

$y = -x^2 - 6x + 16$

58. Exemplos de resposta:

$f_1(x) = -3(x - 1)(x - 8)$

$f_2(x) = 20(x - 1)(x - 8)$

$f_3(x) = 4(x - 1)(x - 8)$

$f_4(x) = -0{,}2(x - 1)(x - 8)$

59. $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$-6 = a(0 + 2)(0 - 3)$

$-6 = -6a \Rightarrow a = 1$

$y = 1(x + 2)(x - 3)$

$y = (x^2 - 3x + 2x - 6)$

$y = x^2 - x - 6$

60. Exemplos de resposta:

$f_1(x) = -3(x - 1)(x - 8)$

$f_2(x) = 20(x - 1)(x - 8)$

$f_3(x) = 4(x - 1)(x - 8)$

$f_4(x) = -0{,}2(x - 1)(x - 8)$

3. Coordenadas do vértice da parábola

Página 206

Para pensar e discutir

1. Espera-se que os estudantes percebam que o resultado é y_v e representa a ordenada do vértice da parábola (ponto extremo da função).
2. Espera-se que os estudantes identifiquem que é uma reta que divide um gráfico em duas partes simétricas. Dessa forma, geram imagens iguais.
3. Espera-se que os estudantes percebam que esses valores serão iguais, pois os pontos têm abscissas simétricas em relação à abscissa do vértice.
4. Espera-se que os estudantes percebam que esses valores serão iguais, pois os pontos têm abscissas simétricas em relação à abscissa do vértice.

Página 207

Para pensar e discutir

1. A abscissa é igual a 4.
2. Espera-se que os estudantes percebam que esse valor está situado no eixo de simetria, isto é, à mesma distância das raízes.
3. Pode-se dizer que a abscissa do vértice da parábola é a média aritmética entre os zeros da função quadrática.

Página 208

Para pensar e discutir

Nos itens **1** e **2**, incentive os estudantes a comentar as estratégias variadas. Por exemplo, no item **1**, eles podem calcular a média aritmética das raízes e encontrar x_v. Em seguida, substituir na função o valor encontrado para determinar y_v.

No item **2** eles podem substituir na função o valor de x_v e igualar ao valor dado para y_v.

Atividades

61. $f(x + 1) = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$

$f(x + 1) = a(x^2 + 2x + 1)^2 + bx + b + c$

$f(x + 1) = ax^2 + 2ax + a + bx + b + c$

$f(x - 1) = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$

$f(x - 1) = a(x^2 - 2x + 1)^2 + bx - b + c$

$f(x - 1) = ax^2 - 2ax + a + bx - b + c$

$f(x + 1) = f(x - 1)$

$ax^2 + 2ax + a + bx + b + c = ax^2 - 2ax + a + bx - b + c$

$2ax + b = -2ax - b$

$4ax = -2b \Rightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$

a) O valor de x representa a abscissa do vértice da parábola, o ponto onde passa o eixo de simetria.

b) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x+5) = a(x + 5)^2 + b(x + 5) + c$

$f(x+5) = a(x^2 + 10x + 25)^2 + bx + 5b + c$

$f(x+5) = ax^2 + 10ax + 25a + bx + 5b+c$

$f(x-5) = a(x - 5)^2 + b(x - 5) + c$

$f(x-5) = a(x^2 - 10x + 25)^2 + bx - 5b + c$

$f(x-5) = ax^2 - 10ax + 25a + bx - 5b + c$

$f(x+5) = f(x - 5)$

$ax^2 + 10ax + 25a + bx + 5b + c =$

$= ax^2 - 10ax + 25a + bx - 5b + c$

$10ax + 5b = -10ax - 5b \Rightarrow 2ax + b = -ax - b$

$x = -\dfrac{b}{2a}$

O resultado não se alteraria.

62.

a) $f(x) = -2x^2 + 8x - 1$

Espera-se que os estudantes observem que $a < 0$, então a concavidade da parábola está voltada para baixo.

b) $x_v = -\dfrac{8}{2 \cdot (-2)} = 2$

c) $8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1) = 56$

$y_v = -\dfrac{56}{4 \cdot (-2)} = 7$

63.

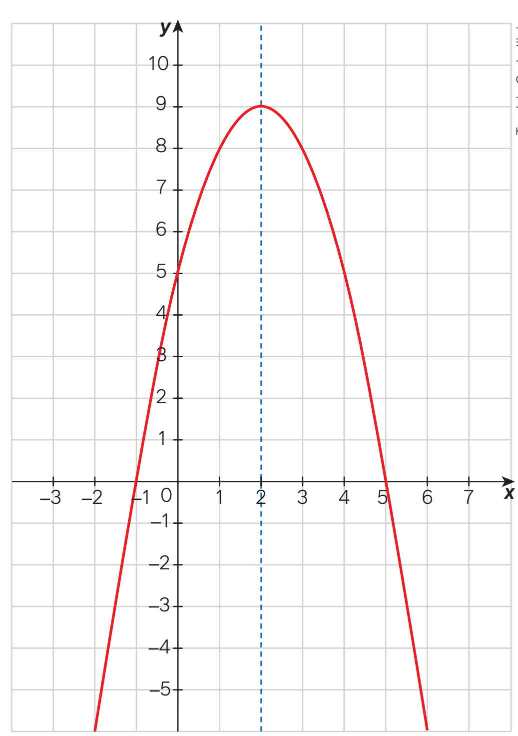
a) $4x - x^2 = 0 \Rightarrow x(4 - x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4$

b) $x_v = -\dfrac{4}{2 \cdot (-1)} = 2$

c) $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 \Rightarrow \Delta = 16$

$y_v = -\dfrac{16}{4 \cdot (-1)} = 4$

64.

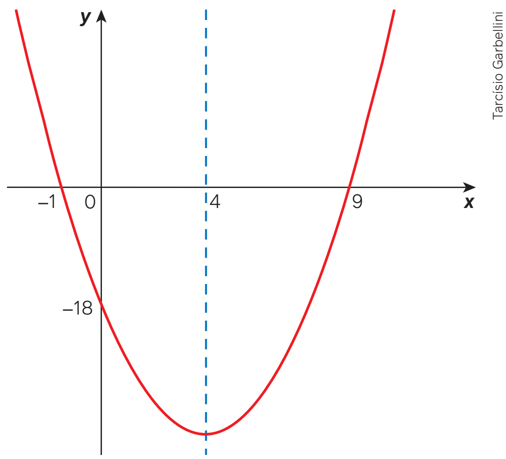


Tarcísio Garbellini

a) A concavidade da parábola é voltada para baixo.

b) O valor da outra raiz é –1, pois as raízes são simétricas em relação ao eixo de simetria.

65.



$-18 = a\,(0 + 1)\,(0 - 9) \Rightarrow -18 = -9a \Rightarrow a = 2$

$y = 2\,(x + 1)(x - 9) \Rightarrow y = 2x^2 - 16x - 18$

66. $x_v = 5$, pois é o valor que dista 3 unidades de 2 e de 8. Assim, o vértice da parábola é $V(5, 10)$.

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$10 = a\,(5 - 2)\,(5 - 8)$

$10 = -9a$

$a = -\frac{10}{9}$

$y = -\frac{10}{9}(x - 2)(x - 8)$

67.

a) Sugestão de resposta: A função precisa obedecer aos seguintes critérios:

I. os zeros da função sejam iguais;

II. a parábola passe pelo ponto (2, 4).

Logo, $y = 4x^2 - 8x + 4$.

b) Sugestão de resposta: A função precisa obedecer aos seguintes critérios:

I. os zeros da função sejam –1 e 3;

II. a parábola passe pelo ponto (0, –3).

$y = x^2 - 2x - 3$

Página 209

Para pensar e discutir

1. Sim. Comente com os estudantes que um quadrilátero é um retângulo quando tem os quatro ângulos internos retos. Assim, todo quadrado é também um retângulo que possui os quatro lados com a mesma medida.
2. A área máxima representa a ordenada do vértice da parábola correspondente.

Página 210

Para explorar

1. $S = S_0 + V_0 t + \frac{a}{2}t^2 \Rightarrow S = 2t^2 - 18t + 36$

a) $S_0 = 2 \cdot 0^2 - 18 \cdot 0 + 36 = 36$; 36 m

b) $V_0 = -18$m/s

c) $\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$; 4 m/s²

2. Essa atividade pode ser conduzida em parceria com a disciplina de Física como parte de uma avaliação em que os estudantes devem estabelecer a relação entre a Física e o modelo matemático correspondente.

Para pensar e discutir

1. Denomina-se prejuízo.
2. O lucro máximo é R$ 900,00. Pode-se obter esse lucro máximo ao fazer $L = f(50)$ ou calcular o valor da ordenada do vértice da correspondente parábola por meio da fórmula demonstrada.

$L = -x^2 + 100x - 1\,600$

$L(50) = -(50)^2 + 100 \cdot 50 - 1\,600$

$L(50) = -2\,500 + 5\,000 - 1\,600$

$L(50) = 900$; R$ 900,00

Páginas 211-212

Atividades

68.

a) $h(t) = -t^2 + 4t + 6$

$h(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 + 6$

$h(0) = 6$; 6 m

b) $x_v = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x_v = 2$; 2 s

c) $y_v = -\frac{40}{4 \cdot (-1)} \Rightarrow y_v = 10$; 10 m

d) $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)}$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{-2}$

$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{-2}$

$$\begin{cases} x \cong \frac{-4 + 6{,}32}{-2} = -1{,}16 \\ x \cong \frac{-4 - 6{,}32}{-2} = 5{,}16 \end{cases}$$

Pelo contexto, $x \cong 5{,}16$; 5,16 s.

69. $4 \cdot (2x + y) = 400 \Rightarrow 2x + y = 100$

Visto que a parede existe:

$y = 400 - 2x$ (I)

Multiplicando por x os dois membros, temos a área:

$y \cdot x = 100x - 2x^2$

$-2x^2 + 100x = 0$

$x \cdot (-2x + 100) = 0$

$x_1 = 0$ e $x_2 = 50$

$x_v = \frac{0 + 50}{2} = 25$

$y_{máx} = 100 - 2x \Rightarrow y_{máx} = 100 - 50$

Área máxima:

$25 \cdot 50 = 1\,250$; 1 250 m²

70.

a) Pelo gráfico, vemos que o ponto máximo é 3.

b) $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 3\}$

71.

a) $f(x) = 2x^2 + 8x - 1$

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 72$

$y_v = -\frac{72}{4 \cdot 2} \Rightarrow y_v = -9$

b) Representa o mínimo da função, pois a concavidade da parábola correspondente é voltada para cima.

c) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y \geq -9\}$

72. Exemplo de resposta:

$20 = a(10 - 5)(10 - 15)$

$20 = -25a \Rightarrow a = -\frac{5}{4}$

$y = -\frac{5}{4}(x - 5)(x - 15)$

$y = -\frac{5}{4}(x^2 - 20x + 75)$

73. $f(x) = (40 - x) \cdot (200 + 10x)$

$f(x) = -(x - 40) \cdot (20 + x) \cdot 10$

$f(x) = -10 \cdot (x - 40) \cdot (x + 20)$

A função está na forma fatorada, portanto:

$x_1 = 40$ e $x_2 = -20$

$x_v = \frac{40 - 20}{2} \Rightarrow x_v = 10$; R\$ 10,00

Alternativa **b**.

74.

a) $f(x) = x \cdot (50 - x)$

$f(x) = -x^2 + 50x \ (0 < x < 50)$

$x \cdot (50 - x) = 400$

$x^2 - 50x + 400 = 0$

$f(x) = -x^2 + 50x \ (0 < x < 50)$

b) $f(x) = x \cdot (50 - x)$ assume o valor máximo para $x = 25$.

Área máxima:

$f(25) = 25 \cdot (50 - 25) = 625$; 625 cm^2

75. $V(t) = \frac{1}{43\,200}t^2 + 3$

$0 = \frac{1}{43\,200}t^2 + 3$

$0 = -t^2 + 3 \cdot 43\,200$

$t^2 = 129\,600 \Rightarrow t = \sqrt{129\,600}$

$t = 360$; 360 min = 6 h

Alternativa **d**.

76.

a) $-2t^2 + 8t = 0$

$t(-2t + 8) = 0$

$t = 0$ ou $t = 4$

Pelo contexto, $t = 4$; 4 s.

b) $\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0 = 64$

$y_v = -\frac{64}{4 \cdot (-2)} = 8$; 8 m

77. Os problemas elaborados podem envolver a obtenção da altura máxima que uma bola de basquete atinge ao ser arremessada na cesta. Nesse caso, os estudantes devem calcular a ordenada máxima da função. Outra possível questão pode ser a determinação da distância em que o jogador se encontra, na horizontal, da cesta de basquete.

78. Área total: $7 \cdot 8 = 56$

Área de A: x^2

Área de B: $(8 - x)^2 = 64 - 16x + x^2$

Área de C: $(7 - x)^2 = 49 - 14x + x^2$

A área do polígono P é a área total menos a soma das áreas de A, B e C.

Adicionando as três áreas:

$3x^2 - 30x + 113$

$A = 56 - (3x^2 - 30x + 113)$

$A = -3x^2 + 30x - 57$

$x_v = -\frac{30}{2 \cdot (-3)} \Rightarrow x_v = 5$

O valor da área de P é máximo para $x = 5$.

Área de A: $x^2 = 25$

Área de B: $(8 - x)^2 = 9$

Área de C: $(7 - x)^2 = 4$

Área de P: $56 - (25 + 9 + 4) = 56 - 38 = 18$; 18 cm^2

Alternativa **a**.

4. Inequações do 2º grau

Página 214

Análise e contexto

1. Sendo A a medida da área de um terreno retangular de lados medindo b e h, temos: $A = b \cdot h$. A fórmula possibilita calcular a área de qualquer terreno retangular conhecendo-se as duas medidas (b e h). Essa fórmula representa um modelo matemático para este tipo de situação.
2. Resposta esperada: Como a área não poderá passar de determinado valor, podemos dizer que esse valor é, por exemplo, k (número real positivo). Assim, o modelo nessa situação seria uma inequação: $A = b \cdot h \leq k$.
3. Resposta que depende do conhecimento de Física dos estudantes. Aqui seria interessante uma conversa com o professor da disciplina de Física para fazer uma interação entre as duas disciplinas e verificar as possíveis respostas dadas pelos estudantes. Comente com eles que, na Física, tais fenômenos são estudados na parte denominada Cinemática. Comente ainda que, quando qualquer pesquisador está diante de um fenômeno, seu grande objetivo é compreender como ele ocorre. Ao conseguir relacionar as variáveis desse fenômeno, estará diante de um modelo que o descreve. Na Física e na Química, há diversos exemplos que podem ser apresentados à turma.

Página 215

Para pensar e discutir

1. $q = 400 - 100p$

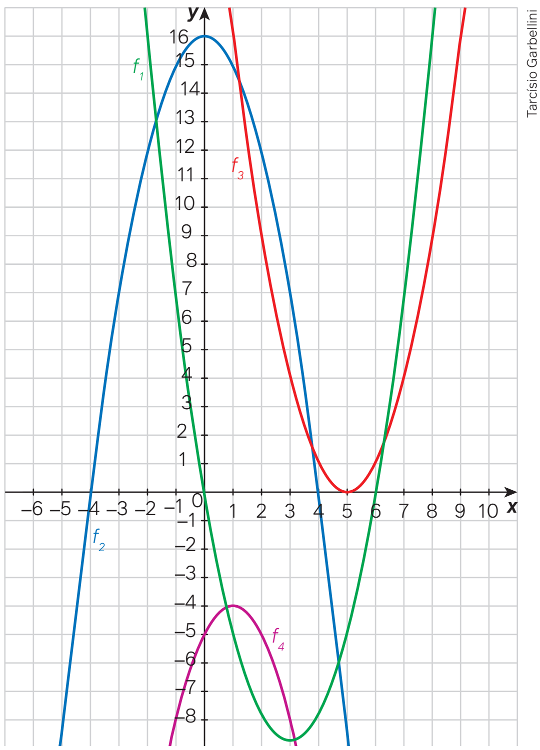
   $q = 400 - 100 \cdot 0{,}80$

   $q = 320$; 320 pães
2. $320 \cdot 0{,}80 = 256{,}00$; R\$ 256,00

Páginas 217-218

Para explorar

1.



