INTERAÇÃO
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

ADILSON LONGEN
LUCIANA TENUTA DE FREITAS
(COORD.)

VOLUME
3

MATEMÁTICA
APRENDENDO E RESOLVENDO PROBLEMAS

MANUAL DO PROFESSOR

ENSINO MÉDIO – 3º ANO
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – MATEMÁTICA

Editora do Brasil

INTER AÇÃO

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

MATEMÁTICA APRENDENDO E RESOLVENDO PROBLEMAS

ADILSON LONGEN

- Doutor em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Mestre em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Professor do Ensino Médio

LUCIANA TENUTA DE FREITAS (COORD.)

- Mestre em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-Minas)
- Bacharel e licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
- Assessora pedagógica da Educação Básica, com atuação na formação de professores

1ª edição
São Paulo, 2024

Editora do Brasil

"Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada"

VOLUME 3

ENSINO MÉDIO – 3º ANO
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – MATEMÁTICA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Longen, Adilson
Matemática : aprendendo e resolvendo problemas : 3º ano / Adilson Longen ; Luciana Tenuta de Freitas (coord.). -- 1. ed. -- São Paulo : Editora do Brasil, 2024. -- (Interação matemática e suas tecnologias)

ISBN 978-85-10-10253-7 (aluno)
ISBN 978-85-10-10250-6 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Freitas, Luciana

Tenuta de. II. Título. III. Série.

24-225141 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Direção-geral: Paulo Serino de Souza

Diretoria editorial: Felipe Ramos Poletti
Gerência editorial de conteúdo didático: Erika Caldin
Gerência editorial de produção e design: Ulisses Pires
Supervisão de design: Catherine Saori Ishihara
Supervisão de arte: Abdonildo José de Lima Santos
Supervisão de revisão: Elaine Silva
Supervisão de iconografia: Léo Burgos
Supervisão de digital: Priscila Hernandez
Supervisão de controle e planejamento editorial: Roseli Said
Supervisão de direitos autorais: Luciana Sposito

Supervisão editorial: Everton José Luciano
Leitura crítica: Michele Andréia Borges
Edição: Adriana Netto, Daniel Vitor Casertelli Santos, Daniel Leme, Fernando Savoia Gonzalez, Katia Queiroz, Marcos Gasparetto, Paulo Roberto de Jesus e Rodrigo Cosmo dos Santos
Assistência editorial: Isabella Cosenza Ferreira, Felipe Gabriel e Paola Polizeli
Revisão: Gabriel Ornelas, Giovana Sanches, Martin Gonçalves, Rita Costa e Rosani Andreani
Pesquisa iconográfica: Luiza Camargo
Tratamento de imagens: Robson Mereu
Projeto gráfico: Talita Lima, Diego Lima e Rafael Gentile
Capa: Gláucia Koller
Imagem de capa: Homo Cosmicos/Shutterstock.com
Edição de arte: Beatriz Sato, Bruna Souza e Julia Nakano
Ilustrações: Acervo editora, Danillo Souza, Fábio Nienow, FJF Vetorização, Mauro Salgado, Reinaldo Vignati e Tarcísio Garbellini
Editoração eletrônica: Typegraphic
Licenciamentos de textos: Cinthya Utiyama, Renata Garbellini, Solange Rodrigues
Controle e planejamento editorial: Ana Fernandes, Bianca Gomes, Juliana Gonçalves, Maria Trofino, Renata Vieira, Terezinha Oliveira e Valéria Alves

1ª edição, 2024

Editora do Brasil

Avenida das Nações Unidas, 12901
Torre Oeste, 20º andar
São Paulo, SP – CEP: 04578-910
Fone: +55 11 3226-0211
www.editoradobrasil.com.br

COMEÇO DE CONVERSA

Caro estudante,

A etapa do Ensino Médio é um desafio na vida de todo jovem. Neste momento que estamos vivendo, com as mudanças trazidas pelo Novo Ensino Médio, os desafios se acentuam e se tornam mais complexos.

No centro de todas essas mudanças, está a ideia de que as aprendizagens escolares podem capacitá-lo para que, ao final desta etapa, você esteja apto a atuar, com competência e responsabilidade, na sociedade em que vive. Para isso, é importante que você se aproprie da Matemática como uma das diversas formas de leitura da realidade e a utilize como ferramenta para que possa, de forma consciente e responsável, intervir nessa realidade.

Esta coleção foi escrita com o objetivo de levar você a ter experiências que promovam o desenvolvimento de um pensamento matemático consistente, estabelecendo o maior número possível de relações, ao mesmo tempo que aplica esse conhecimento em outras disciplinas e situações do mundo real. Esse processo, que visa uma aprendizagem consistente dos conceitos matemáticos, também o prepara para avaliações de acesso às universidades, se essa for sua opção de vida.

Por meio de atividades em grupo e discussões com os colegas, usando ou não a tecnologia, você terá a oportunidade de levantar hipóteses, argumentar, defender suas ideias, mudar de ideia com base na argumentação do colega e, assim, desenvolver a empatia e o respeito pelo outro, além de contribuir para sua formação integral.

Apresentamos também uma grande quantidade de atividades resolvidas, além de exercícios, questões de Enem e testes de vestibulares para que você possa consolidar as aprendizagens e se preparar para os exames de acesso à universidade.

Você está sendo chamado a ser protagonista de todo o processo de aprendizagem da Matemática ao longo do Ensino Médio. Esperamos que você aproveite esta oportunidade.

Os autores

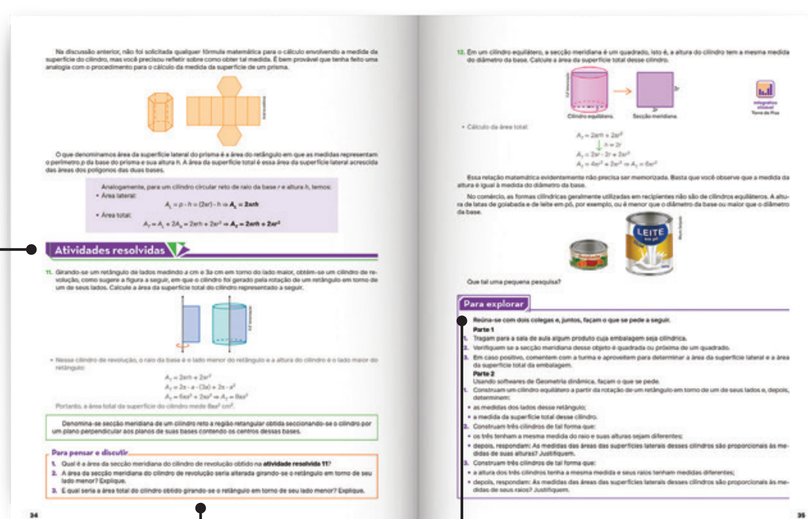
Marish/Shutterstock.com

CONHEÇA SEU LIVRO

Lista de capítulos que compõem o volume

Abertura de capítulo
Uma imagem representativa do tema e um texto introdutório favorecem a reflexão sobre o assunto que será estudado.

Questões disparadoras sobre a temática escolhida para a abertura de capítulo.



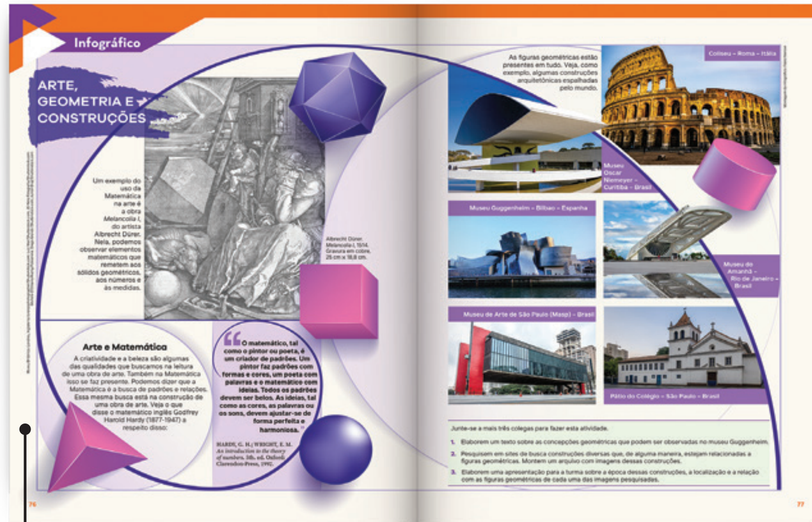
Atividades resolvidas
Seleção de atividades resolvidas que, por meio da reflexão sobre a resolução, auxiliam na compreensão da linguagem matemática e na resolução dos problemas que serão propostos.

Para pensar e discutir
Questões que auxiliam os estudantes na capacidade de fazer inferências por meio da investigação de propriedades e elaboração de novos problemas, conclusões ou sínteses.

Para explorar
Atividades exploratórias relacionadas ao conteúdo trabalhado, que envolvem a observação, elaboração de hipóteses, discussão de ideias, argumentação e explicitação do pensamento matemático.

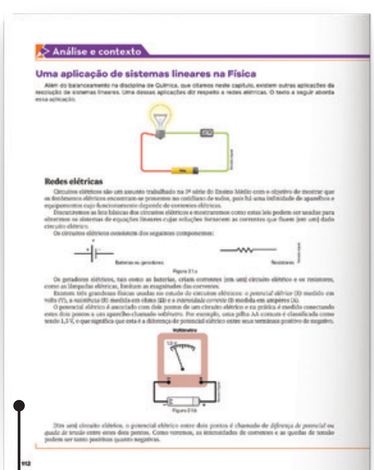
Conexões e projetos

Apresentam propostas de projetos que visam colocar em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas nos capítulos deste volume.



Infográfico

Sempre acompanhado de questões para discussão, o infográfico apresenta uma síntese de assuntos relacionados ao capítulo.

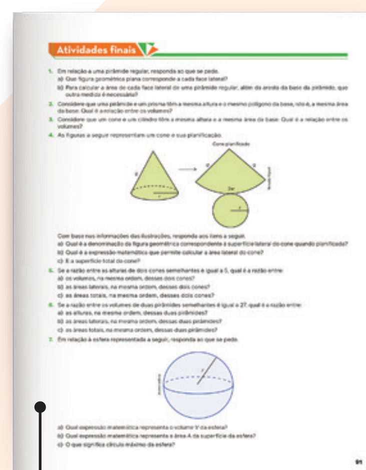


Análise e contexto

Apresenta textos sobre a história da Matemática ou sobre temas do cotidiano, aprofundando a discussão do conteúdo abordado no capítulo.

Atividades

Conjunto de atividades sobre o conteúdo desenvolvido nas últimas seções.



Atividades finais

Conjunto de atividades que finaliza as discussões sobre os conteúdos matemáticos em cada capítulo deste livro. Contém questões de vestibulares e do Enem. Finaliza com proposta de autoavaliação.

Carrossel de imagens

Podcast

Infográfico clicável

Vídeo

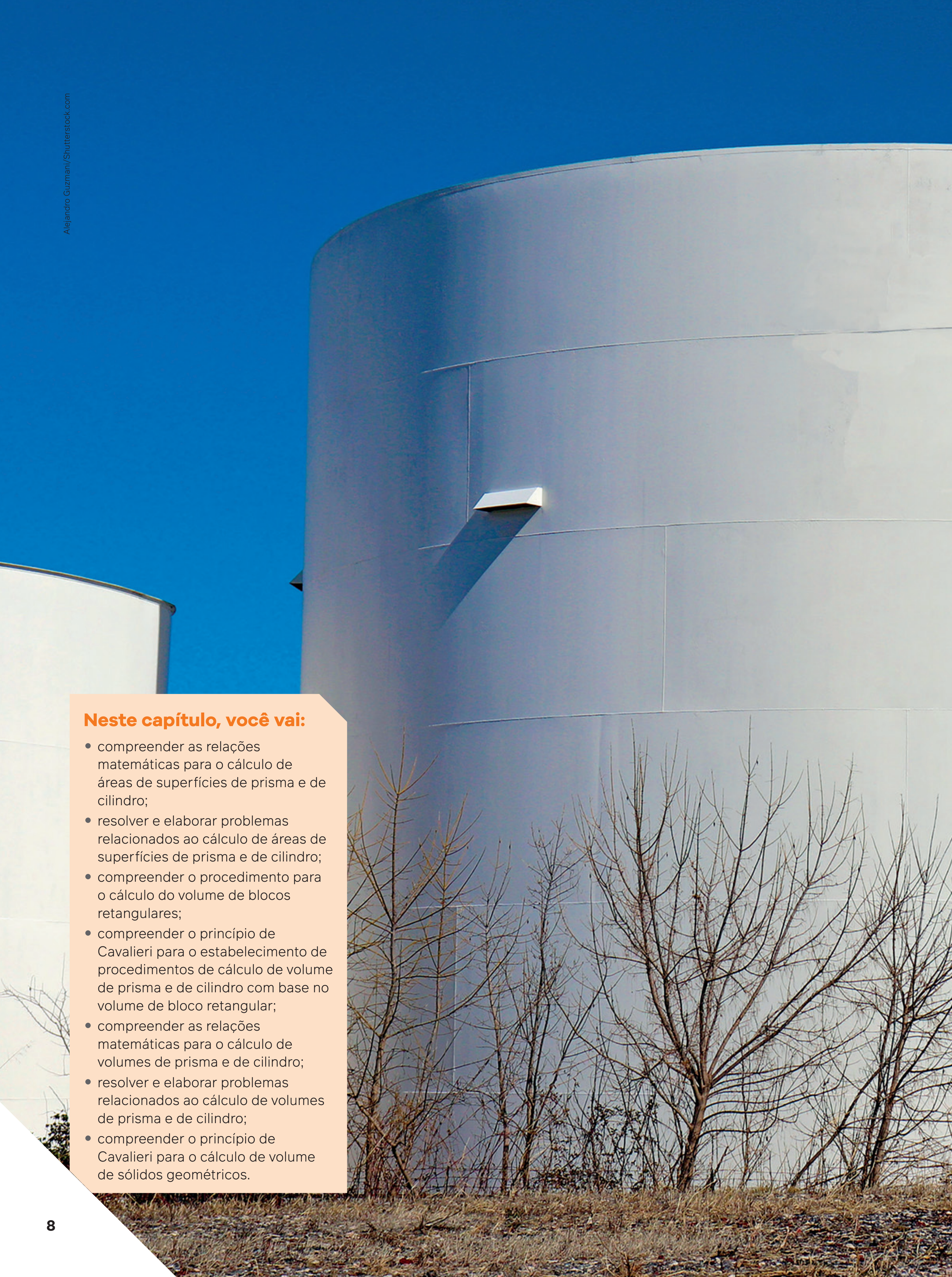
Mapa clicável

Objetos digitais

Ao longo dos capítulos, você encontrará os ícones de remissão para o conteúdo digital: *podcast*, vídeo, infográfico clicável, mapa clicável e carrossel de imagens. Eles aprofundam o conteúdo do livro e ajudam você a compreender melhor os assuntos discutidos. Acesse os objetos digitais por meio do livro digital, clicando nos ícones.

SUMÁRIO

ivector/Shutterstock.com



Alejandro Guzmani/Shutterstock.com

Neste capítulo, você vai:

- compreender as relações matemáticas para o cálculo de áreas de superfícies de prisma e de cilindro;
- resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de áreas de superfícies de prisma e de cilindro;
- compreender o procedimento para o cálculo do volume de blocos retangulares;
- compreender o princípio de Cavalieri para o estabelecimento de procedimentos de cálculo de volume de prisma e de cilindro com base no volume de bloco retangular;
- compreender as relações matemáticas para o cálculo de volumes de prisma e de cilindro;
- resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de volumes de prisma e de cilindro;
- compreender o princípio de Cavalieri para o cálculo de volume de sólidos geométricos.

CAPÍTULO

1

Prisma e cilindros

Dos grandes reservatórios aos pequenos recipientes, a forma cilíndrica aparece como modelo geométrico. Desde a Antiguidade, a Geometria tem acompanhado o desenvolvimento da humanidade. As formas geométricas representam idealizações de formas projetadas pela natureza. Neste capítulo, vamos resolver problemas que envolvem o cálculo de áreas das superfícies de prismas e de cilindros, bem como o cálculo de seus volumes.

Reservatório com formato cilíndrico, Hagerstown (MD), Estados Unidos, 2020.

1. **Você já reparou que nas estantes de supermercados as formas de cilindros e de prismas são as mais usadas nas embalagens? Por que você acha que isso ocorre?**
1. Respostas pessoais.

2. **Se determinado produto pode vir embalado em dois formatos diferentes, o de cilindro e o de prisma de base quadrada, a qual tipo de embalagem você acha que um dono do supermercado daria preferência? Justifique sua resposta.** 2. Respostas pessoais.

1 Prismas

Quando observamos uma cidade, vemos inúmeras construções cujas formas parecem com figuras geométricas que usualmente estudamos na escola. A certa distância, muitas delas nos parecem blocos de formas retangulares e há algumas com formatos bastante ousados e diferentes.

Ismar Ingber/Pulsar Imagens

Construções ao longo da Avenida Rio Branco contrastam o antigo com o novo, Rio de Janeiro (RJ), 2018.

Outro aspecto curioso da arquitetura urbana é a relação entre edifícios antigos e modernos. É comum, principalmente nas cidades mais antigas, vermos essas construções lado a lado. Observar as diferenças existentes entre eles e apreciar um pouco mais a arquitetura dos prédios da cidade nos permite conhecer a história dos lugares em que vivemos e de como temos, com o tempo, ocupado nosso entorno.

Para pensar e discutir

1. Qual é a construção mais antiga que você conhece na cidade em que mora? 1. Resposta pessoal.
2. E qual é a mais moderna? 2. Resposta pessoal.
3. Em alguma delas é possível identificar formas de sólidos geométricos? 3. Resposta pessoal.

À medida que nos afastamos dos grandes centros, o cenário das construções pode ser bem diferente. Em comunidades específicas, como a dos quilombolas, a realidade das construções é bem distinta, como você pode observar na imagem.

Luciana Whitaker/Pulsar Imagens

Fotografia de uma casa situada na comunidade quilombola do Baú na cidade de Araçuaí, Minas Gerais (MG), 2018.

Em algumas comunidades quilombolas espalhadas nas diversas regiões brasileiras, as casas são de adobe, usualmente fabricado no formato de um bloco retangular.

O adobe é um tijolo rústico que pode ser feito de uma mistura de barro cru, areia em pequena quantidade e fibras naturais (como palha e esterco de animais).

Andre Dib/Pulsar Imagens

Tijolos de adobe secando ao sol em Caracol (PI), 2018.

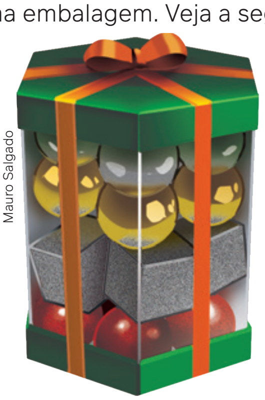
Para ampliar seu conhecimento:

- Pesquise as comunidades quilombolas que vivem no estado em que você habita e procure descobrir as condições de moradia. Como as casas são construídas? Quais são os principais problemas de moradia que essas comunidades enfrentam?
- Apresente sua pesquisa para os colegas e comparem as respostas dadas a essas duas questões.

Em qualquer lugar, seja nos grandes centros, seja nas pequenas comunidades e periferias, para construir é necessário algum conhecimento geométrico. Esse conhecimento pode ser adquirido de forma intuitiva e prática, por meio da experiência e do dia a dia, ou de maneira mais teórica e formalizada.

Área da superfície de um prisma

Um presente que você dá ou recebe, um produto que você compra ou um remédio são exemplos de objetos que vêm dentro de uma embalagem. Veja a seguir alguns exemplos de embalagens.



Mauro Salgado

Mauro Salgado

Mauro Salgado

As imagens desta página estão fora de proporção.

Mauro Salgado

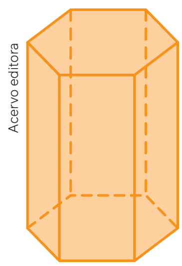
Mauro Salgado

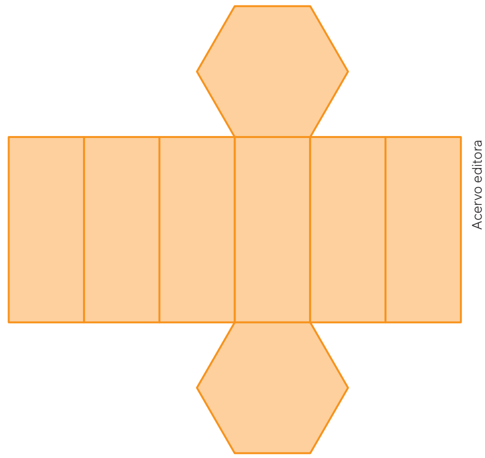
Diversos critérios devem ser considerados na escolha das embalagens a serem utilizadas. Entre eles, as embalagens devem ser **adequadas ao produto**, ou seja, devem ser feitas de tal maneira que o espaço delas seja bem aproveitado e devem ser fortes o suficiente para proteger o produto. Outro critério cada vez mais importante é o **impacto ambiental**, já que a sustentabilidade deve fazer parte da vida dos consumidores conscientes.

Assim, o material utilizado deve ser reciclável, retornável ou reaproveitável. Para quem produz, um critério importante e motivo de preocupação é o **custo da embalagem** a ser utilizada. Quando esse custo é alto, ele encarece o valor final do produto e influencia a venda e o consumo.

Pensar em uma embalagem envolve, portanto, pensar na quantidade de produtos que a embalagem pode conter; em sua função; em como essa embalagem vai ser armazenada e transportada; no impacto ambiental envolvido na elaboração; no transporte e na distribuição do produto embalado; no valor do material de que ela é feita; e até mesmo nas cores, nas ilustrações e nas informações que ela deve exibir. Se pensarmos apenas na quantidade do material a ser utilizado para fazer determinada embalagem, já notamos que é fundamental calcular a área total da embalagem.

Considere, por exemplo, uma embalagem no formato de prisma, como a representada a seguir, junto à representação de sua planificação.



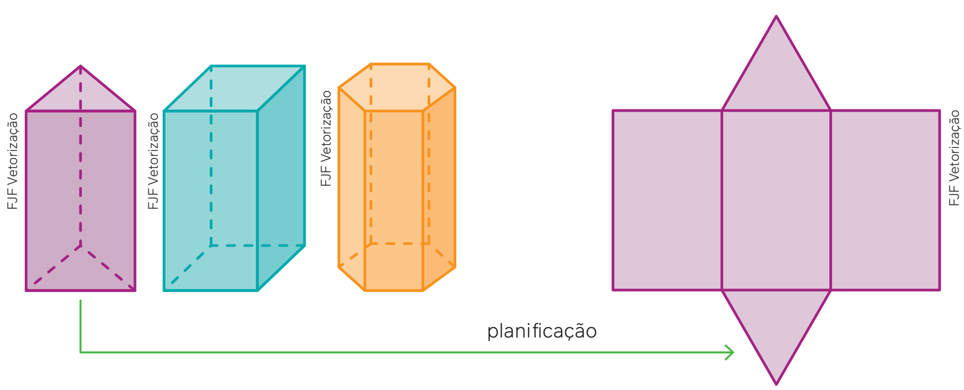


Para pensar e discutir

1. Que formas geométricas você pode identificar na planificação desse prisma? 1. Retângulos e hexágonos.

2. Como você determinaria a quantidade de material a ser utilizada, desconsiderando sobreposições, para fazer o prisma? 2. Resposta pessoal.

Para que você possa perceber mais claramente como calcular a área total de um prisma, vamos usar uma planificação.



Como calcular a área total de um prisma reto? Observe que nos prismas existem duas bases, que são as faces poligonais paralelas, e a superfície lateral, que é formada por retângulos.

A área da superfície total de um prisma pode ser calculada pela soma da área da superfície lateral com as áreas das superfícies correspondentes às duas bases.

Em símbolos:

$$\boldsymbol{A_T = A_L + 2A_b}$$

Em que: A_T representa a área total, A_L a área lateral e A_b a área de cada base.

Na planificação de um prisma reto, como a exemplificada anteriormente, a área lateral corresponde à soma das áreas dos retângulos. Já as áreas das bases, quando o prisma é regular, correspondem às áreas de polígonos regulares. Vamos retomar esses cálculos por meio dos exemplos resolvidos a seguir.

Atividades resolvidas

1. Juliana ganhou um chocolate cuja embalagem está representada na ilustração a seguir. Dessa embalagem, sem considerar possíveis sobreposições de material, ela obteve as duas medidas indicadas na figura e constatou que as faces correspondentes às bases eram triângulos equiláteros.

FJF Vetorização

Com base nessas medidas, determine a área total, sem sobreposições, do material utilizado na embalagem.

- Cálculo da área de cada base (triângulo equilátero):

$$A_b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_b \cong \frac{2,5^2 \cdot 1,73}{4} \Rightarrow A_b \cong 2,70$$

- Cálculo da área lateral (3 retângulos):

$$A_L = 3 \cdot (2,5 \cdot 17,5)$$

$$A_L = 3 \cdot 43,75 \Rightarrow A_L = 131,25$$

- Cálculo da área total:

$$A_T = A_L + 2A_b$$

$$A_T \cong 131,25 + 2 \cdot 2,70 \Rightarrow A_T \cong 136,65$$

A área total é de aproximadamente 136,65 cm^2.

2. A foto a seguir é de um porta-joias com estrutura metálica (as arestas) e faces feitas de placas de vidro. Desconsiderando o tamanho das arestas, sabe-se que a altura do porta-joias é 10 cm e que cada lado do hexágono mede 12 cm. Calcule, com esses dados, o valor da área de vidro desse objeto.

ninachan/Shutterstock.com

Porta-joias.

- Cálculo da área de cada base (A_b)(hexágono):

$$A_b = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_b \cong 6 \cdot \frac{12^2 \cdot 1,73}{4} \Rightarrow A_b \cong 373,68$$

- Cálculo da área lateral (6 retângulos):

$$A_L = 6 \cdot (12 \cdot 10)$$

$$A_L = 6 \cdot 120 \Rightarrow A_L = 720$$

- Cálculo da área total:

$$A_T = A_L + 2A_b$$

$$A_T \cong 720 + 2 \cdot 373,68 \Rightarrow A_T \cong 1\,467,36$$

A área total é de aproximadamente 1.467 cm^2.

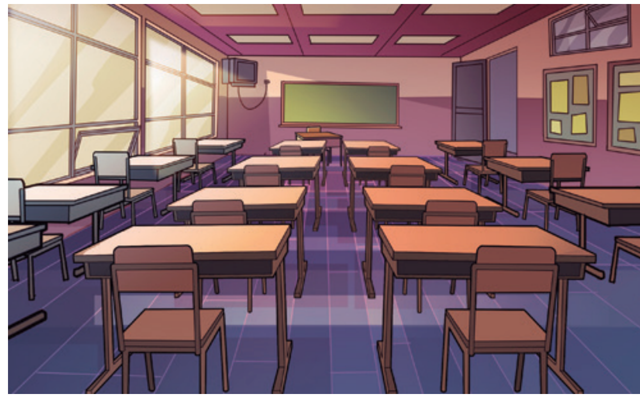
Lembre-se que:

Área A de um triângulo equilátero de lado medindo ℓ: $A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.

Área A de um hexágono regular de lado medindo ℓ: $A = 6 \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{4}$.

Área da superfície de um bloco retangular

Como exemplo de bloco retangular, podemos considerar a sala de aula. Geralmente as salas de aula têm o formato aproximado de um paralelepípedo reto (bloco retangular), como indicado na representação a seguir. As paredes opostas, o teto e o piso representam as faces do bloco.



Mauro Salgado

Na construção civil, o usual é a área de um imóvel ser a soma das áreas dos pisos de todos os seus cômodos. Assim, por exemplo, uma casa de 80 m^2 tem, na verdade, 80 m^2 como a área total de seu piso. No caso da sala de aula, para efeito de estudo, vamos considerar a área total como sendo a área do piso e a área das superfícies de todas as paredes e do teto.

Para pensar e discutir

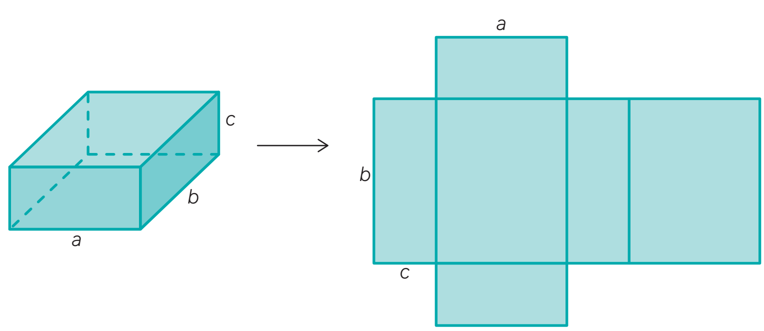
1. Que medidas precisam ser obtidas para determinar a área da superfície total dessa sala? 1. Comprimento, largura e altura.

2. Qual é a área total da sala de aula em que você estuda? Explique como calculou. 2. Respostas pessoais.

3. Se a sala de aula em que você estuda não tem o formato de um bloco retangular, faça um esboço e, depois, a planificação dela. Por fim, descreva como poderia fazer o cálculo de sua área total. 3. Respostas pessoais.

O paralelepípedo reto é um caso particular de prisma reto. Assim, o cálculo da área de sua superfície total pode ser realizado considerando a soma das áreas das seis faces retangulares, como ilustrado.

FJF Vetorização



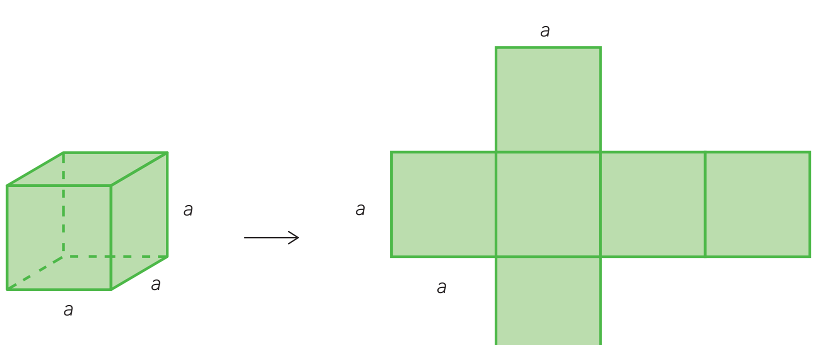
FJF Vetorização

Para o cálculo da área total de um paralelepípedo reto, precisamos determinar as áreas de três retângulos, pois as faces são congruentes duas a duas.

A área da superfície total A_T de um paralelepípedo reto de arestas medindo a, b e c, em uma mesma unidade de medida de comprimento, é dada por:

$$\boldsymbol{A_T = 2 \cdot (ab + ac + bc)}$$

FJF Vetorização



FJF Vetorização

Observação:

O cubo é um paralelepípedo reto em que todas as arestas têm a mesma medida. Assim, sua área total equivale à área de 6 quadrados congruentes:

$$\boldsymbol{A_T = 6a^2}$$

Atividades resolvidas

3. Os correios brasileiros utilizam embalagens de diversos formatos para o envio de livros, presentes etc. Observe na fotografia as medidas de uma dessas caixas. Imagine que você queira revesti-la com papel colorido, sem sobras e sem sobreposição. Quantos centímetros quadrados de papel seriam necessários?

Dotta

Caixa de papelão em formato de bloco retangular.

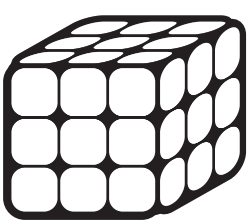
- Aqui estamos considerando a situação em que não há sobras nem sobreposição. Dessa forma, basta calcular a área total da superfície da caixa:

$$A_T = 2 \cdot (ab + ac + bc)$$
$$A_T = 2 \cdot (26 \cdot 17 + 26 \cdot 8{,}5 + 17 \cdot 8{,}5)$$
$$A_T = 2 \cdot (442 + 221 + 144{,}5)$$
$$A_T = 2 \cdot 807{,}5 \Rightarrow A_T = 1\,615$$

Portanto, são necessários 1 615 cm^2 de papel para revestir a caixa sem sobras e sem sobreposições.

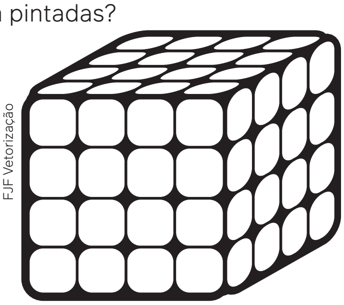
4. Os dois cubos representados a seguir são formados por cubinhos menores e de mesmo tamanho. Cada cubinho tem 1 cm de medida da aresta. As faces do cubo 1 e do cubo 2 serão coloridas. Qual é a soma das áreas das superfícies a serem pintadas?

FJF Vetorização



Cubo 1.

FJF Vetorização



Cubo 2.

- Precisamos determinar a soma das áreas totais desses dois cubos:

$$A = A_{T1} + A_{T2}$$
$$A = 6 \cdot 3^2 + 6 \cdot 4^2$$
$$A = 54 + 96 \Rightarrow A = 150$$

Portanto, a área da superfície a ser pintada é de 150 cm^2.

Para explorar

Reúna-se com três colegas e, juntos, providenciem réguas para realizarem esta atividade.

Etapa 1 Etapa 1 resposta pessoal.

Escolham uma embalagem fechada e tragam-na para a sala de aula.

Etapa 2 Etapa 2 resposta pessoal.

Obtenham as medidas necessárias para determinar a área da superfície total da embalagem.

Etapa 3 Etapa 3 resposta pessoal.

Calculem a área total da embalagem.

Etapa 4 Etapa 4 resposta pessoal.

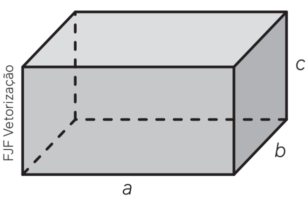
Troquem as embalagens entre os grupos e refaçam as etapas anteriores para determinar a área da superfície total da embalagem.

Etapa 5 Etapa 5 resposta pessoal.

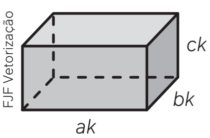
Depois da troca de embalagens com outros grupos, discutam com eles o experimento e avaliem os resultados e procedimentos. Em caso de diferenças entre as medidas obtidas, a turma toda deve ser envolvida na verificação.

Atividades

1. Os dois blocos retangulares a seguir são semelhantes, isto é, um deles é a ampliação (ou redução) do outro, sendo k a constante de proporcionalidade.



FJF Vetorização



FJF Vetorização

a) Escreva a expressão que representa a área da superfície total do bloco 1. 1. a) $A_{T1} = 2ab + 2ac + 2bc$

b) Escreva a expressão que representa a área da superfície total do bloco 2. 1. b) $A_{T2} = k^2 \cdot (2ab + 2ac + 2bc)$

c) Qual é a relação entre as áreas dos blocos 1 e 2? 1. c) $A_{T2} = k^2 \cdot A_{T1}$

d) Se o bloco 2 é uma redução do bloco 1, quais os possíveis valores de k^2? 1. d) $0 < k^2 < 1$

2. Uma indústria fabrica porta-lápis em formato de prismas quadrangulares regulares, como a imagem a seguir. Esse porta-lápis é feito de metal e apenas a superfície externa dele (excluindo a parte superior) será revestida em couro sintético. A aresta da base mede 8 cm e a altura mede 10,5 cm.

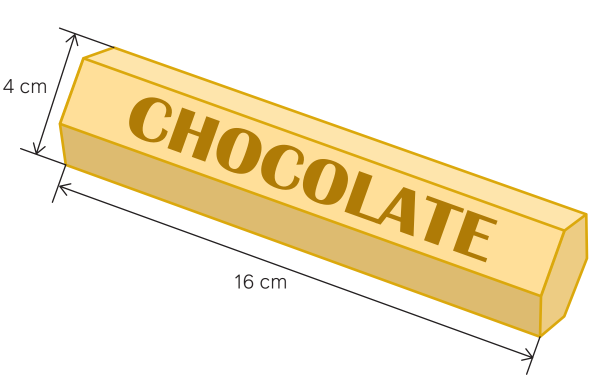

GO DESIGN/Shutterstock.com

Determine:

a) a quantidade de couro sintético necessária para fazer o revestimento externo, considerando que não há desperdício de material nem sobreposição; 2. a) 400 cm²

b) a quantidade de porta-lápis que poderá ser revestida com os 100 m² de couro sintético que a indústria guarda em seu estoque. 2. b) 2 500

3. Um novo chocolate está sendo lançado. Será uma barra em formato de prisma regular com base hexagonal, como ilustrado na figura a seguir.

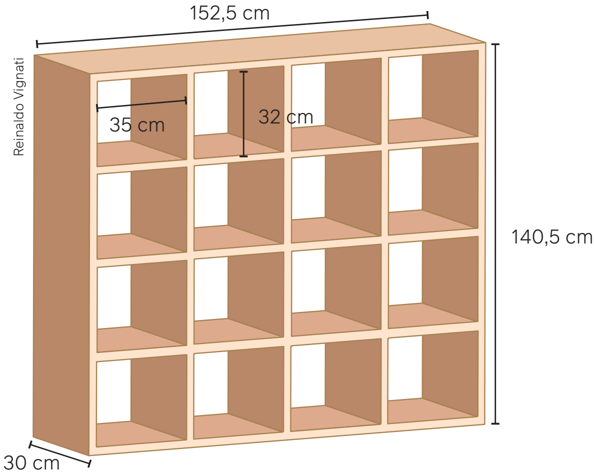


FJF Vetorização

Se cada lado do hexágono mede 2 cm e sem considerar possíveis sobreposições, quantos centímetros quadrados serão necessários para produzir a embalagem, conforme as medidas indicadas? 3. Aproximadamente 213 cm².

4. Junte-se a um colega para esta atividade.

Um marceneiro produz estantes para escritório que são abertas na parte da frente e na parte de trás, como indicado na imagem a seguir. Os espaços entre as divisórias são exatamente iguais e as partes em madeira têm a mesma espessura.



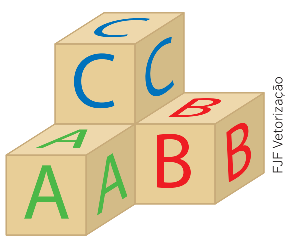
a) Pela ilustração, determinem o número de peças que devem ser utilizadas na montagem da estante. 4. a) 19

b) Quais são as medidas de cada uma dessas peças? 4. b) Resposta no Manual do Professor.

c) Aproximadamente quantos metros quadrados de madeira são necessários para fazer esta estante? 4. c) 4,2075 m^2

d) Qual é a espessura das placas de madeira? 4. d) 2,5 cm

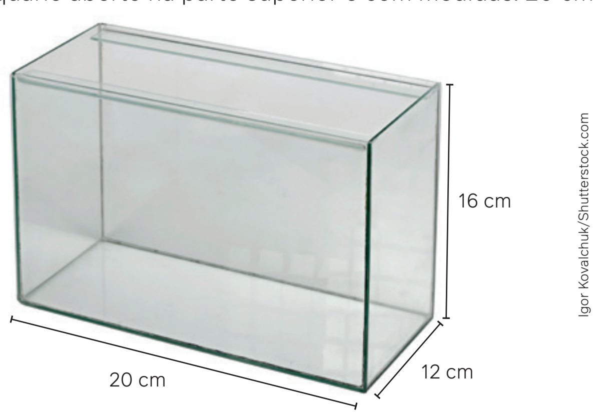
5. Para auxiliar no processo de alfabetização, determinada escola produziu cubos coloridos com as letras do alfabeto. Os cubos foram feitos de material reciclável e revestidos com lâminas emborrachadas para que as crianças não se machuquem enquanto manipulam os dados. Considere que cada cubo tenha 8 cm de medida de aresta e que não haja sobreposição ou desperdício de material para revesti-los.



a) Calcule a quantidade de material emborrachado para revestir todos os cubos necessários para completar o alfabeto. Essa quantidade é maior ou menor que 1 metro quadrado? 5. a) 9 984 cm^2; menor

b) Considerando que na turma há 20 estudantes e que cada um recebeu o alfabeto completo, determine a quantidade em cm^2 de material emborrachado usada. 5. b) 199 680 cm^2

6. A imagem a seguir é de um aquário aberto na parte superior e com medidas: 20 cm × 12 cm × 16 cm.

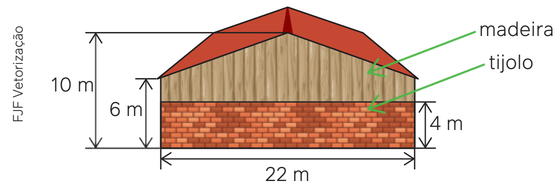


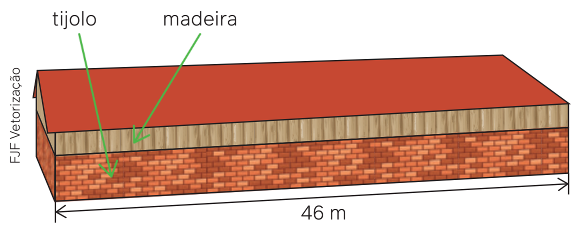
O vidro utilizado para as 5 paredes do aquário mede 3 mm de espessura. Para fazer esse aquário, responda:

a) Quantos centímetros quadrados de vidro serão usados, sem contar possíveis desperdícios, para essas 5 paredes? 6. a) 1 264 cm^2

b) Considere que essas medidas serão duplicadas para fazer outro aquário de formato semelhante a esse. Quantos centímetros quadrados serão gastos com o novo aquário? 6. b) 5 056 cm^2

7. As ilustrações a seguir representam duas vistas de um galpão que será construído. As medidas estão indicadas e o desenho é apenas para registrar os materiais que serão utilizados nas paredes.