$f_1(x) = x^2 - 6x$

$f_2(x) = -x^2 + 16$

$f_3(x) = x^2 - 10x + 25$

$f_4(x) = -x^2 + 2x - 5$

2.

a) Anulam f_1: {0, 6}. Anulam f_3: {5}.
Anulam f_2: {–4, 4}. Anulam f_4: não há.

b) Imagem positiva de f_1: $x < 0$ ou $x > 6$.
Imagem positiva de f_2: $-4 < x < 4$.
Imagem positiva de f_3: $x \in \mathbb{R} - \{5\}$.
Imagem positiva de f_4: não há.

c) Imagem negativa de f_1: $0 < x < 6$.
Imagem negativa de f_2: $x < -4$ ou $x > 4$.
Imagem negativa de f_3: não há.
Imagem negativa de f_4: $x \in \mathbb{R}$.

3.

a) Por exemplo: $f(x) = -x^2 + 2x - 2$.

b) Por exemplo: $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

c) Por exemplo: $f(x) = -x^2 - 2x - 3$.

4. Após as três atividades anteriores, espera-se que os estudantes observem que a análise do sinal da função no gráfico consiste em verificar para que valores de x a função se anula, para que valores de x a função é negativa e para que valores de x a função é positiva.

Atividades

79.

a) $x < 1$ ou $x > 5$ **b)** $1 < x < 5$

80.

a) $-x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -4$

b) $x < -4$ ou $x > 4$

c) $-4 < x < 4$

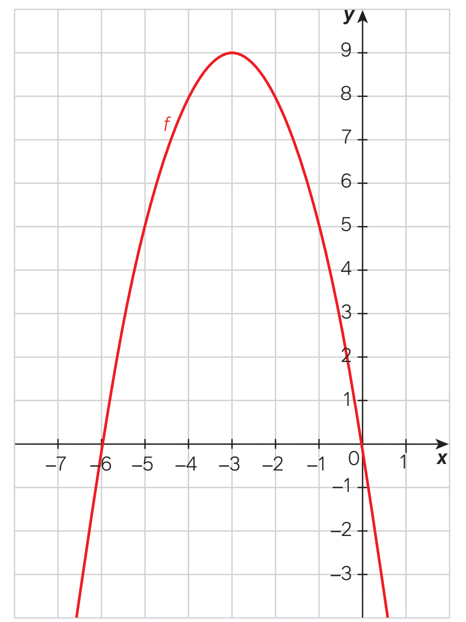
81.

a) $x = 0$ ou $x = 6$ **c)** $0 < x < 6$

b) $x < 0$ ou $x > 6$

82.

a) O estudante deverá esboçar uma parábola com a concavidade voltada para baixo, cortando o eixo das abscissas nos pontos (0, 0) e (–6, 0).



$f(x) = 0$ para $x = -6$ ou $x = 0$ $f(x) < 0$ para $x < -6$ ou $x > 0$

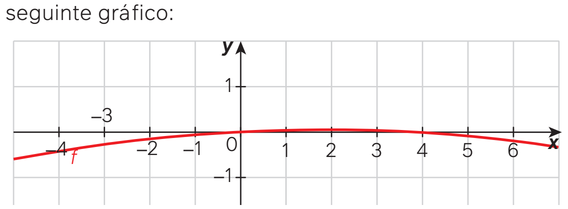
$f(x) > 0$ para $-6 < x < 0$

83.

a) $f(x) = 0$ para $x = -2$ ou $x = 7$
$f(x) > 0$ para $-2 < x < 7$
$f(x) < 0$ para $x < -2$ ou $x > 7$

b) Para qualquer número natural maior que 7.

84. Para $1 \leq x \leq 3$. Sugerimos que a resolução seja iniciada pela construção do gráfico da função com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica. Obtém-se, então, o seguinte gráfico:



Note que as medidas 46,785 m = 0,04675 km e 62,5 m = 0,0625 km. Para $x = 1$, temos $y = 0{,}04675$; e para $x = 3$, temos $y = 0{,}0625$. Logo, para $1 \leq x \leq 3$, as alturas serão variantes entre 46,875 m e 62,5 m.

85. Etapa 1 Por exemplo:

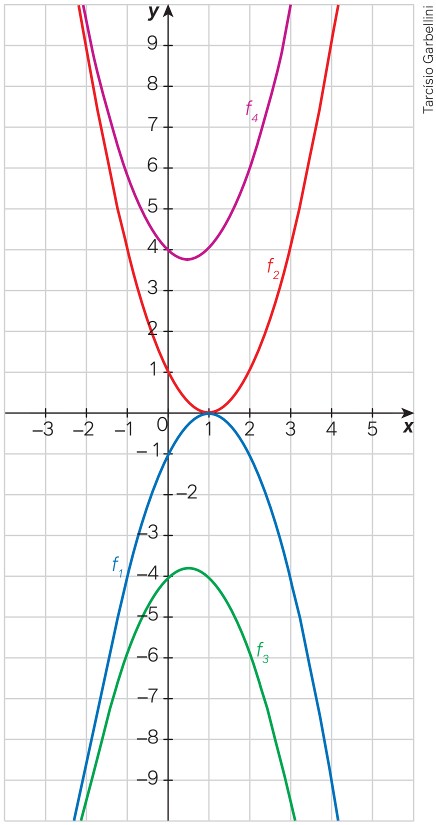
$f_1(x) = -x^2 + 2x - 1$;

$f_2(x) = x^2 - 2x + 1$;

$f_3(x) = -x^2 + x - 4$;

$f_4(x) = x^2 - x + 4$.

Etapa 2



Etapa 3

Essa é uma atividade de exploração do estudo do sinal da função quadrática. Consideramos importante que, em duplas, os estudantes elaborem as leis de formação dessas funções e construam os gráficos com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica. Você pode utilizar essa atividade como componente de avaliação. No final, solicite a alguns estudantes que apresentem as respectivas análises dos sinais dessas funções.

86.

$P(i) = -6i^2 + 24i$

Como queremos que seja maior que 18 *watts*:

$-6i^2 + 24i > 18$

$-6i^2 + 24i - 18 > 0$

Simplificando a inequação: $-i^2 + 4i - 3 > 0$

Resolvendo a equação: $-i^2 + 4i - 3 > 0$, temos:

$$i = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$i = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2}$$

$$i = \frac{-4 \pm 2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} i = \dfrac{-4+2}{-2} = 1 \\ i = \dfrac{-4-2}{-2} = 3 \end{cases}$$

Portanto, a potência será maior que 18 *watts* quando a corrente estiver no intervalo $1 < i < 3$.

87. Oriente os estudantes para que considerem, por exemplo, se a potência do gerador está variando entre dois valores. Nesse caso, a resolução poderá ser feita analisando-se o sinal da função correspondente.

Página 219

Para pensar e discutir

1. (I) O conjunto-solução pode ser representado por [1, 6] ou por $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 \leq x \leq 6\}$.

(II) O conjunto-solução pode ser representado por]1, 6[ou por $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 < x < 6\}$.

Observe que partes das soluções delas são iguais, porém, diferem nos extremos.

É um bom momento para retomar a representação de intervalos reais.

2.

(III) Representando o conjunto-solução por intervalos, temos:]$-\infty$, 1] ou [6, ∞[.

(IV) Representando o conjunto-solução por intervalos, temos:]$-\infty$, 1[ou]6, ∞[.

Não representam as mesmas soluções, pois em (I) os extremos do intervalo fazem parte da solução (intervalo fechado) e em (II) não fazem parte da solução (intervalo aberto). Aproveite para comentar com os estudantes que essas formas de representação podem ser substituídas por $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 6\}$ (para a inequação III) e $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 6\}$ (para a inequação IV).

Página 220

Atividades

88.

a) $\{x \in \mathbb{R} \,/ -2 \leq x \leq 3\}$ ou [–2, 3]

b) $\{x \in \mathbb{R} \,/ -2 < x < 3\}$ ou]– 2, 3[

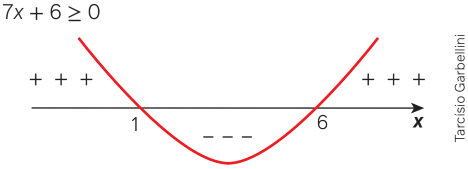
c) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -2\}$ ou]– ∞, –2]

d) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < -2\}$ ou]– ∞, –2]

e) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -2\}$ ou [–2, ∞[

f) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > -2\}$ ou]–2, ∞[

89. $x^2 - 7x + 6 \geq 0$



Analisando o sinal da função correspondente, temos: $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 1 \text{ ou } \geq 6\}$.

90.

a)	$x^2 + 6 < 0$	$a > 0$ e $\Delta < 0$	$S = \varnothing$
b)	$x^2 + 6 > 0$	$a > 0$ e $\Delta < 0$	$S = \mathbb{R}$
c)	$x^2 - 6x + 9 \leq 0$	$a > 0$ e $\Delta = 0$	$S = \{3\}$
d)	$x^2 - 6x + 9 \geq 0$	$a > 0$ e $\Delta = 0$	$S = \mathbb{R}$

91. Sugestão de resposta:

1. Iguale o 1º membro da desigualdade a zero.
2. Resolva a equação $x^2 - 9x + 8 = 0$ encontrando $x_1 = 1$ e $x_2 = 8$.
3. No eixo real, marque os pontos correspondentes às raízes, indicando "bola fechada" neles para incluir as raízes.

4. Esboce o gráfico da função correspondente a $f(x) = x^2 - 9x + 8$.
5. Analise o sinal da função representada.
6. Indique os valores de x para os quais $f(x)$ é menor ou igual a zero.

92. Podem ser obtidas 5 soluções inteiras para a equação: 4, 5, 6, 7 e 8.

Alternativa **c**.

93.

$A \leq 24$

$A = x(x - 2) \leq 24$

$x^2 - 2x \leq 24$

$x^2 - 2x - 24 \leq 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 10}{2}$$

$$x = \frac{2 + 10}{2} = 6$$

$$x = \frac{2 - 10}{2} = -4$$

Pelo contexto, $x = 6$; 6 cm. Logo, $2 < x \leq 6$.

Alternativa **c**.

94. Sendo x a quantidade de quilômetros percorridos, y é o valor total pago.

Empresa A: $y = 3 + 1{,}50x$

Empresa B: $y = 8 + 0{,}10x^2$

a) Empresa A:

$y = 3 + 1{,}50 \cdot 20 = 33{,}00$

R$ 33,00

Empresa B:

$y = 8 + 0{,}10 \cdot 20^2 = 48{,}00$; R$ 48,00

A empresa A tem menor preço.

b) $8 + 0{,}10x^2 < 3 + 1{,}50x$

$0{,}10x^2 - 1{,}50x + 5 < 0$

$x^2 - 15x + 50 < 0$

Resolvendo a inequação por soma e produto de raízes:

$$x_1 + x_2 = -\frac{(-15)}{1} = 15$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{50}{1} = 10$$

Dois números que adicionados resultem em 15 e o produto entre eles resulte em 50:

$x_1 = 10$; 10 km e $x_2 = 5$; 5 km

Portanto, entre 5 km e 10 km.

95.

a) A ideia dessa atividade é que os estudantes utilizem *software* de geometria dinâmica para fazer os gráficos das duas funções no mesmo plano cartesiano e verifiquem, por meio deles, as respostas obtidas.

b) As respostas deverão ser as mesmas da atividade anterior.

c) Os estudantes deverão utilizar, como exemplo, a situação da atividade anterior para elaborar e resolver a situação pela análise de gráfico.

5. Funções definidas por mais de uma sentença

Página 221

Para pensar e discutir

1. $10 + 10 + 30 + 9 = 59$; 59 m^3

2. Adicionando os totais de gasto de água e esgoto, temos: R$ 1.392,68.

3. Nos dois casos, o valor mínimo para o gasto de água e esgoto é R$ 76,68.

4. Uma das maneiras de descobrir é observar que os valores da última faixa não seriam cobrados, isto é, a economia em reais seria de: R$ 297,00.

5. Não são diretamente proporcionais, pois o valor do m^3 depende da faixa de consumo.

Página 222

Para pensar e discutir

1. Parte (I): estado sólido; parte (III): estado líquido; parte (V): estado gasoso.

2. Na parte (II) ocorre a mudança de estado sólido para líquido (essa transformação é chamada de fusão).

3. Na parte (IV) ocorre a mudança de estado líquido para gasoso (essa transformação é chamada de vaporização).

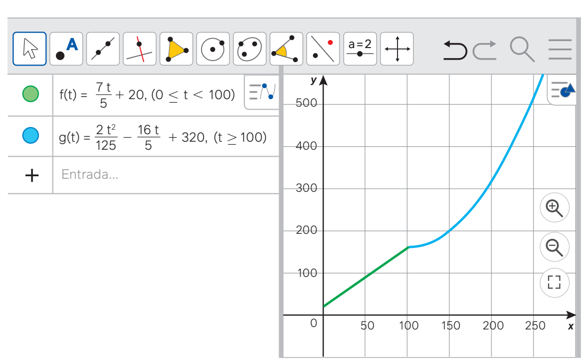
4. Ponto de fusão e ponto de ebulição da água, respectivamente.

5. Na parte (II) (fusão da água), os estados sólidos e líquido coexistem. Assim, a temperatura da água não aumenta (permanece em 0 °C) até que passe para o estado líquido. Já na parte (IV) (ebulição da água), os estados líquido e gasoso coexistem. Desse modo, a temperatura da água não aumenta (permanece em 100 °C) até que passe para o estado gasoso.

Página 223

Para explorar

1. Utilizando um *software* de geometria dinâmica, temos:



Reinaldo Vignati

2. $$T(t) = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, \text{ para } 0 \leq t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, \text{ para } t \geq 100 \end{cases}$$

a) Substituindo t por 0 na primeira parte da função:

$$T(0) = \frac{7}{5}t + 20 = \frac{7}{5} \cdot 0 + 20 = 20$$

b) Substituindo t por 100 na segunda parte da função:

$T(100) = \frac{2}{125} \cdot (100)^2 - \frac{16}{5} \cdot (100) + 320$

$T(100) = \frac{20\,000}{125} - \frac{1\,600}{5} + 320$

$T(100) = 160 - 320 + 320 = 160$

3. Sim, o estudante precisaria observar no gráfico o ponto de altura 48 no eixo das ordenadas e verificar que ele coincide com o ponto 20 no eixo das abscissas; em seguida o ponto de altura 200 no eixo das ordenadas e verificar que ele coincide com o ponto 150 no eixo das abscissas; após isso, subtrair 20 de 150, obtendo 130.

Ressalte aos estudantes que a observação gráfica tem suas imprecisões; então, eles obteriam um valor aproximado e responderiam a situação observando as alternativas que existem nela.

Página 224

Para pensar e discutir

1. A ideia é verificar se os estudantes pensam em procedimentos diferentes para chegar à resposta. É uma forma de conduzi-los a uma reflexão sobre a situação que foi resolvida.

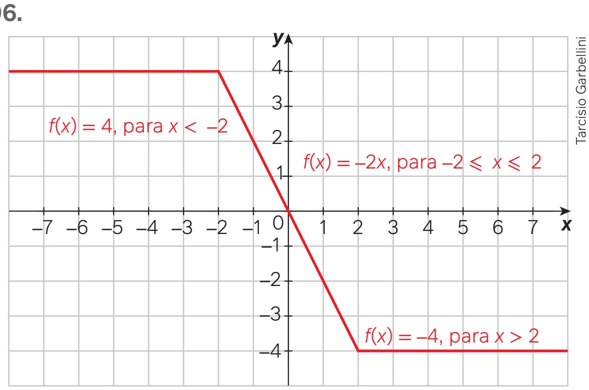
2. Você pode utilizar esta resposta para verificar a compreensão da resolução apresentada (cujas passagens não estão totalmente explicitadas). Talvez seja interessante, no caso de nem todos os estudantes terem compreendido, fazer a resolução coletiva na lousa.