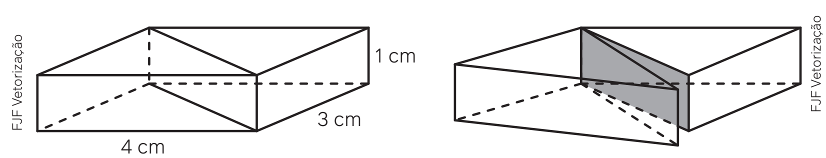


Na frente do galpão, haverá um portão de metal com 6 m de largura e 4 m de altura (com o portão construído na parede de tijolo), a parte em madeira é igual na vista frontal e traseira do galpão. Em relação à superfície lateral desse galpão, desconsiderando possíveis perdas de material, determine a quantidade de metros quadrados que será feita com:

a) tijolo; 7. a) 520 m²

b) madeira. 7. b) 360 m²

8. (Unesp) Um paralelepípedo reto retângulo foi dividido em dois prismas por um plano que contém as diagonais de duas faces opostas, como indica a figura.



Comparando-se o total de tinta necessária para pintar as faces externas do paralelepípedo antes da divisão com o total necessário para pintar as faces externas dos dois prismas obtidos após a divisão, houve um aumento aproximado de 8. Alternativa **d**.

a) 42%.

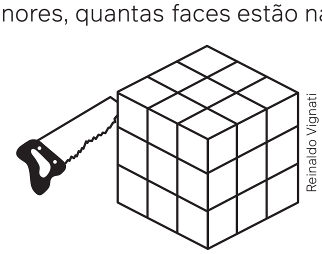
b) 36%.

c) 32%.

d) 26%.

e) 28%.

9. (CM-RJ) Um cubo de madeira foi pintado de branco em toda a sua superfície. Após a secagem da pintura, ele foi serrado em 27 cubos menores iguais. As faces desses cubos, que não foram pintadas, estão na cor natural da madeira. Considerando os 27 cubos menores, quantas faces estão na cor natural da madeira? 9. Alternativa **d**.



a) 54 **b)** 72 **c)** 102 **d)** 108 **e)** 162

10. (UEMG) Um *design* projetou um chaveiro no formato de um prisma triangular reto com 12 cm de altura. Sabe-se que as arestas da base formam um triângulo retângulo com catetos de medidas 6 cm e 8 cm. Para cobrir todas as faces desse prisma, adquirindo a quantidade suficiente de papel adesivo, e, com isso, evitar o desperdício, será preciso saber a área total da superfície desse prisma. Fazendo os cálculos corretos, obtém-se que a área total desse prisma mede 10. Alternativa **a**.

a) 336 cm².

b) 324 cm².

c) 316 cm².

d) 312 cm².

Volume do bloco retangular

O volume representa a medida do espaço ocupado, por exemplo, por um sólido. Um dos primeiros contatos que você teve com o cálculo de volume foi de um bloco retangular (paralelepípedo reto). Algumas unidades de medida de volume que você já conhece são centímetros cúbicos e metros cúbicos, as mais utilizadas.

Maha Heang 245789/Shutterstock.com

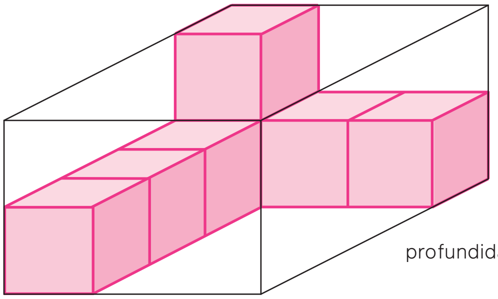
Caminhão porta-contêiner no armazém de distribuição de importação/exportação, Cingapura, 2020.

Mesmo que você já saiba calcular o volume de um bloco retangular, vamos retomar algumas ideias para aprofundá-las. A determinação do volume de sólidos geométricos é necessária em variadas atividades. Por exemplo, o transporte de diversos produtos por caminhão (ou trem) até chegar a um porto é realizado com o uso de contêineres. Para preencher um contêiner com uma carga, é preciso conhecer o volume dele para, assim, determinar quantas caixas, ou quantos pacotes ou engradados, podem ser colocadas dentro dele para o transporte.

Você já estudou que medir é comparar. Assim, comparamos grandezas, como comprimento, superfície, capacidade, massa e volume, entre outras, utilizando uma referência, ou seja, estabelecemos uma unidade de comparação.

Considere, por exemplo, que você queira formar um bloco retangular por meio do empilhamento de pequenos cubos, como sugere a figura. Esse bloco terá ao final duas camadas.

FJF Vetorização

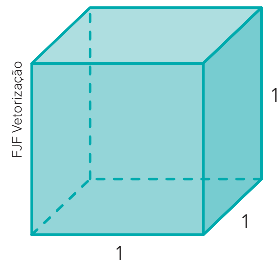


Para pensar e discutir

1. Na camada mais baixa, quantos cubinhos haverá, após a construção, ao longo da profundidade? 1. 4
2. E quantos na largura? 2. 3
3. Quantos cubinhos serão necessários para a construção de cada camada? Explique como você calculou. 3. 12; resposta pessoal
4. Quantos cubinhos serão necessários para a construção do bloco retangular? Explique como você calculou. 4. 24; resposta pessoal

Na discussão anterior, você utilizou o cubinho como unidade de volume para responder à questão sobre a quantidade de cubinhos necessária para a construção do bloco retangular. Assim, ao dizer que são 24 cubinhos, se considerarmos que o volume do cubinho é *u*, então o volume do bloco retangular será 24 *u*.

Um cubo de aresta unitária, ou seja, cuja aresta mede 1 unidade de comprimento, é um cubo unitário. Dizemos que o volume desse cubo é 1.



Volume:
$V = 1 \times 1 \times 1$
$V = 1^3$
$V = 1$

Assim, dependendo da unidade de medida de comprimento, temos uma unidade de medida de volume:

- medida da aresta de um cubo: 1 cm → volume desse cubo: 1 cm^3;
- medida da aresta de um cubo: 1 dm → volume desse cubo: 1 dm^3;
- medida da aresta de um cubo: 1 m → volume desse cubo: 1 m^3.

Existe aí um problema!

Considerando como unidade de medida de volume o cubo unitário, podemos dizer que o volume de um sólido qualquer será o número que expressa a quantidade de vezes que esse sólido contém o cubo unitário. Porém, nem sempre estamos diante de sólidos como o bloco retangular visto anteriormente, ou seja, nem sempre estamos diante de formatos regulares nos quais é simples expressar seu volume pela quantidade de cubos unitários que os compõem. Daí a necessidade do estabelecimento de relações matemáticas para calcular o volume de sólidos geométricos.

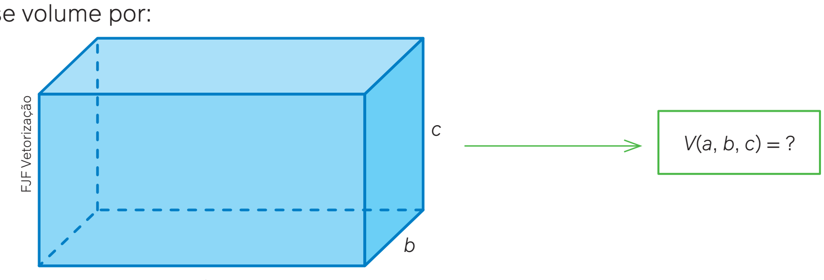
Vamos utilizar duas ideias que nos auxiliarão na busca de relações matemáticas. Vejamos a primeira ideia.

O volume de um paralelepípedo reto é proporcional a cada uma de suas dimensões.

- Considerando que o volume de um cubo unitário é 1, vamos representar esse fato por meio da seguinte expressão:

$$V(1, 1, 1) = 1$$

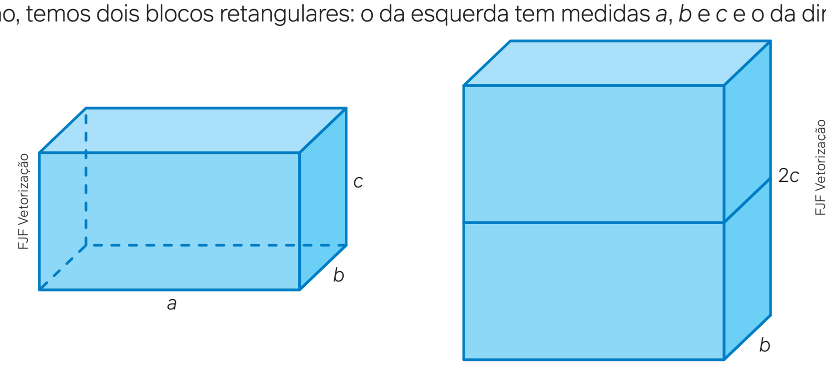
Queremos examinar o volume de um paralelepípedo reto (bloco retangular) de arestas medindo *a*, *b* e *c*. Vamos representar esse volume por:



A seguir, você irá analisar três situações, para concluir, sobre uma importante relação matemática envolvendo o volume de um bloco retangular quando se varia uma de suas dimensões.

Situação 1

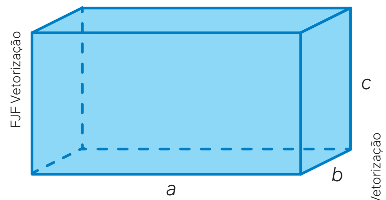
Na ilustração, temos dois blocos retangulares: o da esquerda tem medidas *a*, *b* e *c* e o da direita tem medidas *a*, *b* e 2*c*.

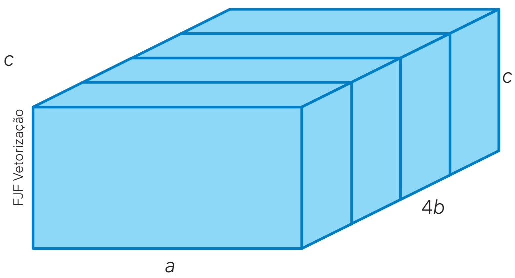


Considere que $V(a, b, c)$ representa o volume do bloco da esquerda e $V(a, b, 2c)$, o da direita.

Situação 2

Na ilustração a seguir, temos dois blocos retangulares: o da esquerda tem medidas *a*, *b* e *c* e o da direita tem medidas *a*, 4*b* e *c*.

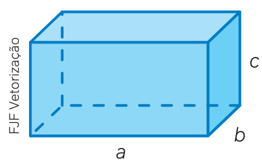


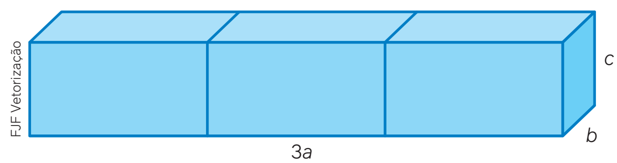


Considere que *V*(*a*, *b*, *c*) representa o volume do bloco da esquerda e *V*(*a*, 4*b*, *c*), o da direita.

Situação 3

Na ilustração a seguir, temos dois blocos retangulares: o da esquerda tem medidas *a*, *b* e *c* e o da direita tem medidas 3*a*, *b* e *c*.





Considere que *V*(*a*, *b*, *c*) representa o volume do bloco da esquerda e *V*(3*a*, *b*, *c*), o da direita.

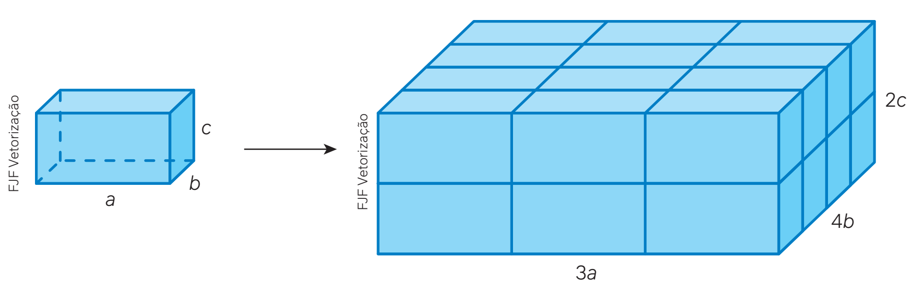
Para pensar e discutir

1. Na Situação 1: Quantas vezes o bloco da direita contém o bloco da esquerda? E qual é a razão $\frac{V(a,b,2c)}{V(a,b,c)}$?
1. 2; *r* = 2

2. Na Situação 2: Quantas vezes o bloco da direita contém o bloco da esquerda? E qual é a razão $\frac{V(a,4b,c)}{V(a,b,c)}$?
2. 4; *r* = 4

3. Na Situação 3: Quantas vezes o bloco da direita contém o bloco da esquerda? E qual é a razão $\frac{V(3a,b,c)}{V(a,b,c)}$?
3. 3; *r* = 3

Com base no bloco retangular a seguir, com medidas das arestas *a*, *b* e *c*, construímos um novo bloco, com as medidas anteriores multiplicadas por 3, 4 e 2, respectivamente.



Vamos calcular o volume *V*(3*a*, 4*b*, 2*c*) em função do volume *V*(*a*, *b*, *c*). Acompanhe as explicações a seguir:

$$V(3a, 4b, 2c) = 3 \cdot V(a, 4b, 2c)$$

$$V(3a, 4b, 2c) = 3 \cdot 4 \cdot V(a, b, 2c)$$

$$V(3a, 4b, 2c) = 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot V(a, b, c) \Rightarrow V(3a, 4b, 2c) = 24 \cdot V(a, b, c)$$

Nas situações apresentadas até o momento, as medidas das arestas foram multiplicadas por números naturais. Intuitivamente (não será justificado aqui), esses resultados também são válidos quando as medidas das arestas são multiplicadas por números reais positivos. Então, considerando que a, b e c sejam números reais positivos representando as medidas das arestas de um bloco retangular, podemos obter seu volume em função de um cubo unitário, isto é:

$$V(a, b, c) = V(a \cdot 1, b \cdot 1, c \cdot 1)$$
$$V(a, b, c) = a \cdot V(1, b \cdot 1, c \cdot 1)$$
$$V(a, b, c) = a \cdot b \cdot V(1, 1, c \cdot 1)$$
$$V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c \cdot V(1, 1, 1)$$
$$V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c \cdot 1 \Rightarrow V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c$$

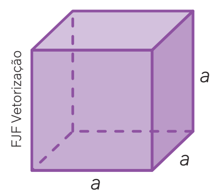
O volume de um bloco retangular (paralelepípedo reto) é o produto das medidas reais positivas, em uma mesma unidade, de suas arestas. Em símbolos, sendo V o volume e a, b e c as medidas das arestas, temos:

$$\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c}$$

Essa relação provavelmente já é conhecida. Entretanto, o desenvolvimento proposto foi para que você aprendesse um pouco mais a respeito do estabelecimento dela. Dissemos que usaríamos duas ideias para o cálculo do volume de sólidos. A segunda ideia será apresentada no tópico a seguir: **o princípio de Cavalieri**.

Observação:

Como já vimos anteriormente, podemos considerar um cubo como um bloco retangular, porém com as três arestas de medidas iguais. Dessa forma, o volume de um cubo será determinado pelo cálculo do cubo da medida de sua aresta.



Volume do cubo de aresta medindo a:

$$V = a \cdot a \cdot a$$
$$\boldsymbol{V = a^3}$$

Atividades resolvidas

5. Na ilustração a seguir, estão indicadas as medidas de um contêiner modelo *DC 20 pés*. Note que ele tem o formato aproximado de um bloco retangular, pois suas paredes são irregulares. Calcule seu volume, considerando-o como bloco retangular.

- Cálculo do volume:

$$V = a \cdot b \cdot c$$
$$V = (6{,}06\text{ m}) \cdot (2{,}44\text{ m}) \cdot (2{,}59\text{ m})$$
$$V \cong 38{,}30 \rightarrow 38{,}30\text{ m}^3$$

Portanto, o volume externo é aproximadamente 38,30 m^3.

6. O contêiner *DC 40 pés* tem apenas a medida do comprimento diferente do contêiner *DC 20 pés*. O comprimento de 6,06 m passa para 12,19 m. Qual é o volume dele?

- Cálculo do volume:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 12{,}19 \cdot 2{,}44 \cdot 2{,}59$$

$$V \cong 77{,}04$$

Portanto, o volume externo é aproximadamente 77,04 m^3.

7. Considere que todas as paredes do contêiner *DC 40 pés* tenham aproximadamente 15 cm de espessura. Nessas condições, qual seria o volume da parte interna? E qual a capacidade em litros?

- O volume da parte interna é calculado diminuindo 15 cm = 0,15 m das três medidas:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = (12{,}19 - 0{,}15) \cdot (2{,}44 - 0{,}15) \cdot (2{,}59 - 0{,}15)$$

$$V = 12{,}04 \cdot 2{,}29 \cdot 2{,}44$$

$$V \cong 67{,}27 \rightarrow 67{,}27 \text{ m}^3$$

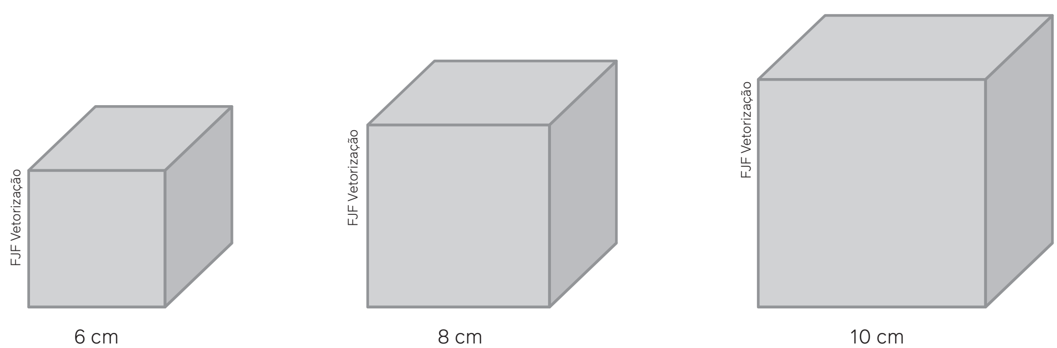
- Como 1 m^3 corresponde à capacidade de 1 000 L, temos:

$$\text{Capacidade} \cong 67{,}27 \cdot (1\,000)$$

$$\text{Capacidade} \cong 67\,270 \rightarrow 67\,270 \text{ L}$$

Portanto, o volume interno é de aproximadamente 67,27 m^3 e capacidade de 67 270 L.

8. A seguir estão representados três cubos de chumbo e as medidas de suas arestas. Eles serão fundidos para formar um só cubo. Qual será a medida da aresta do novo cubo assim obtido?



- Se representarmos a medida da aresta do novo cubo por x e seu volume por V, o novo volume será a soma dos volumes dos 3 cubos:

$$V = 6^3 + 8^3 + 10^3$$

$$x^3 = 216 + 512 + 1\,000$$

$$x^3 = 1\,728$$

$$x = \sqrt[3]{1\,728}$$

$$x = 12 \rightarrow 12 \text{ cm}$$

Portanto, a aresta do novo cubo medirá 12 cm.

Para pensar e discutir

1. Como você calcularia $\sqrt[3]{1\,728}$? Explique. 1. Resposta pessoal.

2. Se a aresta de um cubo duplicar, o que acontecerá com seu volume? 2. Será multiplicado por 8.

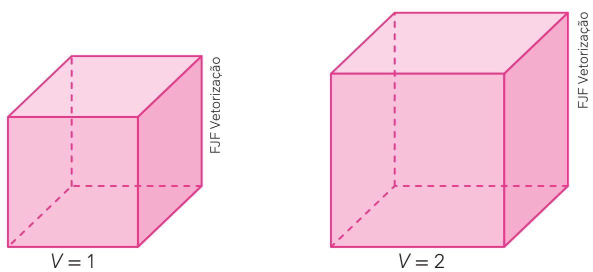
Análise e contexto

Duplicando o volume de um cubo

Há um famoso problema de duplicação do cubo, que faz parte da história da Matemática, relacionado ao volume de um cubo. O texto a seguir discorre sobre esse episódio.

A duplicação do cubo

Alguns historiadores mencionam a existência de três intrigantes problemas de Matemática da Antiguidade. Um deles diz respeito à construção de um cubo, mas não um cubo qualquer. O problema consistia em construir um cubo cujo volume fosse o dobro do volume de um cubo conhecido. Tal problema parece ser da época de Pitágoras (c. 540 a.C.). Os pitagóricos, na época da descoberta da incomensurabilidade, descobriram como achar um quadrado de área igual ao dobro da área de um quadrado dado. O lado do quadrado resultante representava a medida da diagonal do quadrado dado. Assim, se o quadrado original tinha a unidade como comprimento, a solução seria encontrar um segmento de comprimento correspondente ao que hoje sabemos ser $\sqrt{2}$. Já a solução do problema da duplicação do cubo exigia achar um segmento de comprimento igual a $\sqrt[3]{2}$. Mas esse problema foi enunciado de uma forma mais curiosa pelos gregos. Vejamos!



Conta-se que o comentador Eutócio (c. 560 d.C.) refere-se a uma carta que teria sido redigida por Eratóstenes (aquele que calculou o comprimento da circunferência da Terra) a Ptolomeu I (que não é o matemático com o mesmo nome). Na carta havia a menção de que o rei Minos havia edificado uma tumba em forma de cubo para seu filho. Entretanto, Minos achou o tamanho do monumento inadequado e ordenou que a tumba fosse duplicada, dobrando-se assim a medida do lado (a aresta do cubo).

Então, surge Eratóstenes constatando que a construção não estava certa, pois havia um erro: a área ocupada pela nova tumba representava o quádruplo da área da tumba antiga, enquanto o volume correspondia a oito vezes o volume da tumba original.

Entram, então, os geômetras para resolver o problema.

Há outra versão sobre a origem do problema da duplicação do cubo. Nela, os deuses teriam mandado uma peste que atingiu o povo de Atenas. O povo, por sua vez, enviou um grupo de representantes ao oráculo de Delfos para perguntar o que eles poderiam fazer para acalmar os deuses. Foram comunicados, então, que deveriam dobrar o tamanho do altar cúbico de Apolo. Se assim procedessem, a peste recuaria.

Construíram, assim, um novo altar, também em forma de cubo, em que as arestas tinham o dobro de comprimento das arestas do altar anterior. Como as exigências dos deuses não foram atendidas adequadamente pelos atenienses, a peste continuou. A história não diz o que acabou acontecendo, entretanto, com o passar do tempo, a peste foi embora.

Fonte: EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. Disponível em: https://bit.ly/4cGJXzn. Acesso em: 29 ago. 2024.

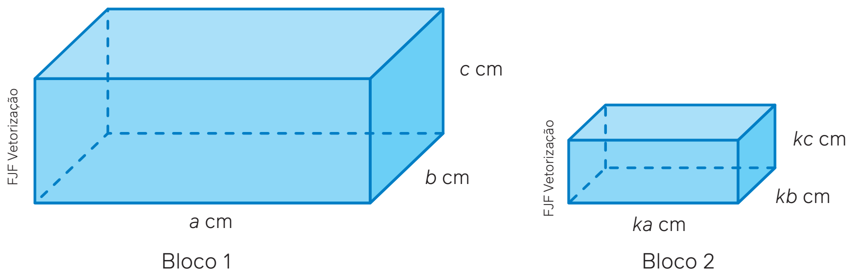
Entenda que a solução para esse tipo de problema estava restrita à utilização dos instrumentos régua e compasso. Isso teria levado os gregos a diversas descobertas matemáticas ao longo do tempo. Segundo Anderson, uma construção com régua e compasso da duplicação do cubo não poderia ser feita pelos gregos, pois pode-se provar que a solução é impossível de acordo com as restrições feitas.

1. Se a medida da aresta de um cubo é igual a x cm, qual deverá ser a medida da aresta de um novo cubo de tal maneira que seu volume seja o dobro do volume do cubo anterior? 1. $x \cdot \sqrt[3]{2}$ cm

2. Discuta com os colegas e apresentem uns aos outros as estratégias utilizadas para a resolução. 2. Resposta pessoal.

Atividades

11. Os dois paralelepípedos retos são semelhantes, isto é, um é a ampliação do outro (ou a redução do outro). As medidas das arestas estão indicadas em cada figura, sendo k um número real positivo.



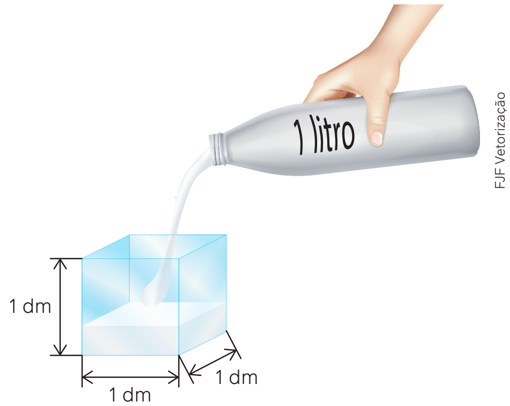
a) Como o bloco 2 é menor que o bloco 1, quais os valores que k pode assumir? 11. a) $0 < k < 1$

b) Qual é a razão entre as medidas dos lados correspondentes do bloco 2 e do bloco 1, nessa ordem? 11. b) k

c) Qual é a razão entre as áreas totais do bloco 2 e do bloco 1, nessa ordem? 11. c) k^2

d) Qual é a razão entre os volumes do bloco 2 e do bloco 1, nessa ordem? 11. d) k^3

12. Na ilustração a seguir, há um recipiente de vidro em formato de cubo cuja aresta mede 1 dm. Nesse recipiente está sendo colocado leite.

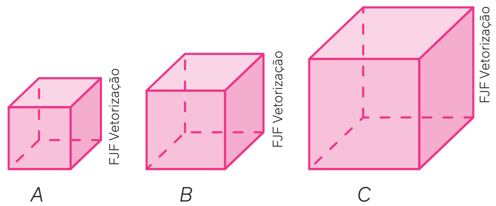


a) Considerando que as medidas indicadas são internas, qual é o volume do espaço interior a esse cubo em dm^3? E em cm^3? 12. a) $1\ dm^3$; $1\,000\ cm^3$

b) Se todo o leite for colocado, o recipiente ficará cheio? Justifique. 12. b) Sim; resposta pessoal.

13. Reúna-se a um colega para esta atividade.

a) Juntos, elaborem e resolvam uma situação relacionada ao volume de três cubos de tamanhos diferentes, sendo A o cubo menor, B o cubo médio e C o cubo maior. 13. a) Resposta pessoal.



b) Então, respondam: 13. b) Resposta pessoal.

- Qual é a razão entre as medidas das arestas do cubo A e do cubo B, nessa ordem?
- E qual é a razão entre os volumes dos cubos A e B, nessa ordem?
- Qual é a razão entre as medidas das arestas do cubo C e do cubo B, nessa ordem?
- E qual é a razão entre os volumes dos cubos C e B, nessa ordem?
- Os três cubos são semelhantes entre si dois a dois? Justifiquem.

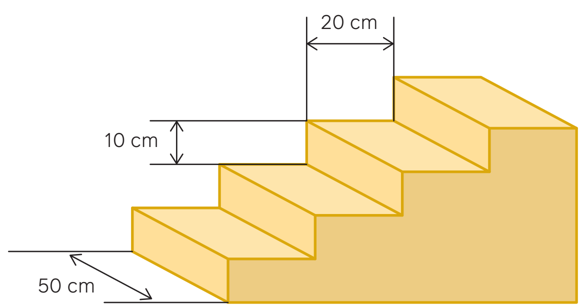
14. Observe as medidas externas e internas de um tipo de contêiner. Determine a diferença entre o volume externo e interno dele. 14. Aproximadamente 9,361 m³.

Evannovostro/Shutterstock.com

Dimensões	Largura (m)	Comprimento (m)	Altura (m)
Externa	2,438	12,192	2,59
Interna	2,352	12,03	2,39

15. Utilizando os dados da atividade anterior, informe a capacidade aproximada em litros desse contêiner. 15. 67 624 L

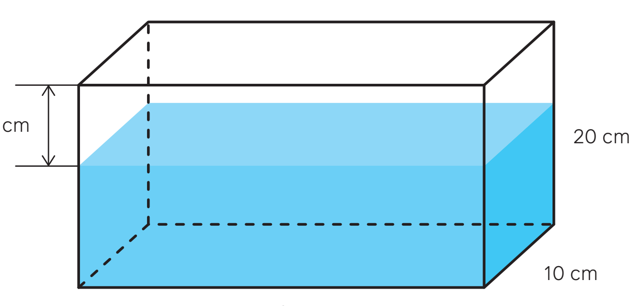
16. Uma escada será concretada e suas medidas estão indicadas na figura.



FJF Vetorização

Será necessário utilizar mais do que 1 m³ de cimento? Justifique. 16. Não, resposta pessoal.

17. Considere, conforme a figura a seguir, um recipiente em formato de paralelepípedo com as medidas internas indicadas. Observe que a altura da água dentro do recipiente está a 8 cm da altura dele. Calcule em litros a quantidade de água desse recipiente. 17. 4,8 L



FJF Vetorização

18. Junte-se a mais três colegas para esta atividade.

I. Escolham um ambiente da escola cujo formato seja de paralelepípedo reto. 18. I. Resposta pessoal.

II. Obtenham as medidas internas desse ambiente, isto é, comprimento, largura e altura. 18. II. Resposta pessoal.

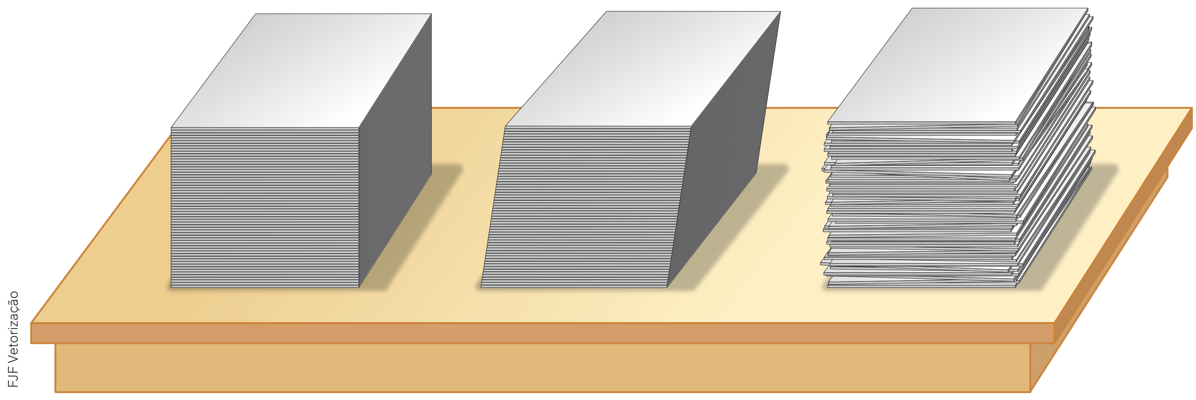
III. Calculem em metros cúbicos o volume interno desse ambiente. 18. III. Resposta pessoal.

IV. Determinem em litros a capacidade desse ambiente. 18. IV. Resposta pessoal.

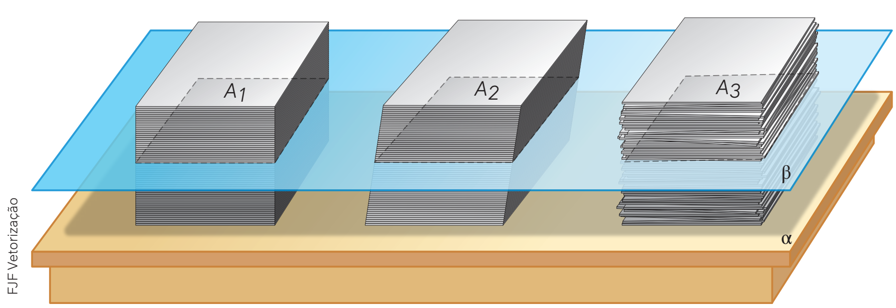
V. Apresentem aos demais colegas os resultados, comentando os procedimentos utilizados. 18. V. Resposta pessoal.

Volume do prisma: o princípio de Cavalieri

Para compreender o princípio de Cavalieri, imaginemos um experimento. Sobre uma mesa plana, colocamos três pilhas de papel de mesmo tamanho, com folhas de mesma espessura. Cada pilha contém a mesma quantidade de folhas, como ilustra a figura a seguir. Observe que na pilha da esquerda forma-se um bloco retangular, enquanto nas outras duas pilhas os blocos parecem "deformados".



Agora, imagine um plano paralelo ao tampo da mesa seccionando as três pilhas, como sugere a ilustração a seguir. Na representação, estão indicadas por A_1, A_2 e A_3 as três áreas de três folhas pelas quais o plano passa.



Para pensar e discutir

1. O que essas três pilhas têm em comum? 1. Resposta pessoal.
2. Qual das pilhas de papel tem o maior volume? Justifique. 2. As três pilhas têm o mesmo volume; resposta pessoal.
3. Comparando as áreas A_1, A_2 e A_3, qual é sua conclusão? 3. As três áreas são iguais.

Nascido na cidade de Milão, Itália, Francesco Cavalieri (1598-1647) estudou Filosofia e Teologia. Na cidade italiana de Pisa, tornou-se discípulo de Galileu. Sua grande contribuição para a Matemática está no que ele mesmo denominou "método dos indivisíveis", que, no século XVII, auxiliou substancialmente na criação do cálculo diferencial e integral feita por Newton e Leibniz. Cavalieri, por sua vez, desenvolveu seu método dos indivisíveis com base no estudo de Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.).

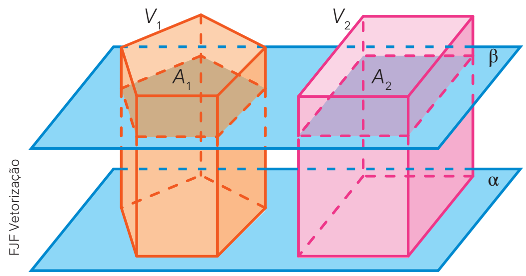
A contribuição de Cavalieri para a Matemática é amplamente reconhecida. Vamos agora enunciar o princípio que leva seu nome sem sua demonstração formal.

Princípio de Cavalieri

Dados dois sólidos e um plano, suponha que todo plano paralelo ao plano dado, ao interceptar um dos dois sólidos, intercepta também o outro, de tal modo que as duas secções obtidas tenham a mesma área. Sendo assim, os dois sólidos têm o mesmo volume.

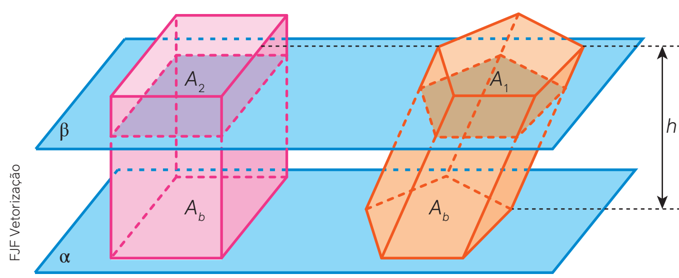
Na ilustração, temos dois sólidos de volumes V_1 e V_2. Os planos representados por α e β são paralelos. Conforme o princípio de Cavalieri, se as áreas A_1 e A_2, determinadas como secções feitas por qualquer plano β paralelo ao plano α, forem iguais, então os dois sólidos terão o mesmo volume.

Assim, temos: se $A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$



Desse resultado, veremos como obter o volume de prismas, cilindros, cones e esferas. Agora, aprenderemos um procedimento, com base no princípio de Cavalieri, que nos permitirá calcular o volume de prismas.

Como já conhecemos o volume de um paralelepípedo reto, vamos utilizar esse fato para calcular o volume de um prisma. Assim, considere que, na imagem a seguir, na figura da direita há um prisma cujo volume queremos obter e, na figura da esquerda, um paralelepípedo reto.



Se considerarmos que as áreas A_1 e A_2 são iguais, então as áreas das bases, indicadas por A_b, também são iguais. Como os dois sólidos têm a mesma altura, pelo princípio de Cavalieri, eles têm também o mesmo volume.

$$V_{\text{prisma}} = V_{\text{paralelepípedo}}$$
$$V_{\text{prisma}} = a \cdot b \cdot c$$
$$V_{\text{prisma}} = (a \cdot b) \cdot c$$
$$\downarrow \quad a \cdot b \text{ é a área da base do paralelepípedo e } c = h$$
$$V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h$$

O volume V de um prisma de altura h e área da base A_b é dado por:

$$\boldsymbol{V = A_b \cdot h}$$

A seguir estão apresentados três blocos em formato de prisma, feitos de madeira. Eles são chamados de prismas retos, pois os planos das bases são perpendiculares aos planos das faces laterais. São chamados ainda de prismas regulares, uma vez que suas bases são polígonos regulares.

Para pensar e discutir

1. Para calcular o volume desses três prismas regulares, que medidas de comprimento são necessárias? 1. Lado da base e altura do prisma.
2. Como você calcula a área da superfície da base de cada um desses prismas? 2. Resposta pessoal.

Laborant/Shutterstock.com

Prisma triangular

afishman64/iStockphoto.com

Prisma quadrangular

Laborant/Shutterstock.com

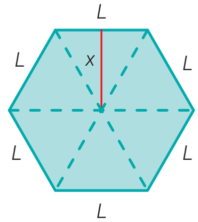
Prisma hexagonal

9. Uma pequena peça em formato de prisma!
Você sabe o que é um paquímetro? É um instrumento utilizado basicamente para medir comprimentos e espessuras. Na imagem, o paquímetro digital foi colocado para medir uma pequena peça de madeira de 15 mm de espessura. O formato da peça é de um prisma regular hexagonal. Qual é o volume dessa peça em milímetros cúbicos?

Dotta

O paquímetro é um instrumento utilizado para medir comprimentos e espessuras.

- A medida obtida no paquímetro é 48,16 mm e ela representa o dobro da altura x de um triângulo equilátero cujo lado é o lado de medida L do hexágono.



FJF Vetorização

$$2x = 48{,}16$$
$$x = 24{,}08$$
$$h_{tri} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 24{,}08$$
$$\ell \cdot 1{,}73 \cong 48{,}16 \Rightarrow \ell \cong 27{,}84$$

- Cálculo da área do hexágono e do volume do prisma:

$$A = 6\left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$A \cong 6\left(\frac{27{,}84^2 \cdot 1{,}73}{4}\right) \Rightarrow A \cong 2\,011{,}30$$
$$V = A_b \cdot h$$
$$V \cong 2\,011{,}30 \cdot 15 \Rightarrow V \cong 30\,169{,}50$$

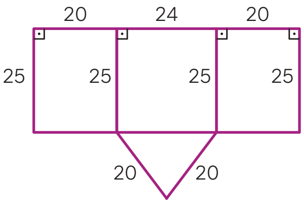
A peça tem aproximadamente 30 169,50 mm³ de volume.

Para pensar e discutir

1. Quantos centímetros cúbicos, aproximadamente, essa peça tem? Explique.
2. Quantas dessas peças seriam necessárias para compor um volume de 1 m³? Explique como você calculou.

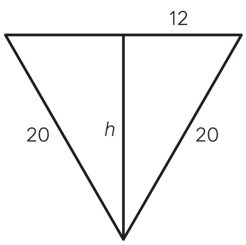
1. 30 cm³; resposta pessoal
2. 33 333; resposta pessoal

10. Com três peças retangulares de vidro e uma peça em formato de triângulo será construída uma vasilha cujo formato será o de um prisma triangular. As medidas indicadas na planificação do formato do prisma estão em centímetros. Calcule o volume desse prisma.



FJF Vetorização

- Observe que a base do prisma tem o formato de um triângulo isósceles. Para calcular a área A_b desse triângulo, vamos determinar sua altura.



FJF Vetorização

$$20^2 = h^2 + 12^2$$
$$256 = h^2 \Rightarrow h = 16 \rightarrow 16 \text{ cm}$$
$$A_b = \frac{b \cdot h}{2}$$
$$A_b = \frac{24 \cdot 16}{2} \Rightarrow A_b = 192 \rightarrow 192 \text{ cm}^2$$

- Cálculo do volume:

$$V = A_b \cdot h$$
$$V = 192 \cdot 25 \Rightarrow V = 4\,800$$

Portanto, a vasilha terá 4 800 cm³ de volume.