3. As grandezas não são nem diretamente, nem inversamente proporcionais. Uma forma de verificar, por exemplo, se duas grandezas são diretamente proporcionais é observar o que ocorre quando dividimos, em qualquer uma das sentenças, a temperatura pelo tempo. Assim, obtemos: $\frac{T}{t} = \frac{7}{5} + \frac{20}{t}$ o segundo membro não é uma constante, ou $\frac{T}{t} = \frac{2t}{125} - \frac{16}{5} + \frac{320}{t}$ o segundo membro não é uma constante.

Outra maneira de verificar se duas grandezas são diretamente proporcionais é: duplicando uma, a outra tem de duplicar também; triplicando uma, a outra também deve triplicar. No caso de grandezas inversamente proporcionais, se duplicarmos uma, a outra deve cair pela metade; se triplicarmos uma, a outra deve ficar dividida por três.

Atividades

96.



a) Para x variando no intervalo $[-2, 2]$.

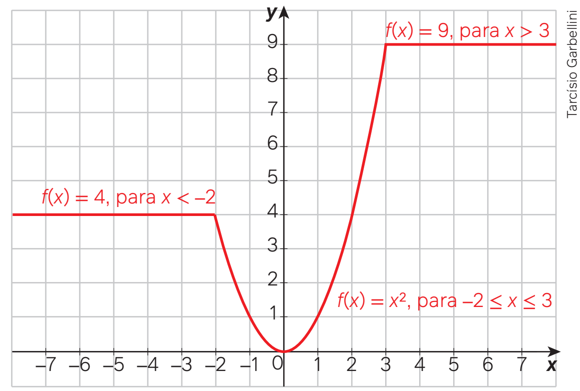
b) Para $x < -2$ ou para $x > 2$.

c) $-0{,}6$

d) -4

e) 4

97.



a) Resposta possível: O gráfico é constituído de três partes, duas semirretas e uma parte de parábola.

b) 9

c) Zero.

98.

a) O intervalo $[-4, 4]$.

b) O intervalo $[-2, 2]$.

c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 6, \text{ se } -4 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2}{2}, \text{ se } -2 < x < 2 \\ -2x + 6, \text{ se } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Há outras possibilidades de colocar o sinal de igual para a variável x nas três sentenças acima.

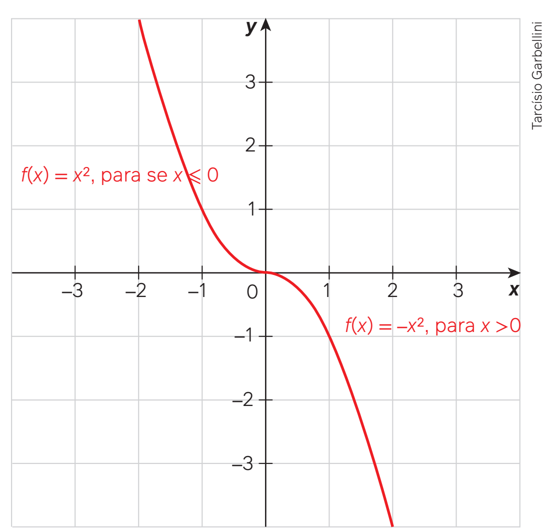
99.

$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leq -1 \\ x^2, \text{se } x > -1 \end{cases}$

Também aqui há outra possibilidade:

$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x < -1 \\ x^2, \text{se } x \geq -1 \end{cases}$

100.



a) Os valores de y diminuem.

b) Os valores de y aumentam.

101.

a) $Im(f) =]-\infty, 1]$

b) A lei de formação é:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3, \text{ se } x < -2 \\ 1, \text{ se } -2 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 4x - 3, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

Sugestão: Peça aos estudantes que construam também o gráfico da função $f(x)$ e o da função obtida reflexionando esse gráfico em torno do eixo das abscissas.

Página 225

Análise e contexto

Após todos os grupos terem apresentado suas propostas, questione-os se as propostas de um grupo também poderiam ser aplicadas à situação do outro grupo, fazendo com que eles reflitam acerca das diferentes realidades em que estão inseridos.

Páginas 226-229

Atividades finais

1.

a) Dois elementos.

b) Sim, pois quando $\Delta = 0$, a equação apresenta duas soluções reais iguais. O conjunto-solução será formado apenas por um elemento.

c) Não, pois quando $\Delta < 0$, a equação não tem solução no conjunto dos reais.

d) Qualquer número real positivo.

e) O discriminante será zero.

f) $x^2 - 10x = 0 \Rightarrow x(x - 10) = 0$

$x = 0$ ou $x = 10$

g) $x^2 - 10 = 0$

$x^2 = 10 \Rightarrow x = \pm\sqrt{10}$

h) $(x + 10)^2 = 25$

$x - 10 = \pm\sqrt{25}$

$x - 10 = 5 \Rightarrow x = 15$ ou

$x - 10 = -5 \Rightarrow x = 5$

i) Basta transformar o primeiro membro da equação em produto. Depois disso, se o produto é igual a zero, necessariamente um dos fatores deverá ser igual a zero.

j) Basta isolar a incógnita x no primeiro membro e, então, determinar os números que, elevados ao quadrado, resultam em 144.

2.

a) Parábola.

b) Vértice.

c) Voltada para cima ou voltada para baixo.

d) É o valor que corresponde à ordenada do ponto em que o gráfico intersecta o eixo das ordenadas.

e) Em apenas um ponto.

f) Voltada para baixo.

g) Nenhuma solução real.

h) Não, pois a solução da inequação é $x \leq -3$ ou $x \geq 3$.

3.

a) Infinitos números reais.

b) 21 números inteiros.

4.

a) Para $x = -1$ ou $x = 2$.

b) Para $x < -1$ ou $x > 2$.

c) Para $-1 < x < 2$.

Questões de vestibulares e Enem

5. $x^2 + n^2 - 2nx - 64 = 0$

$x_1 \cdot x_2 = 36$

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-64 + n^2}{1}$

$\dfrac{-64 + n^2}{1} = 36$

$n^2 = 36 + 64$

$n^2 = 100 \Rightarrow n = \pm 10$

$x_1 + x_2 = -\dfrac{(-2n)}{1} = 2n$

$n = \pm 10 \Rightarrow S = \pm 20$

$(20)^2 = x_1^2 + 2 \cdot 36 + x_2^2$

$400 = x_1^2 + 72 + x_2^2$

$400 - 72 = x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 328$

Alternativa **c**.

6. $x \cdot y = 32$

$y = \dfrac{32}{x}$ (I)

Perímetro do pentágono:

$2x + 2y = 24 \Rightarrow x + y = 12$ (II)

Substituindo o valor de y na equação (II):

$x + \dfrac{32}{x} = 12 \Rightarrow x^2 + 32 = 12x$

$x^2 - 12x + 32 = 0$

$x = \dfrac{-(12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32}}{2 \cdot 1}$

$x = \dfrac{12 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{12 \pm 4}{2}$

$x = \dfrac{12 + 4}{2} = 8$

$x = \dfrac{12 - 4}{2} = 4$

$S = \{8, 4\}$.

Se $x = 8$, então $y = 4$.

$x - y = 8 - 4 = 4$; 4 cm

Alternativa **c**.

7. $3x^2 + 9x - 120 = 0$

$x^2 + 3x - 40 = 0$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)}}{2 \cdot 1}$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}$

$x = \dfrac{-3 \pm 13}{2}$

$\begin{cases} x = \dfrac{-3 + 13}{2} = 5 \\ x = \dfrac{-3 - 13}{2} = -8 \end{cases}$

Alternativa **c**.

8. Chamemos de n o número de alunos e de p o valor que cada aluno vai pagar no torno mecânico. Todos os alunos:

$n \cdot p = 3\,600 \Rightarrow p = \dfrac{3\,600}{n}$ (I)

Menos os 8 alunos:

$(n - 8) \cdot (p + 75) = 3\,600$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$(n - 8) \cdot \left(\dfrac{3\,600}{n} + 75\right) = 3\,600$

$\dfrac{3\,600}{n} \cdot n + 75n - \dfrac{3\,600}{n} \cdot 8 - 600 =$
$= 3\,600$

$75n - \dfrac{3\,600}{n} \cdot 8 = 600$

$75n^2 - 3\,600 \cdot 8 = 600n$

$75n^2 - 600n - 3\,600 \cdot 8 = 0$

Dividindo os membros por 75:

$n^2 - 8n - 48 \cdot 8 = 0$

$n^2 - 8n - 384 = 0$

$n = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-384)}}{2 \cdot 1}$

$n = \dfrac{8 \pm \sqrt{1\,600}}{2} \Rightarrow n = \dfrac{8 \pm 40}{2}$

$n = \dfrac{8 + 40}{2} = 24$

$n = \dfrac{8 - 40}{2} = -16$

Pelo contexto, $n = 24$; 24 alunos.

Alternativa **d**.

9. Para calcular o lucro da empresa quando ela fabricar 4 000 camisetas, você pode usar a função $L(x)$ fornecida, em que “x” representa o número de lotes de 100 camisetas. Neste caso, desejamos encontrar o lucro quando x é igual a 4 000/100, ou seja, 40 lotes de 100 camisetas. Substitua esse valor na função $L(x)$:

$L(40) = 2\,500 \cdot 40 + 10 \cdot 40^2$

$L(40) = 100\,000 + 16\,000 = 116\,000$

Portanto, o lucro da empresa será de 116 000 unidades monetárias (a unidade de moeda não foi especificada na pergunta) quando ela fabricar 4 000 camisetas.

Alternativa **a**.

10. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$

Portanto, a coordenada de V é (2, –1).

$f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$

Portanto, a coordenada de P é (2, –1).

$y = ax + b$, então:

$$\begin{cases} 2a + b = -1 \\ 4a + b = 3 \end{cases}$$

$a = 2 \Rightarrow b = -5$

Logo, a reta intersecta o eixo y no ponto de ordenada –5.

Alternativa **e**.

11. Pelo gráfico, as raízes de $f(x)$ são –1 e 1, a é a altura dada por $P\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

$\frac{5}{2} = a \cdot (0 + 1)(0 - 1) = -\frac{5}{2}$

$f(x) = -\frac{5}{2} \cdot (x + 1)(x - 1)$

Substituindo no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$f(x) = -\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right)$

$f(x) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}$

Alternativa **c**.

12. $L(x) = -x^2 + 400x - 30\,000$

Para obter lucro: $L(x) > 0$

$-x^2 + 400x - 30\,000 > 0$

Resolvendo a equação do 2º grau obtida ao igualar o primeiro membro da inequação a zero, temos que as raízes são 100 e 300.

Analisando o sinal da função correspondente, obtemos que os valores de x que satisfazem a inequação pertencem ao intervalo (100, 300).

Alternativa **c**.

13. A arrecadação semanal original (R) do dono do lava-jato é: $R = 50 \cdot 20$. Se ele aumenta o preço em 1 real, ele perde 2 clientes; logo, após x aumentos de 1 real no preço, sua receita será de:

$R = (50 - 2x) \cdot (20 + x)$

$R = 1\,000 + 10x - 2x^2$

O valor máximo está na coordenada x do vértice dessa parábola, dada por:

$x_v = -\frac{10}{2(-2)}$

$x_v = 2{,}5$

$x_v = 2{,}5$

Para maximizar o lucro, deve-se aumentar o preço em R$ 2,50.

Alternativa **c**.

14.

a) Sabendo que o automóvel está a uma velocidade de 40 km/h, e que a variável v na fórmula é dada em km/h, precisamos apenas substituir seu valor e fazer os cálculos:

$d(v) = \frac{1}{120}(v^2 + 8v)$

$d(40) = \frac{1}{120}(40^2 + 8 \cdot 40)$

$d(40) = \frac{1\,920}{120} = 16$; 16 m

b) Nesse caso, temos a distância de frenagem e precisamos calcular a velocidade:

$53{,}3 = \frac{1}{120}(v^2 + 8v)$

$6\,384 = v^2 + 8v$

$v^2 + 8v - 6\,384 = 0$

$v = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6\,384)}}{2 \cdot 1}$

$v = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 25\,536}}{2}$

$v = \frac{-8 \pm \sqrt{25\,600}}{2}$

$v = \frac{-8 \pm 160}{2}$

$v = \frac{-8 + 160}{2} = 76$

$v = \frac{-8 - 160}{2} = -84$

Pelo contexto, $V = 76$; 76 km/h.

15. $N^2 - 17N + 16 > 0$

Cálculo das raízes da função correspondente:

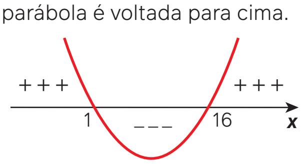
$N = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1}$

$N = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{2} \Rightarrow N = \frac{17 \pm 15}{2}$

$N = \frac{17 + 15}{2} = 16$

$N = \frac{17 - 15}{2} = 1$

Como $a = 1 > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima.



Tarcísio Garbellini

$S = \{N \in \mathbb{R} \,/\, \mathbb{N} < 1 \text{ ou } N > 16\}$

Portanto, entre os números disponíveis nas alternativas, o único que satisfaz a inequação é 17.

Alternativa **d**.

16. $f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$

$f(x) = a \cdot (x - (-2))(x - 1)$

$f(0) = a \cdot (0 + 2)(0 - 1)$

$f(0) = 2$

$2 = a \cdot (0 + 2)\,(0 - 1)$

$a = -1$

$f(x) = -1 \cdot (x + 2)(x - 1)$

$f(x) = -x^2 - x + 2$

$2x + 2 = -x^2 - x + 2$

$x^2 + 3x = 0$

$x \cdot (x + 3) = 0$

$x = 0$ ou $x = -3$

$y = 2 \cdot (-3) + 2$

$y = -4$

$a + b = -3 - 4 = -7$

Alternativa **b**.

17. $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$

$f(1) = 0$

$f(1) = 1^2 + p \cdot 1 + q$

$1^2 + p \cdot 1 + q = 0$

$p + q = -1$

$f(-1) = 4$

$f(1) = (-1)^2 + p \cdot (-1) + q$

$1 - p + q = 4$

$-p + q = 3$

$$\begin{cases} p + q = -1 \\ -p + q = 3 \end{cases}$$

$2q = 2 \Rightarrow q = 1$

Para encontrar p, substituímos em uma das equações:

$p + 1 = -1 \Rightarrow p = -2$

$f(x) = x^2 + p \cdot x + q$

$f(x) = x^2 - 2x + 1$

$f(10) = 10^2 - 2 \cdot 10 + 1 = 81$

Alternativa **b**.

18. $Q(p) = 200 - p$

$C(p) = 400 + 25 \cdot Q(p)$

$Q(p) = 150$

$150 = 200 - p \Rightarrow p = 50$

$C(50) = 400 + 25 \cdot 150$

$C(50) = 4\,150$; R$ 4 150,00

A arrecadação será:

$50 \cdot 150 = 7\,500$; R$ 7 500,00

O lucro será dado por:

$L = 7\,500 - 4\,150$

$L = 3\,350$; R$ 3.350,00

Alternativa **e**.

19. $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$

$f(x) = a + b + c$

Como (1, 0): $a + b + c = 0$

Alternativa **a**.

20. $2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50$

$A = x \cdot (50 - x) = -x^2 + 50x$

Podemos calcular o x do vértice para determinar a área máxima:

$x_v = -\frac{50}{2 \cdot (-1)}$

$x_v = 25$

Assim, $x = 25$ e $y = 25$.

Alternativa **d**.

21. $y = 9 - x^2$

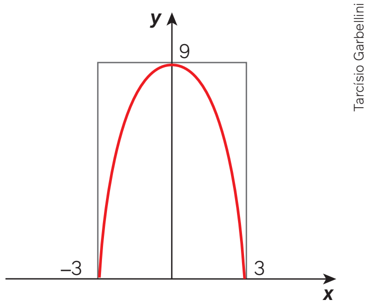
Para $x = 0$:

$y = 9 - 0^2 = 9$

Para $y = 0$:

$0 = 9 - x^2 \Rightarrow x^2 = 9$

$x_1 = 3$ e $x_2 = -3$



Área do retângulo:
$A = 6 \cdot 9 = 54$; 54 m²

Área sob a parábola:
$A = \frac{2}{3} \cdot 54 = 36$; 36m²

Alternativa **c**.

22. $f(t) = 1\,600 \Rightarrow 1\,600 = -2t^2 + 120t$
$2t^2 - 120t + 1\,600 = 0$
$t^2 - 60t + 800 = 0$
$t = \frac{-(-60) \pm \sqrt{(-60)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 800}}{2 \cdot 1}$
$t = \frac{60 \pm \sqrt{400}}{2} \Rightarrow t = \frac{60 \pm 20}{2}$
$t = \frac{60 + 20}{2} = 40$
$t = \frac{60 - 20}{2} = 20$
Portanto, a segunda dedetização ocorrerá no 20º dia.
Alternativa **b**.

23. Para avaliar o desempenho mensal da empresa deve-se verificar o menor montante diário V_0 arrecadado ao longo do mês
$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 105$
$\Delta = 100 - 105 = -5$
$y_v = -\frac{(-5)}{4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)}$
$y_v = 5$
Como $V_0 = 5$; então, temos que o desempenho foi classificado como RUIM: $4 \leq V_0 < 10$.
Alternativa **d**.

24. Seja V o valor total gasto e P o preço do bombom.
$V = P \cdot x$ (I)
Cada bombom custa R$ 2,00; já, na promoção, o cliente tem x% de desconto na compra de x bombons [com $x \leq 40$]. Podemos escrever a seguinte expressão para o preço P:
$P = 2 - \left(\frac{x}{100} \cdot 2\right)$
$P = 2 - \frac{x}{50}$ (II)
Substituindo II em I, temos:
$V = \left(2 - \frac{x}{50}\right) \cdot x \Rightarrow V = 2x - \frac{x^2}{50}$
Alternativa **c**.

25. Seja a função $N(t) = at + b$
$N(0) = 22,5$
$22,5 = 0 \cdot a + b \Rightarrow b = 22,5$
$N(t) = at + 22,5$
Agora, podemos descobrir o valor do coeficiente a da função, aplicando o ponto (2, 18,7).
$N(2) = a \cdot 2 + 22,5$
$a \cdot 2 + 22,5 = 18,7 \Rightarrow a = -1,9$
$N(t) = -1,9t + 22,5$
Agora vamos calcular $N(t) < 10$:
$-1,9t + 22,5 < 10$
$-1,9t < 10 - 22,5 \Rightarrow t > 6,6$
A taxa de mortalidade será menor que 10 entre:
$2015 < 2009 + 6,6$ anos < 2016
Alternativa **d**.

26. Dada a função $V(x) = K^2(R^2 - x^2)$, podemos desenvolvê-la:
$V(x) = K^2R^2 - K^2x^2$
A parábola apresenta os seguintes coeficientes:
$a = -K^2$; $b = 0$, $c = K^2R^2$
$x_v = -\frac{0}{2(-K^2)}$
$x_v = 0$
Alternativa **a**.

27. Pela análise gráfica, temos o intervalo da função: $\{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 \leq x \leq x_2\}$. Sendo x_2 a raiz positiva de $f(x)$.
Alternativa **b**.

CAPÍTULO 6

Geometria Plana

Objetivos

- Compreender relações para o cálculo de perímetros e áreas de figuras planas.
- Empregar diferentes métodos no cálculo de medidas de superfície.
- Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de perímetros e áreas de polígonos.
- Identificar semelhanças entre figuras geométricas planas.
- Identificar polígonos regulares.
- Estabelecer relações entre ângulos de um polígono regular.
- Utilizar o conceito de ângulo para elaborar e resolver problemas de ladrilhamento no plano.

Justificativa

Neste capítulo serão retomados alguns conceitos e algumas propriedades trabalhados no Ensino Fundamental, de modo a possibilitar o aprofundamento e a ampliação do estudo tanto da Geometria quanto de Grandezas e medidas. As diferentes estratégias para obtenção do perímetro e da área de uma superfície plana possibilitam a modelagem e resolução de problemas reais, nos mais diversos contextos. O trabalho com medidas de ângulos de um polígono regular possibilita a exploração de diferentes formas de ladrilhamento de uma região plana.

Competências gerais

Competência geral 1: No texto da página 240, o estudante pode conhecer como o conceito de semelhança foi usado por Tales de Mileto para medir a grande pirâmide do Egito. Em seguida, na atividade resolvida 5 dessa mesma página, os estudantes analisam como a ideia de Tales foi utilizada para explicar o procedimento por meio do qual foi resolvido um problema proposto. Desenvolvem assim essa competência, valorizando e utilizando os conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar a realidade.

Competências gerais 2, 4 e 9: Essas competências são mobilizadas de diversas maneiras e em diversas oportunidades. Na seção **Para explorar** da página 241, por exemplo, os estudantes, em grupos, utilizam um *software* de edição de imagens para fazer ampliações e reduções em diversas situações, identificando os elementos que se modificam e aqueles que se mantêm constantes em cada caso. Com base nessa experiência, concluem quais são as condições para que dois polígonos sejam semelhantes. Desenvolvem assim a **competência 2**, uma vez que exercitam a curiosidade intelectual por meio da investigação, da reflexão, da análise crítica, da imaginação e da criatividade. Como utilizam diversas linguagens, por exemplo, a verbal, a visual, a digital e a matemática, mobilizam também a **competência 4**. Por trabalharem em grupos, exercitam a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, desenvolvendo também a **competência 9**.

Competência geral 6: Os estudantes valorizam a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriam-se de conhecimentos e experiências que lhes possibilitam entender as relações próprias do mundo do trabalho ao resolver as atividades propostas na seção **Análise e contexto** das páginas 267 e 268, quando conhecem algumas técnicas utilizadas por povos do campo para a demarcação de terras e para o cálculo de grandes áreas (cubagem), respectivamente. Eles resolvem alguns problemas por meio dessas técnicas e entrevistam profissionais que utilizam a matemática não formal em seu trabalho.

Competências gerais 5 e 7: Na seção **Para explorar** da página 249, os estudantes utilizam um *software* de geometria dinâmica para experimentar a construção de polígonos e determinar as medidas de seus ângulos internos e externos. Em seguida, elaboram um texto em que apresentam argumentos matemáticos para justificar regularidades encontradas na soma das medidas dos ângulos internos e externos de um polígono. Como utilizam uma tecnologia digital de forma significativa e reflexiva para produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo, desenvolvem a **competência 5**. Ao utilizarem a argumentação embasada em fundamentos geométricos para defender suas ideias, os estudantes desenvolvem também a **competência 7**.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 2

EM13MAT201: Essa habilidade está contemplada no texto da página 257 e na seção **Para pensar e discutir**, da página 258, em que os jovens estudam sobre o que são áreas de preservação permanente e de preservação ambiental. Depois, no item 5 da seção **Análise e contexto**, página 268, elaboram uma proposta de preservação para uma área no entorno da escola usando as aprendizagens do capítulo.

Competência específica 3

EM13MAT307: Essa habilidade é desenvolvida por meio das atividades das páginas 260 a 263, em que são desenvolvidos diversos métodos para a obtenção da área de uma superfície. Por exemplo, na página 261, os estudantes conhecem um método para estimar a área de uma região transportando a vista aérea (ou a planta da região) para um papel quadriculado, calculando, em seguida, a quantidade de quadrados contidos na imagem. Eles utilizam esse método para estimar a área da Lagoa Rodrigo de Freitas, no Rio de Janeiro.

EM13MAT308: Essa habilidade é contemplada nas páginas 237 a 242, em que o conceito de semelhança de polígonos é utilizado na elaboração e resolução de problemas em diversos contextos, envolvendo, inclusive, a semelhança de triângulos.

Competência específica 5

EM13MAT505: Na seção **Para pensar e discutir** da página 243, os estudantes elaboram hipóteses sobre as possibilidades de se cobrir um piso utilizando polígonos e as justificam utilizando as medidas de seus ângulos. Na seção **Para explorar** da página 253, utilizam um *software* de geometria dinâmica para experimentar, entre vários polígonos regulares, aqueles que possibilitam resolver o problema de “forrar” completamente o plano em torno de um ponto. Essa habilidade também é desenvolvida por meio das atividades das páginas 255 e 256.

Conexões com outras áreas do conhecimento

Há uma conexão com Língua Portuguesa na seção **Para explorar** da página 236, quando os estudantes elaboram o roteiro de um *podcast* contando como os idosos se sentem em relação a seus direitos.

Temas Contemporâneos Transversais

- O TCT **Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras** é mobilizado na seção **Análise e contexto** das páginas 267 e 268, quando os estudantes conhecem algumas técnicas utilizadas por povos do campo para a demarcação de terras e para o cálculo de grandes áreas (cubagem), respectivamente. Eles resolvem alguns problemas por meio dessas técnicas e entrevistam profissionais que utilizam a matemática não formal no trabalho.
- O TCT **Educação para o trânsito** está contemplado na introdução do capítulo, na página 231, quando os estudantes discutem como a Matemática está presente nas regras de trânsito. Está presente também nas atividades da página 233, quando retomam o conceito de ângulo, e no infográfico da página 235, quando refletem acerca da finalidade das faixas de pedestres, das vantagens e desvantagens das possíveis posições das vagas e da existência das vagas preferenciais.
- O TCT **Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso** está contemplado na seção **Para explorar** da página 236, quando, com base no infográfico da página anterior, os estudantes pesquisam os direitos dos idosos, os entrevistam sobre como se sentem em relação a seus direitos e elaboram o roteiro de um *podcast* contando sobre essa entrevista.

Resoluções e comentários

Página 231

Abertura

1. Alguns exemplos: linhas paralelas formando a faixa de pedestres; cálculo do tempo de abertura dos sinais dependendo do movimento da via; definição do ângulo formado pelas vagas de estacionamento e a calçada; definição do ângulo das rampas de acessibilidade, entre outros.
2. Peça aos estudantes que pensem individualmente sobre cada uma das questões e anotem as respostas. Em seguida, solicite que as

discutam em duplas ou em pequenos grupos. Promova, então, uma discussão com toda a turma, de modo que cada dupla/grupo possa apresentar suas ideias. Você pode desenvolver, com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas uma pesquisa sobre o tema, considerando as ideias que surgirem. Esta abertura contempla o Tema Contemporâneo Transversal: Educação para o Trânsito.

1. Conceitos de Geometria Plana

Página 232

Para pensar e discutir

Outras obras de arte que apresentam elementos geométricos podem ser utilizadas para o trabalho em sala de aula. Os estudantes podem pesquisar obras com essas características e, posteriormente, analisá-las.

1. Quadrados e retângulos.

2. Sim. Existem linhas paralelas.

3. Sim. Existem linhas perpendiculares.

Página 233

Para pensar e discutir

1. Espera-se que os estudantes percebam que a área de circulação dos carros seria menor, com o risco de inviabilizar o funcionamento do estacionamento.

2. Sim, para as duas perguntas, pois as duas têm a mesma inclinação e não se encontram em nenhum ponto; logo, elas são paralelas.

3. Para medi-los, recomenda-se o uso de transferidor e compasso. Os resultados obtidos devem ser, aproximadamente, 45° e 135°, respectivamente.

Página 235

Infográfico

1. Espera-se que os estudantes comentem que é a região destinada aos pedestres para atravessarem as ruas com segurança.

2.

a) A vantagem da vaga inclinada é que ela ocupa menos espaço no local onde os carros passam.

b) Resposta esperada: a vaga paralela à calçada é mais utilizada em ruas estreitas para que os carros tenham espaço para manobrar.

3.

a) Os estudantes podem constatar no entorno da escola.

b) O carro deve ter identificação correspondente e a pessoa condutora deve ser a mesma do documento de identificação do veículo.

c) Aqui você pode conduzir uma roda de conversa para colher e debater as respostas dos estudantes e as propostas apresentadas por eles.

Você pode disponibilizar para consulta o *site*: https://www.jusbrasil.com.br/artigos/vaga-de-estacionamento-para-deficientes-o-que-precisamos-saber/327035863. Acesso em: 3 out. 2024.

Página 236

Para explorar

As **atividades 1** e **2** têm o objetivo de apresentar aos estudantes os direitos dos idosos. A pesquisa pode indicar que é comum os próprios idosos não conhecerem seus direitos. Quanto à produção do *podcast*, você pode solicitar a participação do docente de Língua Portuguesa. Esta é uma forma de os estudantes tirarem conclusões e até indicarem soluções para que as pessoas, de modo geral, e a população da terceira idade conheçam e respeitem os direitos dos idosos.

Atividades

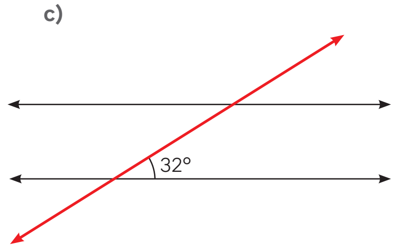
Com essas atividades, você pode verificar o conhecimento prévio dos estudantes em relação às medidas de ângulos, assunto que já foi abordado nos Anos Finais do Ensino Fundamental, e fazer as retomadas necessárias.

1.

a) Ângulos cuja soma das medidas resulta em 90°.

b) Ângulos cuja soma das medidas resulta em 180°.

c)

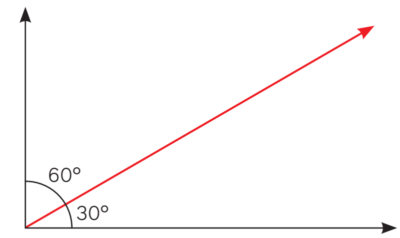


Acervo editora

d) São duas medidas diferentes: 32° e 148°.

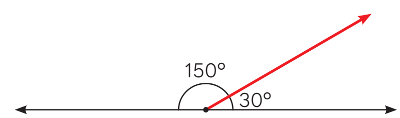
2.

a) Os dois ângulos deverão ter como soma de suas medidas 90°.



Acervo editora

b) Os dois ângulos deverão ter como soma de suas medidas 180°.



Acervo editora

3. Essa atividade pode ser expandida para que os estudantes observem as relações entre graus, minutos e segundos. No item **c**, atente-se ao procedimento para converter a medida para notação mista. Se necessário, peça aos estudantes que expliquem os processos usados na resolução.

a) Seja x a quantidade de minutos.

$$\frac{1}{\frac{1}{10}} = \frac{60}{x}$$

$$1 \cdot x = \frac{1}{10} \cdot 60 \Rightarrow x = 6;\ 6'$$

b) $90° = 22{,}5° + x \Rightarrow x = 67{,}5°$

Logo, o valor do ângulo complementar de 22,5° é 67,5°.

$$\frac{1}{y} = \frac{60}{45}$$

$$60 \cdot y = 1 \cdot 45 \Rightarrow y = 0{,}75;\ 0{,}75°$$

Ou seja, $22°45' = 22{,}75°$.

$$90° = 22{,}75° + z \Rightarrow z = 67{,}25°$$

Agora, temos que converter 0,25° em minutos:

$$\frac{1}{0{,}25} = \frac{60}{w}$$

$$1 \cdot w = 60 \cdot 0{,}25 = 15;\ 15'$$

Portanto, o valor do ângulo complementar de 22° 45′ é 67° 15′.

c) $4\,210'' = 3\,600'' + 600'' + 10'' =$
$= 1°\ 10'\ 10''$

4.

a) Espera-se que os estudantes deem exemplos, como: a intersecção das linhas, de uma mesma parede, formada pela parede e o teto e pela parede e o chão.

b) Espera-se que os estudantes deem exemplos, como: duas linhas do retângulo correspondente a uma porta que se encontram em um canto dela.

5.

a) 180°. Interpretando o centro da rosa dos ventos como a origem de um plano cartesiano, são necessárias rotações de 90° para chegar no eixos.

b) 45°. Interpretando o centro da rosa dos ventos como a origem de um plano cartesiano, para chegar em O seria 90°, como NO está na metade da rotação, então 45°.

6.

a) 90°

b) Pode ser na “direção” nordeste (NO) ou na “direção” sudoeste (SO).

7.

a) 90° (às 15 h) e 120° (às 16 h). Espera-se que os estudantes compreendam que dois números consecutivos do relógio (que indicam horas) são extremidades de um arco de 30°.

b) Respectivamente 360° e 30°.

c) Respectivamente 15° e 180°.