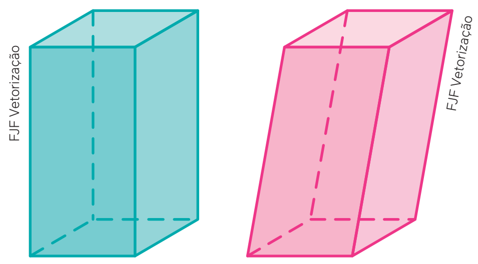
Atividades

19. Em relação à **atividade resolvida 10** descrita anteriormente, responda:

a) Quantos litros de água caberiam dentro da vasilha desconsiderando a espessura das placas de vidro? 19. a) 4,8 L

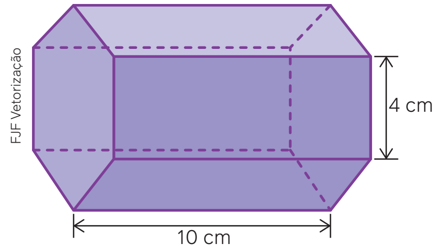
b) Se fosse dobrada a medida da altura do prisma correspondente à vasilha, mantendo constantes as demais medidas, o que aconteceria com o volume correspondente? Justifique. 19. b) Duplicaria; resposta pessoal.

20. A seguir estão representados dois prismas de mesma altura e mesma área das superfícies correspondentes às bases: um prisma reto e um prisma oblíquo.



Explique o motivo pelo qual podemos afirmar que ambos têm o mesmo volume. 20. Resposta pessoal.

21. Considere um prisma regular de base hexagonal como o representado a seguir.
Utilize $\sqrt{3} \cong 1{,}73$

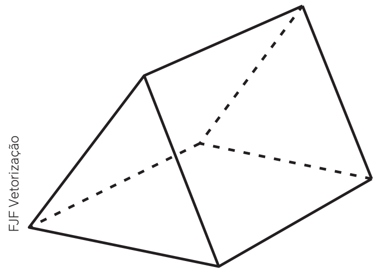


a) Calcule o volume desse prisma. 21. a) Aproximadamente 415,2 cm^3.

b) Duplicando a medida da altura do prisma e mantendo a medida da aresta da base, o que acontece com o volume? Explique como você pensou. 21. b) Duplicaria; resposta pessoal.

c) Duplicando a medida da aresta da base e mantendo a medida da altura do prisma, o que acontece com o volume? Explique como você pensou. 21. c) É multiplicado por 4; resposta pessoal.

22. Reúna-se a um colega para esta atividade.
Utilizando como referência a atividade anterior, juntos, escolham medidas para as arestas das bases de um prisma triangular regular e, também, para a altura. Depois, façam o que se pede.

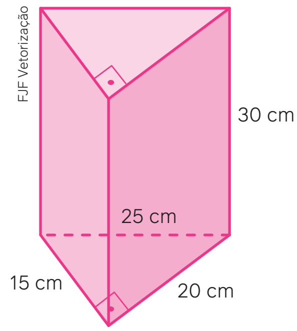


a) Elaborem e resolvam uma situação envolvendo o cálculo do volume do prisma. 22. a) Respostas pessoais.

b) Elaborem duas questões relacionadas ao volume do prisma: na primeira questão deve ser mantida a medida da aresta da base e alterada a medida da altura; na segunda, deve ser mantida a medida da altura e alterada a medida da aresta da base. 22. b) Respostas pessoais.

c) Troquem suas questões com outra dupla para que eles as resolvam, enquanto vocês resolvem as questões deles. Depois de resolvidas, discutam entre as duplas as respostas obtidas. 22. c) Respostas pessoais.

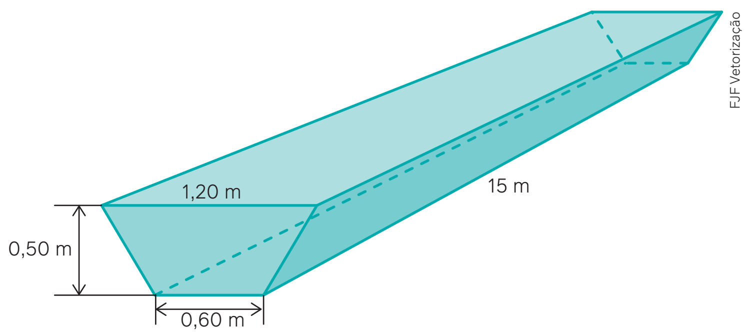
23. As bases do prisma reto representado a seguir são triângulos retângulos.



a) Explique como calcular a área da superfície de uma base desse prisma. 23. a) Resposta pessoal.

b) Calcule o volume do prisma. 23. b) 4 500 cm^3

24. O desenho a seguir representa um reservatório de metal feito para colocar ração para os animais de uma fazenda. O formato dele é de um prisma reto, porém com bases em formato de trapézio isósceles. Com base nas medidas indicadas, determine a capacidade em litros desse reservatório (considere que as medidas são internas). 24. 6 750 L



25. Reúna-se a um colega e resolvam a situação a seguir. A ilustração a seguir, representa uma caixa de papelão e sua respectiva planificação. Essa caixa será montada para embalar determinado produto. Observem que a planificação inicial é formada por um hexágono regular de lado medindo 30 cm. Então, corta-se em cada vértice um quadrilátero, como destacado. As linhas tracejadas indicam as dobras necessárias para montar a caixa.

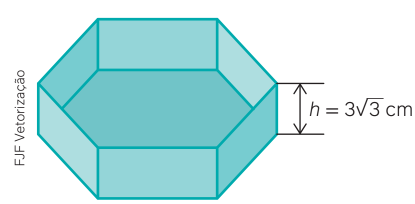


Figura 1

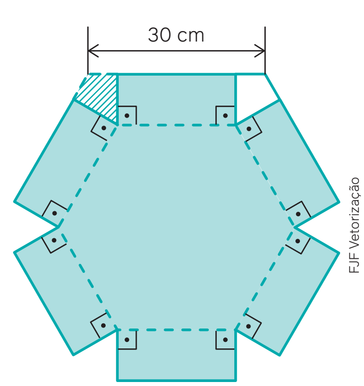


Figura 2

Determinem o volume em centímetros cúbicos dessa caixa desconsiderando a espessura do papelão. 25. 7 776 cm^3

2 Cilindros

Algumas indústrias usam grandes recipientes em formato cilíndrico para guardar seus produtos, principalmente os líquidos. Ao adquirir ou mesmo produzir esses recipientes, algumas questões devem ser consideradas.

James Jiao/Shutterstock.com

Tipo de recipiente em formato cilíndrico utilizado para o transporte ou armazenamento de líquidos e produtos a granel.

Para pensar e discutir

1. Quais são os dados que uma indústria precisa conhecer para determinar o custo de produção de um recipiente desses? 1. Resposta pessoal.
2. Com base no que você estudou sobre cálculo de volume do prisma, de quais elementos você precisa para determinar o volume de um cilindro? 2. Resposta pessoal.
3. Se você está diante de um recipiente desses e tem uma trena em mãos, quais medições precisa fazer para calcular, por exemplo, o volume desse recipiente? 3. Resposta pessoal.

O cálculo da área da superfície de um recipiente em formato de cilindro e o cálculo do volume de um cilindro estão entre as aplicações que aqui serão desenvolvidas.

No dia a dia, nem sempre damos importância para peças pequenas cujo formato é parecido com um cilindro. Um exemplo disso pode ser um parafuso, como o mostrado na imagem.

BART photography/Shutterstock.com

Alguns parafusos possuem uma parte no formato parecido com o de um cilindro.

Para nós, isso costuma ser irrelevante, mas para a indústria metalúrgica, por exemplo, é essencial determinar todos os custos da produção de um parafuso. No custo, devem ser considerados o tipo de material a ser utilizado, o tamanho, além de outros itens relacionados, como a área e o volume do parafuso. O cálculo de volume e área deve ser feito porque o volume está relacionado com a quantidade de material, e a área pode ser necessária para determinar a quantidade de tinta ou de revestimento que será empregada.

Observe que, na imagem do parafuso, há uma extremidade em formato de prisma hexagonal, e o formato do "corpo" do parafuso parece com um cilindro. Mas, como já estudamos os prismas, vamos abordar o cilindro circular reto. Obteremos as relações matemáticas para o cálculo da área total de um cilindro e de seu volume.

Área dos cilindros

Vamos examinar o cilindro para conhecer como determinar sua área total e seu volume.

O formato cilíndrico pode ser observado não apenas em recipientes mas também em construções, como ocorre em caixas-d'água de condomínios residenciais. É claro que, às vezes, as formas não são exatamente cilíndricas, mas podem ser consideradas muito próximas. Nesses casos, o cilindro é utilizado como referência.

As imagens desta página não estão representadas na mesma proporção.


S. Pech/Shutterstock.com

Edifício cilíndrico, Toulouse, França, 2020.

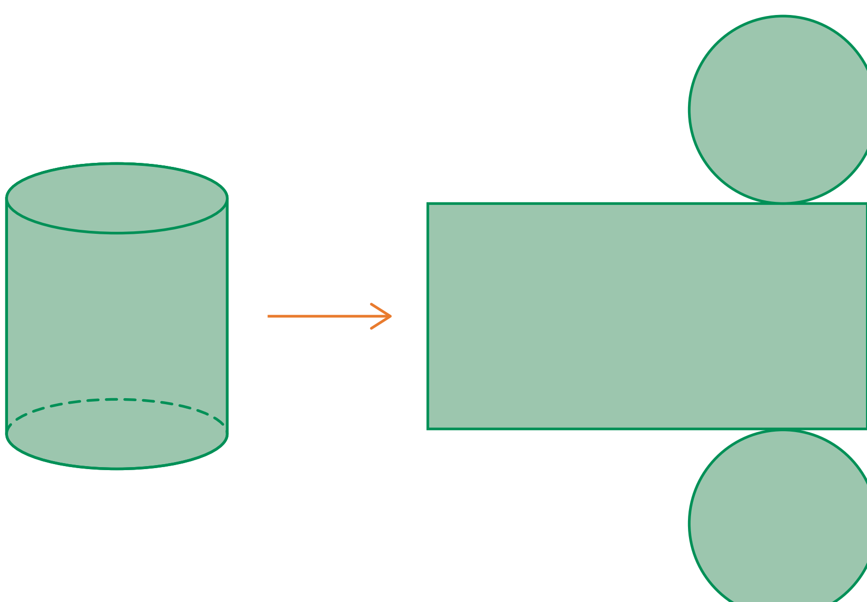

Aleksandr Grechanyuk/Shutterstock.com

Caixa de papelão em formato cilíndrico.

Para esses objetos ou para as construções em formato cilíndrico, é fundamental saber como determinar a área do material utilizado em sua fabricação. Um exemplo é calcular a quantidade de tinta necessária para pintar externamente o objeto ou a construção presente na imagem anterior. Para isso, devemos conhecer a área de sua superfície externa.

Mas como obter a área da superfície de um objeto em formato de cilindro?

O cálculo envolvendo medidas de superfície de um cilindro pode ser mais bem compreendido quando analisamos sua planificação.


Acervo editora

Acervo editora

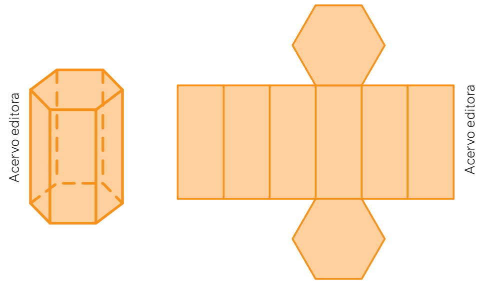
Na planificação do cilindro, observam-se duas formas geométricas planas: retângulo e círculo.

Para pensar e discutir

1. Na planificação, os lados do retângulo correspondem a quais elementos do cilindro? 1. À altura e ao comprimento das circunferências das bases do cilindro.

2. Como obter a área total da superfície de um cilindro? Explique. 2. Resposta pessoal.

Na discussão anterior, não foi solicitada qualquer fórmula matemática para o cálculo envolvendo a medida da superfície do cilindro, mas você precisou refletir sobre como obter tal medida. É bem provável que tenha feito uma analogia com o procedimento para o cálculo da medida da superfície de um prisma.



O que denominamos área da superfície lateral do prisma é a área do retângulo em que as medidas representam o perímetro p da base do prisma e sua altura h. A área da superfície total é essa área da superfície lateral acrescida das áreas dos polígonos das duas bases.

Analogamente, para um cilindro circular reto de raio da base r e altura h, temos:

- Área lateral:

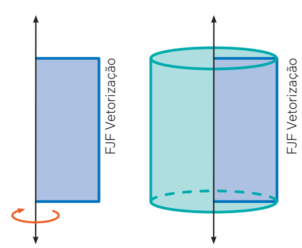
$$A_L = p \cdot h = (2\pi r) \cdot h \Rightarrow \boldsymbol{A_L = 2\pi rh}$$

- Área total:

$$A_T = A_L + 2A_b = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Rightarrow \boldsymbol{A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2}$$

Atividades resolvidas

11. Girando-se um retângulo de lados medindo a cm e $3a$ cm em torno do lado maior, obtém-se um cilindro de revolução, como sugere a figura a seguir, em que o cilindro foi gerado pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados. Calcule a área da superfície total do cilindro representado a seguir.



- Nesse cilindro de revolução, o raio da base é o lado menor do retângulo e a altura do cilindro é o lado maior do retângulo:

$$A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2$$
$$A_T = 2\pi \cdot a \cdot (3a) + 2\pi \cdot a^2$$
$$A_T = 6\pi a^2 + 2\pi a^2 \Rightarrow A_T = 8\pi a^2$$

Portanto, a área total da superfície do cilindro mede $8\pi a^2$ cm^2.

Denomina-se secção meridiana de um cilindro reto a região retangular obtida seccionando-se o cilindro por um plano perpendicular aos planos de suas bases contendo os centros dessas bases.

Para pensar e discutir

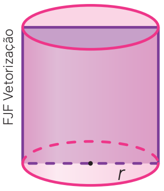
1. Qual é a área da secção meridiana do cilindro de revolução obtido na **atividade resolvida 11**? 1. $6a^2$

2. A área da secção meridiana do cilindro de revolução seria alterada girando-se o retângulo em torno de seu lado menor? Explique. 2. Não se altera; resposta pessoal.

3. E qual seria a área total do cilindro obtido girando-se o retângulo em torno de seu lado menor? Explique. 3. $24\pi a^2$; resposta pessoal.

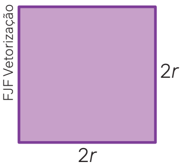
12. Em um cilindro equilátero, a secção meridiana é um quadrado, isto é, a altura do cilindro tem a mesma medida do diâmetro da base. Calcule a área da superfície total desse cilindro.

FJF Vetorização



Cilindro equilátero.

FJF Vetorização



Secção meridiana.

Infográfico clicável
A Torre de Pisa

- Cálculo da área total:

$$A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2$$
$$\downarrow h = 2r$$
$$A_T = 2\pi r \cdot 2r + 2\pi r^2$$
$$A_T = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 \Rightarrow A_T = 6\pi r^2$$

Essa relação matemática evidentemente não precisa ser memorizada. Basta que você observe que a medida da altura é igual à medida do diâmetro da base.

No comércio, as formas cilíndricas geralmente utilizadas em recipientes não são de cilindros equiláteros. A altura de latas de goiabada e de leite em pó, por exemplo, ou é menor que o diâmetro da base ou maior que o diâmetro da base.

Mauro Salgado

Mauro Salgado

Que tal uma pequena pesquisa?

Para explorar

Reúna-se com dois colegas e, juntos, façam o que se pede a seguir.

Parte 1 Parte 1: Resposta pessoal.

1. Tragam para a sala de aula algum produto cuja embalagem seja cilíndrica.
2. Verifiquem se a secção meridiana desse objeto é quadrada ou próxima de um quadrado.
3. Em caso positivo, comentem com a turma e aproveitem para determinar a área da superfície lateral e a área da superfície total da embalagem.

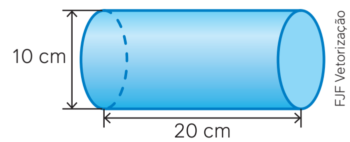
Parte 2 Parte 2: Resposta pessoal.

Usando *softwares* de Geometria dinâmica, façam o que se pede.

1. Construam um cilindro equilátero a partir da rotação de um retângulo em torno de um de seus lados e, depois, determinem:
   - as medidas dos lados desse retângulo;
   - a medida da superfície total desse cilindro.
2. Construam três cilindros de tal forma que:
   - os três tenham a mesma medida do raio e suas alturas sejam diferentes;
   - depois, respondam: As medidas das áreas das superfícies laterais desses cilindros são proporcionais às medidas de suas alturas? Justifiquem.
3. Construam três cilindros de tal forma que:
   - a altura dos três cilindros tenha a mesma medida e seus raios tenham medidas diferentes;
   - depois, respondam: As medidas das áreas das superfícies laterais desses cilindros são proporcionais às medidas de seus raios? Justifiquem.

Atividades

26. A ilustração a seguir representa um cilindro circular reto e suas medidas.



Utilizando a aproximação 3,14 para π, determine as áreas:

a) da superfície lateral; 26. a) Aproximadamente 628 cm².

b) da superfície total. 26. b) Aproximadamente 785 cm².

27. No caderno, represente um cilindro equilátero. Usando a medida do raio da base que você escolher em centímetros, determine o que se pede em função de π.

a) A área da superfície de cada base do cilindro. 27. a) Resposta pessoal.

b) A área da superfície lateral do cilindro. 27. b) Resposta pessoal.

c) A área da superfície total do cilindro. 27. c) Resposta pessoal.

28. Na imagem a seguir, temos as medidas da altura e do diâmetro de uma panela de alumínio cujo formato é aproximadamente o de um cilindro. Considerando a tampa como plana, qual é a quantidade de alumínio necessária para fabricar a panela com a tampa?

Observação: nesse cálculo, não considere as alças para segurar a panela nem a espessura do material, e utilize a aproximação 3,14 para π. 28. Aproximadamente 14 130 cm².

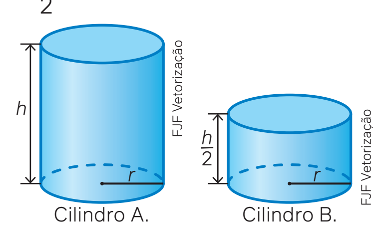
29. Procure, em sua casa, uma panela que tenha o formato aproximado de um cilindro circular reto. Então, obtenha:

a) o diâmetro aproximado da panela; 29. a) Resposta pessoal.

b) a altura da panela; 29. b) Resposta pessoal.

c) a área da superfície total da panela considerando que a tampa é um círculo. 29. c) Resposta pessoal.

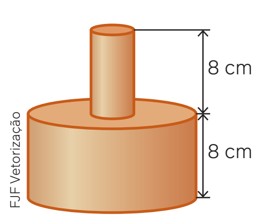
30. Na ilustração a seguir, estão representados dois cilindros cujas bases têm o mesmo raio indicado por r. O cilindro A tem altura h e o cilindro B tem a altura $\frac{h}{2}$.



a) Qual é a razão entre as áreas das superfícies laterais do cilindro A e do cilindro B, nessa ordem? 30. a) 2

b) A razão entre as áreas das superfícies totais, nessa mesma ordem, é a mesma? Justifique.
30. b) Não; resposta pessoal.

31. Para comemorar o dia do aniversário da professora de Matemática, os estudantes de uma turma do Ensino Médio planejaram preparar um bolo de fubá em forma geométrica com dois cilindros sobrepostos: o menor deles teria diâmetro de 4 cm, e o maior, diâmetro de 16 cm. Ambos teriam a mesma altura. O bolo foi revestido por uma fina camada de chocolate.



A professora ficou muito feliz com a surpresa, agradeceu o presente e, como tarefa daquele dia, solicitou que os alunos calculassem a área da superfície do bolo que recebeu a fina camada de chocolate. Qual é a resposta aproximada esperada, considerando π como 3,14? Explique como você fez esse cálculo.

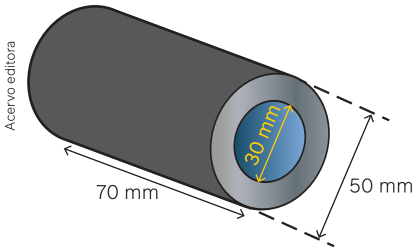
31. Aproximadamente 703,36 cm²; resposta pessoal.

32. Os canos utilizados em construções residenciais e comerciais têm bitolas (diâmetros) diferentes. Para fazer um reparo na rede de água de sua casa, Mateus precisava de um cano de PVC com comprimento de 1,5 m e com bitola de 40 mm, como o ilustrado a seguir. Entretanto, na loja de material de construção em que ele foi fazer a compra do cano, só havia peças inteiras de 6 m. Assim, Mateus precisou comprar a peça e, depois, recortá-la para fazer o reparo.

Calcule, aproximadamente, a quantidade de material de PVC, em metros quadrados, que foi desperdiçada após ele terminar os recortes (desconsidere a espessura do material). 32. Aproximadamente 0,5652 m².

33. A peça a seguir é fabricada em ferro e tem o formato de um cilindro oco. Interna e externamente, essa peça recebe uma camada de tinta especial para sua proteção. As medidas estão indicadas na imagem.

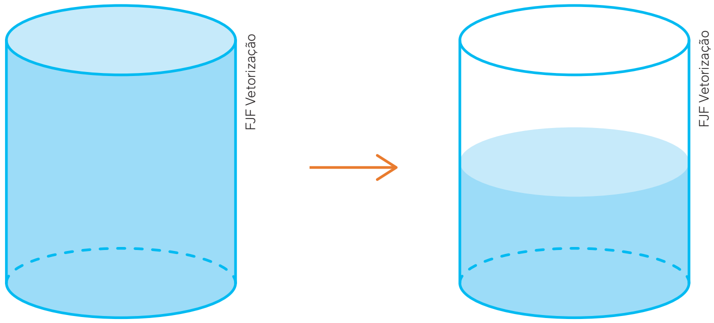
33. Aproximadamente 20 096 mm²; resposta pessoal.



Uma indústria fabrica milhares ou até milhões de peças como essa. Assim, é necessário calcular a medida da superfície a ser revestida com a tinta de proteção para compor o custo de fabricação. Calcule a área que deve ser revestida em uma peça (use 3,14 para aproximação de π) e explique quais áreas você precisou calcular.

Volume do cilindro

Há um desafio bem interessante relacionado à capacidade de um recipiente cilíndrico. Ele consiste em encher o recipiente de água e, depois, deixar apenas a metade da água dentro do cilindro sem a utilização de instrumentos.

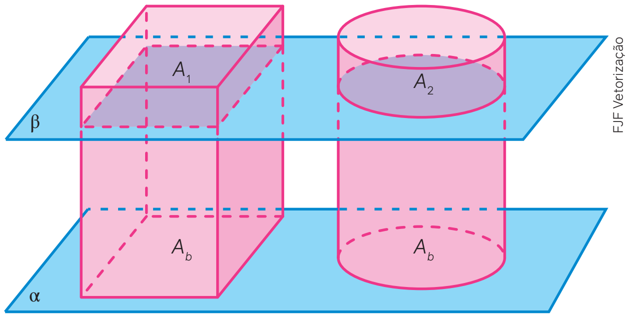


É claro que a altura da água no segundo cilindro deverá ser a metade da altura da água do primeiro cilindro. O problema é como fazer isso sem usar régua, apenas manipulando o cilindro cheio. Deixamos esse desafio para você resolver. Pesquise, se necessário.

Para pensar e discutir

1. Como você calcula o volume de um recipiente que tem o formato de um prisma? Explique. 1. Resposta pessoal.
2. Intuitivamente, como você pode "obter" um cilindro circular reto de um prisma reto cuja base é um polígono regular? 2. Resposta pessoal.
3. Como você procederia para determinar o volume de um cilindro circular reto? 3. Resposta pessoal.

Caso você tenha respondido adequadamente às questões anteriores, já chegou à conclusão de como obter o volume de um cilindro circular reto. Entretanto, vamos utilizar o princípio de Cavalieri mais uma vez para compreender melhor como determinar esse volume. Considere a situação de um prisma reto e de um cilindro regular reto, ambos de mesma altura e mesma área de base, apoiados sobre um plano α e seccionados por um plano β.



Se o prisma e o cilindro são cortados pelo plano β paralelo ao plano α e o plano β determina áreas iguais nessas secções, os dois sólidos têm o mesmo volume.

Se $A_1 = A_2$, então:

$V_{\text{cilindro}} = V_{\text{prisma}}$

$V_{\text{cilindro}} = A_b \cdot h$

Como a base do cilindro é um círculo:

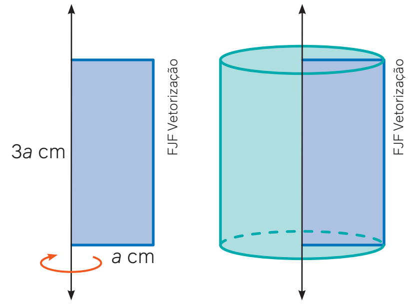
$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h$

O volume V de um cilindro circular reto, cujo raio da base é r e cuja altura é h, é dado por:

$$\boldsymbol{V = \pi r^2 h}$$

Atividades resolvidas

13. Girando-se um retângulo de lados medindo a cm e $3a$ cm em torno do lado maior, obtém-se um cilindro de revolução, como sugere a figura a seguir. Calcule o seu volume.



- Nesse cilindro de revolução, o raio da base é o lado menor do retângulo, e a altura do cilindro é o lado maior do retângulo:

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi \cdot a^2 \cdot 3a$

$V = 3\pi a^3$

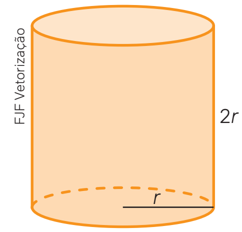
Portanto, o volume é $3\pi a^3$ cm^3.

Para pensar e discutir

1. Considere, agora, que o cilindro de revolução é obtido girando-se o retângulo em torno do lado menor. Qual é a altura e o raio da base do novo cilindro obtido? 1. Altura: *a* cm; raio: 3*a* cm.

2. O volume desse novo cilindro é diferente do volume do cilindro anterior? Justifique. 2. Sim; resposta pessoal.

14. No cilindro equilátero a seguir, a medida da altura é igual à medida do diâmetro da base. Obtenha uma expressão matemática que permita obter o volume desse sólido em função da medida r do raio da base.

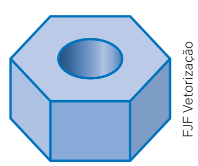


- Como a altura tem a mesma medida do diâmetro, podemos escrever:

$$V = \pi r^2 h$$
$$\downarrow h = 2r$$
$$V = \pi r^2 (2r) \Rightarrow V = 2\pi r^3$$

Observação:
Se atribuirmos valores diferentes para o raio da base do cilindro equilátero, os resultados serão cilindros equiláteros semelhantes, como o ilustrado na atividade anterior. A fórmula obtida no exemplo anterior permite encontrar o volume de qualquer cilindro equilátero.

15. A ilustração a seguir representa uma peça em formato de prisma hexagonal regular, de altura 15 cm e medida da aresta 20 cm, com um furo cilíndrico cujo diâmetro é 16 cm. A densidade do material utilizado para fabricar a peça é de 2,5 g/cm^3. Qual é a massa dessa peça?



- Vamos calcular o volume da peça:

$$V = V_{prisma} - V_{cilindro}$$
$$V = A_b \cdot h - \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$V = 6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot h - \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$V = 6 \cdot \frac{20^2\sqrt{3}}{4} \cdot 15 - \pi \cdot 8^2 \cdot 15$$
$$\downarrow \sqrt{3} \cong 1{,}73 \text{ e } \pi \cong 3{,}14$$
$$V \cong 6 \cdot \frac{400 \cdot 1{,}73}{4} \cdot 15 - 3{,}14 \cdot 64 \cdot 15 \Rightarrow V \cong 12\,556 \to 12\,556 \text{ cm}^3$$

- Sendo m a massa, e utilizando o conceito de densidade:

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$
$$2{,}5 \cong \frac{m}{12\,556}$$
$$m \cong 2{,}5 \cdot 12\,556 \Rightarrow m \cong 31\,390$$

Portanto, a massa da peça é de aproximadamente 31 390 gramas ou 31,39 kg.

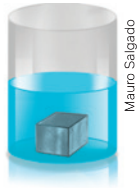
Para pensar e discutir

1. Se você conhecer a densidade de um material e seu volume, que outra grandeza poderá calcular?
1. Resposta pessoal.

2. Considerando que o recipiente contém água, qual dos três materiais da figura é o mais denso? Justifique.
2. O bloco de metal; resposta pessoal.

Bloco de madeira em recipiente com água.

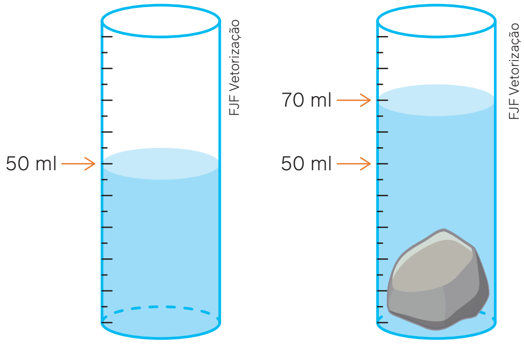
Bloco de cortiça em recipiente com água.



Bloco de metal em recipiente com água.

O método de Arquimedes permite calcular o volume de um objeto irregular ao submergi-lo em um fluido e medir a variação no nível do líquido. O volume do objeto é igual ao volume de fluido deslocado, facilitando a determinação de volumes de formas complexas.

Como mencionado no boxe acima sobre Arquimedes, a ele devemos a ideia de como calcular o volume, por exemplo, de uma pedra ou de um objeto irregular. Para exemplificar, considere que, em uma proveta de formato cilíndrico, colocamos 50 mL de água, conforme indicado na figura a seguir. Depois, colocamos uma pedra dentro desse recipiente. Observe que o nível da água mudou e está indicando 70 mL.



Para pensar e discutir

1. Qual é a sua conclusão a respeito da diferença no nível da água?
2. Considerando o princípio de Arquimedes, qual é o volume da pedra que está na proveta?

1. Resposta pessoal.

2. 20 cm^3

Atividades

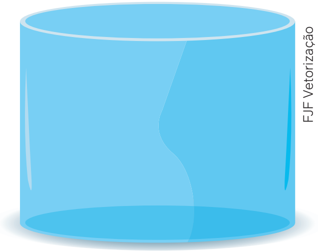
34. Considere que uma fábrica na qual são produzidas latas de alumínio em formato de cilindro circular reto vai alterar as medidas das latas, porém manterá o volume delas. Assim, responda: Se a medida do raio da base da nova lata for o dobro da medida do raio da base da antiga, qual deverá ser a medida da altura dessa nova lata? 34. Um quarto da medida da altura da lata antiga.

35. Uma lata de óleo de soja tem o formato cilíndrico com as seguintes medidas internas: o diâmetro da base mede 9 cm; a altura da lata, 16 cm. Observou-se que o conteúdo de óleo dentro da lata tinha aproximadamente 900 mL. Com base nessas informações, responda ao que se pede.

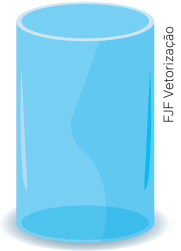
a) Qual é a capacidade dessa lata? 35. a) Aproximadamente 1,017 L ou 1 017 mL.

b) Qual é o volume da lata não ocupado por óleo? 35. b) 117 mL

36. Considere que os dois copos têm a mesma altura, porém diâmetros diferentes: o diâmetro do copo A é o dobro do diâmetro do copo B.



Copo A.



Copo B.

Qual é a razão entre a capacidade do copo A e a capacidade do copo B, nessa ordem? 36. 4

37. Reúna-se com um colega e, juntos, resolvam esta atividade.

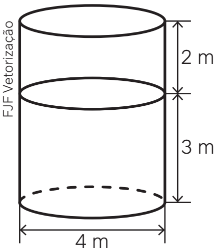
a) Considerando que a densidade do mercúrio é de 13,6 g/cm^3, calculem o valor aproximado da massa dele, em quilogramas, necessária para encher completamente um recipiente em formato de cilindro. As medidas internas do recipiente cilíndrico são: diâmetro da base = 14 cm; altura = 20 cm. Utilizem 3,14 como valor aproximado para π. 37. a) Aproximadamente 41,85 kg.

b) Pesquisem alguma situação envolvendo densidade, cilindro e volume. Elaborem uma questão ou um problema sobre o que vocês pesquisaram e proponham uma resolução. Em seguida, apresentem a questão para que outra dupla verifique a resolução e a resposta de vocês. 37. b) Resposta pessoal.

38. O sólido geométrico maciço representado na figura a seguir é composto de dois cilindros sobrepostos de mesmo diâmetro. O cilindro de altura 3 m tem densidade 8 900 kg/m³, e o de altura 2 m tem densidade 2 700 kg/m³. Considerando 3 como uma aproximação para π, calcule a massa aproximada desse sólido inteiro.

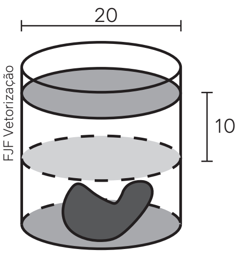
38. Aproximadamente 385 200 kg.

FJF Vetorização



39. (Ifal) Arquimedes, para achar o volume de um objeto de forma irregular, mergulhou-o num tanque cilíndrico circular reto contendo água. O nível da água subiu 10 cm sem transbordar. Se o diâmetro do tanque é 20 cm, então o volume do objeto é: 39. Alternativa **a**.

FJF Vetorização



a) 1 000π **b)** 2 000π. **c)** 3 000π. **d)** 4 000π. **e)** 5 000π.

40. (Enem) Para construir uma manilha de esgoto, um cilindro com 2 m de diâmetro e 4 m de altura (de espessura desprezível) foi envolvido homogeneamente por uma camada de concreto, contendo 20 cm de espessura. Supondo que cada metro cúbico de concreto custe R$ 10,00 e tomando 3,1 como valor aproximado de π, então o preço dessa manilha é igual a 40. Alternativa **d**.

a) R$ 230,40. **b)** R$ 124,00. **c)** R$ 104,16. **d)** R$ 54,56. **e)** R$ 49,60.

41. (IFCE) De modo a minimizar custos, um produtor de azeite verificou que é mais rentável armazenar seu estoque em cilindros circulares cuja altura e diâmetro da base têm as mesmas medidas. Atendendo a essa especificação, ele encomendou reservatórios com 1,5 m de raio na base. Considerando π = 3,14, a capacidade total de armazenamento de cada reservatório encomendado, em litros, é 41. Alternativa **d**.

a) 21,195. **b)** 14 130. **c)** 211,95. **d)** 21 195. **e)** 14,13.

42. (ESPM-SP) Um cilindro circular reto de raio da base igual a 4 cm contém água até uma certa altura. Um objeto é colocado no seu interior, ficando totalmente submerso. Se o nível da água no cilindro subiu 3 cm, podemos afirmar que o volume desse objeto é de, aproximadamente 42. Alternativa **e**.

a) 174 cm³. **b)** 146 cm³. **c)** 162 cm³. **d)** 183 cm³. **e)** 151 cm³.

Para explorar

No início deste capítulo, sugerimos que você pesquisasse as condições de moradia das comunidades quilombolas que vivem em seu estado.

Agora, com base na pesquisa realizada e nas aprendizagens deste capítulo, faça uma proposta de moradia, considerando as características dessa comunidade. Leve em conta, por exemplo, a quantidade de metros quadrados das casas, a quantidade de quartos e de banheiros em cada casa, o acesso à internet, o acesso ao tratamento de esgoto, entre outras possibilidades.

Luciana Whitaker/Pulsar Imagens

Fotografia de uma casa situada na comunidade quilombola do Baú na cidade de Araçuaí, Minas Gerais (MG), 2018.

Atividades finais

1. Responda ao que se pede.

a) Qual é a forma geométrica das faces de um bloco retangular (paralelepípedo retangular)? 1. a) Retângulos.

b) O que diferencia um cubo de um bloco retangular? 1. b) No cubo, todas as faces são quadrados.

2. No que se refere ao cubo, responda aos itens a seguir.

a) Qual é a relação matemática que expressa a área total de um cubo de aresta *a* cm? 2. a) $6a^2$

b) Qual é a relação matemática que expressa o volume de um cubo de aresta *a* cm? 2. b) a^3

3. No que diz respeito ao bloco retangular de arestas medindo *a*, *b* e *c*, responda ao que se pede.

a) Qual é a relação matemática que expressa seu volume? 3. a) abc

b) Qual é a relação matemática que expressa sua área total? 3. b) $2ab + 2bc + 2ac$

4. Em relação a prisma reto, responda aos itens a seguir.

a) Um prisma reto de base hexagonal tem quantas faces laterais? Qual é o formato dessas faces? 4. a) 6; retângulo

b) Qual expressão permite calcular a área total de um prisma reto? 4. b) $A_{lateral} + 2A_{base}$

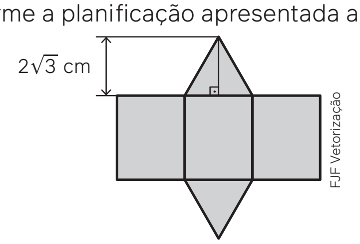
5. Quanto ao cilindro circular, responda ao que se pede.

a) O que representa a expressão $\pi r^2 h$ em um cilindro reto cujo raio da base mede *r* e cuja altura mede *h*? 5. a) O volume.

b) Quando um cilindro circular reto é equilátero? Qual é a expressão para calcular a área total desse cilindro? 5. b) Quando a altura é igual ao dobro do raio da base; $6\pi r^2$.

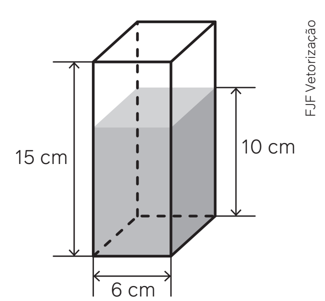
Questões de vestibulares e Enem

6. (UFSC) Uma fábrica precisa embalar seus produtos para comercialização. Para tanto, deve construir caixas no formato de prisma regular reto, conforme a planificação apresentada a seguir.



Seja *a* cm a medida da aresta da base do prisma. Se a altura do prisma é $a\sqrt{3}$ cm, determine o volume desse prisma, em cm^3. 6. 48 cm^3

7. (Famema-SP) Um recipiente transparente possui o formato de um prisma reto de altura 15 cm e base quadrada, cujo lado mede 6 cm. Esse recipiente está sobre uma mesa com tampo horizontal e contém água até a altura de 10 cm, conforme a figura a seguir.



Se o recipiente for virado e apoiado na mesa sobre uma de suas faces não quadradas, a altura da água dentro dele passará a ser de 7. Alternativa **a**.

a) 4 cm. **b)** 3,5 cm. **c)** 3 cm. **d)** 2,5 cm. **e)** 2 cm.

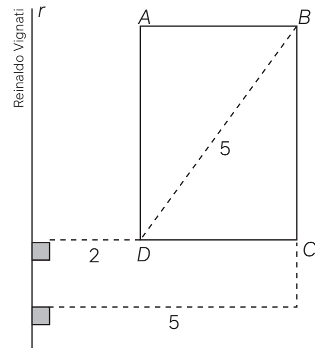
8. (IFSC) Edison gerencia um clube que possui uma piscina com 6 metros de largura, 15 metros de comprimento e profundidade de 2 metros. Para que a água dentro da piscina fique com uma altura ideal aos visitantes, ele necessita enchê-la com 70% do volume máximo de água que a piscina suporta. Dessa forma, o volume de água que Edison necessita para encher a piscina conforme desejado é de:
Assinale a alternativa correta. 8. Alternativa **a**.

a) 126 000 L. **b)** 126 L. **c)** 54 000 L. **d)** 12 600 L. **e)** 54 L.

9. (UFPR) Diana pretende distribuir 6 litros de geleia em 25 potes iguais. Cada pote possui internamente o formato de um paralelepípedo de base quadrada com 5 cm de lado. Dividindo igualmente a geleia em todos os potes, qual é a altura interna que a geleia atingirá em cada recipiente? 9. Alternativa **c**.

a) 6,0 cm. **b)** 7,5 cm. **c)** 9,6 cm. **d)** 15,0 cm. **e)** 24,0 cm.

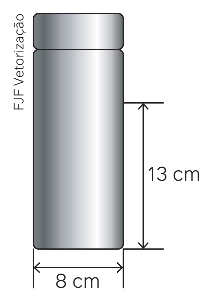
10. (UFRGS) Considere o sólido obtido pela revolução do retângulo *ABCD* em torno da reta *r*, conforme indicado na figura a seguir.



O volume do sólido obtido é 10. Alternativa **d**.

a) 16π. **b)** 84. **c)** 100. **d)** 84π. **e)** 100π.

11. (Fatec-SP) Uma garrafa térmica tem formato de um cilindro circular reto, fundo plano e diâmetro da base medindo 8,0 cm. Ela está em pé sobre uma mesa e parte do suco em seu interior já foi consumido, sendo que o nível do suco está a 13 cm da base da garrafa, como mostra a figura. O suco é despejado num copo vazio, também de formato cilíndrico e base plana, cujo diâmetro da base é 4 cm e com altura de 7 cm. O copo fica totalmente cheio de suco, sem desperdício.

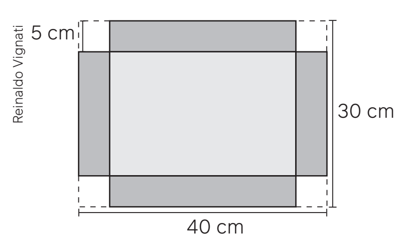


Adote $\pi \cong 3$.

Despreze a espessura do material da garrafa e do copo. Nessas condições, o volume de suco restante na garrafa é, em cm^3, aproximadamente, 11. Alternativa **c**.

a) 250. **b)** 380. **c)** 540. **d)** 620. **e)** 800.

12. (IFPE) Uma folha retangular de papelão de 40 cm por 30 cm será utilizada para confeccionar uma caixa, sem tampa, em forma de paralelepípedo, de base retangular. Para isso, deve-se, a partir desta folha de papelão, retirar 4 quadrados de lado 5 cm, de cada um dos vértices e, em seguida, dobrar os lados, conforme a figura abaixo:



Determine, em litros, o volume dessa caixa. 12. Alternativa **a**.

a) 3 litros. **b)** 2 litros. **c)** 1 litro. **d)** 4 litros. **e)** 5 litros.

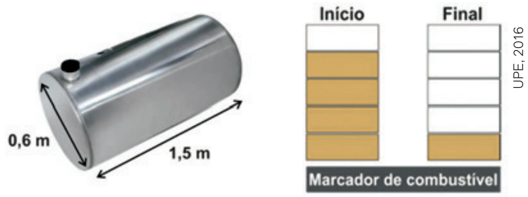
13. (Uece) A medida, em m^2, da área da superfície total (área lateral e bases) de um cilindro circular reto tal que a medida da altura e a medida do raio da base são ambas iguais a 2 m é 13. Alternativa **c**.

a) 14π. **b)** 12π. **c)** 16π. **d)** 10π.

14. (UFPA) Um tanque cilíndrico de 0,8 m de raio, com eixo na vertical em relação ao solo, está com combustível que é consumido em um veículo à razão média de 4 km por litro. Se o veículo se mover a 50 km/h, a velocidade da coluna de combustível em cm/h é de 14. Alternativa **e**.

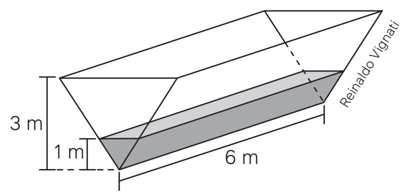
a) 8,2. **b)** 4,3. **c)** 2,1. **d)** 1,8. **e)** 0,6.

15. (UPE) A figura abaixo representa um tanque de combustível de certa marca de caminhão a *diesel*. Sabendo que esse veículo faz, em média, 3 km/L e observando o marcador de combustível no início e no final de uma viagem, quantos quilômetros esse caminhão percorreu?
Considere $\pi \cong 3$. 15. Alternativa **d**.



a) 243 km. **b)** 425 km. **c)** 648 km. **d)** 729 km. **e)** 813 km.

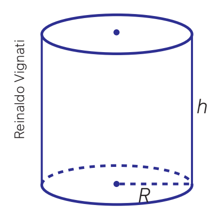
16. (Insper-SP) Um tanque, inicialmente vazio, tem a forma de um prisma triangular regular e suas paredes têm espessuras desprezíveis. Após algum tempo despejando água no tanque, um cano de vazão 33 m³ por minuto o encheu parcialmente, tendo a água ocupado o espaço de um prisma triangular regular, conforme indicado na figura.



Funcionando na mesma vazão, o tempo necessário para que o cano acabe de encher o tanque é de 5 minutos e *t* segundos, sendo que *t* é um número no intervalo 16. Alternativa **b**.

a) [1, 12]. **b)** [13, 24]. **c)** [25, 36]. **d)** [37, 38]. **e)** [49, 59].

17. (Uerj) Considere um cilindro circular reto de altura *h* e raio *R*, em centímetros, conforme ilustra a figura a seguir.



A planificação da superfície lateral desse cilindro é um retângulo de perímetro 40 cm. A altura *h* desse cilindro, em centímetros, é igual a: 17. Alternativa **a**.

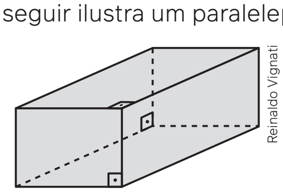
a) $h = 20 - 2\pi R$ **b)** $h = 10 - 2\pi R$ **c)** $h = 20 - \pi R$ **d)** $h = 10 - \pi R$

18. (Uern) A peça geométrica, desenvolvida através de um *software* de modelagem em três dimensões por um estudante do curso de Engenharia e estagiário de uma grande indústria, é formada a partir de dois prismas de base hexagonal regular e assemelha-se ao formato de uma porca de parafuso.

Considerando que o lado do hexágono maior mede 8 cm; que o comprimento do prisma é igual a 35 cm; e que o lado do hexágono menor mede 6 cm, então o volume da peça, de forma que se possa calcular, posteriormente, a quantidade de matéria-prima necessária à sua produção em massa em determinado período de tempo é, em cm³:
(Considere $\sqrt{3} \cong 1{,}7$) 18. Alternativa **d**.

a) 1 064. **b)** 1 785. **c)** 2 127. **d)** 2 499.

19. (Fuvest-SP) Uma empresa de alimentos utiliza embalagens, no formato de paralelepípedo reto-retângulo, de dimensões 2 cm × 3 cm × 11 cm, para armazenar biscoitos. Para o transporte desse produto, são utilizadas caixas para acondicionar essas embalagens, também no formato de paralelepípedo reto-retângulo, de dimensões 12 cm × 13 cm × 26 cm. A imagem a seguir ilustra um paralelepípedo reto-retângulo.



Determine o número máximo de embalagens que podem ser acondicionadas em cada caixa fechada para transporte, sem que o produto seja danificado. 19. Alternativa **e**.

a) 48 **b)** 52 **c)** 56 **d)** 60 **e)** 61

20. (Uece) Ao adicionarmos um metro a cada uma das arestas de um cubo cuja medida da aresta é α metros, temos um novo cubo. Se a diferença entre o volume deste novo cubo e o volume inicial é 271 m^3, então, a medida, em metros, da aresta α do cubo inicial é igual a 20. Alternativa **c**.

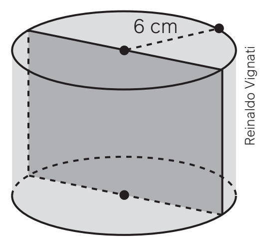
a) 10 **b)** 7 **c)** 9 **d)** 8

21. (Mack-SP) Uma fábrica de embalagens produz caixas de vários tamanhos. Uma delas tem formato cúbico com aresta medindo 30 cm. Se a caixa não tem tampa e o material utilizado para as faces laterais custa R\$ 5,00 o metro quadrado e para a base custa R\$ 6,00 o metro quadrado, então o custo do material dessa caixa é

a) R\$ 28,80 **b)** R\$ 23,40 **c)** R\$ 10,88 **d)** R\$ 2,88 **e)** R\$ 2,34

21. Alternativa **e**.

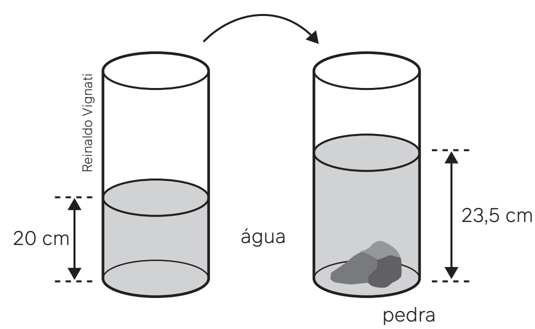
22. (UEA-AM) Em um cilindro reto, sua secção transversal é um círculo de raio 6 cm e sua secção meridiana é um retângulo de área 96 cm^2.



A altura desse cilindro é 22. Alternativa **d**.

a) 6π cm **b)** 16 cm **c)** 4π cm **d)** 8 cm **e)** 6 cm

23. (Fuvest-SP) Para medir o volume de uma pedra com formato irregular, Ana utilizou um recipiente cilíndrico de raio $r = 8$ cm e com água até a altura de 20 cm. Após colocar a pedra no recipiente, a altura da água subiu para 23,5 cm.



O volume da pedra é: 23. Alternativa **b**.

a) 128π cm^3 **b)** 224π cm^3 **c)** 240π cm^3 **d)** 282π cm^3 **e)** 320π cm^3

24. (Unicamp-SP) Os cestos produzidos pelos habitantes da comunidade de Urucureá (Pará) têm diversos tamanhos e modelos. O modelo 1 tem a forma de um cubo; e o modelo 2, a de um cilindro, como mostram as figuras a seguir. Um comprador adquire dois cestos: um primeiro cesto, de modelo 1 e volume de 1 728 cm^3, e um segundo, de modelo 2 e com 10 cm de diâmetro da base e 11 cm de altura.

Modelo 1

Unicamp, 2023

Modelo 2

Unicamp, 2023

A partir dessas informações (considerando $\pi \cong 3$), é possível afirmar que o volume do primeiro cesto adquirido pelo comprador é aproximadamente 24. Alternativa **d**.

a) o volume do segundo cesto.

b) um terço do volume do segundo cesto.

c) o triplo do volume do segundo cesto.

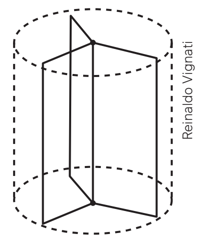
d) o dobro do volume do segundo cesto.

25. (UEMG) Considere um cilindro equilátero reto, cujo volume é 686π cm^3. Qual a área total desse cilindro?

25. Alternativa **c**.

a) 196π cm^2. **b)** 245π cm^2. **c)** 294π cm^2. **d)** 392π cm^2.

26. (UFJF-MG) Uma porta giratória é composta por três retângulos com um lado comum fixado no eixo que une os centros das bases de um cilindro equilátero como representado na figura abaixo. Cada um dos retângulos gira internamente a este cilindro que tem área lateral de 12,4 m^2, mantendo uma distância de 2 cm da superfície lateral e das bases. A altura e largura de cada retângulo que compõe a porta giratória, em metros, é:
(Considere $\pi \cong 3,1$) 26. Alternativa **c**.

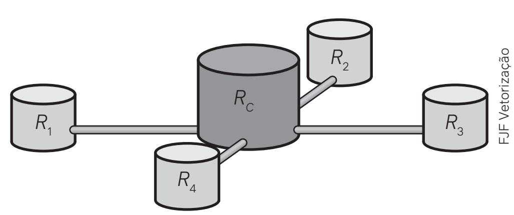


a) 2 e 1 **b)** 1,98 e 0,98 **c)** 1,96 e 0,98 **d)** 2 e 0,98 **e)** 1,96 e 1

27. (Enem) Para decorar sua casa, uma pessoa comprou um vaso de vidro em forma de um paralelepípedo retangular, cujas medidas internas são: 40 cm de comprimento, 35 cm de largura e 60 cm de altura. Em seguida, foi até uma floricultura e escolheu uma planta aquática para colocar nesse vaso. Segundo uma proposta do gerente do local, essa pessoa avaliou a possibilidade de enfeitar o vaso colocando uma certa quantidade de pedrinhas artificiais brancas, de volume igual a 100 cm^3 cada uma delas, que ficarão totalmente imersas na água que será colocada no vaso. O gerente alertou que seria adequado, em função da planta escolhida, que metade do volume do vaso fosse preenchido com água e que, após as pedrinhas colocadas, a altura da água deveria ficar a 10 cm do topo do vaso, dando um razoável espaço para o crescimento da planta. A pessoa aceitou as sugestões apresentadas, adquirindo, além da planta, uma quantidade mínima de pedrinhas, satisfazendo as indicações do gerente. Nas condições apresentadas, a quantidade de pedrinhas compradas foi 27. Alternativa **b**.

a) 140. **b)** 280. **c)** 350. **d)** 420. **e)** 700.

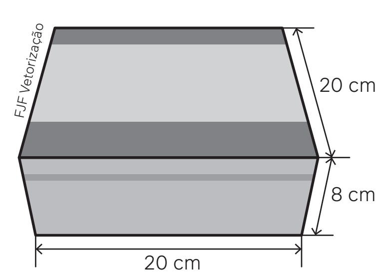
28. (Enem) Uma construtora pretende conectar um reservatório central (R_C) em formato de um cilindro, com raio interno igual a 2 m e altura interna igual a 3,30 m, a quatro reservatórios cilíndricos auxiliares (R_1, R_2, R_3 e R_4), os quais possuem raios internos e alturas internas medindo 1,5 m.



As ligações entre o reservatório central e os auxiliares são feitas por canos cilíndricos com 0,10 m de diâmetro interno e 20 m de comprimento, conectados próximos às bases de cada reservatório. Na conexão de cada um desses canos com o reservatório central há registros que liberam ou interrompem o fluxo de água. No momento em que o reservatório central está cheio e os auxiliares estão vazios, abrem-se os quatro registros e, após algum tempo, as alturas das colunas de água nos reservatórios se igualam, assim que cessa o fluxo de água entre eles, pelo princípio dos vasos comunicantes.
A medida, em metro, das alturas das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles, é 28. Alternativa **d**.

a) 1,44. **b)** 1,16. **c)** 1,10. **d)** 1,00. **e)** 0,95.

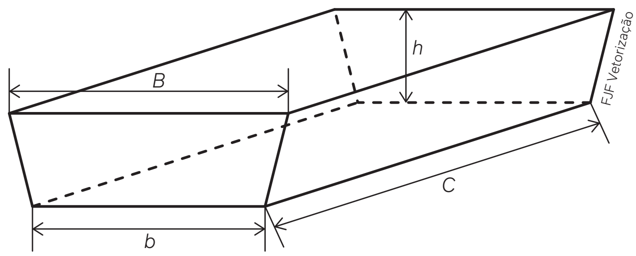
29. (Enem) Uma fábrica comercializa chocolates em uma caixa de madeira, como na figura.



A caixa de madeira tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões externas, em centímetro, estão indicadas na figura. Sabe-se também que a espessura da madeira, em todas as faces, é de 0,5 cm. Qual é o volume de madeira utilizado, em centímetro cúbico, na construção de uma caixa de madeira como a descrita para embalar chocolates? 29. Alternativa **c**.

a) 654. **b)** 666. **c)** 673. **d)** 681. **e)** 693.

30. (Enem) Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Legenda:
b – largura do fundo
C – comprimento do silo
B – largura do topo
h – altura do silo

Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo.

EMBRAPA. *Gado de corte*. Disponível em: https://resource.cnpgc.embrapa.br/. Acesso em: 1º ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é 30. Alternativa **a**.

a) 110. **b)** 125. **c)** 130. **d)** 220. **e)** 260.

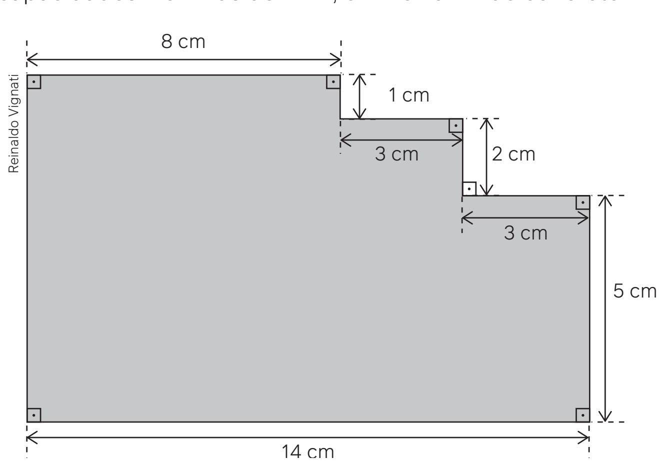
31. (Enem) Um casal planeja construir em sua chácara uma piscina com o formato de um paralelepípedo reto retângulo com capacidade para 90 000 L de água. O casal contratou uma empresa de construções que apresentou cinco projetos com diferentes combinações nas dimensões internas de profundidade, largura e comprimento. A piscina a ser construída terá revestimento interno em suas paredes e fundo com uma mesma cerâmica, e o casal irá escolher o projeto que exija a menor área de revestimento. As dimensões internas de profundidade, largura e comprimento, respectivamente, para cada um dos projetos, são:

- **Projeto I**: 1,8 m, 2,0 m e 25,0 m;
- **Projeto II**: 2,0 m, 5,0 m e 9,0 m;
- **Projeto III**: 1,0 m, 6,0 m e 15,0 m;
- **Projeto IV**: 1,5 m, 15,0 m e 4,0 m;
- **Projeto V**: 2,5 m, 3,0 m e 12,0 m.

O projeto que o casal deverá escolher será o 31. Alternativa **b**.

a) I **b)** II **c)** III **d)** IV **e)** V

32. (Enem) Um mestre de obras deseja fazer uma laje com espessura de 5 cm utilizando concreto usinado, conforme as dimensões do projeto dadas na figura. O concreto para fazer a laje será fornecido por uma usina que utiliza caminhões com capacidades máximas de 2 m^3, 5 m^3 e 10 m^3 de concreto.



Qual a menor quantidade de caminhões, utilizando suas capacidades máximas, que o mestre de obras deverá pedir à usina de concreto para fazer a laje? 32. Alternativa **c**.

a) Dez caminhões com capacidade máxima de 10 m^3.

b) Cinco caminhões com capacidade máxima de 10 m^3.

c) Um caminhão com capacidade máxima de 5 m^3.

d) Dez caminhões com capacidade máxima de 2 m^3.

e) Um caminhão com capacidade máxima de 2 m^3.

33. (Enem) Uma loja de materiais de construção vende dois tipos de caixas-d'água: tipo A e tipo B. Ambas têm formato cilíndrico e possuem o mesmo volume, e a altura da caixa-d'água do tipo B é igual a 25% da altura da caixa-d'água do tipo A. Se R denota o raio da caixa-d'água do tipo A, então o raio da caixa-d'água do tipo B é

33. Alternativa **b**.

a) $\frac{R}{2}$

b) 2R

c) 4R

d) 5R

e) 16R

34. (Enem) Muitos restaurantes servem refrigerantes em copos contendo limão e gelo. Suponha um copo de formato cilíndrico, com as seguintes medidas: diâmetro = 6 cm e altura = 15 cm. Nesse copo, há três cubos de gelo, cujas arestas medem 2 cm cada, e duas rodelas cilíndricas de limão, com 4 cm de diâmetro e 0,5 cm de espessura cada. Considere que, ao colocar o refrigerante no copo, os cubos de gelo e os limões ficarão totalmente imersos.

(use 3 como aproximação para π)

O volume máximo de refrigerante, em centímetro cúbico, que cabe nesse copo contendo as rodelas de limão e os cubos de gelo com suas dimensões inalteradas, é igual a 34. Alternativa **c**.

a) 107

b) 234

c) 369

d) 391

e) 405

35. (Enem) A água utilizada pelos 75 moradores de um vilarejo provém de um reservatório de formato cilíndrico circular reto cujo raio da base mede 5 metros, sempre abastecido no primeiro dia de cada mês por caminhões-pipa. Cada morador desse vilarejo consome, em média, 200 litros de água por dia. No mês de junho de um determinando ano, o vilarejo festejou o dia de seu padroeiro e houve um gasto extra de água nos primeiros 20 dias. Passado esse período, as pessoas verificaram a quantidade de água presente no reservatório e constataram que o nível da coluna de água estava em 1,5 metro. Decidiram, então, fazer um racionamento de água durante os 10 dias seguintes. Considere 3 como aproximação para π.

Qual é a quantidade mínima de água, em litro, que cada morador, em média, deverá economizar por dia, de modo que o reservatório não fique sem água nos próximos 10 dias? 35. Alternativa **a**.

a) 50

b) 60

c) 80

d) 140

e) 150

36. (Enem) A foto mostra a construção de uma cisterna destinada ao armazenamento de água. Uma cisterna como essa, na forma de cilindro circular reto com 3 m^2 de área da base, foi abastecida por um curso-d'água com vazão constante. O seu proprietário registrou a altura do nível da água no interior da cisterna durante o abastecimento em diferentes momentos de um mesmo dia, conforme o quadro.

Horário (h)	Nível da água (m)
6:00	0,5
8:00	1,1
12:00	2,3
15:00	3,2

ENEM, 2023

Qual foi a vazão, em metro cúbico por hora, do curso-d'água que abasteceu a cisterna? 36. Alternativa **c**.

a) 0,3

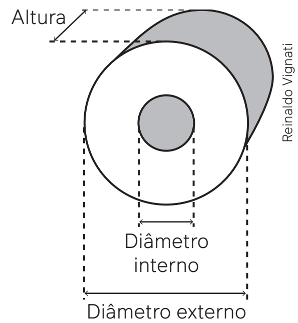
b) 0,5

c) 0,9

d) 1,8

e) 2,7

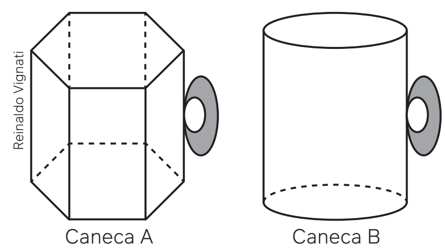
37. (Enem) Um rolo de papel higiênico tradicional é representado por um cilindro circular reto retirando-se outro cilindro circular reto interior, de mesmo eixo de simetria, mesma altura e diâmetro menor, conforme a figura.



Considere um rolo de papel higiênico com 12 cm de diâmetro externo, 4 cm de diâmetro interno e 10 cm de altura. O volume, em centímetro cúbico, desse rolo é 37. Alternativa **c**.

a) 80π
b) 160π
c) 320π
d) 640π
e) $1\,280\pi$

38. (Enem) Um novo produto, denominado bolo de caneca no micro-ondas, foi lançado no mercado com o objetivo de atingir ao público que não tem muito tempo para cozinhar. Para prepará-lo, uma mesma pessoa tem à sua disposição duas opções de canecas.



A caneca A tem formato de um prisma reto regular hexagonal de lado $L = 4$ cm, e a caneca B tem formato de um cilindro circular reto de diâmetro $d = 6$ cm. Sabe-se que ambas têm a mesma altura $h = 10$ cm, e que essa pessoa escolherá a caneca com maior capacidade. Considere $\pi \cong 3{,}1$ e $\sqrt{3} \cong 1{,}7$.

A medida da capacidade, em centímetro cúbico, da caneca escolhida é 38. Alternativa **c**.

a) 186
b) 279
c) 408
d) 816
e) 1116

Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão em relação aos assuntos e objetivos trabalhados ao longo do presente capítulo.

Objetivos de aprendizagem	Sim	É necessário retomar
Compreendo as relações métricas para o cálculo de áreas de superfícies de prisma e de cilindro.		
Resolvo e elaboro problemas relacionados ao cálculo de áreas de superfícies de prisma e de cilindro.		
Compreendo o procedimento para o cálculo do volume de blocos retangulares.		
Compreendo o princípio de Cavalieri para o estabelecimento de procedimentos de cálculo de volumes de prisma e de cilindro a partir do volume de bloco retangular.		
Compreendo as relações matemáticas para o cálculo de volumes de prisma e de cilindro.		
Resolvo e elaboro problemas relacionados ao cálculo de volumes de prisma e de cilindro.		
Compreendo o princípio de Cavalieri para o cálculo de volume de sólidos geométricos.		

Danillo Souza

Neste capítulo, você vai:

- compreender os procedimentos para o cálculo de medidas de superfícies de pirâmides, cones e esferas;
- resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de medidas de superfícies;
- compreender o procedimento para o cálculo de volume de pirâmides, cones e esferas, com base no princípio de Cavalieri;
- resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de volume;
- compreender o procedimento para o cálculo de medidas de superfícies de cones;
- compreender as razões de semelhança entre os sólidos geométricos para obter áreas e volumes de tronco de pirâmide e tronco de cone;
- compreender a relação matemática para o cálculo da medida da superfície de uma esfera com base em seu raio;
- resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de medida de superfície de esfera.

CAPÍTULO

2

Pirâmides, cones e esferas

Cada vez mais as pessoas se conscientizam da necessidade de agir em relação aos desafios que as mudanças climáticas têm provocado no planeta Terra. Para isso, é necessário que todas as pessoas tenham atitudes responsáveis, tais como diminuir o consumo de energia e de água, reciclar e reaproveitar determinados materiais, sobretudo que exerçam a capacidade coletiva para provocar mudanças políticas que dizem respeito às práticas institucionais que são nocivas ao meio ambiente e à vida humana e não humana na Terra. E você, como está contribuindo individual e coletivamente para salvar o planeta?

Quando pensamos no planeta Terra, temos a ideia de uma esfera. Essa forma geométrica será o objeto de estudo deste capítulo, bem como as pirâmides e os cones.

1. **A Terra é uma esfera perfeita?** 1. Não.
2. **Será que todas as formas geométricas existem na realidade?** 2. Resposta pessoal.

1 Pirâmides

Ao digitar a palavra **pirâmide** em *sites* de busca e logo depois selecionar a categoria “Imagens”, aparecerá uma enorme quantidade de fotografias, a maioria de pirâmides egípcias.

Burak Budak/Shutterstock.com

Pirâmides do Egito, 2017.

Em alguns lugares do mundo é possível observar construções que lembram pirâmides. Em um hotel da cidade de Algarrobo, no Chile, por exemplo, a cobertura da piscina térmica tem o formato de pirâmide.

Rodrigo Garrido/Reuters/Fotoarena

Cobertura de piscina em forma de pirâmide em hotel de Algarrobo, no Chile, 2008.

Nas imagens, as pirâmides têm base quadrangular. Entretanto, sabemos que a denominação pirâmide, em Geometria, engloba não apenas as estruturas que possuem base em forma de quadrado mas também em forma de outros polígonos, como triângulo, pentágono, hexágono, entre outros.

Para pensar e discutir

1. Observe a ilustração da pirâmide do hotel no Chile. Quais medidas seriam necessárias para calcular a área da parte revestida de vidro, desconsiderando a estrutura entre os vidros? 1. Medida da aresta da base e medida do apótema da pirâmide.
2. De quais medidas precisaríamos para calcular a área do local coberto pela pirâmide? 2. Medida das arestas da base.
3. O que é uma pirâmide regular? Exemplifique. 3. Respostas no Manual do Professor.

Análise e contexto

A Pirâmide de Quéops

E como que foi construída a grande a pirâmide egípcia? Analise o texto a seguir que contém detalhes que irão ampliar o seu conhecimento a esse respeito.

A grande Pirâmide de Quéops

Das mais de oitenta pirâmides já encontradas pelos arqueólogos no Egito, uma se destaca pela grandiosidade e [pelo] impressionismo de suas dimensões, a grande pirâmide do faraó Quéops [...], soberano da IV dinastia. A imponente construção emerge das areias na planície de Gizé, margem ocidental do rio Nilo, a 8 km do Cairo, capital do Egito. Única das Sete Maravilhas do mundo antigo ainda em pé, durante 4 000 anos foi a construção mais alta do mundo com espantosos 147 metros de altura. [...]

Entre a III dinastia e XII dinastia, durante um milênio (2630 e 1640 a.C.), os egípcios construíram suas famosas pirâmides. Na III dinastia reinou o faraó Djoser, que encarregou o sábio Imhotep de construir seu túmulo, a primeira grande construção em pedra do Egito, a chamada pirâmide de degraus de Sacará. Foram os gregos, entretanto, que chamaram tais monumentos de pyramis (plural pyramides), o que resultou na palavra pirâmide em português. Ao que tudo indica, a palavra grega não deriva de nenhum vocábulo egípcio, mas trata-se apenas do nome que os gregos davam a uma espécie de doce feito com farinha de trigo. Acreditam os estudiosos que os antigos gregos associaram humoristicamente as pirâmides a essa guloseima, provavelmente porque quando vistos à distância os monumentos lhes pareciam enormes bolos. [...]

Os egípcios pregavam a imortalidade da alma e do corpo. O túmulo para um egípcio era o seu castelo da eternidade, e [as pirâmides] deveriam ser ricamente ornamentadas com tesouros, roupas, artefatos de cerâmica, objetos pessoais e até mesmo alimentos. As pirâmides egípcias destinavam-se aparentemente a servir de sepultura, além de serem o centro de um complicado e pomposo cerimonial religioso. Assim o atesta o conjunto de templos, monumentos e pirâmides auxiliares a elas vinculadas. A finalidade segundo a crença comum e alguns historiadores, era servir de tumba para preservar os despojos dos faraós. [...]

Construída cerca de 4 500 anos atrás, a Pirâmide de Quéops está até hoje estruturalmente intacta. Monumento mais pesado já construído pelo homem (cerca de 31 200 000 toneladas), possui aproximadamente 2,3 milhões de blocos de rocha, cada um pesando em média 2,5 toneladas, com alguns chegando a cerca de 50 toneladas. Sua altura de mais de 146 m só foi ultrapassada em altura no século XVI. Se a pirâmide fosse reduzida a cubos com 30 centímetros de lado e estes fossem colocados em fila, se estenderiam por uma distância igual a dois terços da circunferência da [Terra] no Equador. [...]


Brandelet/Shutterstock.com

Pirâmide de Quéops, Egito, 2010.

Apesar da grandiosidade da obra, o plano era completá-la dentro do reinado do faraó. O cronograma foi obedecido, e a grande pirâmide foi construída dentro de 23 anos de muito trabalho em 2600 a.C. por homens com ferramentas rudimentares, sem o uso de guindaste, roldanas ou guinchos, porém um cálculo estimado diz que um bloco de granito era assentado a cada cinco minutos. [...]

Nada na grande pirâmide parece ter sido fruto do acaso, existe uma significância em cada procedimento, em cada etapa, revelando um planejamento detalhado e rigoroso. Isto é impressionante, principalmente quando se pensa na idade desse monumento e no rigor técnico com o qual foi construído, sendo que tal tecnologia rivaliza com as mais modernas técnicas de engenharia. Uma das criações mais geniais de toda a história da humanidade, a grande pirâmide com toda a sua majestade, é um tesouro que retrata o auge de uma civilização a tempos extinta, que porém deixou este projeto como legado para a apreciação e aprendizagem dos gerentes de projeto contemporâneos.

PRUDÊNCIO, A. A grande Pirâmide de Quéops: o projeto de construção de uma das Sete Maravilhas do Mundo. *In*: EESC-USP. São Paulo, 13 abr. 2010. Disponível em: https://doceru.com/doc/xc080c5. Acesso em: 16 jul. 2024.

1. Em sua opinião, quais são os aspectos da construção das pirâmides egípcias que as tornam um legado para a humanidade? 1. Resposta pessoal.

2. Suponha que a Pirâmide de Quéops fosse construída hoje: 2. Respostas pessoais.

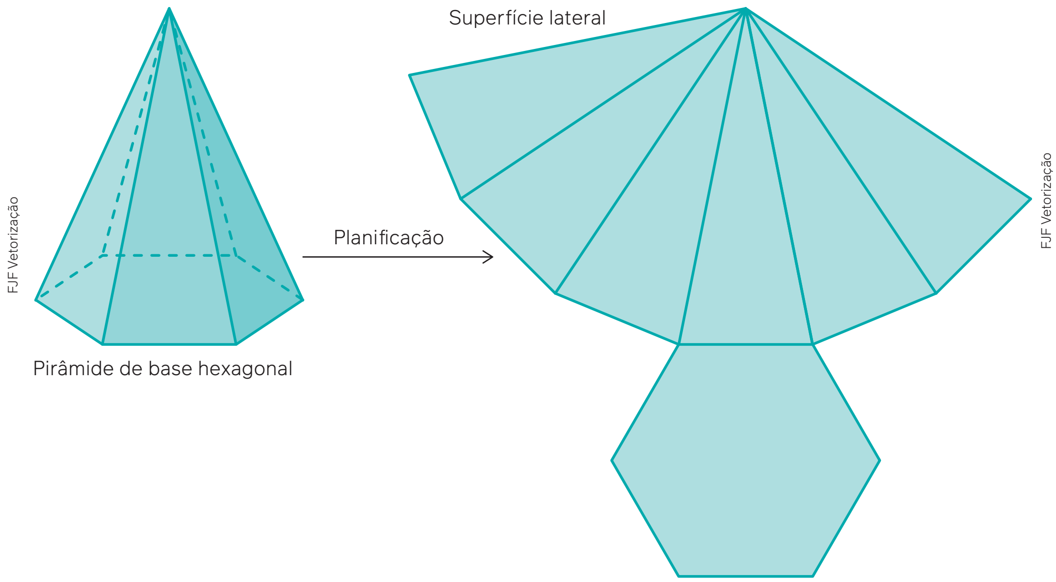
a) faça uma lista dos conhecimentos matemáticos que você imagina que seriam necessários para sua construção;

b) troque sua lista com a de um colega e discutam os itens que vocês pensaram, justificando cada um deles.

Área da superfície da pirâmide

Como calcular a área da superfície de uma pirâmide, isto é, obter a medida de sua superfície?

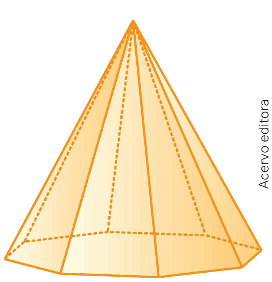
Vamos relembrar o que você sabe sobre planificações de pirâmides. Nosso foco será o cálculo de pirâmides regulares. No volume anterior desta coleção, foram abordadas as relações métricas entre os elementos de uma pirâmide. Observe a seguir a planificação de uma **pirâmide regular** de base hexagonal.



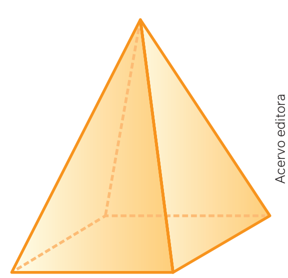
Para pensar e discutir

1. Como calcular a medida da superfície lateral dessa pirâmide? De quais medidas você precisa? 1. Respostas no Manual do Professor.
2. O que a altura de cada triângulo correspondente às faces laterais representa na pirâmide? 2. O apótema.
3. E a superfície total da pirâmide, como calcular? 3. Área da superfície lateral + área da base.

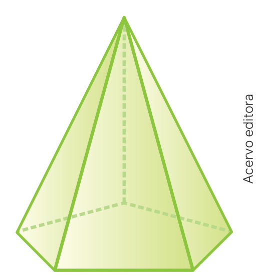
Nas questões anteriores, analisamos o cálculo da área da superfície lateral e da área da superfície total de uma pirâmide hexagonal regular, observando sua planificação. Esse raciocínio pode ser estendido para outros tipos de pirâmides regulares.



Pirâmide de base octogonal.



Pirâmide de base quadrangular.



Pirâmide de base pentagonal.

A superfície correspondente à base de uma pirâmide é representada por um polígono. A superfície lateral de uma pirâmide é formada por triângulos, de modo que a quantidade desses triângulos corresponde ao número de lados do polígono da base. De maneira geral, mesmo que a pirâmide não seja regular, temos a seguir a relação para o cálculo da medida de sua superfície total.

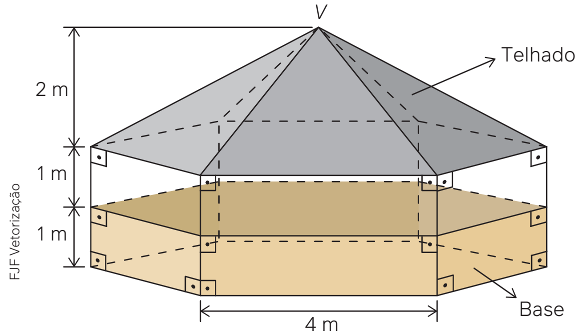
A área total A_T da superfície de uma pirâmide pode ser calculada pela relação:

$$\boldsymbol{A_T = A_L + A_b}$$

em que A_L é a área da superfície lateral e A_b é a área da base.

Atividades resolvidas

1. No meio de uma praça de um certo município, a prefeitura projetou a construção de um coreto, como ilustrado a seguir. A ideia é usar a construção para apresentações de bandas, músicos em geral e até discursos políticos.



No projeto do coreto, observe que o telhado é representado de maneira aproximada (as telhas são retas, necessariamente) por uma pirâmide de base hexagonal regular.
Para fazer o telhado, são necessárias aproximadamente 17 telhas (em forma de retângulos) por metro quadrado. O valor de cada telha é R$ 2,00. Quantas telhas serão necessárias para cobrir o telhado do coreto e qual será o valor pago apenas pelas telhas?

- Nessa situação, inicialmente devemos calcular a área correspondente à superfície que será coberta pelas telhas. Utilizando as relações métricas de um triângulo retângulo (em que a_p – apótema da pirâmide; h – altura da pirâmide; r – o apótema da base da pirâmide e L – aresta da base da pirâmide), temos:

$$a_p^2 = h^2 + r^2$$
$$r = \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$$
$$a_p^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2$$
$$a_p^2 = 4 + 12 \Rightarrow a_p = 4$$

- Assim, o cálculo da área a ser coberta (área lateral da pirâmide) é dado por:

$$A_L = 6 \cdot \left(\frac{L \cdot a_P}{2}\right)$$
$$A_L = 6 \cdot \left(\frac{4 \cdot 4}{2}\right)$$
$$A_L = 6 \cdot 8 = 48 \rightarrow 48\ \text{m}^2$$

- Cálculo do número de telhas, considerando que 17 telhas cobrem 1 m², temos:

$$48 \cdot 17 = 816$$

Serão necessárias, aproximadamente, 816 telhas.

- Cálculo do valor total (número de telhas multiplicado pelo valor de cada telha em reais):

$$816 \cdot 2 = 1\,632$$

Então, o valor gasto com as telhas será R$ 1.632,00.

2. Um enfeite com formato de pirâmide (Figura 1) é feito usando um molde de acrílico (Figura 2).

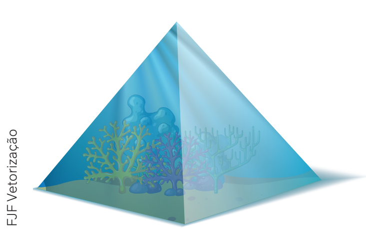


Figura 1

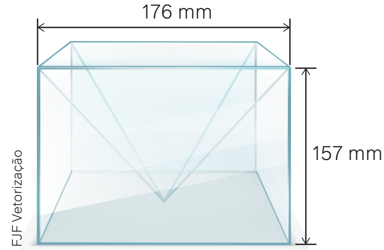


Figura 2

Desconsiderando a espessura do molde, qual será a área total da peça obtida?

- Como a altura da pirâmide (h) é 157 mm e a aresta da base (L) é 176 mm, temos que o apótema é dado por:

$$a_p^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$
$$a_p^2 = 157^2 + \left(\frac{176}{2}\right)^2$$
$$a_p^2 = 24\,649 + 7\,744$$
$$a_p^2 = 32\,393 \Rightarrow a_p \cong 180 \rightarrow 180 \text{ mm}$$

- Calculando-se a área da superfície total, temos:

$$A_T = A_L + A_B$$
$$A_T \cong 4 \cdot \left(\frac{176 \cdot 180}{2}\right) + 176^2$$
$$A_T \cong 63\,360 + 30\,976 \Rightarrow A_T \cong 94\,336 \rightarrow 94\,336 \text{ mm}^2$$

Portanto, a área total é de aproximadamente 94 336 mm².

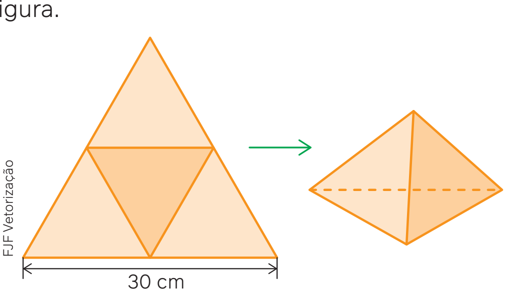
Para pensar e discutir

1. No cálculo da área total da **atividade resolvida 2**, por que o valor $\left(\frac{176 \cdot 180}{2}\right)$ foi multiplicado por 4?
   1. A área lateral do enfeite é 4 vezes a área de um triângulo.
2. A área da superfície total obtida, conforme calculado na atividade resolvida anterior, é maior ou menor que a área da superfície de uma folha de papel A4? Qual é a diferença? 2. Maior. 31 966 cm³

Atividades

1. Em uma pirâmide quadrangular regular, a área da base é igual a 256 cm² e a altura mede 6 cm.
   a) Faça um desenho para representar essa pirâmide. 1. a) Resposta pessoal.
   b) Determine a medida do apótema da pirâmide. 1. b) 10 cm
   c) Calcule a área lateral da pirâmide. 1. c) 320 cm²
   d) Calcule a área total da pirâmide. 1. d) 576 cm²

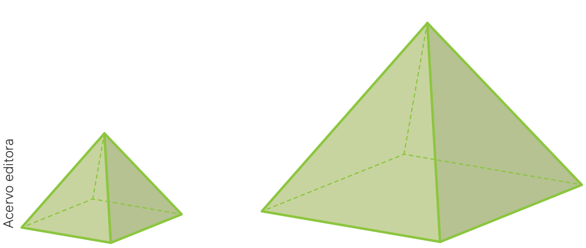
2. Uma pirâmide em que a base e todas as faces laterais têm a forma de um triângulo equilátero é chamada de tetraedro regular. Usando uma folha de papel no formato de triângulo equilátero, podemos construir um modelo de tetraedro, como mostra a figura.