Página 237

Para pensar e discutir

1. Ampliação e redução, para a Geometria, é quando uma figura aumenta ou diminui, respectivamente, mantendo as proporções entre as partes. Por exemplo: uma folha no formato A4 é uma redução de uma folha no formato A2, assim como uma folha A2 é uma ampliação de uma folha A4.
2. $A = (4{,}12 \cdot 2{,}51) + (2{,}95 \cdot 3{,}85) +$
$+ (3{,}05 \cdot 3{,}21) + (1{,}65 \cdot 2{,}7) +$
$+ (1{,}05 \cdot (1{,}85 + 2{,}7)) =$
$= 10{,}3412 + 11{,}3575 + 9{,}7905 +$
$+ 4{,}455 + 4{,}7775 = 40{,}7217;$
$40{,}72;\ A \cong 40{,}72\ \text{m}^2$

Página 239

Mapa interativo – Geometria e arte

Apresente o mapa "Geometria e arte" aos estudantes, que mostra a relação entre Matemática e obras de arte. Ele permite explorar como artistas como Picasso, Van Gogh, Mondrian, Da Vinci e Kandinsky aplicaram conceitos geométricos.

Página 240

Para pensar e discutir

1. Sim. Os ângulos correspondentes são congruentes.
2. Sim, é o critério lado-ângulo-lado. Sugira aos estudantes que investiguem e justifiquem com exemplos.

Páginas 241-242

Para explorar

1. Para os itens **a** e **b**, espera-se que os estudantes garantam as proporções sem distorcer a imagem.

   c) Espera-se que os estudantes percebam que os lados correspondentes não são proporcionais.

2.

a) Os lados devem ter medidas duplicadas.

b) Os lados devem ter medidas reduzidas à metade.

3.

a) Sim. Os três ângulos internos medem sempre 60°.

b) Não. Solicite aos estudantes que construam os triângulos isósceles para exemplificar.

c) Sim. Sugira aos estudantes que construam os quadrados.

d) Não. Solicite aos estudantes que construam os retângulos para exemplificar. Dois retângulos podem ter o mesmo comprimento e alturas diferentes.

e), f) e g) Sim. Incentive os estudantes a desenhar as figuras correspondentes.

Atividades

8.

a) Sim. Os três ângulos são congruentes.

b) $\dfrac{18}{y} = \dfrac{12}{9} \Rightarrow y = 13{,}5;\ 13{,}5$ cm

$\dfrac{12}{9} = \dfrac{x}{18} \Rightarrow x = 24;\ 24$ cm

Portanto, $x = 24$ cm e $y = 13{,}5$ cm.

9.

a) A razão de semelhança é $\dfrac{1}{2}$.

b) Sim. A razão de semelhança será a mesma, conforme a ordem em que considerarmos os perímetros.

10.

a) Sim. Dois quadrados quaisquer sempre são semelhantes.

b) $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. A razão entre os lados dos quadrados 1 e 2 é $\dfrac{2}{3}$.

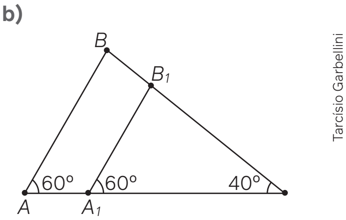
- $\dfrac{2}{3}$. A razão é a mesma da razão entre os lados, uma vez que são semelhantes.
- $\dfrac{2}{3}$. A razão é a mesma da razão entre os lados, uma vez que eles são semelhantes (não é necessário calcular os perímetros para, então, dividi-los).
- $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$. A razão entre as áreas é o quadrado da razão entre as medidas de comprimento quando temos duas figuras semelhantes. Os estudantes poderão aqui justificar a partir da razão entre as áreas.

11.

a) O triângulo deverá ter o ângulo de 30° entre os lados, com medidas 14 cm e 20 cm.

As medidas são suficientes. Embora os alunos não precisem conhecer essas denominações, eles aplicaram um caso de semelhança conhecido como lado-ângulo-lado (L-A-L).

b)



As medidas dadas são suficientes. Embora os estudantes não precisem saber tais denominações, aqui eles utilizaram um caso de semelhança que é conhecido como ângulo-ângulo (A-A) ou ângulo- ângulo-ângulo (A-A-A).

12.

a) Significa que cada medida de 1 cm no desenho corresponde a 2 000 cm da imagem real.

b) Uma ideia seria que os estudantes verificassem, com a régua, que a altura do triângulo, relativamente ao lado de 4,5 cm de comprimento, mede aproximadamente 1,25 cm, o que, conforme a escala, corresponde a 25 m na medida real. Assim, a área é dada por:

$A = \dfrac{25 \cdot 90}{2} = 1\,125$; $1\,125\ m^2$

13. Espera-se que os estudantes relacionem a ideia de escalas com o conteúdo de ampliação e redução visto anteriormente e/ou utilizem o conteúdo de semelhança de triângulos para determinar medidas de comprimento dos segmentos de reta e ângulos.

14. Auxilie os estudantes a medir com precisão e a efetuar os cálculos necessários.

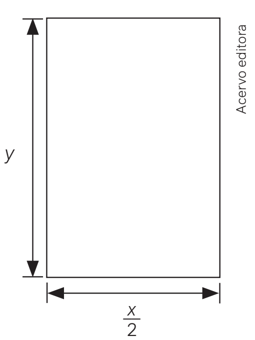
15. Os triângulos *ABC* e *AED* são semelhantes, pois possuem dois ângulos de mesma medida (ângulo reto e $A\hat{D}E \equiv A\hat{C}D$, pelo paralelismo de $\overline{BC}$ e $\overline{ED}$, os quais estão garantidos pelo retângulo *BFDE*). Logo:

$\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{ED}{BC} \Rightarrow AE = 4{,}8$; 4,8 cm

$BE = AB - AE \Rightarrow BE = 3{,}2$; 3,2 cm

Alternativa **d**.

16. Ao dobrar a folha de papel na direção indicada, a folha terá as seguintes medidas:



Sabendo que as medidas originais eram *y* por *x*, usando a regra de três, temos:

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{\frac{x}{2}}$

$x \cdot \dfrac{x}{2} = y \cdot y \Rightarrow \dfrac{x^2}{2} = y^2 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x^2}{2}} = y$

$x = y\sqrt{2}$

Alternativa **b**.

17. $\dfrac{40}{1{,}7} = \dfrac{18}{x}$

$40 \cdot x = 1{,}7 \cdot 18 \Rightarrow x = 0{,}765$; 0,765 m = = 76,5 cm

Alternativa **d**.

2. Polígonos e ângulos

Página 243

Para pensar e discutir

Sugerimos deixar que, em grupos, os estudantes discutam as respostas antes de abordar o assunto seguinte.

1. Sim. Os encontros de três hexágonos resultam, em torno do ponto, na soma de três ângulos de 120°.
2. Sim. Seis triângulos posicionados de forma adjacente e um vértice de cada triângulo resultam em seis ângulos de 60°, ou seja, 360°.
3. Não. Cada ângulo interno do pentágono regular mede 108°, que não é divisor de 360°.
4. Os ângulos internos desses polígonos decompõem o ângulo de 360°. Ou seja, dois octógonos e um quadrado resultam em: $2 \cdot 135° + 90° = 360°$.

Página 245

Vídeo – Teodolito

Apresente o vídeo "Teodolito" para os estudantes, que explica como esse equipamento é utilizado na engenharia civil e na topografia para medir ângulos com precisão. Por também explorar o funcionamento do teodolito, mostrando como ele é nivelado e utilizado para calcular distâncias e diferenças de altura, o vídeo integra conceitos de trigonometria e aplicação prática em construções.

Página 246

Para pensar e discutir

1. Sim, espera-se que os estudantes desenhem os polígonos com triângulos internos, recortem os triângulos para medir os ângulos internos com o transferidor e remontem o polígono para observar a decomposição dos ângulos.
2. Quadrilátero: 360°. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo resulta 180°. Há dois triângulos em um quadrilátero. Logo, $180° \cdot 2 = 360°$.

   pentágono: $180° \cdot 3 = 540°$;

   hexágono: $180° \cdot 4 = 720°$.
3. Em 10 triângulos. A soma resulta $1\,800° = 180° \cdot 10$.
4. Em 13 triângulos. A soma resulta $2\,340° = 180° \cdot 13$.

Página 247

Para pensar e discutir

1. Mudar de direção é a rotação do ângulo externo do polígono, retornando ao ponto inicial, o que gera um giro de 360°. Nas **atividades 2** e **3**, os ângulos são suplementares, isto é, a soma das medidas é 180°.

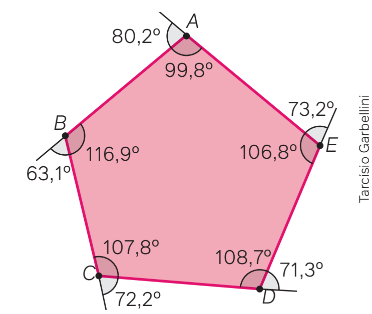
Páginas 249-251

Para pensar e discutir

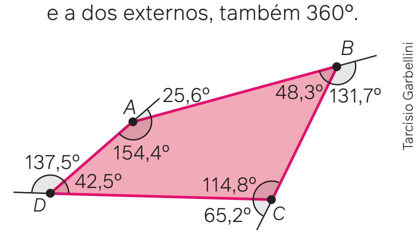
1. Cada ângulo externo tem medida 360° dividido por 20, isto é, 18°. Como o ângulo interno e o externo são suplementares, basta fazer $180° - 18° = 162°$.

Para explorar

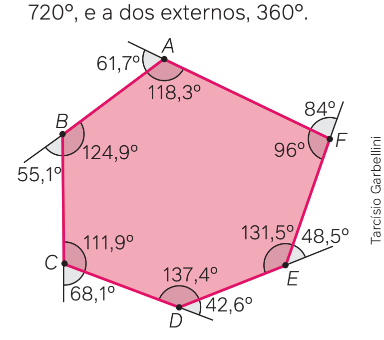
1. Espera-se um modelo cuja soma dos ângulos internos resulte 540°, e a dos externos, 360°.



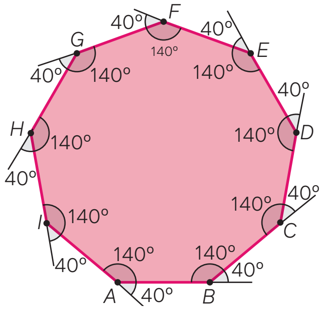
2. Espera-se um modelo cuja soma dos ângulos internos resulte 360°, e a dos externos, também 360°.



3. Espera-se um modelo cuja soma dos ângulos internos seja igual 720°, e a dos externos, 360°.



4. Espera-se um modelo cuja soma dos ângulos internos seja 1 260°, e a dos externos, 360°.



Tarcísio Garbellini

5. Quanto à soma das medidas dos ângulos internos, espera-se que os estudantes argumentem suas respostas com base na soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Quanto à soma das medidas dos ângulos externos, eles podem usar, por exemplo, a soma das medidas dos suplementos dos ângulos internos. Promova uma discussão sobre os argumentos apresentados.

Atividades

18.

a) 7 lados

b) 5 triângulos

c) 180°

d) 900° = 180° · 5

19.

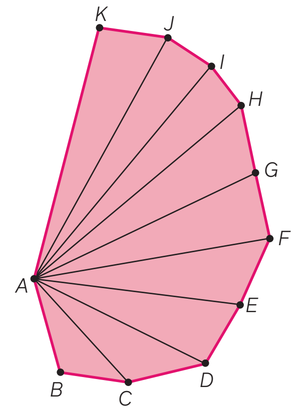
a) O número de lados coincide com o número de triângulos.

b) Não. Observe que o ponto no interior do polígono é o vértice em comum com todos os triângulos, e que os ângulos formados por esse vértice pertencem aos triângulos, mas não ao polígono.

c) Espera-se que os estudantes relacionem a soma de 180° dos ângulos internos dos triângulos vistos anteriormente e percebam que é possível excluir o excesso das medidas de ângulos visto no item **b**. Logo, a soma dos ângulos internos de todos os triângulos resulta 1 260°; 360° corresponde à soma dos ângulos em torno do vértice comum a esses triângulos situados no centro do polígono. Portanto, a resposta é 900° = 1 260° – 360°.

20. I – III

1 620° = 180° · 9. Espera-se que os estudantes encontrem a soma de 1 620° para as medidas dos ângulos internos. A imagem mostra um exemplo de construção geométrica por meio da qual eles podem verificar o resultado informado.

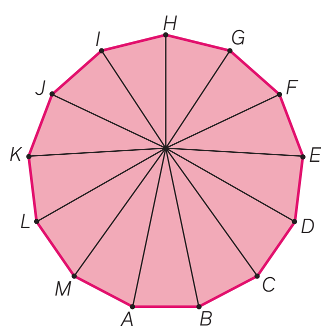


Tarcísio Garbellini

IV – VI

1 980° = (180° · 13) – 360°

Espera-se que os estudantes percebam que os ângulos internos do polígono são decompostos pelos ângulos internos dos triângulos. Na imagem, veja um exemplo de construção geométrica por meio da qual eles podem verificar o resultado informado.



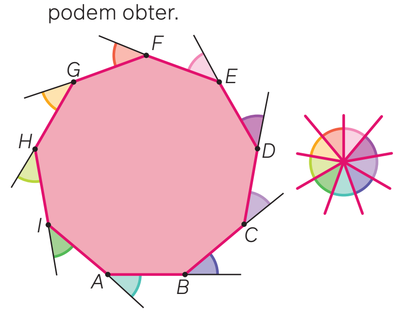
Tarcísio Garbellini

21.

a) $S_8 = (8 - 2) \cdot 180° = 1\,080°$

b) $S_{10} = (10 - 2) \cdot 180° = 1\,440°$

22. Espera-se que, no item **IV**, os estudantes percebam, por construção, o resultado de 360° da soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono convexo. Na imagem, há um exemplo do que podem obter.



Tarcísio Garbellini

23. Seja x o valor do ângulo procurado.

$x + 1\,900° = (n - 2) \cdot 180°$

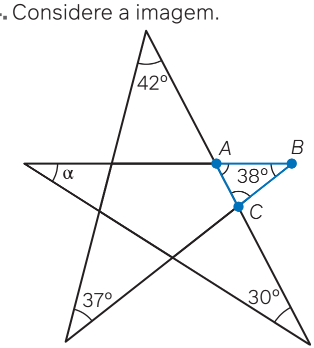
$x = 180°n - 2\,260°$

Como x é uma medida positiva, então os n que satisfazem à equação são $n \geq 13$. Para $n = 13$,

$x = 180° \cdot 13 - 2\,260° = 80°$

Alternativa **d**.

24. Considere a imagem.



Tarcísio Garbellini

Considere o triângulo ABC com as medidas angulares:

$\hat{A} = 30° + \alpha$; $\hat{C} = 37° + 42°$ e

$\hat{B} = 38°$.

Pela soma dos ângulos internos de triângulos, temos:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} =$

$= 30° + \alpha + 37° + 42° + 38° = 180°$

$\alpha = 33°$

Alternativa **b**.

25. A soma das medidas dos ângulos internos de um hexágono convexo resulta 720°. Temos três ângulos retos cuja soma resulta 270°.

Logo, 720° – 270° = 450°. Portanto, um hexágono tem seis ângulos internos com três ângulos retos e outros três com medidas y.

Assim, $y = \dfrac{450°}{3} = 150°$

Alternativa **b**.

26. Soma dos ângulos internos de um pentágono:

$4x - 40° + 2x + 30° + \dfrac{5}{2}x$

$+ 2x + 2x + 50° = (5 - 2) \cdot 180°$

$x = 40°$

Alternativa **b**.

27. Os encontros das ruas formam um quadrilátero convexo e não regular. Logo, a soma dos ângulos internos resulta 360°. Portanto:

$x = 360° - 90° - 110° - 100° = 60°$

Alternativa **b**.

28. A soma dos ângulos externos de um polígono convexo de n lados é 360°, e a soma dos ângulos internos desse polígono é dada por

$S_n = (n - 2) \cdot 180°$. Assim, temos:

$S = S_n + 360°$

$980° = (n - 2) \cdot 180° + 360° \Rightarrow n = 11$ lados

Alternativa **b**.