FJF Vetorização

   a) Qual é a área total do modelo de tetraedro construído? 2. a) Aproximadamente 390 cm².
   b) Determine a altura desse tetraedro. 2. b) Aproximadamente 13 cm.

3. Estão representadas a seguir duas pirâmides regulares de base quadrangular, em que a maior é uma ampliação da menor.



Acervo editora

A pirâmide menor tem aresta da base 2 cm e 3 cm de altura. A pirâmide ampliada tem aresta da base 4 cm e 6 cm de altura. Denominando P_1 a pirâmide menor e P_2 a pirâmide maior, determine a razão (na ordem indicada), entre:

4. A medida do lado do polígono da base e a medida do apótema da pirâmide (corresponde à altura do triângulo da face).

a) as medidas das arestas da base de P_1 e P_2; 3. a) 0,5

b) as medidas das alturas de P_1 e P_2; 3. b) 0,5

c) as medidas dos perímetros das bases de P_1 e P_2; 3. c) 0,5

d) as medidas dos apótemas de P_1 e P_2; 3. d) 0,5

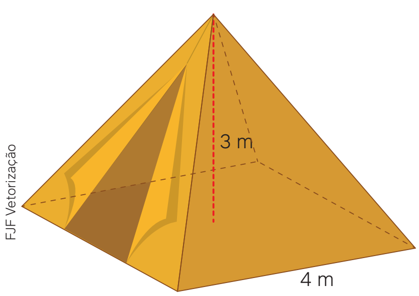
e) as medidas das áreas das bases de P_1 e P_2; 3. e) 0,25

f) as medidas das áreas laterais de P_1 e P_2; 3. f) 0,25

g) as medidas das áreas totais de P_1 e P_2. 3. g) 0,25

4. Claraboias são estruturas de vidro que podem ser colocadas nas laterais ou na parte superior de construções, cujo objetivo é ventilar e iluminar o ambiente em que estão instaladas. Considere uma claraboia com o formato aproximado de uma pirâmide, cuja base é um decágono regular.
Desconsiderando as estruturas, indique quais medidas seriam necessárias para determinar a quantidade de vidro a ser utilizado para construir essa claraboia.

5. A figura a seguir representa uma barraca em formato aproximado de pirâmide regular de base quadrangular de altura 3 m. Considere que todas as arestas laterais e da base são estruturas em metal em forma de canos para a sustentação da barraca.



a) Determine a quantidade total de canos necessária para a confecção da estrutura da barraca. 5. a) Aproximadamente 32,48 m.

b) Qual é a quantidade, em metros quadrados, de lona para revestir externamente a barraca? 5. b) Aproximadamente 28,8 m².

6. Junte-se a um colega e elaborem, com base na **atividade 5**, uma situação que envolva uma barraca em forma de pirâmide hexagonal regular. 6. Resposta pessoal.

7. Elabore um problema em que seja necessário calcular a área da superfície total de uma pirâmide regular de base hexagonal. Em seguida, faça o que se pede.

a) Resolva o problema. 7. a) Resposta pessoal.

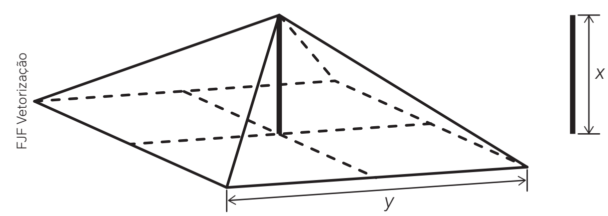
b) Peça a um colega que resolva o problema que você elaborou, sem que ele veja a solução. 7. b) Resposta pessoal.

c) Confronte as respostas obtidas. Em caso de discrepâncias, discuta com o colega os procedimentos e os cálculos utilizados. 7. c) Resposta pessoal.

8. (UPE-SSA) Para a premiação dos melhores administradores de uma galeria comercial, um *designer* projetou um peso de papel com a forma de um tetraedro regular reto, de aresta 20 cm, que será entregue aos vencedores. Esse peso de papel será recoberto com placas de platina nas faces laterais e com uma placa de prata na base. Se o preço da platina é de 30 reais por centímetro quadrado e o da prata é de 50 reais por centímetro quadrado, assinale a alternativa que apresenta o valor mais próximo, em reais, do custo desse recobrimento. Considere $\sqrt{3} \cong 1{,}7$. 8. Alternativa **a**.

a) 24 000,00 **b)** 18 000,00 **c)** 16 000,00 **d)** 14 000,00 **e)** 12 000,00

9. (Enem) A cobertura de uma tenda de lona tem formato de pirâmide de base quadrada e é formada usando quatro triângulos isósceles de base *y*. A sustentação da cobertura é feita por uma haste de medida *x*. Para saber quanto de lona deve ser comprado, deve-se calcular a área da superfície de cobertura da tenda.



A área da superfície da cobertura da tenda, em função de *y* e *x*, é dada pela expressão: 9. Alternativa **a**.

a) $2y\sqrt{x^2 + \dfrac{y^2}{4}}$.

b) $2y\sqrt{x^2 + \dfrac{y^2}{2}}$.

c) $4y\sqrt{x^2 + y^2}$.

d) $4\sqrt{x^2 + \dfrac{y^2}{4}}$.

e) $4\sqrt{x^2 + \dfrac{y^2}{2}}$.

10. (UFMS) Um grupo de amigos decidiu acampar em local próximo a uma das cachoeiras da cidade de Bonito. Planejam utilizar uma barraca feita de tecido impermeável no formato de pirâmide regular quadrangular, com medidas da aresta de base de 2 m e altura 2 m. Considerando que a barraca deve isolar o grupo de toda umidade, inclusive a proveniente do solo, quantos metros quadrados de tecido são necessários? 10. Alternativa **e**.

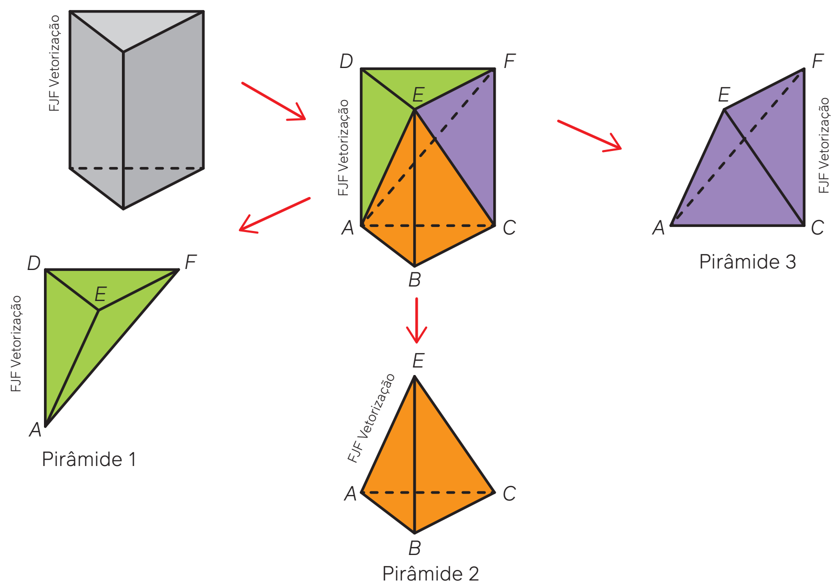
a) $4\sqrt{3}$ **b)** $4(\sqrt{3} + 1)$ **c)** $4(1 + 4\sqrt{5})$ **d)** $4\sqrt{5}$ **e)** $\sqrt{80} + 4$

11. (Uece) Considere uma pirâmide regular hexagonal reta cuja medida da altura é 30 m e cuja base está inscrita em uma circunferência cuja medida do raio é igual a 10 m. Desejando-se pintar todas as faces triangulares dessa pirâmide, a medida da área a ser pintada, em m², é 11. Alternativa **b**.

a) $115\sqrt{39}$ **b)** $150\sqrt{39}$ **c)** $125\sqrt{39}$ **d)** $140\sqrt{39}$

Volume da pirâmide

Para calcular o volume de uma pirâmide podemos considerar inicialmente um prisma triangular. Dividindo o prisma em três pirâmides, temos:



Para pensar e discutir

1. As pirâmides 1 e 2 têm a mesma altura e a mesma área da superfície da base. Essa afirmação é correta? 1. Sim.
2. As pirâmides 1 e 2 têm o mesmo volume? Por quê? 2. Sim; resposta pessoal.
3. Compare as pirâmides 1 e 3. Elas têm o mesmo volume? Justifique. 3. Sim; resposta pessoal.

O objetivo da discussão acima foi concluir, pelo menos intuitivamente, que as três pirâmides obtidas têm o mesmo volume. Assim, considerando uma pirâmide de base triangular (*pt*), podemos escrever:

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_{pt}$$

Obtendo o volume de uma pirâmide de base triangular (V_{pt}):

$$V_1 + V_2 + V_3 = V_{\text{prisma}}$$

$$3 \cdot V_{pt} = V_{\text{prisma}}$$

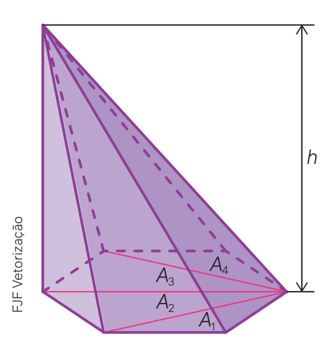
$$3 \cdot V_{pt} = A_b h$$

$$\boldsymbol{V_{pt} = \frac{1}{3} A_b h}$$

Infográfico clicável
A pirâmide mais famosa do Louvre

O volume de uma pirâmide de base triangular é um terço do volume do prisma de mesma base.

O resultado obtido acima é válido para uma pirâmide de base triangular. Entretanto, esse raciocínio pode ser utilizado para obter o volume de qualquer pirâmide. Se a pirâmide não for de base triangular, podemos subdividi-la em outras pirâmides de base triangular. Considere, por exemplo, uma pirâmide de base hexagonal, como na figura.



A partir de um dos vértices do polígono da base da pirâmide, dividimos a base em triângulos (traçamos as diagonais desse polígono saindo do vértice escolhido). Na figura anterior, a pirâmide hexagonal pode ser dividida em 4 pirâmides de bases triangulares de áreas A_1, A_2, A_3 e A_4. Portanto, temos:

$$V = \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + \frac{1}{3}A_3h + \frac{1}{3}A_4h$$

$$V = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)h$$

$$\downarrow A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = A_b$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Se considerarmos uma pirâmide qualquer, cuja base é um polígono de n lados, a partir de um vértice desse polígono podemos dividi-la em $n - 2$ triângulos. Assim, obtemos $n - 2$ pirâmides triangulares de mesma altura que a pirâmide original e com área da base $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-2}$. Portanto, o volume V da pirâmide é:

$$V = \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + \frac{1}{3}A_3h + \ldots + \frac{1}{3}A_{n-2}h$$

$$V = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-2})h$$

$$\downarrow A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-2} = A_b$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela medida da altura, ou seja:

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h}$$

Atividades resolvidas

3. No texto apresentado no início da unidade está descrito que a Pirâmide de Quéops tinha 147 m de altura. Considerando que a base da pirâmide é um quadrado com aproximadamente 230 m de lado, vamos calcular o volume dessa pirâmide egípcia.

- Observe que, pela substituição na relação matemática apresentada acima, o cálculo do volume é imediato, conhecendo-se a altura e a medida da aresta da base:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 147 \Rightarrow V = 2\,592\,100$$

Portanto, o volume da Pirâmide de Quéops é 2 592 100 m³.

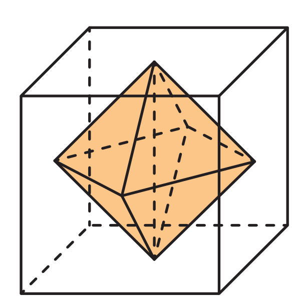
Podcast
Pirâmides do Egito

Para pensar e discutir

1. Meça as dimensões da sala de aula em que você estuda e calcule o volume dela. Compare esse volume com o da Pirâmide de Quéops e responda: Por quanto devemos multiplicar o volume calculado da sala de aula para obtermos o volume da Pirâmide de Quéops? 1. Resposta pessoal.

2. Em virtude de diversos fatores, a altura da Pirâmide de Quéops, com o tempo, diminuiu cerca de 9 m. Assim, atualmente ela tem aproximadamente 138 m (considere que ela ainda tenha a forma de pirâmide). Qual é o percentual de redução no volume sofrido pela pirâmide, se sua base não foi alterada? 2. Aproximadamente 6%.

4. Um octaedro regular pode ser obtido por sobreposição nas bases de duas pirâmides quadrangulares cujas faces laterais sejam triângulos equiláteros. Para exposição de obras de arte com figuras geométricas, um museu projetou um octaedro feito de granito inscrito em um cubo de vidro (ver figura) que será colocado na entrada do museu. O octaedro tem os vértices no centro das faces do cubo. Se a aresta do cubo mede 2 m, qual é o volume do octaedro?



FJF Vetorização

- Observe que a altura de cada pirâmide que compõe o octaedro equivale à metade da aresta do cubo, isto é, 1 m. Além disso, a medida da aresta do cubo representa a medida da diagonal do quadrado correspondente à base das duas pirâmides. Considerando L a medida da aresta da base de cada pirâmide, temos:

$$L\sqrt{2} = 2$$
$$L = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow L = \sqrt{2}$$

- Calculando-se o volume do octaedro, temos:

$$V = 2 \cdot V_{\text{pirâmide}}$$
$$V = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot A_b h\right)$$
$$V = \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot 1$$
$$V = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow V \cong 1,33 \rightarrow 1,33 \text{ m}^3$$

Assim, o volume do octaedro é aproximadamente 1,33 m^3.

Atividades

12. Considerando ainda a **atividade resolvida 4**, responda:

a) Se retirarmos o octaedro do cubo para enchermos com água essa peça de vidro, quantos litros de água caberão? Desconsidere a espessura do vidro. 12. a) 8 000 L

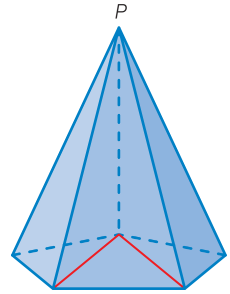
b) Se deixarmos o octaedro dentro do cubo e colocarmos água no interior dessa peça de vidro, quantos litros de água caberiam, considerando que o octaedro em granito não absorve água? Explique oralmente como calculou. 12. b) 6 670 L; resposta pessoal

13. Responda:

a) Em uma pirâmide cuja área da base é representada por A e a altura é representada por h, duplicando-se a altura e mantendo-se a área da base, o que ocorre com o volume? 13. a) Duplica.

b) Se o volume de uma pirâmide de altura 8 cm é igual a 32 cm^3, qual é a medida da superfície da base? 13. b) 12 cm^2

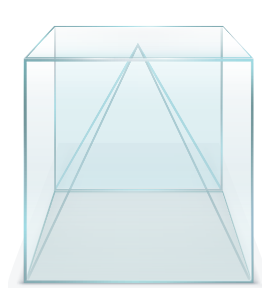
14. O volume da pirâmide de base pentagonal de vértice no ponto P, representada a seguir, é igual a V.



FJF Vetorização

Considere que essa pirâmide seja dividida em três pirâmides de base triangular obtidas pela divisão da base em três triângulos de mesma área.
Qual é o volume, em função de V, de cada pirâmide triangular? Justifique. 14. $\frac{V}{3}$; resposta pessoal

15. O desenho a seguir representa um cubo de vidro com uma pirâmide de vidro dentro dele. A base da pirâmide coincide com uma face do cubo, cuja medida da altura é igual à medida da aresta do cubo.

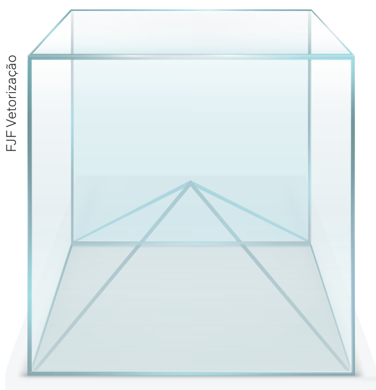

FJF Vetorização

Se o cubo é aberto na parte superior e sua aresta mede 60 cm, determine: 15. a) $\frac{1}{3}$; resposta pessoal.

a) a razão entre o volume da pirâmide e do cubo, nessa ordem, e explique como calculou;

b) a capacidade, em litros, do recipiente entre a pirâmide e o cubo. 15. b) 144 L

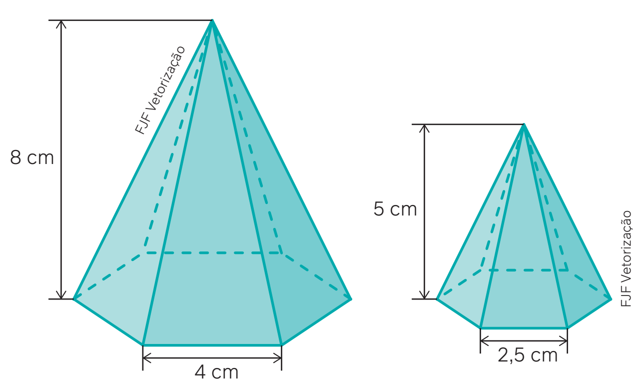
16. Retome a atividade anterior e considere, nesse caso, que a pirâmide tem altura igual à metade da aresta do cubo.



a) Quantas vezes o volume do cubo é maior que o volume da pirâmide? 16. a) 6 vezes

b) Qual é a capacidade, em litros, do recipiente entre a pirâmide e o cubo? 16. b) 180 L

17. As duas pirâmides hexagonais regulares representadas a seguir são semelhantes. A menor delas é uma redução proporcional da maior.



Sendo P_A a pirâmide maior e P_B a pirâmide menor, responda:

a) Qual é a razão entre as medidas de comprimento correspondentes a P_A e P_B, nessa ordem? 17. a) 1,6

b) Qual é a razão entre as áreas totais de P_A e P_B, nessa ordem? 17. b) $1{,}6^2$

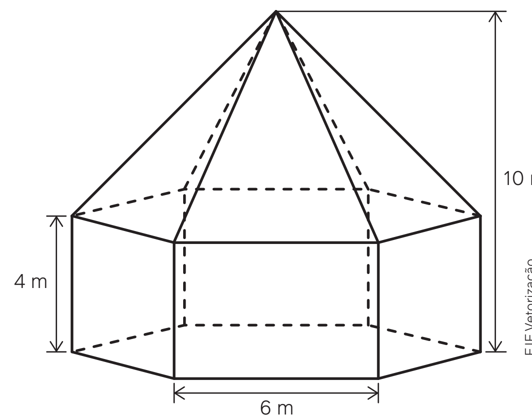
c) Qual é a razão entre os volumes de P_A e P_B, nessa ordem? 17. c) $1{,}6^3$

18. Junte-se a um colega para esta atividade.
Em uma pirâmide hexagonal regular, a aresta da base mede 4 cm. Considerando que a altura é igual a $6\sqrt{3}$ cm, façam o que se pede.

a) Calculem o volume da pirâmide. 18. a) 144 cm^3

b) Duplicando a medida da aresta da base da pirâmide e mantendo a medida da altura, o que ocorre com o volume? Justifiquem.
18. b) Quadruplica; resposta pessoal.

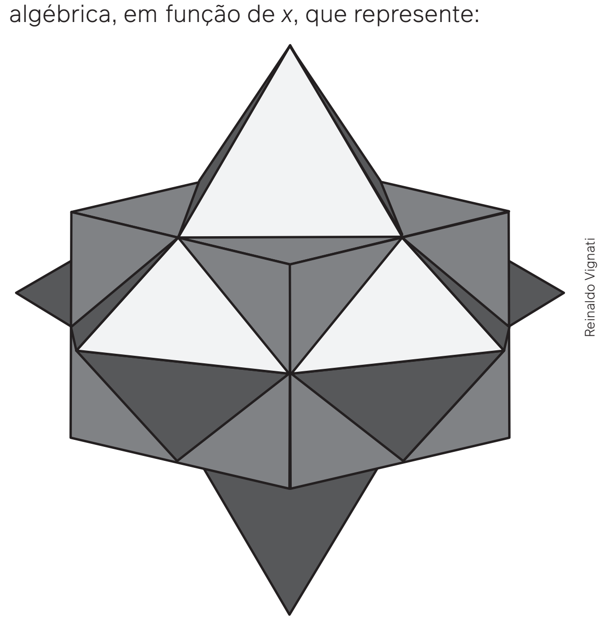
19. Em uma área rural foi idealizado um depósito (silo) para guardar parte da colheita. Observe, na ilustração, que o depósito é formado por um prisma hexagonal regular reto e uma pirâmide hexagonal reta.



a) Determine, em m^2, a quantidade de material a ser utilizado para revestir externamente o silo.
19. a) Aproximadamente 287 m^2.

b) Obtenha, em m^3, o volume desse silo, desconsiderando a espessura das paredes e do telhado.
19. b) Aproximadamente 561 m^3.

20. Junte-se a um colega para esta atividade. O sólido geométrico representado a seguir, é formado por um cubo e por pirâmides quadrangulares com base nas faces do cubo. Cada face lateral das pirâmides é um triângulo equilátero. Os vértices da base das pirâmides estão localizados nos pontos médios das arestas do cubo. Considerando que a medida da aresta do cubo seja x, escrevam uma expressão algébrica, em função de x, que represente:



a) a área da superfície total desse sólido;

20. a) $A = 6x^2(\sqrt{3} + 1)$

b) o volume desse sólido.

20. b) $V = \frac{3x^3}{2}$

2 Cones

Alguns objetos que geralmente recebem o nome de cone não têm exatamente esse formato. Os “cones” usados para demarcar estacionamentos, desvios ou obras são equipamentos de sinalização.

Uma casquinha de sorvete e alguns tipos de coadores são outros exemplos de objetos cuja forma lembra a de um cone.

PhilipYb Studio/Shutterstock.com

Cone de trânsito.

Chones/Shutterstock.com

Casquinha de sorvete.

Fenando Favoretto/Criar Imagem

As imagens desta página não estão representadas na mesma proporção.

Coador de café em formato de cone.

As fábricas responsáveis pela produção desses objetos devem considerar o custo de sua confecção. Os cálculos para determinar o custo unitário dos produtos dependem, entre outros fatores, do material utilizado e das medidas dos objetos depois de prontos.

Para pensar e discutir

1. Você saberia quais medidas de comprimento devem ser conhecidas para calcular a medida da área da superfície externa de um cone ou o volume desse sólido? 1. Respostas no Manual do Professor.

Área da superfície do cone

Observe a fotografia da Catedral de Maringá, cuja forma lembra a de um cone. O diâmetro externo da base é de 50 metros, com 114 metros de altura.

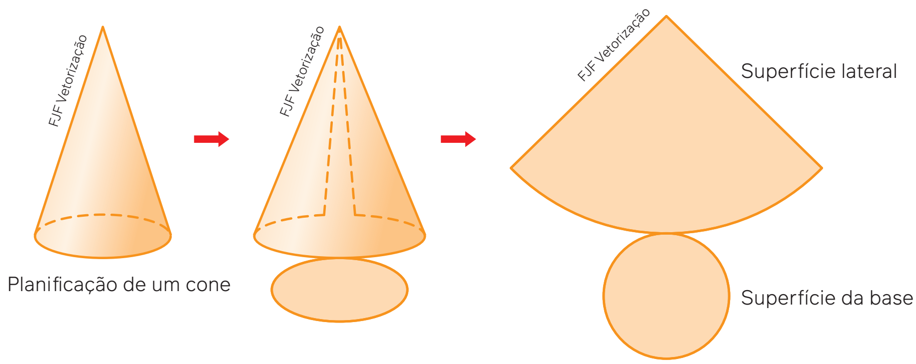
advjmneto/Shutterstock.com

Catedral de Maringá, no Paraná, setembro de 2019.

Para pensar e discutir

1. Se o exterior da parte da catedral que tem formato parecido com um cone precisar ser pintado, o que deve ser considerado para calcular o custo total desse trabalho? 1. A área total da superfície.
2. Como é possível avaliar a quantidade de tinta necessária para pintar a Catedral de Maringá? 2. Resposta pessoal.

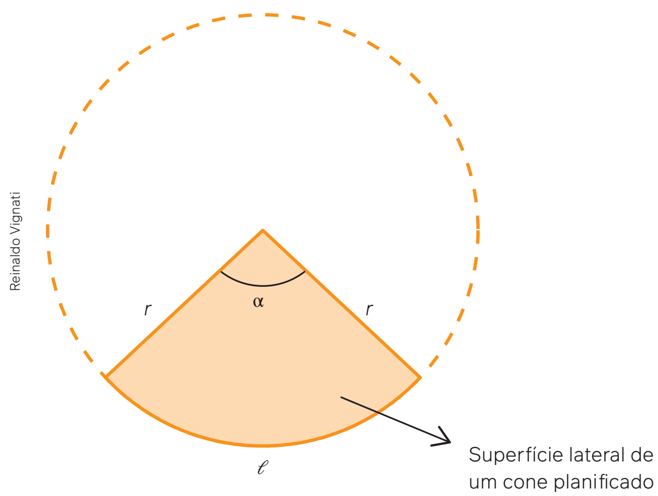
Um procedimento para obter a área total de um cone é a planificação desse sólido. Assim, vamos considerar a planificação de um cone circular reto, como representado a seguir.



Para o cálculo da área total do cone, é preciso determinar a área da superfície lateral e a área da superfície correspondente à base. Como a base do cone é um círculo, temos:

Área da base: $A_b = \pi r^2$, em que r é o raio da base.

Observe que a superfície lateral do cone corresponde a um setor circular, conforme ilustra a figura a seguir. A linha tracejada foi construída com base na superfície lateral da planificação anterior. Indicamos r para representar o raio do setor circular, ℓ para o comprimento do arco correspondente e α (em graus) para indicar o ângulo do setor.



Para pensar e discutir

1. Observando o setor circular destacado na figura acima, o que representa a medida r em relação ao cone? 1. A geratriz do cone.
2. O que representa a medida ℓ em relação ao cone? 2. O comprimento da circunferência da base.
3. Usando a medida do ângulo α, como podemos determinar a área do setor circular? 3. Resposta pessoal.

Em Geometria Plana, temos que o comprimento de um arco é proporcional à medida do ângulo central correspondente. Assim, podemos estabelecer a seguinte proporção relacionando o comprimento do arco com o ângulo central:

$$\frac{\ell}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360°} \qquad \text{(I)}$$

Por outro lado, a área do setor circular é proporcional à medida do ângulo central correspondente, isto é:

$$\frac{A_{\text{setor}}}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360°} \qquad \text{(II)}$$

Comparando as equações (I) e (II), temos:

$$\frac{A_{\text{setor}}}{\pi r^2} = \frac{\ell}{2\pi r}$$

$$A_{\text{setor}} = \pi r^2 \cdot \frac{\ell}{2\pi r} \Rightarrow A_{\text{setor}} = \frac{\ell \cdot r}{2} \qquad \text{(III)}$$

Com base nas considerações da página anterior sobre o setor circular, podemos concluir que a geratriz do cone (g) é igual ao raio do setor circular (r) e o comprimento da base do cone corresponde ao comprimento do arco do setor circular (ℓ), ou seja:

$$g = r \text{ e } 2\pi r = \ell$$

Substituindo essas relações em (III), obtemos a área da superfície lateral do cone:

$$A_{\text{setor}} = \frac{\ell \cdot r}{2}$$

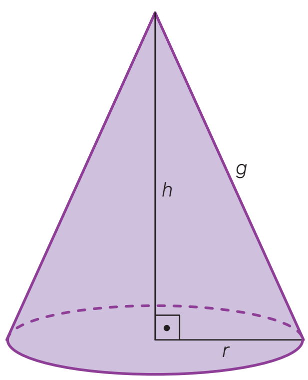
$$A_{\text{lateral}} = \frac{2\pi r \cdot g}{2} \Rightarrow A_{\text{lateral}} = \pi r g$$

A área total A_T de um cone circular reto com raio da base r, geratriz g e altura h é dada por:

$$\boldsymbol{A_T = \pi r g + \pi r^2} \text{ ou } \boldsymbol{A_T = \pi r(g + r)}$$

sendo: $A_{\text{lateral}} = \pi r g$ (área lateral) e $A_{\text{base}} = \pi r^2$ (área da base).

Assim, o cálculo da área da superfície total de um cone pode ser feito com base em duas medidas do cone: o raio da base e a geratriz. É claro que quando sabemos o diâmetro da base do cone, temos também a medida do raio; e quando sabemos a altura do cone e a medida do raio (ou da geratriz), podemos calcular a medida da geratriz (ou do raio) usando a relação métrica mostrada a seguir.



FJF Vetorização

$$\boldsymbol{g^2 = r^2 + h^2}$$

Atividades resolvidas

5. Vamos retomar uma questão sobre a Catedral de Maringá, cuja forma lembra a de um cone. O diâmetro externo da base é de 50 metros, com 114 metros de altura. Precisamos calcular a área de sua superfície para obter a quantidade de tinta necessária para pintá-la na sua parte externa.

advjmneto/Shutterstock.com

- Sabemos que $h = 114$ m e $2r = 50$ m. Calculando da geratriz, temos:

$$g^2 = r^2 + h^2$$
$$g^2 = 25^2 + 114^2$$
$$g^2 = 13\,621 \Rightarrow g \cong 117 \text{ m}$$

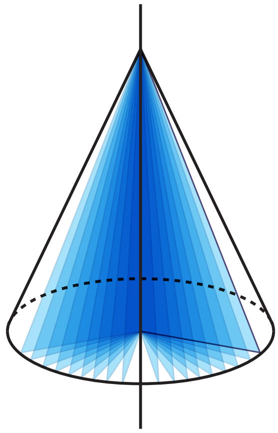
- Como será pintada apenas a superfície externa (superfície lateral), temos:

$$A_{\text{lateral}} = \pi r g$$
$$A_{\text{lateral}} \cong 3{,}14 \cdot 25 \cdot 117$$
$$A_{\text{lateral}} \cong 9\,185 \text{ m}^2$$

Ou seja, a superfície a ser pintada é, aproximadamente, 9 185 m^2.

Para determinar o custo da pintura externa da catedral é necessário saber o custo da mão de obra, o custo do metro quadrado de tinta, a quantidade de demãos aplicada, entre outros itens.

6. A figura representa um **cone de revolução**, obtido ao girar um triângulo retângulo de catetos que medem 5 cm e 8 cm, em torno do cateto maior. Obtenha a área total desse cone.



- Como o triângulo gira em torno do cateto maior, a altura do cone será 8 cm e o raio da base será igual a 5 cm. Assim, podemos obter a medida da geratriz:

$$g^2 = r^2 + h^2$$
$$g^2 = 5^2 + 8^2$$
$$g^2 = 25 + 64 \Rightarrow g \cong 9{,}43 \rightarrow 9{,}43 \text{ cm}$$

- Fazendo o cálculo da área total do cone, temos:

$$A_T = A_L + A_B$$
$$A_T = \pi rg + \pi r^2$$
$$A_T \cong 3{,}14 \cdot 5 \cdot 9{,}43 + 3{,}14 \cdot 5^2$$
$$A_T \cong 226{,}55 \rightarrow 226{,}55 \text{ cm}^2$$

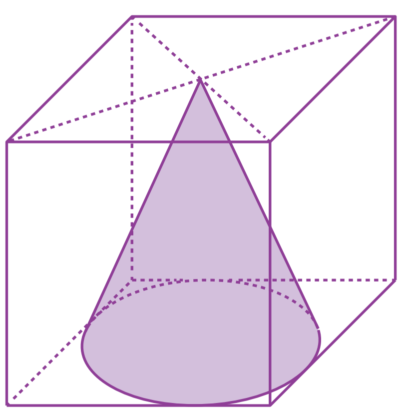
Portanto, a área total desse cone é de aproximadamente 226,55 cm^2.

Para pensar e discutir

1. Se o triângulo retângulo acima girar em torno do cateto menor, quais serão as medidas da altura e do raio da base do cone de revolução obtido? 1. Altura: 5 cm; raio: 8 cm.

2. A nova área total seria maior ou menor que a área total obtida na **atividade resolvida 6**? Justifique com ou sem cálculo. 2. Maior. Resposta pessoal.

7. Um cone tem sua base inscrita em uma face de um cubo de aresta medindo 20 cm, como indica a figura. Qual é a área da superfície total desse cone?



- A altura do cone mede 20 cm (aresta do cubo) e o raio da base do cone mede 10 cm. Cálculo da medida da geratriz:

$$g^2 = r^2 + h^2$$
$$g^2 = 10^2 + 20^2$$
$$g^2 = 500 \Rightarrow g \cong 22{,}36 \rightarrow 22{,}36 \text{ cm}$$

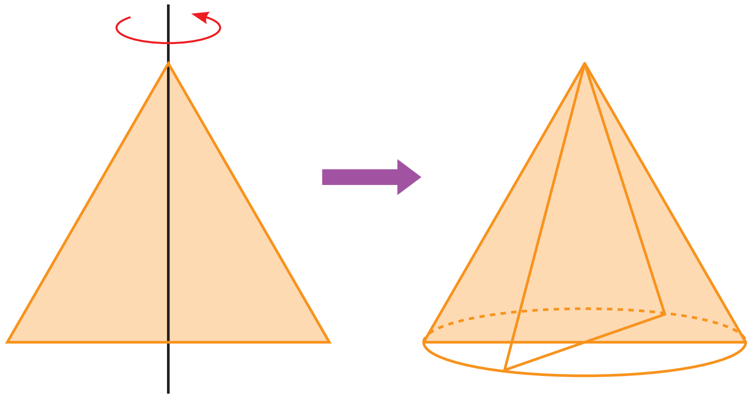
- O cálculo da área total do cone é dado por:

$$A_T = \pi rg + \pi r^2$$
$$A_T \cong 3{,}14 \cdot 10 \cdot 22{,}36 + 3{,}14 \cdot 10^2$$
$$A_T \cong 1\,016 \rightarrow 1\,016 \text{ cm}^2$$

Portanto, a área será aproximadamente de 1 016 cm^2.

Atividades

21. Observe a representação de um triângulo equilátero que, ao girar em torno de um eixo imaginário que passa por um vértice e pelo ponto médio do lado oposto a esse vértice, gera um cone de revolução. Como a secção meridiana desse cone é um triângulo equilátero, esse sólido é chamado de **cone equilátero**.



FJF Vetorização

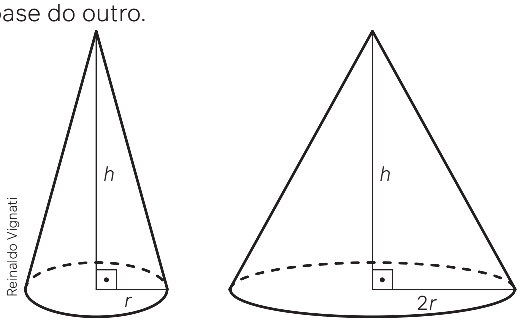
Junte-se a um colega para fazer o que se pede.

a) Escrevam uma expressão algébrica para calcular a área lateral do cone equilátero, apenas em função da medida ℓ do lado do triângulo. 21. a) $A_L = \frac{\pi \ell^2}{2}$

b) Escrevam uma expressão algébrica para calcular a área total do cone equilátero, apenas em função da medida ℓ do lado do triângulo. 21. b) $A_T = \frac{3\pi \ell^2}{4}$

c) Sendo $\ell = 10$ cm, qual é a área total desse cone de revolução? 21. c) 75π cm²

22. Observe a representação de dois cones de mesma altura e cuja medida do raio da base de um deles é igual ao dobro da medida do raio da base do outro.



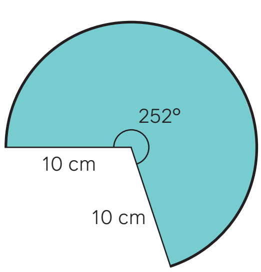
Reinaldo Vignati

Em relação a um cone qualquer, duplicando-se a medida do raio da base e mantendo-se a altura, o que ocorre com a medida da:

a) área da base do cone? 22. a) Quadruplica.

b) geratriz do cone? 22. b) Aumenta. Passa de $\sqrt{h^2 + r^2}$ para $\sqrt{h^2 + 4r^2}$.

23. Na figura a seguir está representada a planificação da superfície lateral de um cone circular reto.



FJF Vetorização

a) Determine, em centímetros, a medida do raio da base, a geratriz e a altura do cone. 23. a) $r = 7$ cm; $g = 10$ cm; $h = \sqrt{51}$ cm

b) Obtenha a área lateral do cone em centímetros quadrados. 23. b) 70π cm²

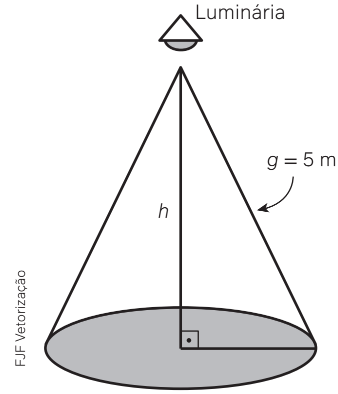
c) Calcule a área total do cone em centímetros quadrados. 23. c) 119π cm²

24. Vamos considerar que a superfície lateral de um cone circular reto seja um setor circular com ângulo central de 120° e medida do raio de 12 cm.

a) Qual é a altura do cone? 24. a) $8\sqrt{2}$ cm

b) Qual é a área da base do cone? 24. b) 16π cm^2

25. (Enem) Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura a que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.



Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de 28,26 m^2, considerando $\pi \cong 3{,}14$, a altura h será igual a 25. Alternativa **b**.

a) 3 m.

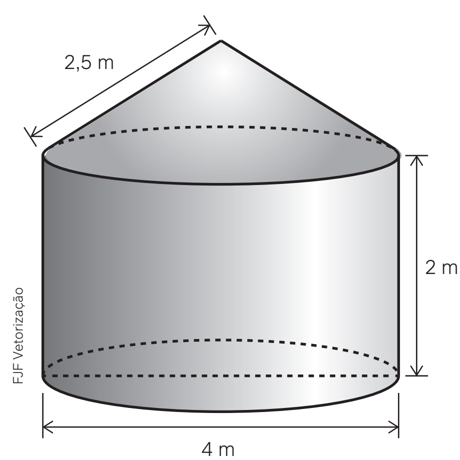
b) 4 m.

c) 5 m.

d) 9 m.

e) 16 m.

26. (UFPB) A prefeitura de certo município realizou um processo de licitação para a construção de 100 cisternas de placas de cimento para famílias da zona rural do município. Esse sistema de armazenamento de água é muito simples, de baixo custo e não poluente. A empreiteira vencedora estipulou o preço de 40 reais por m^2 construído, tomando por base a área externa da cisterna. O modelo de cisterna pedido no processo tem a forma de um cilindro com uma cobertura em forma de cone, conforme a figura.



Considerando que a construção da base das cisternas deve estar incluída nos custos, é correto afirmar que o valor, em reais, a ser gasto pela prefeitura na construção das 100 cisternas será, no máximo, de:
Use $\pi \cong 3{,}14$. 26. Alternativa **e**.

a) 100 960.

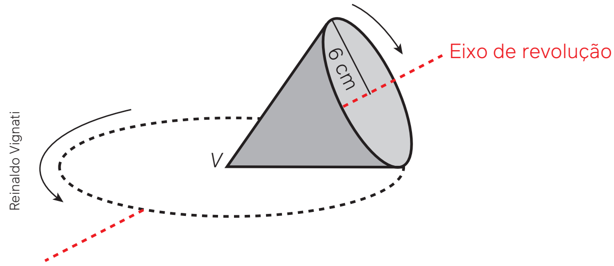
b) 125 600.

c) 140 880.

d) 202 888.

e) 213 520.

27. Junte-se a um colega para esta atividade. A ilustração a seguir representa um cone circular reto de vértice V e raio da base igual a 6 cm. Esse cone encontra-se apoiado em uma superfície plana e horizontal sobre uma geratriz. O cone, conforme indica a ilustração, gira em torno do seu eixo de revolução que passa por V, deslocando-se sobre a superfície plana horizontal, sem escorregar.

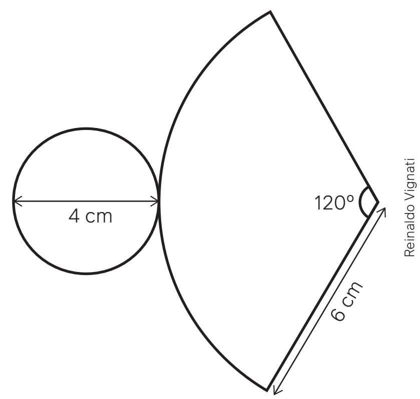


Imaginem que esse cone retorna à posição inicial após o círculo de sua base ter efetuado duas voltas completas de giro. Determinem:

a) a medida da geratriz do cone. 27. a) 12 cm

b) a área total do cone. 27. b) 108π cm²

28. Utilizando cartolina, os estudantes de um curso de Geometria tinham que construir, com base na planificação detalhada, um cone. Qual é a área total desse cone? 28. 16π cm².



29. (UPE) Ao se planificar um cone reto, sua superfície lateral é igual a um quarto de um círculo com área igual a 12π. Nessas condições, a área de sua base é igual a 29. Alternativa **c**.

a) π **b)** 2π **c)** 3π **d)** 4π **e)** 5π

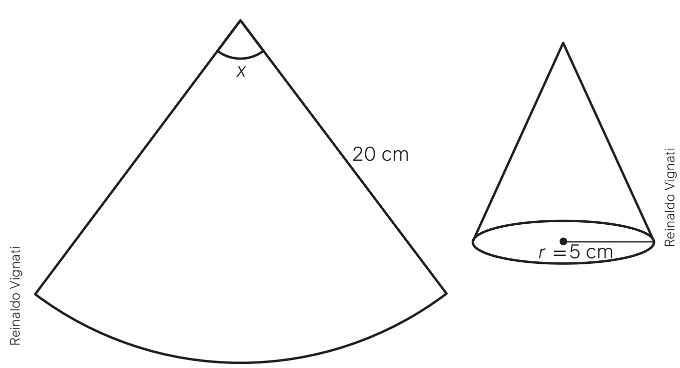
30. (UEFS-BA) Se um cone circular reto tem altura igual a 4 cm e base circunscrita a um hexágono regular de lado medindo 2 cm, então a sua área lateral, em cm², mede, aproximadamente, 30. Alternativa **b**.

a) $4\pi\sqrt{6}$ **b)** $4\pi\sqrt{5}$ **c)** 4π **d)** $\pi\sqrt{3}$ **e)** $\pi\sqrt{2}$

31. (ITA-SP) A superfície lateral de um cone circular reto corresponde a um setor circular de 216°, quando planificada. Se a geratriz do cone mede 10 cm, então a medida de sua altura, em cm, é igual a 31. Alternativa **d**.

a) 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8 **e)** 9

32. (UEL-PR) Uma chapa com forma de um setor de raio 20 cm e o ângulo x graus é manuseada para se transformar num cone.



Se o raio da base do cone obtido é $r = 5$ cm, então o valor de x é: 32. Alternativa **e**.

a) 60° **b)** 75° **c)** 80° **d)** 85° **e)** 90°

Volume do cone

Que tal você utilizar copos que quando descartados reduzem significativamente a poluição do meio ambiente?

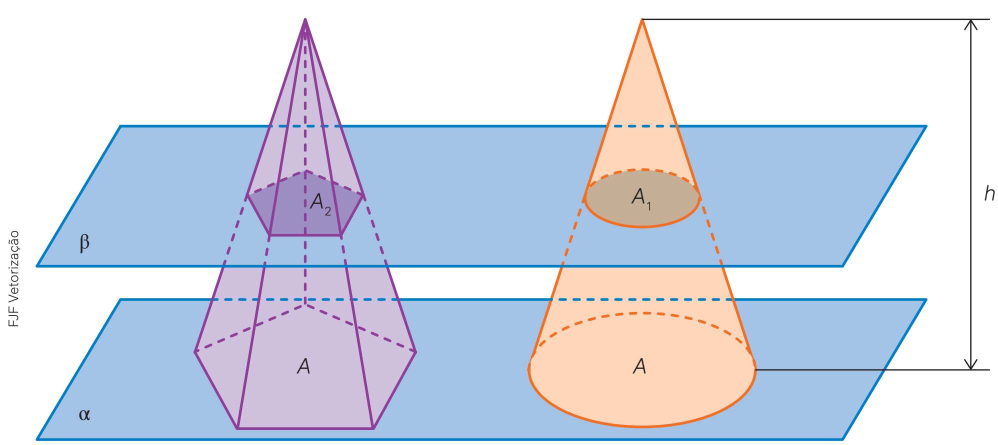
É provável que você esteja se perguntando o que a preservação do meio ambiente tem a ver com o estudo da Geometria. O cálculo de comprimentos, áreas e volumes é utilizado na fabricação de recipientes que, muitas vezes, são descartados inadequadamente e acabam poluindo rios.

Algumas empresas têm investido na fabricação de copos de papel, em vez de usar plástico como matéria-prima. O papel é mais facilmente absorvido pela natureza, quando descartado de forma correta, ao contrário de outros materiais, cujo tempo de decomposição no meio ambiente pode se estender por muitos anos.

Pensando na produção de uma embalagem semelhante à da imagem desta página, é necessário avaliar o custo e uma série de outros fatores, como o tipo de papel, que também vem da natureza. Em relação ao formato, se uma embalagem for usada para substituir outras, é preciso prestar atenção a medidas, como a da capacidade, para preservar as características da embalagem tradicional, como no exemplo do copo de papel. O copo da imagem tem o formato de cone. Quais medidas são necessárias para determinar o volume dele?

O cálculo do volume de um cone pode ser pensado com base no **princípio de Cavalieri**.

Considere uma pirâmide e um cone de mesma altura, cujas bases de áreas iguais estão contidas no plano α, como mostra a figura a seguir. O plano β, paralelo a α, determina, na pirâmide e no cone, as seções de áreas iguais. Assim, pelo princípio de Cavalieri, temos:



$A_1 = A_2$

$V_{cone} = V_{pirâmide}$

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$

$\downarrow A = \pi r^2$

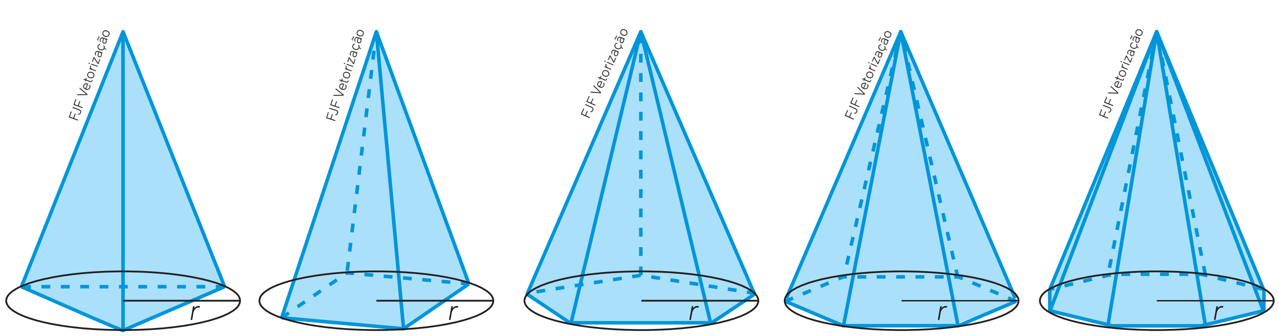
$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$

O volume V de um cone circular de altura h e raio da base r é obtido pela relação

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h}$$

Veja outra forma de obter, intuitivamente, o volume de um cone.

Observe, da esquerda para a direita, as pirâmides regulares representadas. Considere que todas elas têm a mesma altura e suas bases estão inscritas em uma circunferência de raio r.



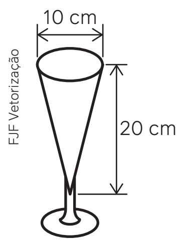
Para pensar e discutir

Ao analisar as pirâmides da esquerda para a direita (ou as que você construir usando um *software* de geometria dinâmica) e considerar que outras possam ainda ser construídas na sequência, o que ocorre com:

1. o número de lados dos polígonos das bases das pirâmides? 1. Aumentam.
2. as medidas dos lados das bases? 2. Diminuem.
3. as medidas das arestas laterais em comparação com as medidas dos apótemas em cada pirâmide? 3. Ficam mais próximas.
4. as medidas dos apótemas das bases (lembre-se de que o apótema da pirâmide regular liga o vértice da pirâmide com o ponto médio do lado do polígono da base) em comparação com a medida do raio da circunferência circunscrita a cada base? 4. Ficam mais próximas.

Atividades resolvidas

8. A figura representa uma taça com a forma aproximada de um cone circular reto na parte interna. Ela é utilizada em lanchonetes para servir vitaminas. Qual é a capacidade desse recipiente em mililitros?



- Vamos calcular o volume da taça.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

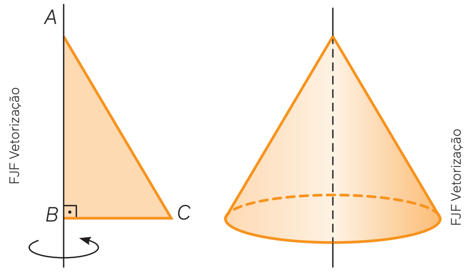
$$V \cong \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 5^2 \cdot 20$$

$$V \cong 523 \text{ cm}^3$$

Lembrando que 1 cm^3 corresponde a 1 mL, temos que a taça tem 523 mL de capacidade.

O termo "volume", em Geometria, indica a medida do espaço ocupado por um objeto. A "capacidade" desse objeto se refere ao quanto cabe em seu interior (mais usado para líquidos). Assim, dizemos, por exemplo, que dentro de um cubo que ocupa 1 dm^3 de espaço (volume) cabe 1 L de água.

9. Considere que uma superfície rígida em forma de triângulo retângulo possa ser girada rapidamente em torno de um de seus catetos, como indica a ilustração a seguir. A figura da direita representa um cone de revolução. Determine o volume desse cone, em centímetros cúbicos, considerando que o triângulo retângulo tem as medidas: $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm e $AC = 5$ cm.



- Observe que $BC = 3$ cm representa a medida do raio da base do cone e $AB = 4$ cm representa a medida da altura do cone. Logo:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 \Rightarrow V = 12\pi$$

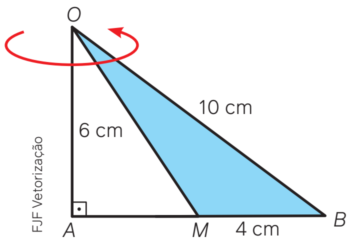
Portanto, o volume do cone é 12π cm^3.

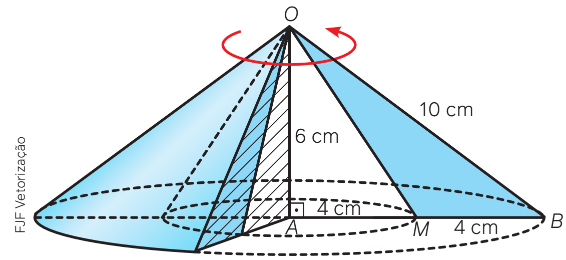
Para pensar e discutir

1. Se o triângulo retângulo girasse em torno do cateto menor, alteraria o volume do cone obtido? Explique. 1. Sim. Resposta pessoal.
2. Considere que o triângulo retângulo seja girado em torno de sua hipotenusa. Qual sólido geométrico se obtém? Faça um desenho para representá-lo. 2. Dois cones de mesma base.

Atividades

33. Na ilustração a seguir, o triângulo *OBM* gira em torno do segmento *OA*, que mede 6 cm.



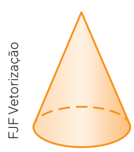


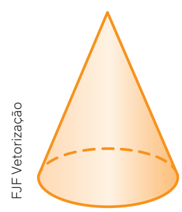
Junte-se a um colega para fazer o que se pede.

a) Descrevam o sólido geométrico gerado pela rotação descrita. 33. a) Resposta pessoal.

b) Calculem o volume do sólido gerado. Justifiquem os cálculos. 33. b) 96π cm³; resposta pessoal

34. Os dois cones apresentados a seguir são semelhantes e a razão de semelhança é 2,5, isto é, se o raio da base do cone menor é *x*, o raio da base do cone maior é igual a 2,5*x*, por exemplo. Isso ocorre também com as geratrizes, com as alturas e com as medidas de comprimento.

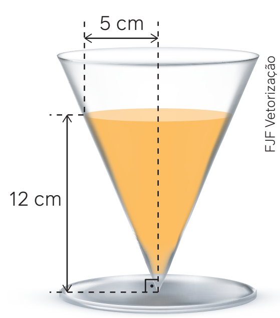




34. $\frac{1}{3}\pi x^2 h$ e $2{,}5^3 \cdot \frac{1}{3}\pi x^2 h$; razão: $2{,}5^3$

Expresse, em função de *x* (medida do raio da base do cone menor) e de *h* (medida da altura do cone menor), os volumes dos dois cones. Qual é a razão entre o volume do cone maior e do cone menor, nessa ordem?

35. Observe, na ilustração, uma taça em forma de cone circular reto. A parte em laranja representa o líquido colocado dentro dela. 35. Respostas pessoais.



Com base nesses dados, faça o que se pede.

a) Elabore um problema relacionado à figura.

b) Resolva esse problema.

c) Peça a um colega que resolva o problema que você criou, sem que ele veja sua solução.

d) Confronte os resultados que vocês obtiveram. Em caso de discrepância, troquem ideias para ajustar a resposta ou o enunciado do problema elaborado.

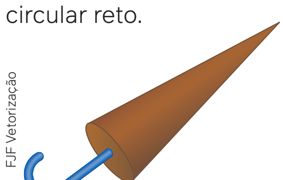
36. Na figura a seguir, está representada uma casquinha de sorvete cujo formato lembra o de um cone circular reto. A altura do cone representado é aproximadamente 10 cm e a medida do raio da base é aproximadamente 2,5 cm.

Anatoly Vartanov/ Shutterstock.com

a) Determine a medida aproximada da superfície externa da casquinha desconsiderando possíveis sobreposições. 36. a) Aproximadamente 81 cm².

b) Qual é a capacidade dessa casquinha, em mililitros? 36. b) Aproximadamente 65,4 mL.

37. A ilustração a seguir é de um doce feito com chocolate líquido, que depois de resfriado, tem a forma de cone circular reto.



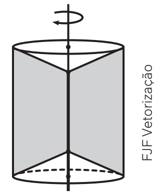
37. a) Aproximadamente 53.

Considerando que as medidas internas da forma utilizada para fabricar esse doce são 8 cm de altura e 3 cm de diâmetro de base circular, determine:

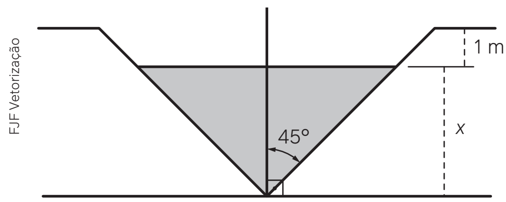
a) Quantos doces, aproximadamente, podem ser feitos com 1 litro de chocolate?

b) Qual é a quantidade de chocolate, em litros, necessária para fazer 100 000 desses doces? 37. b) 1 900 litros

38. Considere que determinada peça maciça de ferro tenha o formato de um sólido de revolução obtido pela rotação de um trapézio isósceles em torno da base menor, como representado a seguir.
Se as bases do trapézio medem 15 cm e 7 cm e a distância entre essas duas bases é igual a 3 cm, qual será o volume dessa peça? Forneça essa resposta em função do π. 38. 111π cm^3



39. (Uerj) Um depósito de óleo tem a forma de um cone circular reto cujo eixo vertical forma com suas geratrizes o ângulo de 45°. Foram retirados desse depósito 19 m^3 de óleo. Com isso, a altura do nível de óleo foi reduzida em 1 m e passou a ter x metros de altura.



Considerando $\pi \cong 3$, calcule a altura x do nível de óleo. 39. $x = 2$ m

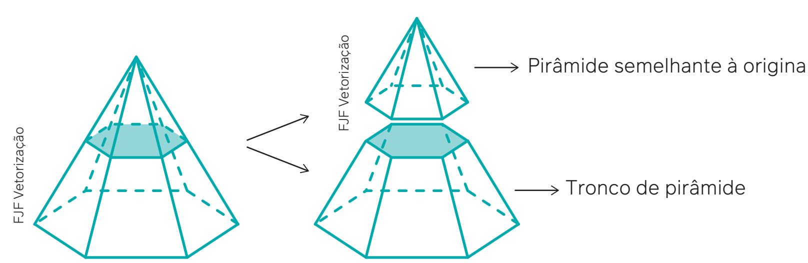
40. (Mack-SP) Em um triângulo retângulo, a medida do menor cateto é 6 cm. Rotacionando esse triângulo ao redor desse cateto, obtém-se um sólido de revolução, cujo volume é 128π cm^3. Nessas condições, a área total da superfície do sólido obtido na revolução, em cm^2, é 40. Alternativa **a**.

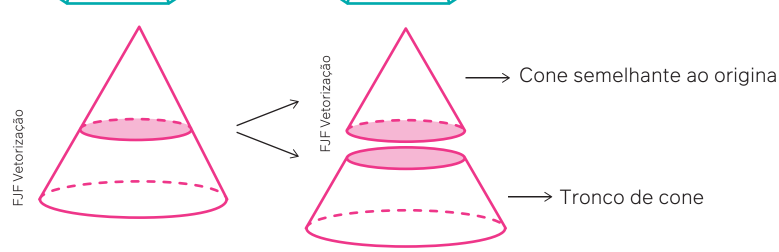
a) 144π. **b)** 120π. **c)** 80π. **d)** 72π. **e)** 64π.

Tronco de pirâmide e tronco de cone

Vamos ampliar um pouco as ideias relacionadas à semelhança. Vamos nos concentrar aqui apenas na semelhança entre pirâmides e entre cones para abordar os temas **tronco de pirâmide** e **tronco de cone**.

Quando seccionamos uma pirâmide ou um cone por um plano paralelo ao plano da base, obtemos dois sólidos: um que é **semelhante** ao original e outro denominado **tronco de pirâmide** ou **tronco de cone**, conforme ilustrados a seguir.



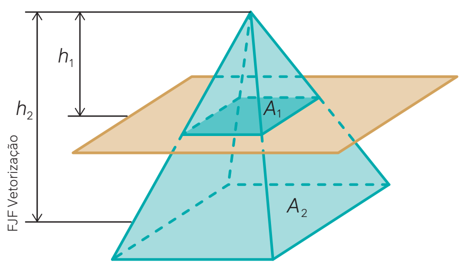


Sugerimos usar um *software* de geometria dinâmica para traçar planos paralelos às bases de cones e pirâmides e obter cones semelhantes, troncos de cone, pirâmides semelhantes e troncos de pirâmide, como acima. Com essas construções você pode observar melhor as relações, principalmente considerando medidas, como abordaremos a seguir.

Vamos estudar o cálculo envolvendo áreas e volumes de sólidos semelhantes e troncos correspondentes. Os sólidos semelhantes contêm a ideia de ampliação e de redução, em que a figura geométrica é a mesma e as medidas de comprimento são proporcionais.

Dados dois sólidos, vamos considerar que a razão entre as alturas (poderia ser razão entre quaisquer duas medidas de comprimento correspondentes desses sólidos) é igual a uma constante *k*.

Observe a seguir o valor da razão de semelhança (*k*), de acordo com as medidas dos sólidos semelhantes.



Razão entre medidas de comprimento correspondentes:

- razão entre medidas das alturas, razão entre medidas das arestas laterais, razão entre perímetros etc.

$$\frac{h_1}{h_2} = k \rightarrow \text{ razão de semelhança}$$

Razão entre medidas de superfície correspondentes:

- razão entre áreas laterais, razão entre áreas totais, razão entre áreas das bases.

$$\frac{A_1}{A_2} = k^2$$

A razão entre as áreas correspondentes de dois sólidos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.

Razão entre medidas de volume correspondentes:

- utilizando o exemplo de uma pirâmide ou de um cone, sabemos que o cálculo do volume é um terço da área da base multiplicada pela altura.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot A_{b_1} \cdot h_1}{\frac{1}{3} \cdot A_{b_2} \cdot h_2}$$

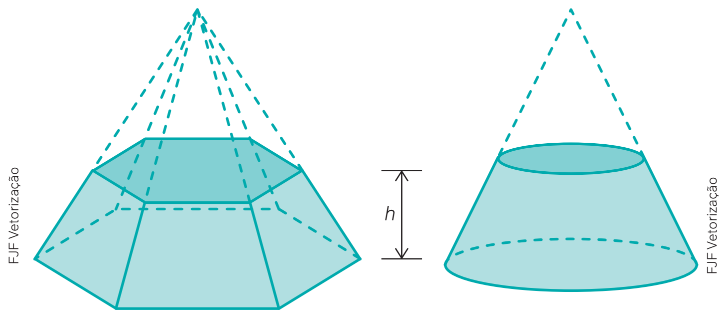
$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{A_{b_1}}{A_{b_2}}\right) \cdot \left(\frac{h_1}{h_2}\right)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = k^2 \cdot k$$

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3$$

A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança entre eles.

Nas figuras a seguir estão destacados os troncos de pirâmide e de cone. Existem situações em que precisamos calcular não apenas os volumes desses sólidos mas também suas áreas.



Existem fórmulas para calcular a área da superfície lateral, a área da superfície total, o volume de um tronco de pirâmide e o de um tronco de cone. Entretanto, pelo que vimos até aqui, elas são desnecessárias, pois podemos pensar no tronco de cone obtido de um cone seccionado por um plano paralelo à base. Da mesma forma, podemos pensar no tronco de pirâmide obtido de uma pirâmide seccionada por um plano paralelo à base.

Para pensar e discutir

1. Como obter o volume do tronco de pirâmide ou do tronco de cone? 1. Resposta no Manual do Professor.

2. E como obter a área lateral de um tronco de pirâmide ou de um tronco de cone? 2. Resposta no Manual do Professor.

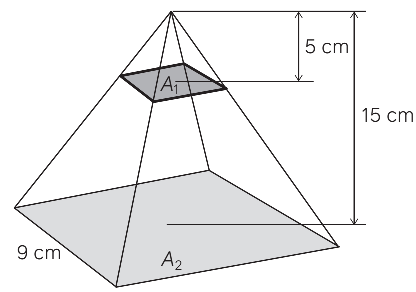
Utilizaremos a razão de semelhança (entre medidas lineares) entre duas pirâmides semelhantes ou entre dois cones semelhantes para o cálculo de áreas e o cálculo de volumes. Nas atividades a seguir, evidenciamos esses procedimentos.

Para o cálculo de áreas e de volumes de troncos de pirâmides ou de cones, utilizamos a diferença entre as áreas ou entre os volumes dos sólidos originais e os respectivos sólidos semelhantes.

Atividades resolvidas

10. Uma pirâmide quadrangular regular de aresta da base medindo 9 cm e altura 15 cm é seccionada por um plano paralelo à sua base, formando uma nova base cuja área é 9 cm². Se a distância dessa base ao vértice da pirâmide é 5 cm, calcule o volume do tronco de cone.

- Na figura a seguir destacamos, conforme enunciado, as medidas conhecidas.



Reinaldo Vignati

- Calculamos os volumes das duas pirâmides esboçadas acima:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 5 \Rightarrow V_1 = 15$$

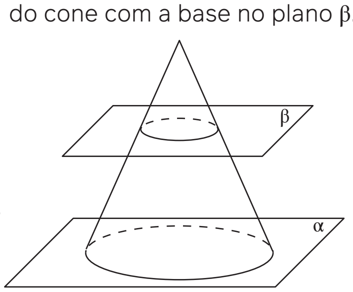
$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot 9^2 \cdot 15 \Rightarrow V_2 = 405$$

- O volume do tronco de pirâmide é a diferença entre os volumes das duas pirâmides:

$$V_{tronco} = V_2 - V_1$$
$$V_{tronco} = 405 - 15$$
$$V_{tronco} = 390$$

Portanto, o volume do tronco de pirâmide é 390 cm³.

11. Um cone circular reto, conforme figura, de altura 8 cm e raio da base 4 cm foi seccionado por um plano β paralelo ao plano α que contém a base. Considerando que a distância entre esses dois planos é de 6 cm, calcule o volume do cone com a base no plano β.



Reinaldo Vignati

- Cálculo da razão de semelhança k entre as medidas lineares (indicamos o maior pelo índice 1 e o menor pelo índice 2), no caso utilizamos as alturas:

$$k = \frac{h_1}{h_2}$$

$$k = \frac{8}{8-6} \rightarrow k = 4$$

- Cálculo do volume do cone maior:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h_1$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot 4^2) \cdot 8 \Rightarrow V_1 = \frac{128\pi}{3}\text{cm}^3$$

- Cálculo do volume do cone menor:

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3 \qquad \frac{128\pi}{3} = 4^3 \cdot V_2$$

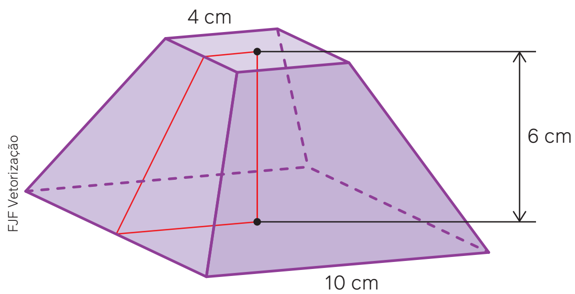
$$V_1 = k^3 \cdot V_2 \qquad \frac{128\pi}{3 \cdot 64} = V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{2\pi}{3}\text{cm}^3$$

Portanto, o volume do cone menor é $\frac{2\pi}{3}$cm³.

Atividades

41. Em uma pirâmide de altura H obteve-se o tronco de pirâmide de altura 6 cm e uma pirâmide semelhante à primeira de altura h. Veja a seguir a representação apenas do tronco de pirâmide.

Junte-se a um colega para fazer o que se pede.

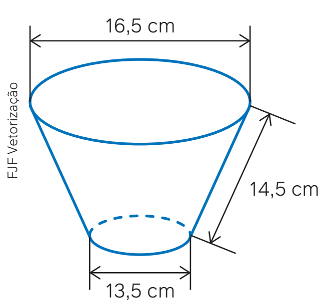


a) Obtenham, por semelhança e proporção, as medidas de H e h. 41. a) $H = 10$ cm e $h = 4$ cm

b) Calculem o volume aproximado das pirâmides de altura H e de altura h. 41. b) 333 cm^3 e 21 cm^3

c) Calculem o volume do tronco de pirâmide. 41. c) 312 cm^3

42. Na ilustração a seguir estão representadas as medidas de uma vasilha em forma de tronco de cone.



a) Determine a altura do tronco de cone que representa a vasilha. 42. a) Aproximadamente 14,4 cm.

b) Considere que esse tronco de cone foi obtido a partir de um cone de altura H seccionado por um plano paralelo à base de diâmetro 16,5 cm. Determine a altura h desse cone. 42. b) Aproximadamente 79,2 cm.

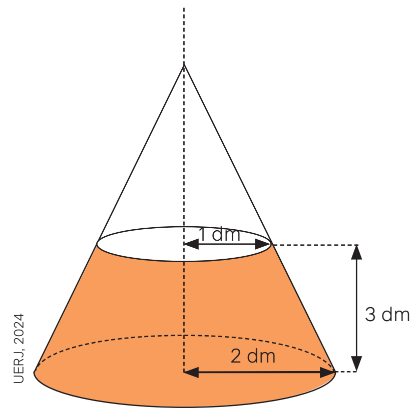
c) Obtenha o volume do cone de altura H. 42. c) 5 642 $cm.^3$

d) Obtenha o volume do tronco de cone e informe quantos mililitros de água cabem nesse copo, desconsiderando as espessuras do copo. 42. d) 2 552 mL

43. (ESPM-SP) Uma indústria de bebidas criou um brinde para seus clientes com a forma exata da garrafa de um de seus produtos, mas com medidas reduzidas a 20% das originais. Se em cada garrafinha brinde cabem 7 mL de bebida, podemos concluir que a capacidade da garrafa original é de: 43. Alternativa **a**.

a) 875 mL
b) 938 mL
c) 742 mL
d) 693 mL
e) 567 mL

44. (Uerj) No tronco de cone circular reto de bases paralelas ilustrado a seguir, o raio da base menor, o raio da base maior e a altura do tronco medem, respectivamente, 1 dm, 2 dm e 3 cm.



Calcule o volume total do tronco, admitindo que $\pi = \frac{22}{7}$. 44. 22 dm^3

45. (FGV-SP) Certo fabricante de refrigerantes tem duas versões de seu produto. As embalagens das duas versões são figuras geometricamente semelhantes, sendo que a maior tem altura igual ao triplo da altura da menor. O volume da embalagem maior é N vezes o volume da embalagem menor. O valor de N é: 45. Alternativa **a**.

a) 27
b) 18
c) 9
d) 12
e) 3

46. (Acafe-SC) Uma peça de madeira tem a forma de uma pirâmide hexagonal regular com 21 cm de altura. Essa peça é seccionada por um plano paralelo à base, de forma que o volume da pirâmide obtida seja 8/27 do volume da pirâmide original. A distância (em cm) da base da pirâmide até essa secção é um número: 46. Alternativa **b**.

a) fracionário.
b) primo.
c) múltiplo de 3.
d) quadrado perfeito.

47. (Uece) Um cone circular reto, cuja medida do raio da base é R, é cortado por um plano paralelo a sua base, resultando dois sólidos de volumes iguais. Um destes sólidos é um cone circular reto, cuja medida do raio da base é r. A relação existente entre R e r é 47. Alternativa **c**.

a) $R^3 = 3r^3$
b) $R^2 = 2r^2$
c) $R^3 = 2r^3$
d) $R^2 = 3r^2$

ARTE, GEOMETRIA E CONSTRUÇÕES

Um exemplo do uso da Matemática na arte é a obra *Melancolia I*, do artista Albrecht Dürer. Nela, podemos observar elementos matemáticos que remetem aos sólidos geométricos, aos números e às medidas.

Albrecht Dürer. *Melancolia I*, 1514. Gravura em cobre, 25 cm × 18,8 cm.

Arte e Matemática

A criatividade e a beleza são algumas das qualidades que buscamos na leitura de uma obra de arte. Também na Matemática isso se faz presente. Podemos dizer que a Matemática é a busca de padrões e relações. Essa mesma busca está na construção de uma obra de arte. Veja o que disse o matemático inglês Godfrey Harold Hardy (1877-1947) a respeito disso:

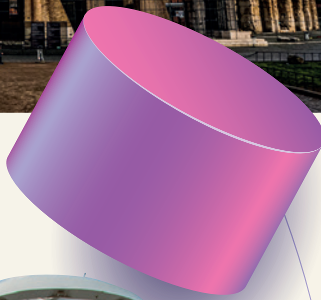
> **“O matemático, tal como o pintor ou poeta, é um criador de padrões. Um pintor faz padrões com formas e cores, um poeta com palavras e o matemático com ideias. Todos os padrões devem ser belos. As ideias, tal como as cores, as palavras ou os sons, devem ajustar-se de forma perfeita e harmoniosa.”**

HARDY, G. H.; WRIGHT, E. M. *An introduction to the theory of numbers*. 5th. ed. Oxford: Clarendon-Press, 1992.

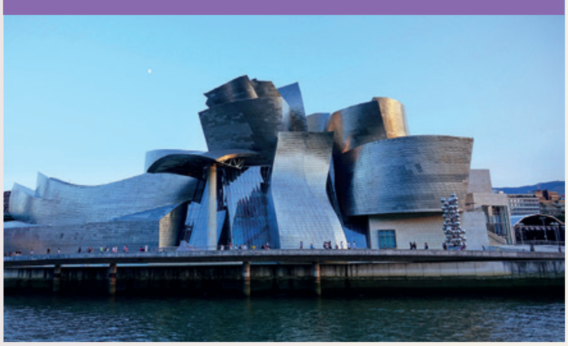
As figuras geométricas estão presentes em tudo. Veja, como exemplo, algumas construções arquitetônicas espalhadas pelo mundo.

Museu Oscar Niemeyer – Curitiba – Brasil

Coliseu – Roma – Itália



Montagem do infográfico: Fabio Nienow



Museu Guggenheim – Bilbao – Espanha

Museu do Amanhã – Rio de Janeiro – Brasil

Museu de Arte de São Paulo (Masp) – Brasil

Pátio do Colégio – São Paulo – Brasil

Junte-se a mais três colegas para fazer esta atividade. Infográfico - Respostas no Manual do Professor.

1. Elaborem um texto sobre as concepções geométricas que podem ser observadas no museu Guggenheim.
2. Pesquisem em *sites* de busca construções diversas que, de alguma maneira, estejam relacionadas a figuras geométricas. Montem um arquivo com imagens dessas construções.
3. Elaborem uma apresentação para a turma sobre a época dessas construções, a localização e a relação com as figuras geométricas de cada uma das imagens pesquisadas.

3 Esfera

Você já sabe que muitos objetos encontrados no dia a dia têm a forma "parecida" com a de alguns sólidos geométricos. As imperfeições observadas na forma desses objetos é o que nos leva a dizer se ela é "parecida" ou igual à de um sólido. Quantas vezes, por exemplo, você já ouviu falar que o planeta Terra tem a forma semelhante à de uma esfera?

Terra.

Esfera.

Uma esfera é uma idealização, isto é, não há um objeto real cuja forma seja exatamente esférica. Nosso planeta, por exemplo, é achatado nos polos. Por isso, quando efetuamos cálculos para obter medidas em relação a figuras geométricas espaciais – como medidas de comprimento, de superfície e, também, de volume –, consideramos que essas ilustrações representam figuras geométricas ideais. Assim, quando aplicados a objetos reais, os resultados obtidos para essas medidas não são exatos, mas aproximados.

Volume da esfera

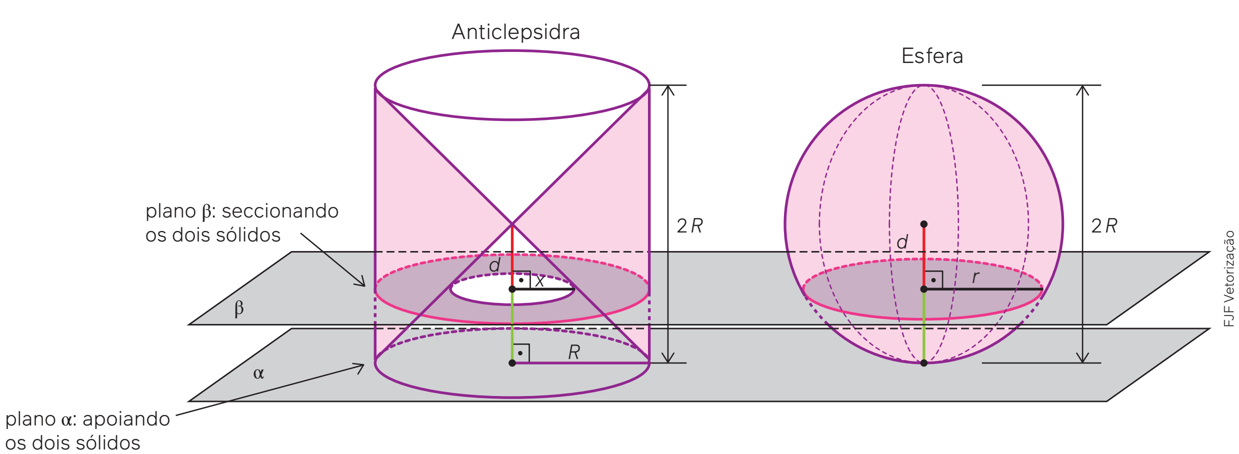
Em nosso estudo sobre sólidos geométricos, inicialmente calculamos as medidas de superfície (áreas) para só depois obter as medidas de volume. Com a esfera, vamos inverter esse percurso: começaremos pelo cálculo do volume.

A relação matemática para calcular o volume de uma esfera pode ser obtida com base no princípio de Cavalieri. Nesse caso, o sólido geométrico a ser utilizado em comparação com a esfera, em geral, é pouco conhecido. Trata-se do sólido denominado **anticlepsidra**, um cilindro equilátero do qual foram retirados dois cones cuja altura é igual ao diâmetro da esfera.

A seguir, apresentamos as etapas para a obtenção do volume da esfera.

Etapa 1

O plano β é traçado paralelamente ao plano α, sobre o qual estão apoiados os dois sólidos, a uma distância d do centro dos dois sólidos, determinando as seções destacadas na figura a seguir.



Para pensar e discutir

1. Qual é a relação métrica entre r, d e R na esfera? Explique. 1. $R^2 = r^2 + d^2$; resposta pessoal
2. Qual é a área da secção determinada na esfera em função de d e R? 2. $A = \pi(R^2 - d^2)$
3. Qual é a relação métrica entre d e x na anticlepsidra? Justifique. 3. $x = d$; resposta pessoal.
4. A secção que o plano β determina na esfera é um círculo. Qual é a denominação dada à secção que esse mesmo plano determina na anticlepsidra? Qual é a sua área? 4. Coroa circular; $A = \pi(R^2 - d^2)$.

Ao responder às questões de **Para Pensar e discutir**, você deve ter constatado que o plano β determinou, nos sólidos, duas secções de áreas iguais. Isso ocorre também para outros planos paralelos que seccionam os dois sólidos? Para responder a essa pergunta, passemos à **Etapa 2** em uma atividade de exploração.

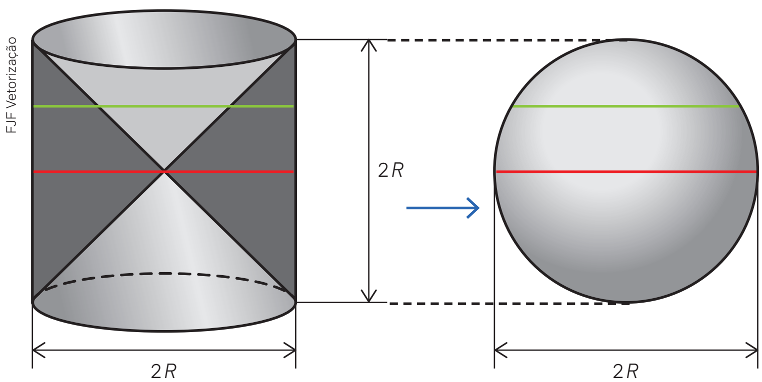
Para explorar

Junte-se a dois colegas para estas atividades.

Etapa 2

Vocês irão examinar esta etapa, necessária para a compreensão de como podemos obter a fórmula para o cálculo do volume de uma esfera, e, depois, responder às perguntas propostas.

- Considerem o plano β ocupando outras duas posições indicadas pelas linhas vermelha e verde de acordo com as figuras.



1. Considerem que a linha vermelha (representando o plano β) passa pelo centro dos dois sólidos. Quais são as áreas que esse plano determina nas secções dos dois sólidos? 1. Resposta no Manual do Professor.
2. O plano β (representado pela linha verde) determina, nos dois sólidos, secções de áreas iguais? Justifiquem. 2. Resposta no Manual do Professor.
3. Como vocês calculariam o volume do sólido correspondente à anticlepsidra? Expliquem oralmente. 3. Resposta no Manual do Professor.

Embora, nas duas etapas mencionadas anteriormente, o plano β tenha ocupado algumas posições específicas, em qualquer que seja a posição ocupada por ele, paralelamente ao plano α, serão determinadas secções de áreas iguais na anticlepsidra e na esfera. Assim, pelo princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm o mesmo volume.

$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{anticlepsidra}}$$
$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{cilindro}} - 2 \cdot V_{\text{cone}}$$
$$V_{\text{esfera}} = \pi R^2 \cdot (2R) - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R$$
$$V_{\text{esfera}} = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3}$$
$$V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

O volume V de uma esfera de raio R é dado por:

$$\boldsymbol{V = \frac{4\pi R^3}{3}}$$

Análise e contexto

O objeto mais esférico do Universo

A respeito das formas geométricas parecidas com a de uma esfera, o pequeno texto a seguir contém uma curiosidade recente envolvendo astros do Universo. Leia atentamente!

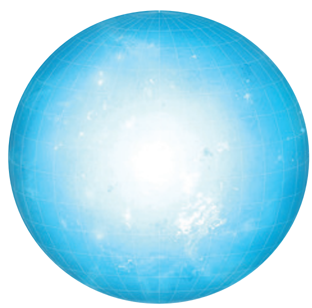
O mais esférico do Universo

Em 2016 foi divulgado o resultado de uma pesquisa sobre a existência de um objeto que seria o "mais esférico já encontrado no Universo". O texto afirmava, entre outras coisas, que, no Universo, os planetas não são perfeitamente esféricos, pois as forças centrífugas às quais são submetidos fazem com que sejam achatados nos polos. Entretanto, a 5 000 anos-luz da Terra está aquele que seria o objeto mais esférico já estudado: Kepler 11145123 (ou KIC 11145123).

Para Laurent Gizon, astrônomo do Instituto Max Planck para o Sistema Solar, na Alemanha, Kepler é "o objeto mais esférico que já medimos". Observe nas ilustrações, fora de escala, as indicações de deformação na Linha do Equador em relação à linha dos polos em Kepler, no Sol e na Terra.

Representação simplificada em cores-fantasia e dimensões dos elementos sem escala.

KIC 11145123

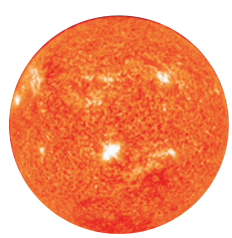


Mark Garlick/Science Photo Librarary/Fotoarena

KIC 11145123 tem raio **3 km** maior na medida da Linha do Equador do que nos polos.

Vídeo
Esfera quase perfeita

Sol



Nasa/sdo/Imsal/ Science Photo Library/Fotoarena

O Sol tem raio **10 km** maior na medida da Linha do Equador do que nos polos.

Terra

NASA Photo/ Alamy/Fotoarena

A Terra tem raio **21 km** maior na medida da Linha do Equador do que nos polos.

A diferença de 3 km é muito pequena quando falamos de estrelas e planetas.

Outra comparação que mostra que talvez estejamos, de fato, diante "do objeto mais esférico" já encontrado é que, enquanto a estrela KIC 11145123 tem raio aproximado de 1 500 000 km, o Sol tem raio aproximado de 700 000 km.