29. O polígono da figura dada possui 7 lados. Assim, substituindo na fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono, temos: $S_7 = (7 - 2) \cdot 180° \Rightarrow S_7 = 900°$.

Alternativa **b**.

30. Seja $S = 2\,160°$ a soma dos ângulos internos dos polígonos cujos lados são $n - 2$, n, $n + 2$.

Então, S é dado por: $S = n - 2 + n + n + 2$

$2\,160° = [(n - 2) - 2] \cdot 180° + (n - 2) \cdot 180° + [(n + 2) - 2] \cdot 180°$

$n = 6$. Portanto, os polígonos em questão possuem lados iguais a 4, 6 e 8. Ou seja, são um quadrado, um hexágono e um octógono.

Alternativa **b**.

Página 252

Para pensar e discutir

1. Espera-se que os estudantes, por meio da decomposição da figura em triângulos, façam o cálculo da soma das medidas dos ângulos internos e dividam essa soma pela quantidade de ângulos.

$x = \dfrac{720°}{6} = 120°$

2. Resposta análoga à do item anterior.

Octógono: $x = \dfrac{1\,080°}{8} = 135°$

Quadrado: $x = \dfrac{360°}{4} = 90°$

3. Sim. No triângulo equilátero, os lados têm a mesma medida e os ângulos têm a mesma medida.

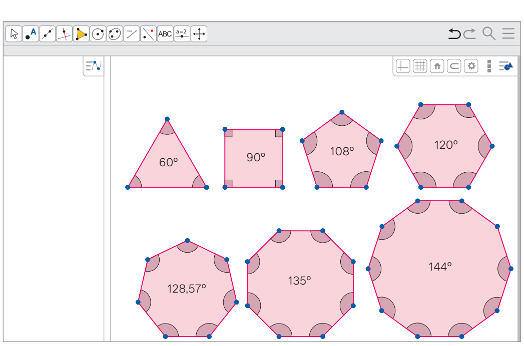
4. Não, pois podemos ter um hexágono com os seis lados de mesma medida e os ângulos internos com medidas não necessariamente iguais. Sugerimos propor aos estudantes que o construam com seis palitos de mesmo tamanho para perceber esse fato.

Página 253

Para explorar

1. As medidas são: 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, 8°, 9°, 10°, 12°, 15°, 18°, 20°, 24°, 30°, 36°, 40°, 45°, 60°, 72°, 90°, 120°, 180° e 360°.

2.



Reinaldo Vignati

3.

Polígono	Número de lados	Soma dos ângulos internos	Medida do ângulo interno
Triângulo	3	180°	60°
Quadrado	4	360°	90°
Pentágono	5	540°	108°
Hexágono	6	720°	120°
Heptágono	7	≅ 900°	≅ 128,6°
Octógono	8	1 080°	135°
Decágono	10	1 440°	144°

4. São divisores de 360° as medidas 60°, 90° e 120°.

5. Como triângulos, quadrados e hexágonos (todos regulares) têm medidas dos ângulos internos como divisores de 360°, isso possibilita "forrar" completamente o plano em torno de um ponto com 6 triângulos, 4 quadrados e 3 hexágonos, respectivamente.

Páginas 255-256

Atividades

Estas atividades podem ser resolvidas em duplas.

31.

a) A soma das medidas dos ângulos internos dos dois hexágonos com a medida do ângulo interno do pentágono não corresponde a 360°.

b) A medida $x = 360° - 108° - (2 \cdot 120°) = 12°$.

32.

a) $\dfrac{360°}{10°} = 36$; 36 lados

$P = 36 \cdot 2 = 72$; 72 cm

b) $\dfrac{360°}{60°} = 6$; 6 lados

$P = 6 \cdot 2 = 12$; 12 cm.

c) Seja n o número de lados

$180 = n \cdot 2 \Rightarrow n = 90$; 90 lados

$\theta = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow \theta = \dfrac{360°}{90} = 4°$

d) Análogo ao item anterior, ou seja, 30 lados e 12°.

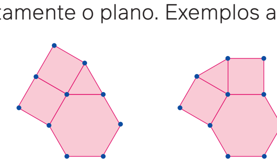
33. Não. O ângulo interno de octógono regular mede 135°, e o ângulo interno do hexágono regular mede 120°. Por outro lado, o ângulo interno do pentágono regular mede 108°. Ao adicionarmos essas três medidas, teremos 363°, que superam em 3° a medida de 360°. Portanto, ocorrem sobreposições de peças.

34.

a) Tem-se para o hexágono, o quadrado e o triângulo equilátero, respectivamente, as medidas dos ângulos internos 120°, 90° e 60°.

$120° + 2 \cdot 90° + 60° = 360°$

b) Os estudantes podem verificar que é possível forrar completamente o plano. Exemplos a seguir.



Tarcisio Garbellini

35. Espera-se que os estudantes utilizem a criatividade. Combine com eles a forma de apresentação.

36. $S_i = (7 - 2) \cdot 180° = 5 \cdot 180° = 900°$

Alternativa **b**.

37. Seja x o ângulo externo

$180° = x + \frac{7}{2} \cdot x \Rightarrow \frac{9}{2} \cdot x = 180°$

$x = \frac{180° \cdot 2}{9} = 40°$

Cálculo do número n de lados:

$x = \frac{360°}{n} \Rightarrow 40° = \frac{360°}{n}$

$n = \frac{360°}{40°} \Rightarrow n = 9$; 9 lados

Alternativa **e**.

38. Ângulo interno:

$60° + 40° + 60° = 160°$

Ângulo externo:

$180° - 160° = 20°$

Seja e o ângulo externo e n o número de lados.

$e = \frac{360°}{n} \Rightarrow 20° = \frac{360°}{n}$

$n = \frac{360°}{20°} \Rightarrow n = 18$; 18 lados

Alternativa **e**.

3. Medidas de superfícies

Página 258

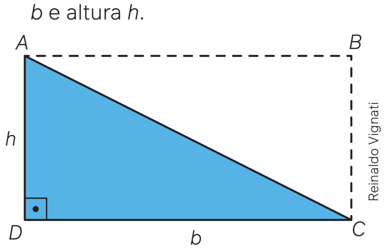
Para pensar e discutir

1. Aproveite para falar com os estudantes sobre preservação ambiental, em caso de ausência de área específica no município. É importante que compreendam de onde vem a água que abastece as casas, como a "represa" é conservada etc.
2. Espera-se que os estudantes respondam que a medida de superfície está relacionada com as unidades de medida de comprimento ao quadrado. São unidades de superfície: metro quadrado, centímetro quadrado, quilômetro quadrado, hectare, alqueire e outras.
3. $1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2 \Rightarrow 20 \text{ ha} = 200\,000 \text{ m}^2$

Página 259

Para pensar e discutir

1. Seja um triângulo $ABCD$, com base b e altura h.



$A_{\text{retângulo}} = 2A_{\text{triângulo}}$

$A_{\text{triângulo}} = \frac{A_{\text{retângulo}}}{2} = \frac{h \cdot b}{2}$

Página 260

Atividades

39.

a) Perímetro do quadrado:

$P = 4x$.

Com o dobro do lado:

$P = 4 \cdot (2x) = 8x$

O perímetro dobra.

b) Área do quadrado:

$A = x^2$

Com o dobro do lado: $A = (2x)^2 =$
$= 4x^2$

A área quadruplica.

40.

a) O triângulo AMB que está dentro do retângulo é um triângulo retângulo com hipotenusa 5, e um dos lados é igual a 3.

$MB^2 = AM^2 + AB^2$

$5^2 = 3^2 + AB^2 \Rightarrow AB = 4$; 4 cm

b) $A_{ABCD} = 6 \cdot 4 = 24$; 24 cm²

c) $A_{BCM} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$; 12 cm²

41. $A = \frac{32 \cdot 24}{2} = 384$; 384 m²

$384 \cdot 4{,}50 = 1\,728$; R$ 1.728,00

42. $A = (5 + 2x) \cdot (10 + 2x) = 4x^2 + 30x + 50$

Área ocupada pela piscina:

$A = 10 \cdot 5 = 50$; 50 m²

Área do revestimento de pedra:

$4x^2 + 30x + 50 - 50 = 87{,}75$

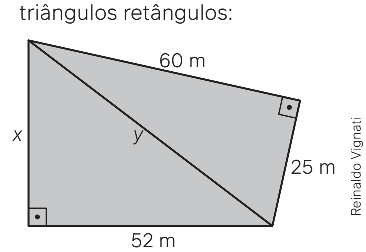
Resolvendo a equação:

$x = -\frac{78}{8}$

ou $x = \frac{18}{8} = 2{,}25$

Pelo contexto, $x = 2{,}25$; 2,25 m.

43. O terreno pode ser dividido em dois triângulos retângulos:



$y^2 = 60^2 + 25^2 \Rightarrow y = 65$

$y^2 = 52^2 + x^2 \Rightarrow 4\,225 = 2\,704 + x^2$

$x = 39$

$A = \frac{52 \cdot 39}{2} + \frac{60 \cdot 25}{2} = 1\,764$;

1 764 m²

Alternativa **b**.

44. $2 \cdot 2 \cdot (2 + x) = x^2$

$x^2 - 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{3}$

$x = 2 + 2\sqrt{3}$

$x = 2 - 2\sqrt{3}$

Como $\sqrt{3}$ é maior que 1, pelo contexto, $x = 2 + 2\sqrt{3}$.

Alternativa **b**.

45. Base maior: $h + 1 = 5$; 5 cm

Base menor: $h - 1 = 3$; 3 cm

$A = \frac{(5 + 3) \cdot 4}{2} = 16$; 16 m²

Alternativa **b**.

Página 261

Para pensar e discutir

1. Espera-se que os estudantes observem que há aproximadamente 74 quadrados.
2. Multiplicando a área do quadrado pelo número de quadrados.
3. Pelo item **1**, tem-se que a área é de aproximadamente 2 220 000 m².

Página 262

Para pensar e discutir

1. Sugestão de resposta: Pode-se inicialmente determinar a altura do triângulo em função da medida do lado utilizando o teorema de Pitágoras. A seguir, utiliza-se a relação do cálculo da área.
2. $A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$

$\frac{(2L)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4L^2\sqrt{3}}{4} = 4 \cdot A$

A área quadruplica.

Página 263

Atividades

46.

a) $A = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$; 24 cm²

b) $p = \frac{10 + 8 + 6}{2} = 12$; 12 cm

$A = \sqrt{12 \cdot (12 - 10) \cdot (12 - 8) \cdot (12 - 6)}$

$A = 24$; 24 cm²

c) Comente que a última relação envolvendo seno de um ângulo será explicada no Volume 2 desta coleção. Agora está sendo utilizada apenas como exemplo de possível relação para o cálculo da área de um triângulo.

$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot 0{,}6 = 24$; 24 cm²

47.

a) Um hectare equivale a 10 000 m^2.

b) Espera-se que os estudantes façam a operação inversa:

$10\,000 = x \cdot x$

$x = \sqrt{10\,000} = 100$; 100 m^2

c) Existem os seguintes alqueires:

alqueire de norte (27 225 m^2), alqueire mineiro (48 400 m^2), alqueire paulista (24 200 m^2), alqueire baiano (96 800 m^2).

48.

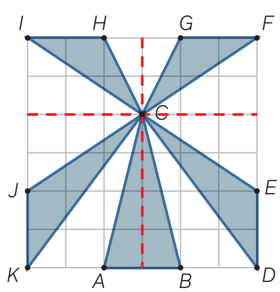
a) Seja x o valor procurado:

$x = \dfrac{8\,000\,000}{165} \cong 48\,485{,}85$;

R$ 48.500,00

b) $x = \dfrac{48\,485{,}85}{10\,000} \cong 4{,}85$; R$ 4,85

49. Observe a imagem a seguir.



Tarcísio Garbellini

Os estudantes podem observar que existem cinco triângulos com 2 m de base e que a altura h varia neles, sendo dois triângulos com 2 m de altura, dois com 3 m de altura e um com 4 m de altura. Logo, as áreas A dos triângulos são 2 m^2, 2 m^2, 3 m^2, 3 m^2 e 4 m^2. Portanto, a área da região escura resulta em 14 m^2.

50. Aqui cabe uma orientação importante: mesmo que o terreno não tenha forma de retângulo, as medidas e o desenho devem ser feitos. Caso seja muito complicado obter tais medidas devido ao perfil das construções, pode-se escolher uma praça ou outro local.

51. (I) 43 quadradinhos (II) 80 quadradinhos (III) 61,5 cm^2

Espera-se que, por contagem, os estudantes percebam que há 80 quadradinhos por excesso e 43 quadradinhos por falta.

$x = \dfrac{80 + 43}{2} = \dfrac{123}{2}$

$x = 61{,}5$; 61,5 cm^2

52. Espera-se que os estudantes apresentem uma figura irregular com um plano de fundo quadriculado e encontrem a área pelo método do item anterior.

53.

a) Existem aproximadamente 48 quadradinhos (contando os inteiros e estimando pedaços para formar inteiros) dentro do círculo. Assim, como cada quadradinho tem lado 0,5 cm:

$A \cong 48 \cdot (0{,}5)^2 = 12$; 12 cm^2

b) Por meio do diâmetro da circunferência, a diagonal do quadrado menor resulta em 4 cm. Pelo teorema de Pitágoras, a medida do seu lado resulta em $2\sqrt{2}$ cm e sua área resulta em 8 cm^2. O lado do maior quadrado mede 4 cm. Logo, sua área é 16 cm^2. Portanto, a média das áreas desses dois quadrados é 12 cm^2.

Página 264

Para pensar e discutir

1. Indica a altura do triângulo.

2. A área de cada um dos triângulos isósceles: $A = \dfrac{L \cdot r}{2}$.

3. A medida r se aproxima cada vez mais da medida R.

Página 265

Para pensar e discutir

1. $A = 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25$; 6,25 m^2

$6{,}25 \cdot 410 = 2\,562{,}5$; R$ 2.562,50

Página 266

Atividades

Nas duas primeiras atividades propostas, os estudantes observam situações envolvendo medidas aproximadas e estimativas de medidas. Reserve um pouco mais de tempo para que eles possam analisar e discutir possíveis encaminhamentos e conclusões.

54. A ideia dessa experiência é recordar que o número π é representado pelo quociente entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência, e esse quociente independe do tamanho da circunferência. Por isso, é interessante que os estudantes comparem os resultados obtidos no item **c**.

a) e **b)** Respostas dependerão da lata escolhida.

c) Aproximação do número π.

55. Resposta possível: O diâmetro da praça corresponde, aproximadamente, à soma dos comprimentos de 8 carros. Se considerarmos como comprimento de um carro a medida 4 m, teremos que o diâmetro será de 32 m e, consequentemente, o raio será de 16 m. Assim, a área A do círculo será:

$A = 3{,}14 \cdot 16^2 \cong 800$; 800 m^2

56. Respostas dependerão dos locais selecionados para o cálculo.

57.

a) Como o comprimento de uma circunferência é $2\pi r$, se o raio for reduzido pela metade, o novo comprimento será $\dfrac{2\pi r}{2}$.

Portanto, também é reduzido pela metade.

b) $A = \pi r^2$

Reduzindo pela metade a medida do raio:

$\pi\left(\dfrac{r}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi r^2}{4}$

A área do círculo inicial é reduzida para $\dfrac{1}{4}$.

c) $\dfrac{D_1}{D_2} = \dfrac{2 \cdot r_1}{2 \cdot r_2} = k = \dfrac{2\pi r_1}{2\pi r_2}$

Portanto, nos dois casos a razão é igual a k.

d) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{\pi (r_1)^2}{\pi (r_2)^2} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2 = k^2$

Portanto, a razão é igual a k^2.

58. Sugestão de resposta: Depende do tamanho da circunferência representada. A ideia é vivenciar como calcular aproximadamente o comprimento de uma circunferência e a área do círculo.

59.

a) Sim. Espera-se que o estudante perceba que a divisão dos setores é obtida por meio da divisão da circunferência em porcentagem.

b) Sim. Espera-se que o estudante perceba que os ângulos centrais têm medidas correspondentes aos arcos desses ângulos.

c) A: 43,2°; B: 36°; C: 54°; D: 136,8°; E: 90°

d) O setor E.