Fonte: O MISTÉRIO do objeto mais esférico já encontrado no Universo. *BBC News Brasil*, São Paulo, 18 nov. 2016. BBC Mundo. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/internacional-38024514. Acesso em: 8 ago. 2024.

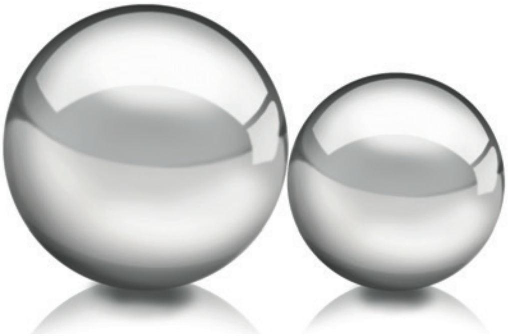
1. Como podemos determinar o número de vezes que o planeta Terra "cabe" no Sol? 1. Resposta pessoal.

2. E quantas vezes o KIC 11145123 é maior do que o Sol? 2. Aproximadamente o dobro.

Analise cada atividade resolvida a seguir, todas relacionadas ao cálculo do volume de uma esfera conhecendo-se a medida de seu raio.

Atividades resolvidas

12. Na ilustração estão representadas duas esferas de chumbo: uma com diâmetro de 8 cm e, outra, com diâmetro 6 cm. Considere que as duas serão fundidas para formar uma terceira esfera. Obtenha o raio da nova esfera.



Reinaldo Vignati

Reinaldo Vignati

- Como as duas serão fundidas para formar outra esfera, adicionando os volumes (V_1 e V_2) obtemos o volume da nova esfera (V_E):

$$V_E = V_1 + V_2$$
$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(r_1)^3 + \frac{4}{3}\pi(r_2)^3$$
$$r^3 = (r_1)^3 + (r_2)^3$$
$$r^3 = 4^3 + 3^3$$
$$r^3 = 91$$
$$r = \sqrt[3]{91} \Rightarrow r \cong 4{,}5$$

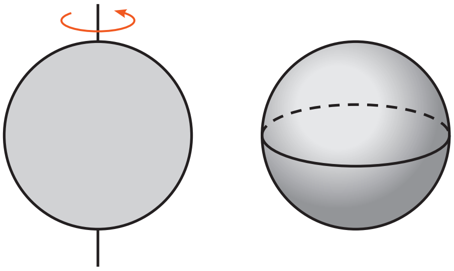
O raio da nova esfera é de, aproximadamente, 4,5 cm.

Para pensar e discutir

1. Se três esferas de chumbo de raios medindo A, B e C forem fundidas em uma nova esfera, qual é a relação matemática que expressa o novo raio r em função de A, B e C na mesma unidade de comprimento?

1. $r = \sqrt[3]{A^3 + B^3 + C^3}$

13. Conforme ilustração, uma esfera pode ser obtida pela rotação de um círculo em torno de seu diâmetro. Se o diâmetro do círculo é de 10 cm, obtenha o volume da esfera gerada.



FJF Vetorização

FJF Vetorização

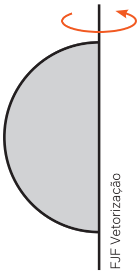
- O diâmetro da esfera é igual ao diâmetro do círculo. Sendo assim, o raio da esfera é de 5 cm, e o volume V é:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 \Rightarrow V = \frac{500\pi}{3}$$

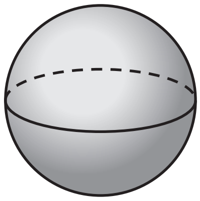
Portanto, o volume da esfera é de $\frac{500\pi}{3}$ cm³.

Observação:

Outro modo de se obter uma esfera é pela rotação de um semicírculo em torno de seu diâmetro, como indicado na figura.

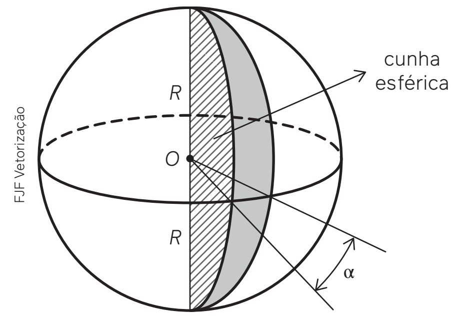


FJF Vetorização



FJF Vetorização

14. Na ilustração a seguir está indicada a parte de uma esfera que denominamos **cunha esférica**. Você pode pensar em um gomo de tangerina para compreender como é essa parte. Utilizando uma proporção, determine o volume dessa cunha esférica, conhecendo-se o ângulo α (em graus), entre os meridianos que a limitam.



- Considerando que o volume da cunha é proporcional ao ângulo α, podemos relacionar o volume da cunha esférica (V_C) com o volume da esfera (V_E):

$$\frac{V_C}{V_E} = \frac{\alpha}{360°}$$

$$V_C = V_E \cdot \frac{\alpha}{360°}$$

$$V_C = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow V_C = \frac{\alpha\pi r^3}{270°}$$

Para pensar e discutir

1. Qual deve ser a medida do ângulo α, em graus, para que a cunha represente a metade da esfera? 1. 180°
2. Duplicando a medida do ângulo α, em graus, o que acontece com o volume da cunha esférica correspondente? Justifique. 2. Duplica; resposta pessoal.
3. Se uma cunha representa $\frac{3}{4}$ da esfera, qual é a medida do ângulo α? Qual fração da esfera representa uma cunha esférica cujo ângulo α mede 15°? 3. 270°; $\frac{1}{24}$

Atividades

48. Com relação a uma esfera de raio *r* e volume *V*, responda aos itens a seguir.

a) Aumentando 10% a medida de *r*, o valor de *V* aumentará quantos por cento? 48. a) Aumenta 33,1%.

b) Duplicando-se *r*, o que ocorre com o valor de *V*? 48. b) É multiplicado por 8.

c) Duas esferas são sempre semelhantes? 48. c) Sim.

49. A ilustração representa uma moeda de 1 real que foi girada em torno de seu diâmetro reproduzindo a imagem de uma esfera.

a) Qual é a medida aproximada, em milímetros, do diâmetro dessa esfera? 49. a) A esfera de revolução tem o mesmo diâmetro que a moeda, 27 mm.

b) Qual é o volume aproximado, em milímetros cúbicos, da esfera gerada? 49. b) Aproximadamente 10 300 mm^3.

50. A ilustração a seguir a seguir representa um tanque cilíndrico cujo raio da base mede R e a altura mede h. Nesse tanque, foi colocada água até certa altura (figura 1). Uma esfera de aço de raio r foi colocada dentro dele, o que fez a altura do nível da água subir $\frac{R}{6}$ (figura 2).

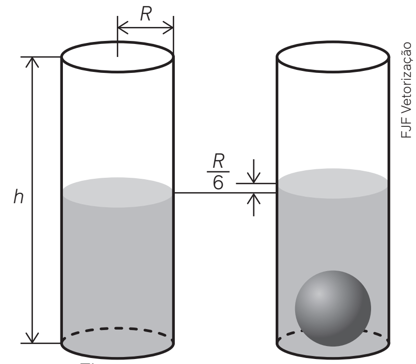


Figura 1. Figura 2.

Obtenha uma relação matemática para calcular a medida do raio r da esfera em função do raio R da base do cilindro. 50. $r = \frac{R}{2}$

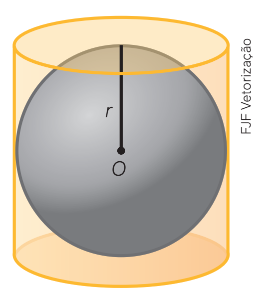
51. Uma esfera de chumbo de raio R cm foi derretida e todo o chumbo, sem desperdício de material, foi utilizado para obter esferas idênticas e menores com raio r cm, tais que $R > r$.

a) Se n representa a quantidade dessas novas esferas e r é a medida do raio, obtenha uma expressão matemática que relacione n, r e R. 51. a) $R = r\sqrt[3]{n}$

b) Calcule n considerando que uma esfera com medida de raio de 50 cm será transformada em n esferas idênticas de raios com medidas iguais a 0,5 cm. 51. b) $n = 10^6$

c) Elabore e resolva uma situação como a do item anterior. 51. c) Resposta pessoal.

52. Uma esfera está inscrita em um cilindro equilátero como mostra a figura a seguir.



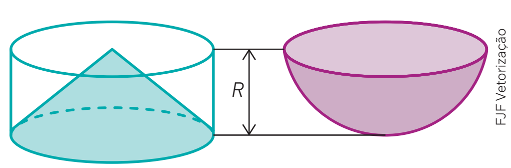
Sabe-se que a área lateral do cilindro equilátero é igual a 16π cm^2.

a) Determine a medida do raio r da esfera. 52. a) $r = 2$ cm

b) Obtenha o volume da esfera. 52. b) $V = \frac{32\pi}{3}$ cm^3.

53. Em relação à situação anterior, considere que a esfera é de chumbo e o cilindro circular é feito de vidro, com abertura na parte superior. Com a esfera dentro do cilindro, despeja-se água até que o nível atinja a altura do cilindro. Então, retira-se a esfera sem derramar água (considere que a esfera não absorve água). Qual é a altura do nível da água que fica no cilindro? 53. $\frac{4}{3}$ cm

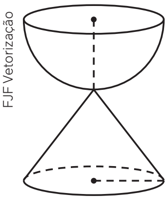
54. As duas ilustrações a seguir representam duas vasilhas, ambas com altura R. A vasilha da esquerda tem a forma de um cilindro, cujo raio da base é R, com um cone inscrito. A vasilha da direita representa a superfície externa de uma semiesfera.



Considere que dentro desses dois recipientes foi colocada água até eles ficarem completamente cheios. Qual deles tem maior capacidade? Justifique. 54. Os dois têm a mesma capacidade; resposta pessoal.

55. (Cefet-MG) Um artesão resolveu fabricar uma ampulheta de volume total V constituída de uma semiesfera de raio 4 cm e de um cone reto, com raio e altura 4 cm, comunicando-se pelo vértice do cone, de acordo com a figura.

FJF Vetorização



Para seu funcionamento, o artesão depositará na ampulheta areia que corresponda a 25% de V. Portanto, o volume de areia, em cm^3, é 55. Alternativa **a**.

a) 16π.
b) $\frac{64\pi}{3}$
c) 32π.
d) $\frac{128\pi}{3}$
e) 64π.

56. (UPF-RS) Se o raio de uma esfera aumenta em 20%, seu volume aumenta, aproximadamente, em: 56. Alternativa **a**.

a) 73%
b) 60%
c) 44%
d) 20%
e) 120%

57. (Uema) O Complexo Deodoro, que engloba as praças Deodoro, Pantheon e as alamedas Gomes de Castro e Silva Maia, no Centro de São Luís, passou por uma grande reforma. Foram colocadas esferas como objeto de decoração, conforme imagem a seguir.

UEMA, 2020

Em matemática, chamamos de esfera de centro O e raio R o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao centro é menor ou igual ao raio R e ainda que seu volume é calculado como sendo quatro terços do valor de π multiplicado pelo cubo do raio da esfera. (use $\pi \cong 3{,}14$).

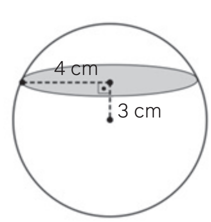
O raio de uma das esferas é de, aproximadamente, 20 cm e todas as esferas são iguais. O volume, em centímetros cúbicos, correspondente a 10 dessas esferas, é igual a, aproximadamente, 57. Alternativa **c**.

a) 33 933,34
b) 16 746,67
c) 334 933,33
d) 188 400,00
e) 18 840,00

58. Uma fábrica produz pequenas esferas de aço, cada uma com diâmetro de 3 cm. Se oito esferas forem fundidas para criar uma única esfera maior, qual será o raio dessa nova esfera? 58. 3 cm

59. (IFPE) Na fazenda de sua família, Michely colheu uma laranja e verificou que ela tinha a forma de uma esfera. Michely, então, foi à cozinha, pegou uma faca e fez um corte na laranja a uma distância de 3 cm do seu centro, conforme a figura a seguir.

IFPE, 2019



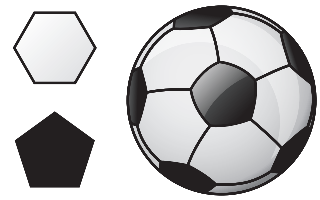
Sabendo que o raio da circunferência gerada no plano do corte é de 4 cm, determine o volume da laranja inteira.

59. Alternativa **e**.

a) $\frac{64\pi}{3}$ cm^3
b) $\frac{256\pi}{3}$ cm^3
c) $\frac{108\pi}{3}$ cm^3
d) $\frac{125\pi}{3}$ cm^3
e) $\frac{500\pi}{3}$ cm^3

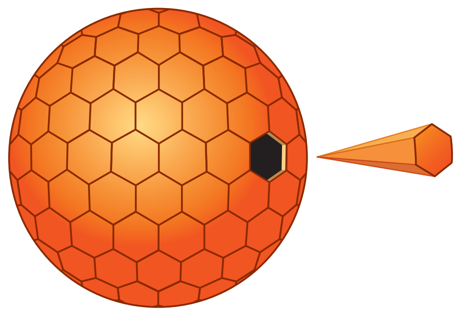
Área da superfície esférica

O formato de uma bola de futebol se parece com uma esfera. Na figura, a superfície da bola é dividida em partes que se parecem com polígonos (pentágonos e hexágonos), porém deformados, isto é, que não são planos.



Reinaldo Vignati

Na ilustração a seguir, não há “gomos” em forma de polígonos porque eles são curvados para cobrir a superfície da bola. Com essa ideia em mente, considere a próxima figura. Vamos imaginar uma esfera formada por “pirâmides” (não são exatamente pirâmides) com vértices no centro dela. A base de cada uma dessas “pirâmides” não seria um polígono, pois, assim como os “gomos” da bola acima, estariam curvados.



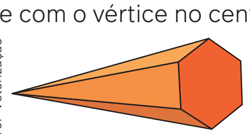
FJF Vetorização

Para pensar e discutir

1. Em Geometria Plana, ao considerar um polígono regular cujo número de lados seja cada vez maior, a qual figura geométrica se assemelha esse polígono? 1. Círculo.

2. Considerando que o número de “pirâmides” que compõem uma esfera, como descrito e imaginado acima, seria cada vez maior, a altura de cada “pirâmide” tenderia a ser qual elemento da esfera? 2. Raio da esfera.

De acordo com a ilustração anterior, considere que a superfície de uma esfera é dividida em regiões cada vez menores em forma de “polígonos” que têm áreas e perímetros muito pequenos, e que cada uma dessas regiões representa a base de pirâmide com o vértice no centro da esfera.



FJF Vetorização

Volume de uma pirâmide:

$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$

Assim, podemos considerar a esfera dividida em n pirâmides, sendo n um número muito grande. O volume da esfera pode ser pensado como a soma dos volumes de todas essas pirâmides, isto é:

$$V_{\text{esfera}} = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_3 \cdot h + \ldots + \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot h$$

Considerando $h = r$, temos:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot r + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot r + \frac{1}{3} \cdot A_3 \cdot r + \ldots + \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot r$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{1}{3} \cdot r \cdot \underbrace{(A_1 + A_2 + A_3 \ldots + A_n)}$$

$$A_1 + A_2 + A_3 \ldots + A_n = A_{\text{esfera}}$$

Substituindo a relação matemática do volume da esfera:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{1}{3} \cdot r \cdot A_{\text{esfera}}$$

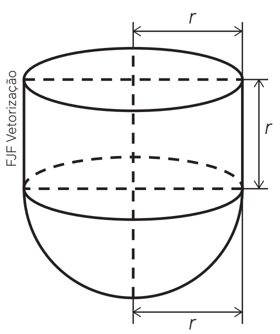
$$4\pi \cdot r^3 = r \cdot A_{\text{esfera}} \Rightarrow A_{\text{esfera}} = 4\pi r^2$$

A área A da superfície de uma esfera com raio r é dada por:

$$\mathbf{A = 4\pi r^2}$$

Atividades resolvidas

15. Um reservatório tem a forma de uma semiesfera acoplada a um cilindro, como representa a figura a seguir. Observe que a altura do cilindro tem a mesma medida do raio da base do cilindro e do raio da semiesfera. A parte superior do reservatório é aberta. Expresse, em função de *r*, a área total correspondente à parte externa do reservatório e o volume dele.



- A área externa do reservatório pode ser calculada como a área lateral do cilindro adicionada à área da superfície da semiesfera.

$$A = A_{\text{cilindro}} + A_{\text{semiesfera}}$$
$$A = 2\pi r \cdot r + \frac{1}{2}(4\pi r^2)$$
$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r^2 \Rightarrow A = 4\pi r^2$$

- Já o volume é dado pela adição do volume do cilindro com o volume da semiesfera.

$$V = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{semiesfera}}$$
$$V = \pi r^2 \cdot r + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$
$$V = \pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^3 \Rightarrow V = \frac{5}{3}\pi r^3$$

Dizemos que essas duas relações matemáticas modelam, em função de *r*, tanto o cálculo para a medida da superfície do reservatório quanto para o volume dele.

Para pensar e discutir

1. Quais são as medidas da área da superfície externa e do volume de um reservatório no formato indicado na **atividade resolvida 15**, considerando que $r = 3$ m? Explique. 1. 36π m²; 45π m³; resposta pessoal
2. Duplicando a medida de *r*, o que acontece com a área da superfície externa e com o volume do reservatório? Explique. 2. A área fica multiplicada por 4 e o volume fica multiplicado por 8; resposta pessoal.

16. Considere que o planeta Terra tem a forma aproximada de uma esfera. Se a medida do raio é de aproximadamente 6 371 km, qual é a medida da superfície terrestre, aproximadamente?

- Utilizando 3,14 como aproximação para o π, temos:

$$A = 4\pi r^2$$
$$A \cong 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,371^2$$
$$A \cong 509\,805\,890{,}96$$

- Arredondando esse valor:

$$A \cong 510\,000\,000 \Rightarrow A \cong 510 \text{ milhões}$$

A medida da superfície da Terra é de, aproximadamente, 510 milhões de quilômetros quadrados.

17. Considerando que um campo de futebol tem 110 m de comprimento por 75 m de largura, quantos desses campos de futebol, aproximadamente, seriam necessários para cobrir completamente a superfície da Terra obtida na atividade anterior?

- Cálculo da área de um campo de futebol A_F (área de um retângulo) em quilômetros quadrados:

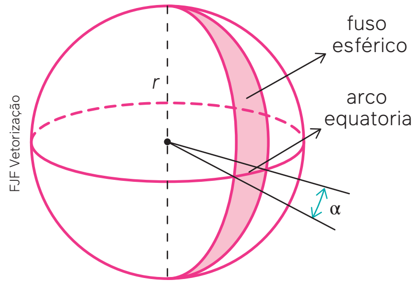
$$A_F = 0{,}110 \cdot 0{,}075$$
$$A_F = 0{,}00825$$

- Sendo *N* o número de campos de futebol, dividimos a área da superfície da Terra pela área do campo de futebol:

$$N = \frac{A_{\text{Terra}}}{A_F}$$
$$N \cong \frac{510\,000\,000}{0{,}00825}$$
$$N \cong 61\,818\,181\,181{,}1$$
$$N \cong 62\,000\,000\,000$$

Portanto, seriam necessários, aproximadamente, 62 bilhões de campos de futebol.

18. A ilustração a seguir indica uma parte da superfície da esfera denominada fuso esférico.



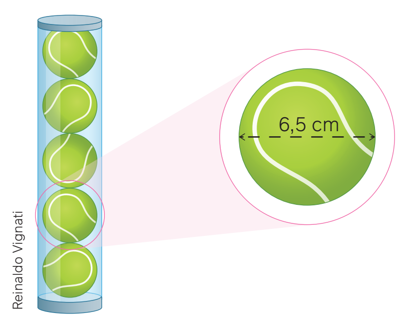
Obtenha uma expressão matemática que forneça a área de um fuso esférico em função do ângulo α (em graus) e do raio r da esfera.

- Podemos fazer um cálculo de proporção para determinar a área do fuso esférico, considerando a medida do ângulo α entre os meridianos que limitam o fuso:

$$\frac{A_{fuso}}{A_{esfera}} = \frac{\alpha}{360°}$$
$$A_{\text{fuso}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot A_{\text{esfera}}$$
$$A_{\text{fuso}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 4\pi R^2$$

A Terra gira em torno do próprio eixo no movimento de rotação. Um giro completo dura, aproximadamente, 24 horas. Assim, dividindo-se 360° por 24, temos 15° que correspondem ao ângulo de 1 fuso.

19. A embalagem de bolinhas de tênis a seguir tem a forma de um cilindro circular reto. Cada embalagem contém 5 bolinhas.



Considere que cada bolinha tem a forma de uma esfera cujo diâmetro é de 6,5 cm, e que as bolinhas, de duas em duas, se tangenciem e também tangenciem a embalagem.
Desconsiderando possíveis dobras e a espessura do material da embalagem, quantos centímetros quadrados, aproximadamente, foram utilizados na confecção da embalagem?

- A base do cilindro tem o mesmo diâmetro de cada bolinha. Já a altura do cilindro é igual a 5 vezes a medida do diâmetro de cada bolinha. Sendo r o raio da base do cilindro (igual ao raio da bolinha) e h a altura, temos, em centímetros:

$$r = \frac{6,5}{2} = 3,25$$
$$h = 5 \cdot 2r$$
$$h = 10r$$
$$h = 10 \cdot 3,25 \Rightarrow h = 32,5$$

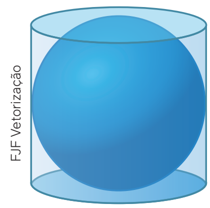
- O material utilizado para confeccionar a embalagem, desconsiderando possíveis sobreposições, é calculado pela área total do cilindro:

$$A = A_{\text{lateral}} + 2A_{\text{base}}$$
$$A = 2\pi \cdot 3,25 . 32,5 + 2\pi \cdot 3,25^2$$
$$\pi \cong 3,14$$
$$A \cong 2 \cdot 3,14 \cdot 3,25 \cdot 32,5 + 2 \cdot 3,14 \cdot 3,25^2$$
$$A \cong 663,325 + 66,3325 \Rightarrow A \cong 729,6575$$

Portanto, são necessários, aproximadamente, 730 cm² de material para confeccionar a embalagem.

Atividades

60. Considere uma esfera inscrita em um cilindro, como na ilustração. Observe que a esfera tangencia as "paredes" do cilindro e suas bases.



a) Qual é a relação entre a altura h do cilindro e o raio r da esfera? 60. a) $h = 2r$

b) Qual é a relação entre a medida do raio da base do cilindro e o raio R da esfera? 60. b) São iguais.

c) Qual é a razão entre o volume da esfera e do cilindro, nessa ordem? 60. c) $\frac{2}{3}$

d) E a razão entre a área da superfície da esfera e a área total do cilindro? 60. d) $\frac{2}{3}$

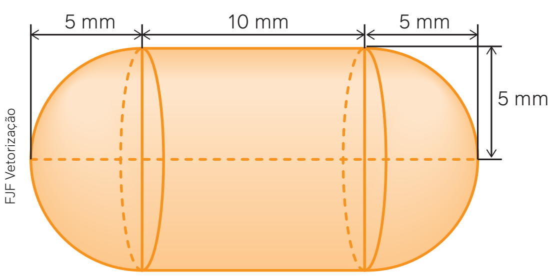
61. Pesquise as informações a seguir e faça o que se pede.

a) Descubra a medida do diâmetro de uma bola de tênis. Considerando-a esférica, calcule a medida aproximada de sua superfície. 61. a) Aproximadamente 141 cm².

b) Descubra a medida do diâmetro de uma bola de vôlei. Considerando-a esférica, calcule a medida aproximada de sua superfície. 61. b) Aproximadamente 1 520 cm².

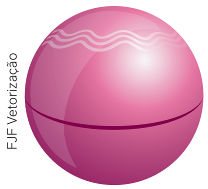
c) Descubra a medida do diâmetro de uma bola de futebol. Considerando-a esférica, calcule a medida aproximada de sua superfície. 61. c) Aproximadamente 1 520 cm².

62. Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas. Cada pílula tem a forma de um cilindro com uma semiesfera de mesmo raio da base do cilindro em cada extremidade, como mostra a figura a seguir.

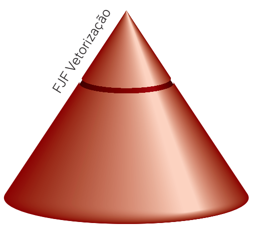


Em milímetros quadrados, qual é a medida da superfície externa dessa pílula? 62. 200π mm²

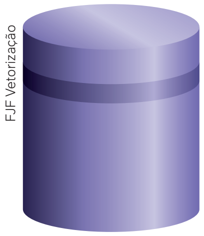
63. Uma indústria de perfumes pretende lançar um produto que será vendido em embalagens de vidro. Há três opções de embalagem: em forma de esfera, em forma de cone e em forma de cilindro. Nas figuras a seguir, as medidas das embalagens estão indicadas em decímetros.



Raio: 3 dm.



Raio: $3\sqrt{3}$ dm.
Altura: 4 dm.



Raio: 3 dm.
Altura: 4 dm.

Junte-se a um colega para fazer esta atividade.

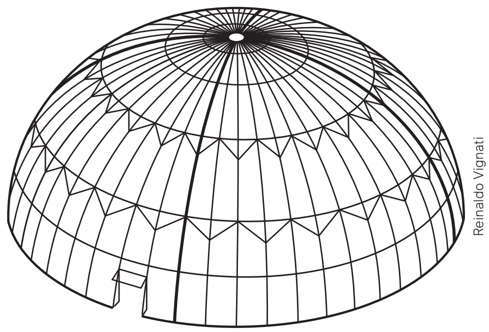
Desprezem a espessura do material utilizado na fabricação dessas embalagens e considerem as medidas indicadas para responder às perguntas a seguir.

a) Qual dessas embalagens tem maior capacidade? 63. a) As três têm a mesma capacidade

b) E em qual das embalagens o custo do material é menor? 63. b) Na embalagem esférica.

c) Escreva uma conclusão comparando os volumes e as áreas das três embalagens. 63. c) Resposta pessoal.

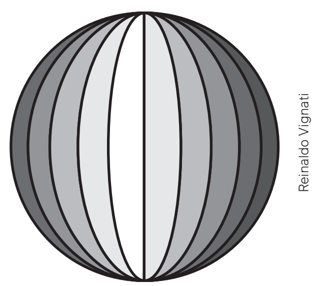
64. Um arquiteto projetou uma estufa em forma de semiesfera de raio igual a 30 metros, como mostra a figura a seguir.



a) Desprezando-se a abertura da entrada, quanto de material será necessário, aproximadamente, para revestir essa estufa? 64. a) Aproximadamente 5 652 m^2.

b) Se aumentarmos o raio da semiesfera que representa a estufa em 1 metro, qual será o aumento na área? 64. b) Aproximadamente 383 m^2.

65. (Udesc) Uma bola esférica é composta por 24 faixas iguais, como indica a figura.



Sabendo-se que o volume da bola é 2 304π cm^3, então a área da superfície de cada faixa é de: 65. Alternativa **b**.

a) 20π cm^2

b) 24π cm^2

c) 28π cm^2

d) 27π cm^2

e) 25π cm^2

66. (UFRGS) Fundindo três esferas idênticas e maciças de diâmetro 2 cm, obtém-se uma única esfera maciça de raio 66. Alternativa **a**.

a) $\sqrt[3]{3}$

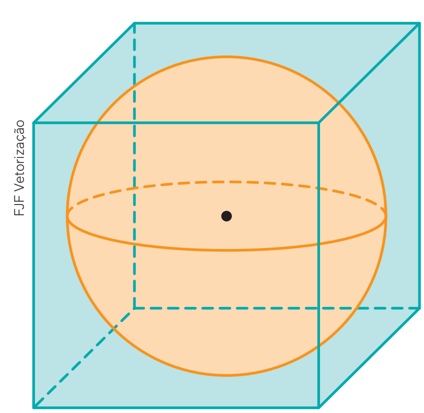
b) $\sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[3]{6}$

d) 3

e) 6

67. A figura a seguir representa uma esfera inscrita em um cubo. Considerando que o volume do cubo é de 216 cm^3, obtenha o volume da esfera. 67. 36π cm^3



68. (UFU-MG) Um recipiente, no formato de um cilindro circular reto de raio de base *r* cm, possui um líquido solvente em seu interior. A altura *h* desse solvente presente no recipiente é igual a $\frac{16}{3}$ cm, conforme ilustra a Figura 1.

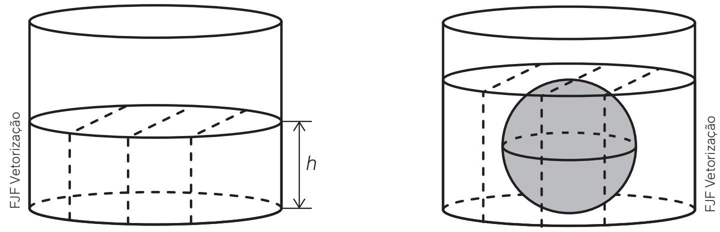


Figura 1 (Ilustrativa e sem escala)

Figura 2 (Ilustrativa e sem escala)

Quando uma peça maciça, no formato de uma esfera de raio igual a 3 cm, é mergulhada nesse recipiente até encostar no fundo, observa-se que o solvente cobre exatamente a esfera, conforme ilustra a Figura 2. Segundo as condições apresentadas, o raio *r*, em cm, é igual a 68. Alternativa **d**.

a) $4\sqrt{3}$　**b)** $2\sqrt{7}$　**c)** $5\sqrt{2}$　**d)** $3\sqrt{6}$

69. (Enem) Para fazer um pião, brinquedo muito apreciado pelas crianças, um artesão utilizará o torno mecânico para trabalhar num pedaço de madeira em formato de cilindro reto, cujas medidas do diâmetro e da altura estão ilustradas na Figura 1. A parte de cima desse pião será uma semiesfera, e a parte de baixo, um cone com altura 4 cm, conforme Figura 2. O vértice do cone deverá coincidir com o centro da base do cilindro.

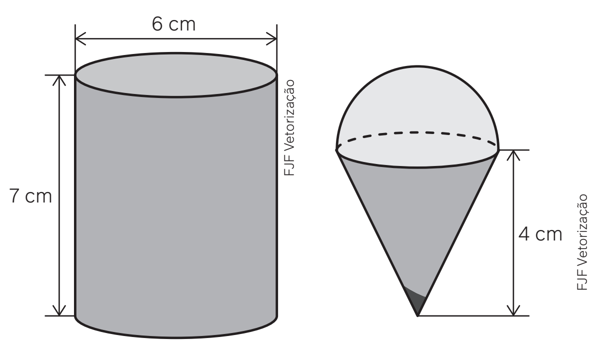


Figura 1　Figura 2

O artesão deseja fazer um pião com a maior altura que esse pedaço de madeira possa proporcionar e de modo a minimizar a quantidade de madeira a ser descartada.
Dados:

- O volume de uma esfera de raio *r* é $\frac{4}{3}\pi r^3$.
- O volume do cilindro de altura *h* e área da base *S* é $S \cdot h$.
- O volume do cone de altura *h* e área da base *S* é $\frac{1}{3} \cdot S \cdot h$.
- Por simplicidade, aproxime π para 3.

A quantidade de madeira descartada, em centímetros cúbicos, é 69. Alternativa **e**.

a) 45.
b) 48.
c) 72.
d) 90.
e) 99.

70. (Unicamp-SP) Um cilindro circular reto, com raio da base e altura iguais a *R*, tem a mesma área da superfície total que uma esfera de raio 70. Alternativa **d**.

a) $2R$
b) $\sqrt{3}R$
c) $\sqrt{2}R$
d) R

71. (UERN) Uma fruta em formato esférico com um caroço também esférico no centro apresenta $\frac{7}{8}$ de seu volume ocupado pela polpa. Desprezando-se a espessura da casca, considerando que o raio da esfera referente à fruta inteira é de 12 cm, então a superfície do caroço apresenta uma área de 71. Alternativa **b**.

a) 121π cm^2
b) 144π cm^2
c) 169π cm^2
d) 196π cm^2

Atividades finais

1. Em relação a uma pirâmide regular, responda ao que se pede.

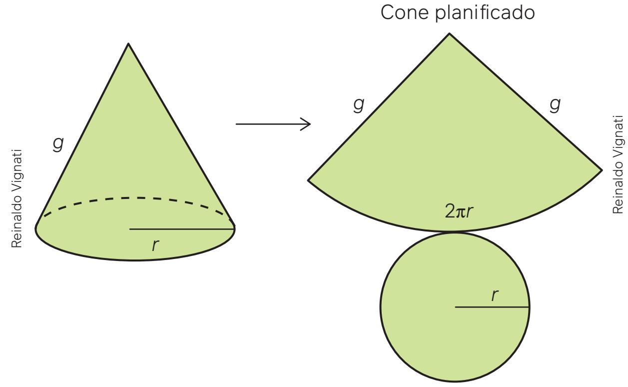
a) Que figura geométrica plana corresponde a cada face lateral? 1. a) Triângulo isósceles.

b) Para calcular a área de cada face lateral de uma pirâmide regular, além da aresta da base da pirâmide, que outra medida é necessária? 1. b) A medida do apótema da pirâmide.

2. Considere que uma pirâmide e um prisma têm a mesma altura e o mesmo polígono da base, isto é, a mesma área da base. Qual é a relação entre os volumes? 2. O volume do prisma é o triplo do volume da pirâmide.

3. Considere que um cone e um cilindro têm a mesma altura e a mesma área da base. Qual é a relação entre os volumes? 3. O volume do cilindro é o triplo do volume do cone.

4. As figuras a seguir representam um cone e sua planificação.



Com base nas informações das ilustrações, responda aos itens a seguir.

a) Qual é a denominação da figura geométrica correspondente à superfície lateral do cone quando planificada? 4. a) Setor circular.

b) Qual é a expressão matemática que permite calcular a área lateral do cone? 4. b) $A_L = \pi r g$

c) E a superfície total do cone? 4. c) $A_T = \pi r g + \pi r^2$

5. Se a razão entre as alturas de dois cones semelhantes é igual a 5, qual é a razão entre:

a) os volumes, na mesma ordem, desses dois cones? 5. a) 125

b) as áreas laterais, na mesma ordem, desses dois cones? 5. b) 25

c) as áreas totais, na mesma ordem, desses dois cones? 5. c) 25

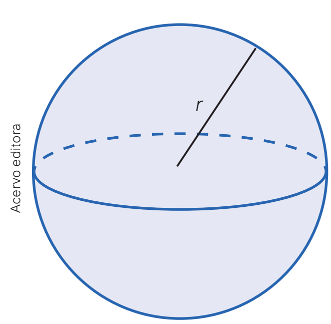
6. Se a razão entre os volumes de duas pirâmides semelhantes é igual a 27, qual é a razão entre:

a) as alturas, na mesma ordem, dessas duas pirâmides? 6. a) 3

b) as áreas laterais, na mesma ordem, dessas duas pirâmides? 6. b) 9

c) as áreas totais, na mesma ordem, dessas duas pirâmides? 6. c) 9

7. Em relação à esfera representada a seguir, responda ao que se pede.



a) Qual expressão matemática representa o volume *V* da esfera? 7. a) $\frac{4}{3}\pi r^3$

b) Qual expressão matemática representa a área *A* da superfície da esfera? 7. b) $4\pi r^2$

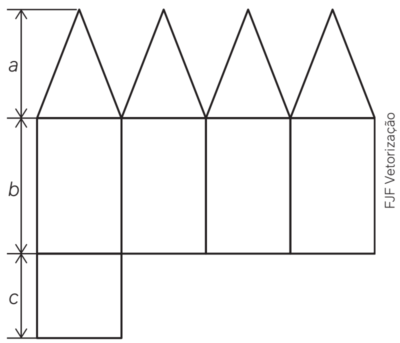
c) O que significa círculo máximo da esfera? 7. c) Qualquer círculo contendo o diâmetro da esfera.

Questões de vestibulares e Enem

8. (Unicamp-SP) A figura [...] exibe a planificação de um poliedro convexo, com faces triangulares congruentes e faces retangulares, em que são indicados os comprimentos *a*, *b* e *c*.

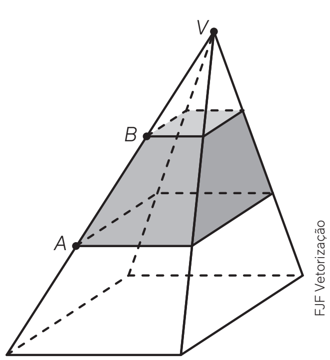
a) Determine o número de vértices e de arestas desse poliedro. 8. a) 9 vértices e 16 arestas

b) Para $a = 13$ cm, $b = 16$ cm e $c = 10$ cm, calcule o volume desse poliedro. 8. b) 2 000 cm^3



9. (Uerj) Observe na imagem uma pirâmide de base quadrada, seccionada por dois planos paralelos à base, um contendo o ponto *A* e o outro o ponto *B*. Esses planos dividem cada aresta lateral em três partes iguais. Considere as seguintes medidas da pirâmide: 9. Alternativa **c**.

- Altura = 9 cm
- Aresta da base = 6 cm
- Volume total = 108 cm^3



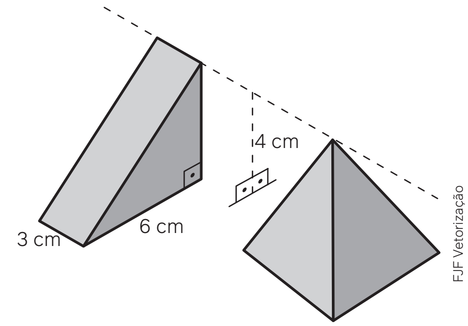
O volume da região compreendida entre os planos paralelos, em cm^3, é:

a) 26.
b) 24.
c) 28.
d) 30.

10. (UEG) Em um curso de dobraduras, a instrutora orientou que fosse construída uma pirâmide de base quadrada, de lado igual a 3 cm e altura igual a 10 cm. O volume dessa pirâmide é igual a

a) 25 cm^3. 10. Alternativa **b**.
b) 30 cm^3.
c) 15 cm^3.
d) 9 cm^3.
e) 12 cm^3.

11. (Famerp-SP) A figura indica um prisma reto triangular e uma pirâmide regular de base quadrada. A altura desses sólidos, em relação ao plano em que ambos estão apoiados, é igual a 4 cm, como indicam as figuras.



Se os sólidos possuírem o mesmo volume, a aresta da base da pirâmide, em centímetros, será igual a

11. Alternativa **d**.

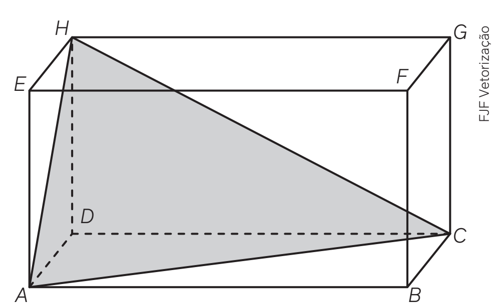
a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
c) $\sqrt{3}$.
d) $3\sqrt{3}$.
e) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$.

12. (ITA-SP) A superfície lateral de um cone circular reto corresponde a um setor circular de 216°, quando planificada. Se a geratriz do cone mede 10 cm, então a medida de sua altura, em cm, é igual a

12. Alternativa **d**.

a) 5.
b) 6.
c) 7.
d) 8.
e) 9.

13. (UFRGS) Considere *ABCDEFGH* um paralelepípedo reto retângulo conforme representado na figura [...]:



Se as arestas do paralelepípedo medem 3, 6 e 10, o volume do sólido *ACDH* é 13. Alternativa **c**.

a) 10.
b) 20.
c) 30.
d) 60.
e) 90.

14. (Ifal) Certo tanque de combustível tem o formato de um cone invertido com profundidade de 5 metros e com raio máximo de 4 metros. Quantos litros de combustível cabem, aproximadamente, nesse tanque? Considere $\pi \cong 3{,}14$. 14. Alternativa **c**.

a) 20 000 L

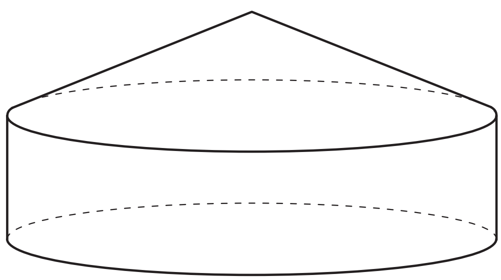
b) 50 240 L

c) 83 733,33 L

d) 104 666,67 L

e) 150 000 L

15. (UFPR) Um dos maiores silos do mundo para armazenamento de grãos está localizado na cidade de Primavera do Leste, no Mato Grosso. Suponha que esse silo é constituído por um cilindro circular reto com 24 m de raio e 22 m de altura, no qual está acoplado um cone circular reto com altura de 8 m, conforme indicado na figura a seguir.