Páginas 267-270

Análise e contexto

1. Área delimitada: 157 950 m²

1 ha = 10 000 m²

$\frac{157\,950}{10\,000} = 15{,}795 \cong 16$; 16 hectares

2.

a) $C = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cong 25{,}12$; 25,12 m

b) $A = \pi \cdot 4^2 \cong 50{,}24$; 50,24 m²

3. Espera-se que os estudantes utilizem o produto da média dos lados para o cálculo de área. Por exemplo, sejam *a*, *b*, *c* e *d* lados de um quadrilátero:

$A = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(\frac{c+d}{2}\right)$

4. Esse trabalho pode ser feito individualmente. Em seguida, proponha aos estudantes que se organizem em grupos para compartilhar com colegas os procedimentos que anotaram. Essa estratégia possibilita que todos tenham a oportunidade de apresentar seus procedimentos e discutir cada um deles para decidir qual será apresentado.

5. Caso julgue oportuno, você pode instruir os estudantes a procurar docentes de outras áreas para terem ideias mais tangíveis de como estruturar essa proposta.

Atividades finais

A condução dessas atividades deve ser direcionada não apenas para autoavaliação, mas buscando desenvolver a autonomia dos estudantes. Motive-os nesse sentido.

1.

a) 360°

b) Quando a soma de suas medidas é 180°.

c) Sim, pois os lados têm medidas proporcionais e os ângulos com as mesmas medidas.

d) Não. Por exemplo, considerando um retângulo de lados 2 cm e 4 cm e outro retângulo de lados 3 cm e 9 cm, embora os ângulos sejam todos retos, os lados correspondentes não são proporcionais.

e) Lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes.

f) $S_n = (n-2) \cdot 180°$

g) 360°

h) Fórmula de Heron,
$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,
em que $p = \frac{a+b+c}{2}$.

2. Seja S a área da região sombreada, em que $S = S_1 + S_2$, sendo S_1 e S_2 correspondentes às áreas obtidas pela diferença da área de cada circunferência, como mostrado a seguir.

Usando 3 como aproximação para π, conforme enunciado, cada raio r corresponde às áreas:

$A_1 = \pi(r_1)^2 = 3 \cdot 100^2 = 30\,000$

$A_2 = \pi(r_2)^2 = 3 \cdot 95^2 = 27\,075$

$A_3 = \pi(r_3)^2 = 3 \cdot 85^2 = 21\,675$

$A_4 = \pi(r_4)^2 = 3 \cdot 80^2 = 19\,200$

$S_1 = A_1 - A_2$

$S_1 = 30\,000 - 27\,075 = 2\,925$

$S_2 = A_3 - A_4$

$S_2 = 21\,675 - 19\,200 = 2\,475$

$S = S_1 + S_2$

$S = 2\,925 + 2\,475 = 5\,400$; 5 400 m²

3. $A = \pi r^2 = \left(D \cdot \frac{8}{9}\right)^2$

$\pi r^2 = \left(2r \cdot \frac{8}{9}\right)^2$

$\pi r^2 = 4$

$r^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2$

$\pi = \frac{256}{81}$

4. Cada quadradinho:

$A = \ell^2 = 4$

$\ell = \pm 2$

Pelo contexto, $\ell = 2$; 2 m.

Retângulo:

$P = 2 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \cdot 2 = 44$; 44 m

Questões de vestibulares e Enem

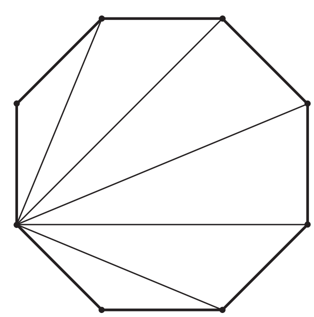
5. Por semelhança, tem-se dois triângulos retângulos semelhantes, em cinza-escuro, e o que está para fora da posição original da folha. Logo,

$\frac{6}{9} = \frac{7}{x} \Rightarrow x = 10{,}5$; 10,5 cm

$A = \frac{10{,}5 \cdot 9}{2} = 47{,}25$; 47,25 cm²

Alternativa **c**.

6. Há seis triângulos internos com vértices coincidentes com os vértices do octógono. Logo, a soma dos ângulos internos desses triângulos é 1 080°.


Tarcisio Garbelini

Seja x cada ângulo do octógono, então:

$x = \frac{1\,080°}{8} = 135°$

Alternativa **d**.

7. Sejam A_B a área do padrão bordado em branco, A_T a área total, A_1 a área de cada triângulo cinza e A_2 a área de cada triângulo preto.

Como o triângulo preto é retângulo e isósceles, tem diagonal $\ell\sqrt{2}$. Logo, seu lado mede 12 cm.

$A_T = 20 \cdot 40 = 800$; 800 cm²

$A_1 = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$; 50 cm²

$A_2 = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72$; 72 cm²

$A_B = A_T - (4A_1 + 2A_2)$

$A_B = 800 - (4 \cdot 50 + 2 \cdot 72)$

$A_B = 456$; 456 cm²

Alternativa **b**.

8. Sabendo que a base MB do triângulo vale $\frac{1}{2}$, queremos encontrar a altura h desse triângulo.

A área do triângulo MBN vale 1.

$1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot h}{2}$

$h = 4$

Como h é metade da altura do trapézio $ABCD$, a altura do trapézio é $2h = 8$.

$A = \frac{(5 + 1) \cdot 8}{2} \Rightarrow A = 24$

Alternativa **d**.

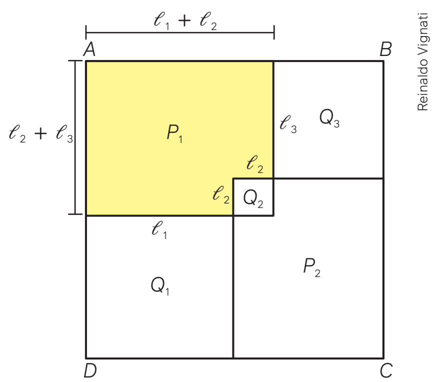
9. Sejam ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 os lados dos quadrados Q_1, Q_2 e Q_3 respectivamente.

$\ell_1 = \sqrt{16} = 4$; 4 cm

$\ell_2 = \sqrt{1} = 1$; 1 cm

$\ell_3 = \sqrt{9} = 3$; 3 cm

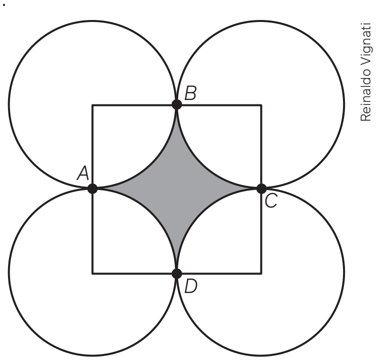
Observando a figura, podemos obter o perímetro de P_1:



$P = 2\ell_1 + 4\ell_2 + 2\ell_3 = 8 + 4 + 6 = 18$; 18 cm

Alternativa **b**.

10. Podemos construir um quadrado a partir do centro de cada uma das 4 circunferências de raio $r = 1$ que terá arestas que vão passar pelos pontos A, B, C e D, como na figura.



Observe que o quadrado possui lado $\ell = 2r = 2 \cdot 1 = 2$; logo, a área do quadrado é igual $A_Q = \ell^2 = 4$ cm² e dentro do quadrado temos a área de cada uma das 4 circunferências.

A área da circunferência: $A_C = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$

Assim, podemos concluir que a área hachurada A_H é dada por:

$A_H = A_Q - A_C = 4 - \pi$

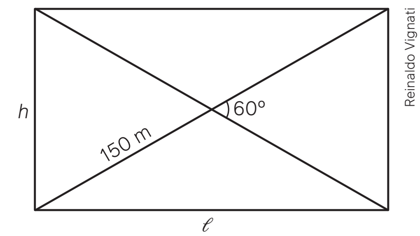
Alternativa **d**.

11. A distância entre as retas paralelas é a altura h do triângulo equilátero de lado 2 m.

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Alternativa **d**.

12. A plantação ocupa o espaço da seguinte forma:



Pela figura, temos que h é igual à metade da diagonal (triângulo equilátero).

Pelo teorema de Pitágoras:

$150^2 = 75^2 + \ell^2$

$\ell = \sqrt{16\,875} = \sqrt{75^2 \cdot 3} = 75\sqrt{3}$

Área A da plantação:

$A = 75 \cdot 75\sqrt{3} = 5\,625\sqrt{3}$; $5\,625\sqrt{3}$ m²

Alternativa **d**.

13. O ângulo $F\hat{G}H$ é o ângulo interno de um octógono regular e vale: $\frac{(8 - 2) \cdot 180°}{8} = 135°$.

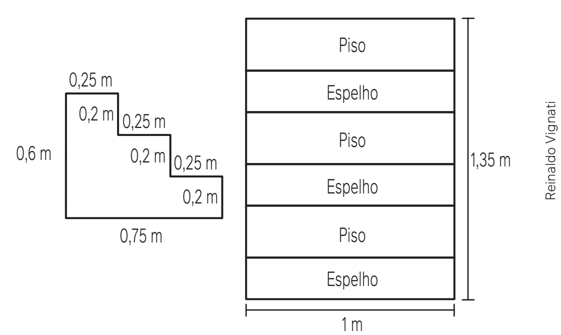
Como o triângulo IGH é equilátero, $\overline{IG} = \overline{GH} = \overline{FG}$. Ou seja, o triângulo formado por GIF é isósceles, com o ângulo $I\hat{G}F$ igual a: $I\hat{G}F = F\hat{G}H - H\hat{G}I \Rightarrow I\hat{G}F = 135° - 60° = 75°$

$G\hat{I}F = I\hat{F}G$:

$G\hat{I}F = \frac{180° - 75°}{2} = 52{,}5°$

Alternativa **e**.

14. Podemos desenhar a superfície da escada da seguinte forma:



$A = 2 \cdot (0{,}75 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}25 \cdot 0{,}2) + 1 \cdot 1{,}35$

$A = 1{,}95$; 1,95 m²

Alternativa **e**.

15. A piscina no centro do quadrado possui 400 m² de área. Portanto, a piscina que está no centro possui medida igual a: $\sqrt{400} = 20$; 20 m.

Então, o quadrado onde estão a piscina e a calçada possui medida igual a: $20 + 5 + 5 = 30$; 30 m.

Assim, a área A_C da calçada é igual à diferença da área do quadrado com a área da piscina.

$A_C = (30)^2 - 400 = 500$; 500 m²

Alternativa **d**.

Conexões e projetos

Projeto	Competências gerais	Competências específicas	Habilidades
Projeto 1 Uma maneira inteligente de informar	2, 4, 6, 7, 8, 9, 10	1, 2, 3	EM13MAT103 EM13MAT201 EM13MAT307 EM13MAT308
Projeto 2 Modelando dados estatísticos	1, 2, 4, 5, 9	1, 3, 4, 5	EM13MAT101 EM13MAT104 EM13MAT302 EM13MAT401 EM13MAT406 EM13MAT501 EM13MAT510
Projeto 3 Rampas de acesso	1, 4, 5, 6, 8, 9, 10	1, 3, 5	EM13MAT101 EM13MAT102 EM13MAT104 EM13MAT302 EM13MAT501

Projeto 1 – Uma maneira inteligente de informar

Orientações: Ao propor o projeto, faça uma leitura coletiva de cada etapa – contexto, desenvolvimento, produto final, apresentação, relatório conclusivo e sugestão de fontes. Organize um debate sobre cada tópico, incluindo a questão disparadora. Explique aos estudantes que, ao final, eles deverão responder: Para que serve e como deve ser feito um infográfico? Após essa conversa inicial, organize os grupos que serão mantidos durante todo o trabalho e combine um cronograma para a realização de cada etapa. Nesse momento, você já pode combinar com os estudantes quais serão os critérios e instrumentos de avaliação utilizados ao longo do processo. Aproveite os infográficos que serão trazidos no primeiro passo do desenvolvimento para fazer um alinhamento coletivo a respeito das características dessa linguagem. Essa discussão coletiva deve ser mediada por você para que toda a turma consiga organizar suas ideias em dois pontos – qualidade visual do infográfico, no quesito atratividade; e qualidade conceitual do infográfico, no quesito organização e transmissão das informações. Com base nesses dois pontos, cada grupo elabora uma lista dos itens que fazem um infográfico ser informativo de maneira clara e atrativa e a utiliza para nortear o trabalho. Durante a coleta dos dados e a elaboração do infográfico, esteja atento às necessidades específicas de cada grupo. Ao longo desse processo, você pode programar uma ou duas aulas para que cada grupo apresente para a turma o andamento do trabalho. Aproveite esse momento para comentar os pontos positivos e fazer as correções e sugestões necessárias para cada grupo, o que contribuirá para a aprendizagem e o aprimoramento do trabalho de todos.

Antes da entrega final, é possível propor um momento de autoavaliação: peça aos grupos que avaliem os próprios infográficos e verifiquem se eles têm as características listadas como essenciais. Após essa rodada de autoavaliação e compartilhamento das produções, reserve um tempo para os estudantes revisarem e aprimorarem os produtos finais, verificando também se os dados coletados realmente permitem o estudo da taxa de variação dos índices e a elaboração de projeções. Na data final, os grupos apresentarão os infográficos e os relatórios individuais.

Projeto 2 – Modelando dados estatísticos

Orientações: O objetivo principal desse projeto é tornar visível uma ideia bastante abstrata – a de que dados estatísticos podem auxiliar na previsão do comportamento de eventos aleatórios, fornecendo informações que, dependendo da amostra, podem ser transpostas para todo o universo abordado. Ao propor o primeiro contato dos estudantes com o projeto, encaminhe a leitura cuidadosa de cada etapa, evidenciando a questão disparadora e esclarecendo que eles deverão saber respondê-la no final. Organize a turma em grupos e combine um cronograma para a realização de cada etapa, incluindo apresentações parciais. Aproveite para estabelecer, também, quais serão os momentos de avaliação do projeto e os critérios utilizados, o que fará com que os estudantes tenham clareza do que se espera deles. Eles podem participar dando sugestões. Certifique-se de que eles entenderam como calcular a reta média a partir de um conjunto de dados. Ao longo do processo, esteja atento às necessidades específicas de cada grupo, inclusive em relação aos conhecimentos matemáticos necessários para o desenvolvimento de cada etapa. Pode ser interessante retomar com toda a turma a resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, habilidade que deve ter sido desenvolvida no 8º ano. Se necessário, marque atendimentos específicos com alguns grupos. Outro ponto importante são as apresentações parciais, ao longo do processo, para que os estudantes tenham a oportunidade de discutir com você e com a turma o andamento do trabalho e, se necessário, fazer uma correção de rumos. A apresentação final do trabalho e o relatório conclusivo devem conter todos os itens propostos.

Projeto 3 - Rampas de acesso

Orientações: Antes de iniciar os trabalhos, leia toda a proposta com os estudantes, salientando cada etapa, esclarecendo possíveis dúvidas e estabelecendo os momentos e os critérios de avaliação. É essencial que todos leiam a NBR9050 e discutam sobre ela para garantir que compreendem sua importância na sociedade, bem como o papel da própria ABNT. É fundamental também que todos se familiarizem com o conceito de porcentagem de inclinação. Essa taxa, que aparece em muitos contextos, indica a porcentagem de deslocamento vertical em relação a um deslocamento horizontal. Os estudantes devem ser capazes de reconhecer que uma inclinação de 30% significa um aclive que provoca, a cada 100 m de deslocamento horizontal, uma elevação de 30 m. Isso é o mesmo que dizer que o triângulo formado pela rampa e por suas projeções vertical e horizontal é tal que a projeção vertical mede 30 m e a horizontal mede 100 m. Esse conhecimento pode ser resgatado no 2º ano, quando forem trabalhadas as razões trigonométricas no triângulo retângulo, particularmente a tangente de um ângulo agudo.

Além de compreender esses conceitos, os grupos precisam discutir o enunciado do problema, que consiste em coletar as medidas de uma rampa, avaliar sua adequação às normas e propor alterações que mantenham ou melhorem essa adequação. Durante o processo de medição, garanta a segurança dos estudantes, de modo que não se coloquem em perigo medindo rampas muito altas ou em locais de tráfego intenso.

Fique atento às necessidades específicas de cada grupo. Quando todos os grupos tiverem terminado, organize com eles o momento da apresentação. Oriente-os previamente sobre a necessidade de agendar espaços alternativos na escola, tais como auditório, sala de vídeo, entre outros, o que dependerá da modalidade escolhida pelos grupos para fazer a apresentação. Oriente-os também sobre o tempo que cada grupo terá para se apresentar e, durante a apresentação, peça a algum estudante que faça a cronometragem. Prepare uma ficha de avaliação com os critérios que você usará para avaliar e a pontuação de cada item e a compartilhe com os estudantes previamente. Prepare-os para o momento da apresentação, salientando o respeito pelo trabalho dos colegas e esse tipo de aula como uma oportunidade de aprendizagem para todos. Pode ser interessante organizar uma avaliação entre pares, para que percebam as diferentes soluções encontradas para o mesmo problema.

Sugestões de leitura

ANDRÉ, C. F. *O pensamento computacional como estratégia de aprendizagem, autoria digital e construção da cidadania*. *TECCOGS*, São Paulo, n. 18, p. 94-109, jul./dez. 2018. Disponível em: https://www.pucsp.br/pos/tidd/teccogs/artigos/2018/edicao_18/teccogs18_artigo05.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

Esse artigo mostra a utilização do pensamento computacional como estratégia de aprendizagem para autoria digital e construção da cidadania.

HELLMEISTER, A. C. P. *Geometria em sala de aula*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

Esse livro é uma coletânea de artigos publicados na *Revista do Professor de Matemática* ao longo de 30 anos. A seleção foi feita com base nas indicações do comitê editorial da publicação, considerando temas relevantes de Geometria para serem trabalhados em sala de aula.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. *Álgebra para a formação do professor*: explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

Nessa obra, voltada para a formação de professores de Matemática, os autores apresentam uma visão geral sobre os conceitos de equação e de função. Por meio de exemplos, discutem dificuldades encontradas na aprendizagem dos dois temas e, no último capítulo, sugerem atividades para trabalhar com os estudantes.

Sugestão de atividades individuais e em grupos

Atividade 1

Parte 1 – Individual: Encontre, na internet, uma foto de uma multidão, de muitos animais ou de muitas árvores, por exemplo. Elabore um método de contagem que utilize a ideia de área de uma superfície e, usando esse método, estime quantos elementos há na imagem.

Parte 2 – Em grupos: Compartilhem as fotos trazidas por todos os componentes do grupo. Analisem e discutam o processo de contagem utilizado por cada um. Em seguida, descrevam um método de contagem para grandes quantidades e compartilhem com os outros grupos.

Fonte: CONTANDO todas as coisas [...]. São Paulo: Instituto Sidarta, [20--]. 1 vídeo (ca. 2 min). Publicado por YouCubed. Disponível em: https://www.youcubed.org/pt-br/resources/contando-todas-as-coisas-educacao-infantil-ensino-medio-video/. Acesso em: 12 set. 2024.

Comentários: Para incentivar os estudantes a fazer esta atividade, pergunte se eles sabem como é feita a estimativa do número de pessoas em grandes multidões. Solicite que discutam possibilidades de como fazer essa contagem, mas não apresente soluções previamente. Em seguida, encaminhe a primeira parte da atividade para ser feita em casa.

Para a realização da segunda parte, é importante que os estudantes discutam e validem as estratégias apresentadas e, então, elaborem em conjunto o método de contagem. A ideia é que a imagem seja dividida em pequenos polígonos.

Atividade 2 - Individual

Parte 1: Faça uma pesquisa sobre o arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer. Procure saber quem foi esse arquiteto, quando viveu, qual é a sua importância para a arquitetura brasileira e quais são as características de suas obras.

Parte 2: Entre as obras de Niemeyer está a Igreja da Pampulha, situada na cidade de Belo Horizonte. Procure imagens dessa igreja e observe suas curvas, chamadas parábolas. Faça uma busca na internet e encontre outras edificações que possuam curvas como as da Igreja da Pampulha. Procure também, no entorno de sua casa e da escola, formas da natureza, objetos, construções e obras de arte que possuam elementos que se assemelhem a essas curvas. Anote no caderno o que encontrar, tire fotos, salve imagens no celular e leve para a escola.

Comentários: Esta atividade pode ser proposta antes do início do **capítulo 5**, de modo que os estudantes, ao iniciarem o estudo da função do 2º grau e sua respectiva representação gráfica, já tenham conhecimentos prévios sobre o que será trabalhado. Marque um dia para que os estudantes compartilhem os resultados de suas pesquisas para, em seguida, darem início ao estudo do capítulo.

Sugestão de leitura: Como fundamentação para esta atividade, você pode ler o artigo: BRASIL, G. L.; AGUIAR, I. P.; SILVA, J. R. da; CAIRES, N. H. Catenária e a parábola como tema para contextualização de aulas sobre função quadrática e parábolas. *Brazilian Journal of Development*, Curitiba, v. 7, n. 7, p. 70 656-70 672, jul. 2021. Disponível em: https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/32862/pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

Esse artigo apresenta as diferenças entre a catenária e a parábola, além de algumas aplicações desses conceitos na arquitetura e em construções.

Referências

ANDRADE, J. P. *Aprendizagens visíveis*: experiências teórico-práticas em sala de aula. São Paulo: Panda Educação, 2021.

A obra reúne relatos de práticas pedagógicas realizadas por professores-pesquisadores de escolas públicas e particulares da Educação Básica.

BENDER, W. N. *Aprendizagem baseada em projetos*: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.

Explora as formas como os professores podem aplicar a Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP) em uma sala de aula real.

BIANCO, R. *et al*. *Ensaios pedagógicos*: construindo escolas inclusivas. Brasília, DF: MEC: SEESP, 2005. Disponível em: https://pt.slideshare.net/slideshow/ensaios-pedagogicos-construindo-escolas-inclusivas/14028697#1. Acesso em: 12 set. 2024.

Essa publicação, do Ministério da Educação, contém depoimentos, relatos de experiências e pesquisas acerca da educação inclusiva no Brasil.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2003.

Os autores apresentam os conceitos de modelo e modelagem matemática e propõem a modelagem como método de ensino dessa disciplina.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

Nesse livro, os autores apresentam quatro fases da implementação das tecnologias digitais em Educação Matemática.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.

Esse é um clássico da história da Matemática que tem sido texto de referência há mais de 20 anos para aqueles que estudam o assunto.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece conhecimentos, competências e habilidades que devem ser desenvolvidos em cada etapa da Educação Básica.

BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo das situações didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

O livro aborda a teoria das situações didáticas, um conceito criado pelo autor há quatro décadas e constantemente aperfeiçoado.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 2000.

Esse livro é referência para o estudo da Matemática e está organizado em três partes: Números, Funções e Continuidade.

CHICA, C. Explorando problemas no painel de soluções. *In*: MATHEMA. São Paulo, 20 set. 2019. Disponível em: https://mathema.com.br/jogos-e-atividades/explorando-problemas-no-painel-de-solucoes/. Acesso em: 12 set. 2024.

Nesse artigo, por meio de exemplos, a autora apresenta como trabalhar com painel de soluções nas aulas de Matemática.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso Editora, 2017.

Apresenta os referenciais teóricos e a pesquisa que dão suporte ao trabalho em grupo e descreve passos importantes para sua concretização na sala de aula.

CORREA, L. M.; ALVES, M. Z.; MAIA, C. L. (org.). *Cadernos temáticos*: juventude brasileira e Ensino Médio. Belo Horizonte: Editora da UFMG, 2014. Disponível em: https://observatoriodajuventude.ufmg.br/wp-content/uploads/2021/07/Caderno-12-Estrategias-Metodologicas-de-Trabalho-com-Jovens-1.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

Esse caderno oferece aos professores referenciais teóricos, metodológicos, didáticos e pedagógicos que lhes possibilitam dialogar com a diversidade juvenil.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é matemática?*: uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2000.

Esse livro aborda a matemática de forma construtiva e orgânica como base para o pensar e agir científicos.

DAVID, M. M. M. S.; TOMAZ, V. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

O livro apresenta e discute situações em sala de aula que evidenciam abordagens interdisciplinares.

FRADE, I. C. A. da S.; VAL, M. da G. C.; BREGUNCI, M. das G. de C. (org.). *Glossário Ceale*: termos de alfabetização, leitura e escrita para educadores. Belo Horizonte: UFMG: Faculdade de Educação, 2014.

A obra inclui aproximadamente 200 verbetes escritos por colaboradores de diferentes instituições na área de especialização de cada um.

HERNÁNDEZ, F. *Transgressão e mudança na educação*: os projetos de trabalho. Porto Alegre: Artmed, 2007.

A obra apresenta os pressupostos teóricos sobre o trabalho com projetos, com base em uma visão histórica.

INSTITUTO AYRTON SENNA. *Os benefícios da programação computacional em práticas pedagógicas*. São Paulo: IAA, 2022. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/app/uploads/2022/11/instituto-ayrton-senna-os-beneficios-da-programacao-computacional-em-praticas-pedagogicas.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

Nesse *e-book*, são encontradas as bases da programação computacional em práticas pedagógicas.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. São Paulo: Cortez, 2014.

O livro apresenta um conjunto de artigos publicados pelo autor ao longo de anos de trabalho sobre o tema.

MOVIMENTO DOWN. *Desenho universal para livros didáticos*. Rio de Janeiro: MD, 2015. Disponível em: https://www.movimentodown.org.br/wp-content/uploads/2015/08/Manual-FINAL-bibliografia.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

Material que apresenta um conjunto de possibilidades buscando atingir as necessidades de aprendizagem do maior número possível de estudantes.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na educação matemática*. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

Nesse livro, estão reunidos ensaios, narrativas, relatos e argumentos que discutem possibilidades de leitura e escrita em educação matemática.

OLIVEIRA, A. R. de P. e; MUNSTER, M. de A. van; GONÇALVES, A. G. Desenho universal para aprendizagem e educação inclusiva: uma revisão sistemática da literatura internacional. *Revista Brasileira de Educação Especial*, [Rio de Janeiro], v. 25, n. 4, p. 675--690, out./dez. 2019. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbee/a/rGFXP54LSxdkfNmXsD9537M/. Acesso em: 12 set. 2024.

Artigo que apresenta um mapeamento e uma análise das pesquisas empíricas internacionais envolvendo a interface DUA e a inclusão.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência, 1978. v. 2.

O autor apresenta a resolução de problemas em quatro etapas: compreensão do problema; construção de uma estratégia de resolução; execução da estratégia e revisão da solução.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

Os autores analisam como as práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser levadas para a sala de aula e contribuir para a educação matemática.

RICO, L. Errores y dificuldades en el aprendizaje de las matemáticas. *In*: CORE. [*S. l.*], 1995. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/12341117.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

O autor analisa o papel do erro na aprendizagem da matemática.

SEBASTIÁN-HEREDERO, E. Diretrizes para o desenho universal para a aprendizagem (DUA). *Revista Brasileira de Educação Especial*, [Rio de Janeiro], v. 26, n. 4, p. 733-768, out./dez. 2020. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbee/a/F5g6rWB3wTZwyBN4LpLgv5C/. Acesso em: 12 set. 2024.

Artigo que define as práticas educativas inclusivas e o currículo inclusivo de acordo com o DUA.

SMOLE, K.; DINIZ, M. I. *Ler e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

A obra é referência no ensino de Matemática e tem como eixo condutor a resolução de problemas nas aulas.

WIGGINS, G.; MCTIGHE, J. *Planejamento para a compreensão*: alinhando currículo, avaliação e ensino por meio da prática do planejamento reverso. Porto Alegre: Penso Editora, 2019.

Esse livro propõe uma reflexão sobre planejamento, avaliação e ensino com o objetivo de contribuir para a promoção de uma aprendizagem mais engajadora e eficaz.

Referências suplementares

BACICH, L.; HOLANDA, L. *STEAM em sala de aula*: a aprendizagem baseada em projetos integrando conhecimentos na Educação Básica. Porto Alegre: Penso Editora, 2020.

O livro apresenta a proposta STEAM, sigla em inglês para Ciência, Tecnologia, Engenharia, Arte e Matemática, por meio da qual os estudantes se envolvem no desenvolvimento de projetos em diversas áreas.

BACICH, L.; MORAN, J. *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

O livro apresenta as metodologias ativas apoiadas em tecnologias, que visam favorecer a participação ativa do estudante nos processos de aprendizagem.

BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. de M. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.

O livro apresenta uma abordagem pedagógica que visa colocar o estudante no centro do processo de aprendizagem envolvendo as tecnologias digitais.

BNCC comentada para o Ensino Médio. *In*: INSTITUTO REÚNA. São Paulo, [2020]. Disponível em: https://o.institutoreuna.org.br/projeto/base-comentada-para-o-ensino-medio/?gad_source=1&gclid=CjwKCAjw8fu1BhBsEiwAwDrsjFYp2W22E73_AtGBlGXzP8FArWID8JhbEb7iC6-cKPfJrOC32-mN1hoC6icQAvD_BwE. Acesso em: 12 set. 2024.

Essa é uma ferramenta que traduz, comenta e explica as competências específicas e as habilidades de cada área de conhecimento no Ensino Médio.

BOALER, J. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

A autora apresenta a possibilidade de ensinar a Matemática como uma disciplina criativa e visual.

PAIS, L. C. *Didática da Matemática*: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

A obra apresenta um modo próprio de ver a educação centrada no ensino da Matemática.

SEMIS, L. O que são as competências gerais da BNCC e o que eu preciso saber sobre elas? *Nova Escola*, São Paulo, 27 fev. 2020. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/18902/o-que-sao-as-competencias-gerais-da-bncc-e-o-que-eu-preciso-saber-sobre-elas?utm_source=facebook&utm_medium=post-. Acesso em: 12 set. 2024.

Nesse artigo, são apresentadas as dez competências gerais propostas na BNCC e sua articulação com as práticas pedagógicas.

Sites

COMPETÊNCIAS gerais da BNCC. *In*: MOVIMENTO PELA BASE. [*S. l.*], 15 set. 2020. Disponível em: http://movimentopelabase.org.br/acontece/competencias-gerais-de-bncc/. Acesso em: 12 set. 2024.

A página esclarece o que são as competências gerais. Inclui um vídeo em que Anna Penido exemplifica como essas competências podem ser desenvolvidas em cada área de conhecimento.

EDUMATEC. Softwares *de geometria*. Porto Alegre: UFRGS, c2008. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/softwares/soft_geometria.php. Acesso em: 12 set. 2024.

No *site*, são encontradas várias indicações de aplicativos e *softwares* para desenvolver atividades nas aulas de Matemática.

INSTITUTO AYRTON SENNA. *Estante do educador*. São Paulo: IAA, c2024. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/para-voce/professor/estante-do-educador/. Acesso em: 12 set. 2024.

Disponibiliza diversos *e-books* para auxiliar o professor a desenvolver uma prática que promova a educação integral dos estudantes.

INSTITUTO REÚNA. São Paulo: IR, c2024. Disponível em: https://institutoreuna.org.br/. Acesso em: 12 set. 2024.

O *site* disponibiliza ferramentas e conteúdos práticos alinhados à BNCC e apresenta soluções para inovar em sala de aula.

MÃO na massa. *In*: PORVIR. São Paulo, [201-]. Disponível em: https://porvir.org/mao-na-massa/. Acesso em: 12 set. 2024.

Nesse *site*, são apresentadas ferramentas e sugestões para colocar em prática as inovações e levar o estudante a ser protagonista do processo de aprendizagem.

MOVIMENTO PELA BASE. [*S. l.*]: Movimento pela base, c2024. Disponível em: https://movimentopelabase.org.br/. Acesso em: 12 set. 2024.

Guias, vídeos e outros materiais que ajudam a entender a BNCC na prática.

OBSERVATÓRIO DA JUVENTUDE. Belo Horizonte: UFMG, [20--]. Disponível em: https://observatoriodajuventude.ufmg.br/observatorio-da-juventude-2/. Acesso em: 12 set. 2024.

O *site*, vinculado às ações de extensão, ensino e pesquisa da Faculdade de Educação da UFMG, oferece amplo material de apoio ao trabalho com as juventudes.