FJF Vetorização

a) Calcule o perímetro, em metros, da base do cilindro. Use $\pi \cong 3{,}1$. 15. a) Aproximadamente 148,8 m.

b) Calcule o volume, em metros cúbicos, desse silo. Use $\pi \cong 3{,}1$. 15. b) Aproximadamente 44 044,8 m^3.

16. (UFRGS) Se duplicarmos a medida da aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular e reduzirmos sua altura à metade, o volume desta pirâmide

a) será reduzido à quarta parte. 16. Alternativa **d**.

b) será reduzido à metade.

c) permanecerá inalterado.

d) será duplicado.

e) aumentará quatro vezes.

17. (UPE-SSA) Foram colocadas esferas de raio 5,0 cm dentro de um aquário que tem o formato de um paralelepípedo de 1,25 m de largura, 2,0 m de comprimento e 1,0 m de altura, cheio de água, ocupando sua capacidade máxima. Aproximadamente, quantas esferas terão de ser colocadas nesse aquário para que 10% do volume contido no seu interior seja derramado? Adote $\pi \cong 3{,}0$. 17. Alternativa **e**.

a) 250

b) 300

c) 325

d) 450

e) 500

18. (UEG) Deseja-se construir um reservatório cilíndrico circular reto com 8 metros de diâmetro e teto no formato de hemisfério. Sabendo-se que a empresa responsável por construir o teto cobra R$ 300,00 por m^2, o valor para construir esse teto esférico será de 18. Alternativa **e**.

Use $\pi \cong 3{,}1$.

a) R$ 22.150,00.

b) R$ 32.190,00.

c) R$ 38.600,00.

d) R$ 40.100,00.

e) R$ 29.760,00.

19. (FGV-SP) Um ralador de queijo tem a forma de cone circular reto de raio da base 4 cm e altura 10 cm. O queijo é ralado na base do cone e fica acumulado em seu interior (figura 1). Deseja-se retirar uma fatia de um queijo com a forma de cilindro circular reto de raio da base 8 cm e altura 6 cm, obtida por dois cortes perpendiculares à base, partindo do centro da base do queijo e formando um ângulo a (figura 2), de forma que o volume de queijo dessa fatia corresponda a 90% do volume do ralador. 19. Alternativa **a**.

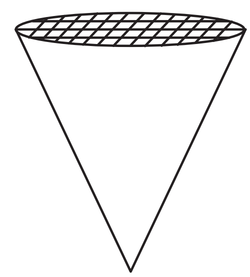


Figura 1.

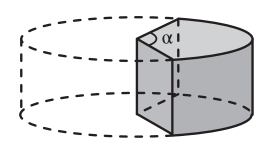


Figura 2.

FJF Vetorização

Nas condições do problema, α é igual a

a) 45°.

b) 50°.

c) 55°.

d) 60°.

e) 65°.

20. (Uece) Um círculo de raio R gira em torno de seu diâmetro, gerando uma esfera de volume V. Se o raio do círculo é aumentado em 50%, então o volume da esfera é aumentado em 20. Alternativa **d**.

a) 100,0%.

b) 125,0%.

c) 215,0%.

d) 237,5%.

21. (FGV-SP) Um reservatório tem a forma de uma esfera. Se aumentarmos o raio da esfera em 20%, o volume do novo reservatório, em relação ao volume inicial, aumentará 21. Alternativa **e**.

a) 60%.

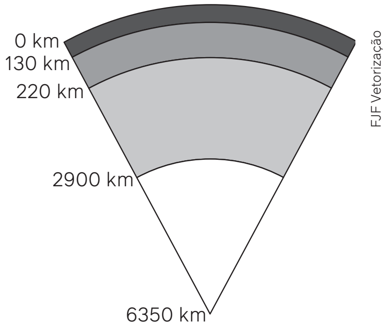
b) 63,2%.

c) 66,4%.

d) 69,6%.

e) 72,8%.

22. (UFG-GO) A figura a seguir representa um modelo esquemático aproximado para a estrutura interna da Terra em camadas concêntricas, da superfície ao centro, indicando as profundidades aproximadas das transições entre as camadas.



Segundo modelos sísmicos, acredita-se que uma destas camadas é formada, predominantemente, por minerais metálicos, em altas temperaturas, e por duas partes, uma fluida e outra sólida, devido à altíssima pressão. A fração do volume da Terra ocupada por esta camada está entre 22. Alternativa **a**.

a) $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$

e) $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$

23. (UEA-AM) Um prisma reto de base quadrada tem lado da base medindo 3 cm e altura, relativa a essa base, de 5 cm. Uma pirâmide reta de base quadrada tem lado da base medindo 4 cm e altura, relativa a essa base, de 6 cm. A diferença entre o volume do prisma e o da pirâmide é de 23. Alternativa **c**.

a) 12 cm^3.

b) 11 cm^3.

c) 13 cm^3.

d) 9 cm^3.

e) 10 cm^3.

24. (UFJF-MG) A Grande Pirâmide de Gizé, que está localizada no Egito, é considerada uma das maiores e mais pesadas obras já construídas pela humanidade. Uma miniatura realista da pirâmide de Gizé pode ser encontrada em certo antiquário. Esta miniatura é uma pirâmide regular, que possui a aresta da sua base quadrada medindo 24 cm enquanto sua altura mede 16 cm. A área total da superfície da miniatura da pirâmide mede 24. Alternativa **d**.

a) 768 cm^2

b) 960 cm^2

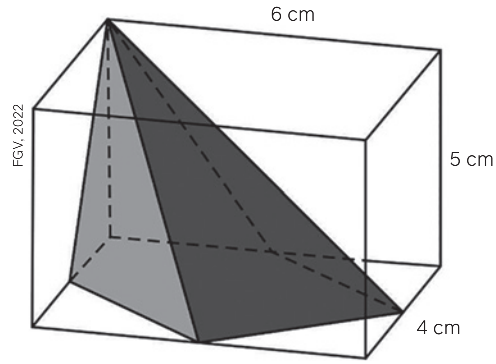
c) 1 344 cm^2

d) 1 536 cm^2

e) 2 112 cm^2

25. (FGV-SP) Em um paralelepípedo reto retângulo está inscrita uma pirâmide de base pentagonal. Dois vértices dessa pirâmide são os vértices de uma das arestas do paralelepípedo e os outros quatro vértices são os pontos médios das arestas da base do paralelepípedo, conforme mostra a figura.

25. Alternativa **a**.



O volume dessa pirâmide é

a) 25 cm^3.

b) 30 cm^3.

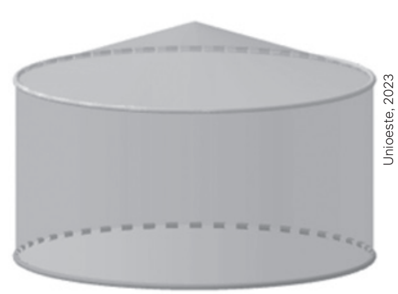
c) 35 cm^3.

d) 40 cm^3.

e) 45 cm^3.

26. (Unioeste-PR) Um reservatório de água de determinada propriedade rural tem o formato da figura a seguir e está totalmente cheio. A parte inferior da figura é um cilindro reto de altura 10 metros e [de] diâmetro 20 metros. A parte superior do reservatório é um cone de altura 3 metros. A água desse reservatório é transferida para 10 pequenas caixas-d'água com capacidade de 1 000 litros cada uma e é usada para irrigação na propriedade.

Cinco dessas caixas são abastecidas totalmente duas vezes ao dia e as outras cinco caixas são totalmente abastecidas somente uma vez ao dia. Se D é o número de dias completos nos quais é possível irrigar a propriedade com a água do reservatório, então é correto afirmar que 26. Alternativa **d**.



a) $D = 23$

b) $D = 30$

c) $D = 73$

d) $D = 230$

e) $D = 1100$

27. (FMC-SP) Um cilindro e um cone, ambos, circulares e retos, possuem o mesmo volume e raios da base com a mesma medida. Nessas condições, a razão $\frac{H}{h}$, entre as alturas H do cilindro e h do cone é:

27. Alternativa **a**.

a) $\frac{1}{3}$

b) 3

c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{3}$

e) 1

28. (Ufam) Dois recipientes, um cilíndrico e um cônico, têm a mesma altura e bases com raios iguais. Se a capacidade do recipiente cônico é de 205 mL, então a capacidade do recipiente cilíndrico é de:

a) 205 mL. **c)** 505 mL. **e)** 750 mL.

b) 410 mL. **d)** 615 mL.

28. Alternativa **d**.

29. (Uece) Um triângulo retângulo, ao girar em torno de um dos catetos, gera um cone. Ao girar em torno da hipotenusa, gera dois cones ligados pela base, que é a mesma para ambos os cones. Se a medida da hipotenusa do triângulo é 5 cm e a medida de um dos catetos é 3 cm, esse triângulo, ao girar em torno da hipotenusa, gera um sólido (união de dois cones) cuja medida do volume, em cm^3, é 29. Alternativa **d**.

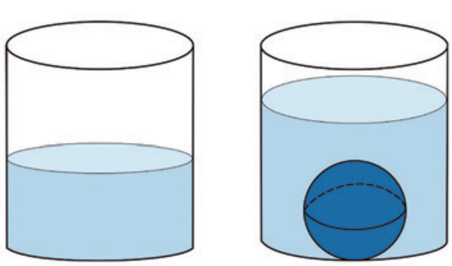
a) $\frac{14\pi}{3}$

b) $\frac{24\pi}{5}$

c) $\frac{48\pi}{3}$

d) $\frac{48\pi}{5}$

30. (Unicamp-SP) Um recipiente cilíndrico de altura h tem água em seu interior. Ao mergulhar uma esfera de chumbo de raio R neste recipiente, a água cobre a esfera e nenhuma quantidade de água se perde, como ilustrado na figura a seguir.



COMVEST-UNICAMP, 2023

Sabendo que o raio da base do cilindro é o dobro do raio da esfera, a diferença entre a altura da água antes e depois do mergulho da esfera é igual a

30. Alternativa **c**.

a) $2R$

b) R

c) $\frac{R}{3}$

d) $\frac{2R}{3}$

31. (Uece) Se V_1 é a medida do volume de uma esfera cuja medida do raio é R e V_2 a medida do volume de uma esfera cuja medida do raio é $\frac{R}{2}$, a relação entre V_1 e V_2 é

31. Alternativa **d**.

a) $V_1 = 2V_2$

b) $V_1 = 6V_2$

c) $V_1 = 4V_2$

d) $V_1 = 8V_2$

32. (FGV-SP) Certo fabricante de refrigerantes tem duas versões de seu produto. As embalagens das duas versões são figuras geometricamente semelhantes, sendo que a maior tem altura igual ao triplo da altura da menor. O volume da embalagem maior é N vezes o volume da embalagem menor. O valor de N é: 32. Alternativa **a**.

a) 27

b) 18

c) 9

d) 12

e) 3

33. (Enem) No período de fim de ano, o síndico de um condomínio resolveu colocar, em um poste, uma iluminação natalina em formato de cone, lembrando uma árvore de Natal, conforme as figuras 1 e 2.

Figura 1

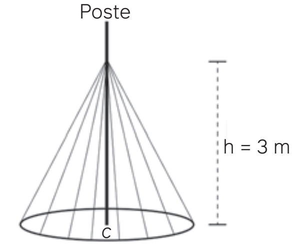


Figura 2

ENEM, 2020

A árvore deverá ser feita colocando-se mangueiras de iluminação, consideradas segmentos de reta de mesmo comprimento, a partir de um ponto situado a 3 m de altura no poste até um ponto de uma circunferência de fixação, no chão, de tal forma que esta fique dividida em 20 arcos iguais. O poste está fixado no ponto C (centro da circunferência) perpendicularmente ao plano do chão. Para economizar, ele utilizará mangueiras de iluminação aproveitadas de anos anteriores, que juntas totalizaram pouco mais de 100 m de comprimento, dos quais ele decide usar exatamente 100 m e deixar o restante como reserva.

Para que ele atinja seu objetivo, o raio, em metro, da circunferência deverá ser de 33. Alternativa **a**.

a) 4,00

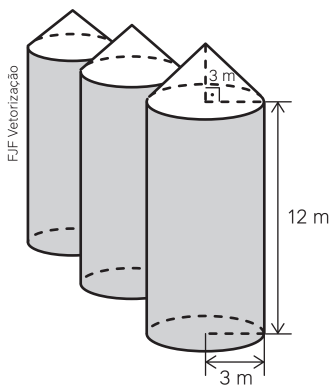
b) 4,87

c) 5,00

d) 5,83

e) 6,26

34. (Enem) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, de dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga, cuja capacidade é de 20 m^3. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π.
O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é 34. Alternativa **d**.

a) 6.

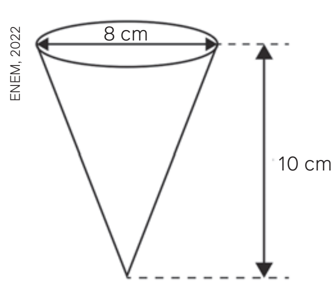
b) 16.

c) 17.

d) 18.

e) 21.

35. (Enem) Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.



Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato do cone circular reto com altura de 10 cm. Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a 35. Alternativa **c**.

a) 1,52 **b)** 3,24 **c)** 3,60 **d)** 6,48 **e)** 7,20

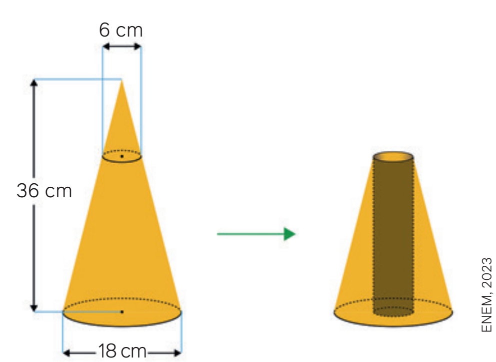
36. (Enem) Uma empresa produziu uma bola de chocolate, em formato esférico, para utilizar na decoração de sua loja. Essa bola tem 20 cm de diâmetro externo, sendo oca por dentro, e a medida da espessura entre as superfícies interna e externa corresponde a 1 cm. Considere que, na confecção dessa bola, foi utilizado um tipo de chocolate em que 1 g equivale a 0,75 cm^3.
A quantidade de chocolate, em grama, utilizado na confecção dessa bola é 36. Alternativa **c**.

a) $\frac{76\pi}{3}$ **b)** $\frac{304\pi}{9}$ **c)** $\frac{4\,336\pi}{9}$ **d)** $\frac{4\,000\pi}{3}$ **e)** $\frac{18\,256\pi}{9}$

37. (Enem) Uma cozinheira produz docinhos especiais por encomenda. Usando uma receita-base de massa, ela prepara uma porção, com a qual produz 50 docinhos maciços de formato esférico, com 2 cm de diâmetro. Um cliente encomenda 150 desses docinhos, mas pede que cada um tenha formato esférico com 4 cm de diâmetro. A cozinheira pretende preparar o número exato de porções da receita-base de mesma massa necessário para produzir os docinhos dessa encomenda. Quantas porções da receita-base de massa ela deve preparar para atender esse cliente? 37. Alternativa **e**.

a) 2 **b)** 3 **c)** 6 **d)** 12 **e)** 24

38. (Enem) Um artista plástico esculpe uma escultura a partir de um bloco de madeira de lei, em etapas. Inicialmente, esculpe um cone reto com 36 cm de altura e diâmetro da base medindo 18 cm. Em seguida, remove desse cone um cone menor, cujo diâmetro da base mede 6 cm, obtendo, assim, um tronco de cone, conforme ilustrado na figura. 38. Alternativa **b**.



Em seguida, perfura esse tronco de cone, removendo um cilindro reto, de diâmetro 6 cm, cujo eixo de simetria é o mesmo do cone original. Dessa forma, ao final, a escultura tem a forma de um tronco de cone com uma perfuração cilíndrica de base a base. O tipo de madeira utilizada para produzir essa escultura tem massa igual a 0,6 g por centímetro cúbico de volume. Utilize 3 como aproximação para π.
Qual é a massa, em grama, dessa escultura?

a) 1 198,8 **b)** 1 296,0 **c)** 1 360,8 **d)** 4 665,6 **e)** 4 860,0

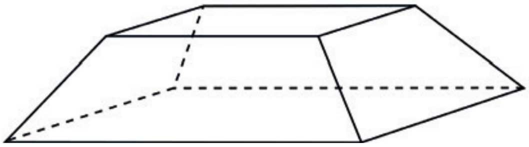
39. (Enem) A tartaruga ou tachão de trânsito é um dispositivo de sinalização horizontal utilizado para canalizar o tráfego ou garantir o afastamento do fluxo de veículos de zonas perigosas ou com grande risco de acidentes. A Figura 1 apresenta alguns deles já instalados.

ENEM, 2023

Figura 1

Disponível em: www.alfasinalizacao.com.br. Acesso em: 28 nov. 2021 (adaptado).

O modelo geométrico de um tachão está representado na Figura 2. Ele é formado por duas faces retangulares paralelas e quatro faces trapezoidais. Suas arestas laterais, se prolongadas, concorrem em um mesmo ponto.



ENEM, 2023

Figura 2

Qual é o sólido representado pelo modelo geométrico do tachão? 39. Alternativa **e**.

a) Paralelepípedo reto.

b) Paralelepípedo oblíquo.

c) Pirâmide quadrangular.

d) Tronco de pirâmide hexagonal.

e) Tronco de pirâmide quadrangular.

Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão dos assuntos e objetivos trabalhados ao longo do presente capítulo.

Objetivos de aprendizagem	Sim	É necessário retomar
Compreendo os procedimentos para o cálculo de medidas de superfícies de pirâmide, cones e esferas.		
Resolvo e elaboro problemas relacionados ao cálculo de medidas de superfícies.		
Compreendo os procedimentos para o cálculo de volume de pirâmides, cones e esferas, com base no princípio de Cavalieri.		
Resolvo e elaboro problemas relacionados ao cálculo de volume.		
Compreendo os procedimentos para o cálculo de medidas de superfícies de cones.		
Compreendo as razões de semelhança entre sólidos geométricos para obter áreas e volumes de tronco de pirâmide e de tronco de cone.		
Compreendo a relação matemática para o cálculo da superfície de uma esfera com base em seu raio.		
Resolvo e elaboro problemas relacionados ao cálculo de medida de superfície de esfera.		

Andrey_Popov/Shutterstock.com

Neste capítulo, você vai:

- identificar equações lineares com mais de uma incógnita;
- compreender o que representa a solução de um sistema de equações lineares com duas ou mais incógnitas;
- resolver sistemas de equações lineares por meio do método do escalonamento;
- identificar quando um sistema de equações lineares possui solução única, não possui solução ou admite infinitas soluções;
- resolver problemas relacionados a sistemas de equações lineares.

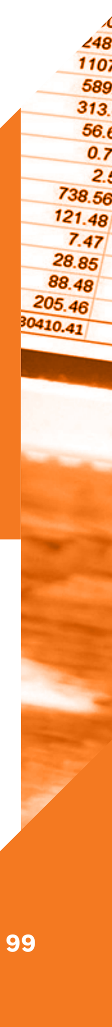
CAPÍTULO

3

Sistemas lineares

Os sistemas lineares são muito úteis para a solução de diversos tipos de problemas que envolvem mais de uma variável simultaneamente.

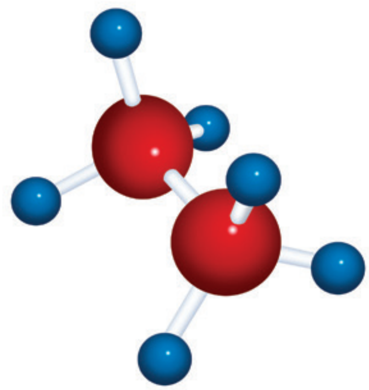
Os sistemas lineares podem ser utilizados para resolver problemas tanto do cotidiano quanto de outras áreas do conhecimento como, por exemplo, do campo de Ciências da Natureza. Neste capítulo, você vai estudar diversas técnicas para solucionar esse tipo de sistema e aprender a aplicá-las na resolução de problemas.



1. **Você se lembra de como é possível resolver um sistema de equações do 1º grau, tema estudado no Ensino Fundamental? Converse sobre isso com um colega e troquem ideias.** 1. Resposta pessoal.
2. **Quais tipos de problemas podem ser resolvidos utilizando sistemas de equações do 1º grau? Pense em alguns exemplos práticos.** 2. Resposta pessoal.

1 Sistemas de equações lineares

A ilustração a seguir representa um modelo correspondente à substância conhecida como etano, normalmente representada pela fórmula C_2H_6. Esse tipo de modelo é empregado para evidenciar as ligações entre os átomos em sua estrutura.



Mauro Salgado

Em Química também é necessária a resolução de equações. Ao escrever uma equação química, por exemplo, é importante verificar se a quantidade de átomos de cada elemento é a mesma nos dois lados da equação correspondente.

Para efetuar o balanceamento, procede-se escrevendo o chamado coeficiente estequiométrico (ou coeficiente de balanceamento, representado, normalmente, por um número inteiro) antes dos símbolos que representam cada substância.

Vamos exemplificar.

A seguir, temos uma equação química.

$$C_2H_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

Se a ideia é balancear essa equação, representamos quatro coeficientes estequiométricos da equação. Como eles são desconhecidos, vamos representá-los pelas letras x, y, z e w. Assim:

$$\mathbf{x}C_2H_6 + \mathbf{y}O_2 \rightarrow \mathbf{z}CO_2 + \mathbf{w}H_2O$$

Sabendo que o número de átomos de cada elemento deve ser o mesmo de cada lado dessa equação química, temos:

- elemento C (carbono) $\rightarrow 2x = z$;
- elemento H (hidrogênio) $\rightarrow 6x = 2w$;
- elemento O (oxigênio) $\rightarrow 2y = 2z + w$.

Como essas equações devem ser verificadas simultaneamente, escrevemos um sistema formado por três equações com quatro incógnitas, ou seja:

$$\underbrace{\begin{cases} 2x = z \\ 6x = 2w \\ 2y = 2z + w \end{cases}}_{\text{sistema de 3 equações e 4 incógnitas}}$$

Para pensar e discutir

1. O que significa resolver uma equação com 1 incógnita? E um sistema de equações com mais de 1 incógnita? 1. Respostas no Manual do Professor.
2. Você conhece algum procedimento para resolver um sistema formado por 2 equações e 2 incógnitas? Explique exemplificando. 2. Resposta pessoal.
3. Se, no sistema anterior, você descobrir o valor de x, poderá determinar os valores das demais incógnitas? Explique. 3. Sim; resposta pessoal.

Retomaremos a situação envolvendo a ideia de balanceamento quando apresentarmos o chamado método do escalonamento para a resolução de um sistema.

Na situação, os coeficientes procurados para "balancear" a equação são números inteiros. Isso possibilita que você resolva esse sistema atribuindo valores inteiros para as incógnitas e, por meio de tentativas, obtenha os valores procurados. Entretanto, precisamos de um procedimento que possa nos auxiliar a resolver um sistema de equações lineares cujas soluções possam ser números reais não necessariamente inteiros.

Então, inicialmente, vamos abordar algumas ideias a respeito de equações lineares.

Denomina-se **equação linear** toda equação que pode ser escrita na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

na qual x_1, x_2, x_3, … e x_n são as incógnitas, a_1, a_2, a_3… e a_n são os coeficientes reais e b um número real correspondente ao termo independente das incógnitas.

Exemplos:

A equação $7x + 8y - 3z + 5w = 6$ é dita equação linear. Seus termos estão descritos a seguir.

- Incógnitas → x, y, z e w;
- Coeficientes → 7, 8, –3 e 5;
- Termo independente → 6.

A equação $7{,}2x - 9{,}5y + \sqrt{10}z = 7{,}9$ é dita equação linear. Seus termos estão descritos a seguir.

- Incógnitas → x, y e z;
- Coeficientes → 7,2; –9,5 e $\sqrt{10}$;
- Termo independente → 7,9.

A expressão "equação linear" é utilizada quando todas as incógnitas da equação têm expoente igual a 1. Além disso, em uma equação linear não há termo misto, ou seja, aquele termo que contém o produto de duas ou mais incógnitas.

Assim, **não** são exemplos de equações lineares:

I. $2xy + w = 10$

II. $x^3 + 3y + 4z = 5$

III. $4x^{\frac{1}{2}} - 7z = 8$

Para pensar e discutir

1. Quais são as justificativas para que as equações I, II e III não sejam consideradas equações lineares? 1. Resposta no Manual do professor.

2. A equação $\sqrt{2}x - 2y = 7$ é linear? E a equação $\sqrt{2x} - 2y = 7$? Justifique. 2. Sim; não; resposta pessoal.

Nosso interesse, agora, é a resolução de sistemas formados por equações lineares decorrentes de situações matemáticas ou de outras áreas do conhecimento. São exemplos de sistemas lineares:

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ x + 5y = 6 \end{cases} \rightarrow \text{sistema linear com duas equações e duas incógnitas}$$

$$\begin{cases} 3x - y + 5z = 10 \\ x + 5y - 3z = 6 \end{cases} \rightarrow \text{sistema linear com duas equações e três incógnitas}$$

$$\begin{cases} 3x - 3y + z = 1 \\ -3x + y - 3z = 16 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{sistema linear com três equações e três incógnitas}$$

- Um conjunto formado por $\boldsymbol{m}$ equações lineares com $\boldsymbol{n}$ incógnitas x_1, x_2, x_3,… e x_n é chamado de **sistema linear** $\boldsymbol{m \times n}$.
- A sequência de $\boldsymbol{n}$ números reais $(a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n)$ é solução de um sistema linear de $\boldsymbol{n}$ incógnitas se também é solução de cada uma das equações do sistema.

Vamos compreender o que é solução de um sistema de equações lineares. Para exemplificar, analise as situações a seguir.

Atividades resolvidas

1. Júlia foi a um caixa eletrônico fazer uma retirada de 180 reais. Considerando que só havia cédulas de 50 reais, 10 reais e 5 reais no equipamento, determine a quantidade de cada uma dessas cédulas retiradas por Júlia.

Banco Central do Brasil

Banco Central do Brasil

Banco Central do Brasil

- Se representarmos por x, y e z as quantidades de cédulas de 50 reais, 10 reais e 5 reais, temos a seguinte equação:

$$x \cdot 50 + y \cdot 10 + z \cdot 5 = 180 \text{ ou } 50x + 10y + 5z = 180.$$

Assim, temos uma equação com 3 incógnitas. Essa informação é insuficiente para determinarmos as quantidades de cédulas correspondentes.

Para pensar e discutir

1. Se forem 2 cédulas de 5 reais e 1 cédula de 50 reais, quantas serão as cédulas de 10 reais? 1. 12
2. Se forem 2 cédulas de 50 reais, quantas serão as cédulas de 10 reais e de 5 reais? Apresente uma solução. 2. 6; 4; resposta pessoal
3. Quantas serão as cédulas de cada tipo? Apresente uma solução. 3. Resposta no Manual do Professor.

2. Júlia, na situação anterior, retirou 180 reais em cédulas de 50 reais, 10 reais e 5 reais. Ao todo, ela observou que havia 14 cédulas. Obtenha a quantidade de cédulas de cada um desses valores.

- Considerando ainda que x, y e z representam as quantidades de cédulas de 50, de 10 e de 5 reais, respectivamente, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 14 \longrightarrow \text{quantidades de cédulas} \\ 50x + 10y + 5z = 180 \longrightarrow \text{quantia retirada} \end{cases}$$

Como são duas equações a três incógnitas, não temos informações suficientes para determinar as quantidades correspondentes.

Para pensar e discutir

1. Considerando que a solução do sistema é representada pela terna ordenada (x, y, z), a terna ordenada (4, 4, 6) é solução do sistema? Justifique. 1. Não; resposta pessoal.
2. E a terna ordenada (2, 4, 8) é solução do sistema? Justifique. 2. Sim; resposta pessoal.

Na discussão acima, quando mencionamos a terna ordenada (4, 4, 6), nos referimos à ordem dos valores assumidos pelas três incógnitas: x, y e z. Convencionamos isso para evitar possíveis confusões. Assim, se um sistema de equações lineares apresentar apenas as incógnitas x e y, a solução será representada por um par ordenado, isto é, (x, y).

No Ensino Fundamental, você estudou a resolução de sistemas de equações lineares formados por duas equações a duas incógnitas. Normalmente, é enfatizada a resolução de tais sistemas por meio de dois procedimentos: **método da adição** e **método da substituição**. Para relembrar esses procedimentos, analise as resoluções a seguir.

3. Resolva o seguinte sistema de equações lineares utilizando o método da adição e, depois, o método de substituição:

$$\begin{cases} x - y = 12 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

- Quando adicionamos, membro a membro, duas igualdades verdadeiras, obtemos uma igualdade também verdadeira. O método da adição é utilizado quando, ao adicionarmos as duas equações membro a membro, uma das incógnitas é eliminada:

$$\begin{cases} x - y = 12 \\ x + y = 16 \end{cases} \rightarrow \text{adicionando membro a membro, temos: } 2x = 28 \Rightarrow x = 14$$

- Substituindo o valor de x obtido em uma das equações, obtemos o valor de y. Vamos substituí-lo na 2ª equação:

$$14 + y = 16 \Rightarrow y = 2.$$

Portanto, a solução do sistema é representada por (14, 2) e o conjunto-solução é $S = \{(14, 2)\}$.

- O método da substituição consiste em isolar uma das incógnitas em uma das equações para substituir essa incógnita na outra equação pela expressão obtida. Vamos isolar x na 1ª equação e substituir essa expressão na 2ª equação:

$$x - y = 12 \Rightarrow x = 12 + \mathrm{y} \rightarrow \text{substituindo na 2ª equação, temos:}$$

$$(12 + y) + y = 16 \Rightarrow 12 + 2y = 16 \Rightarrow y = 2$$

- Substituindo o valor de y em uma das duas equações, obtemos o valor de x. Vamos substituí-lo na 2ª equação:

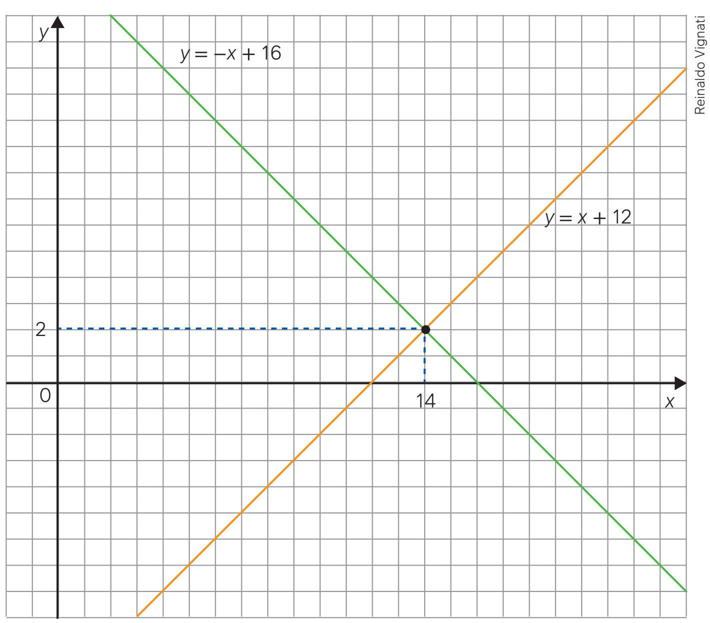
$$x + y = 16 \rightarrow \text{substituindo } y \text{ por 2, temos: } x + 2 = 16 \Rightarrow x = 14$$

Portanto, a solução do sistema é (14, 2) e o conjunto-solução é $S = \{(14, 2)\}$.

Observe que, no sistema apresentado anteriormente, existem duas equações a duas incógnitas x e y. Cada uma dessas equações pode ser associada a uma função afim, ao isolarmos y em função de x, isto é:

$$\begin{cases} x - y = 12 \\ x + y = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x - 12 \rightarrow \text{função afim} \\ y = -x + 16 \rightarrow \text{função afim} \end{cases}$$

Representando no plano cartesiano os gráficos dessas duas funções, temos:



Para pensar e discutir

1. Sendo x e y números reais, qual é a interpretação geométrica no plano cartesiano de cada uma das equações do sistema? 1. Uma reta.
2. E a interpretação geométrica da solução desse sistema? 2. O ponto de encontro das duas retas.
3. Se, no plano cartesiano, representarmos duas retas quaisquer, quais são as possibilidades das posições relativas entre elas? 3. Resposta no Manual do Professor.

Para explorar

Sugestão de encaminhamento: em pequenos grupos.

1. Utilizando o método da adição ou o método da substituição, resolvam cada um dos seguintes sistemas formados por duas equações a duas incógnitas:

a) $\begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 26 \end{cases}$ 1. a) (18, 8)

b) $\begin{cases} x - y = 10 \\ x - y = 12 \end{cases}$ 1. b) Não tem solução.

c) $\begin{cases} x - y = 10 \\ 2x - 2y = 20 \end{cases}$ 1. c) Infinitas soluções.

2. Como cada equação apresentada nos sistemas é formada pelas incógnitas x e y, ao isolar y em função de x vocês estarão diante de uma função afim. Dessa forma, representem cada um dos sistemas anteriores em um plano cartesiano para fazer uma interpretação geométrica.
Sugestão: utilizem um *software* de geometria dinâmica. 2. Respostas no Manual do Professor.

3. Redijam um texto que relate as observações sobre as possibilidades de soluções de um sistema linear formado por duas equações a duas incógnitas apoiando-se na representação geométrica no plano cartesiano. 3. Resposta pessoal.

Atividades

1. Resolva algebricamente cada um dos sistemas de equações lineares formados por duas equações a duas incógnitas. Caso o sistema admita solução, represente-a na forma de par ordenado.

a) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$ 1. a) (4, 2)

b) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$ 1. b) Não admite solução real.

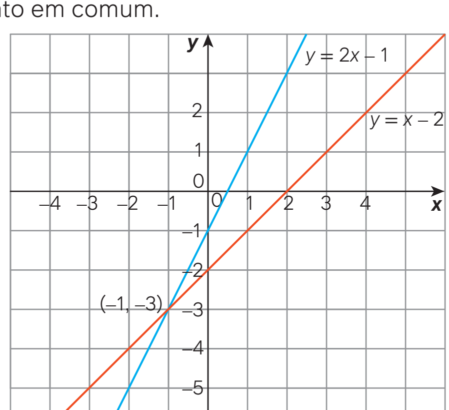
c) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ 1. c) Admite infinitas soluções.

2. Retorne aos sistemas da atividade anterior e responda utilizando os sistemas apresentados e resolvidos como argumento.

a) Todos esses sistemas admitem soluções? 2. a) Não, o sistema do item **b** não tem solução.

b) Podemos ter um sistema que admite mais de uma solução? 2. b) Sim, o sistema do item **c** tem infinitas soluções.

3. A seguir, estão representadas graficamente, no plano cartesiano, duas funções do 1º grau, sendo $y = f(x)$. A ideia dessa representação é determinar o(s) valor(es) para o(s) qual(is) essas duas funções assumem a mesma imagem. Ao fazer esse gráfico, observou-se que essas funções têm apenas um ponto em comum.



Reinaldo Vignati

a) Para qual valor de x essas duas funções são iguais? 3. a) –1

b) Qual é o valor de y em correspondência? 3. b) –3

c) Escreva um sistema de equações que represente essa situação. 3. c) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) Represente a solução desse sistema por meio de um par ordenado. 3. d) (–1, –3)

4. Em um sistema de equações lineares, quando cada equação tem o termo independente igual a zero, ele é dito **sistema homogêneo**. Resolva os sistemas lineares homogêneos a seguir e, depois, responda ao que se pede em cada item.

I. $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ **II.** $\begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases}$

a) Qual é a solução do sistema **I**? 4. a) $S = \{(0, 0)\}$

b) Os dois sistemas de equações lineares admitem a solução (0; 0)? 4. b) Sim.

c) Quantas soluções admite o sistema **II**? 4. c) Infinitas.

5. A seguir, tem-se um sistema linear homogêneo formado por três equações a três incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \\ 5z = 0 \end{cases}$$

a) Esse sistema admite a solução trivial (0, 0, 0)? 5. a) Sim.

b) Quantas soluções tem esse sistema? 5. b) 1

6. Junte-se a um colega e façam o que se pede.

Parte 1

a) Elaborem um sistema formado por duas equações a duas incógnitas que apresente exatamente uma solução. 6. Parte 1 a) Resposta pessoal.

b) No plano cartesiano, façam uma interpretação geométrica desse sistema identificando a solução. 6. Parte 1 b) Resposta pessoal.

Parte 2

a) Elaborem um sistema formado por duas equações a duas incógnitas que não apresente solução. 6. Parte 2 a) Resposta pessoal.

b) No plano cartesiano, façam uma interpretação geométrica desse sistema.

6. Parte 2 b) Resposta pessoal.

Parte 3

6. Parte 3 a) Resposta pessoal.

a) Elaborem um sistema formado por duas equações a duas incógnitas que apresente infinitas soluções.

b) No plano cartesiano, façam uma interpretação geométrica desse sistema identificando algumas soluções. 6. Parte 3 b) Resposta pessoal.

Cada dupla deverá apresentar os resultados obtidos para os colegas e, oralmente, informar as conclusões a respeito da resolução de um sistema formado por duas equações a duas incógnitas.

7. Juliana foi a um caixa eletrônico para sacar 100 reais. Ao sair, conferiu que a quantia estava correta. Verificou, ainda, que tinha recebido três tipos de cédula: 50 reais, 20 reais e 10 reais. Considerando que x, y e z representam a quantidade de cédulas de 50 reais, 20 reais e 10 reais, respectivamente, faça o que se pede.

a) Escreva uma equação que represente essa situação. 7. a) $50x + 20y + 10z = 100$

b) De qual das cédulas sabe-se a quantidade? Escreva como você obteve essa resposta.
7. b) Da cédula de 50 reais; resposta pessoal.

c) Indique todas as possibilidades de cédulas que Juliana recebeu. 7. c) Resposta no Manual do professor.

8. Retorne à situação anterior considerando as mesmas condições e acrescentando a seguinte informação: ao todo, Juliana recebeu 4 cédulas.

a) Escreva um sistema que represente tal situação.

b) Qual é a solução desse sistema? 8. b) (1, 2, 1)

9. Elabore uma situação de retirada de dinheiro em caixa eletrônico, como na **atividade 7**. Porém, agora, a quantia retirada deve ser de 200 reais e a resolução deve ter duas equações a três incógnitas. Apresente o sistema para que um colega o resolva.
9. Resposta pessoal.

10. Dois sistemas de equações são ditos equivalentes quando têm o mesmo conjunto-solução. Verifique se estes sistemas são equivalentes escrevendo o conjunto-solução de cada um deles.

10. Ambas as soluções são (2, 3).

Sistema **I** $\rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

Sistema **II** $\rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

11. Elabore dois sistemas de equações lineares formados por duas equações a duas incógnitas que sejam equivalentes. Depois, apresente o conjunto-solução desses sistemas. 11. Resposta pessoal.

12. Em uma lanchonete, dois sucos e dois sanduíches custam R$ 16,80, e três sucos e quatro sanduíches custam R$ 30,40. Diante disso, 12. a) $\begin{cases} 2x + 2y = 16,80 \\ 3x + 4y = 30,40 \end{cases}$

a) escreva um sistema que represente a situação.

b) determine o valor de cada suco e o valor de cada sanduíche. 12. b) Suco: R$ 3,20; sanduíche: R$ 5,20.

8. a) $\begin{cases} 50x + 20y + 10z = 100 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$

13. A seguir está representado um sistema formado por três equações e três incógnitas. Note que o número de incógnitas vai diminuindo da 1ª para a 3ª equação.

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 2y + z = 6 \\ 2z = 8 \end{cases}$$

O conjunto-solução desse sistema é representado por $S = \{(x, y, z)\}$, sendo (x, y, z) denominado de terna ordenada. Diante disso, 13. a) $S = \left\{\frac{17}{2}, 1, 4\right\}$

a) determine o conjunto-solução desse sistema.

b) explique, por meio de uma frase, como você procedeu para resolver tal sistema.
13. b) Resposta pessoal.

14. Calcule o valor de k considerando que a terna ordenada (1, 3, –2) representa a solução da equação linear $3x + ky - 2z = -14$. 14. $k = -7$

15. (UFJF-MG) O produto interno bruto (PIB) representa a soma, em valores monetários, de todos os bens e serviços finais produzidos em uma determinada região. Países desenvolvidos têm PIB maior. Por exemplo, dez vezes o PIB da Alemanha em 2017 resultou em dezenove vezes o PIB do Brasil no mesmo ano. Ainda em 2017, a diferença entre o PIB dos dois países foi de 1 trilhão e 800 bilhões de dólares. O valor do PIB do Brasil no ano de 2017, em trilhões de dólares, foi 15. Alternativa **e**.

a) 380

b) 200

c) 38

d) 3,8

e) 2,0

16. (Enem) Para sua festa de 17 anos, o aniversariante convidará 132 pessoas. Ele convidará 26 mulheres a mais do que o número de homens. A empresa contratada para realizar a festa cobrará R$ 50,00 por convidado do sexo masculino e R$ 45,00 por convidado do sexo feminino. Quanto esse aniversariante terá que pagar, em real, à empresa contratada, pela quantidade de homens convidados para sua festa?
16. Alternativa **b**.

a) 2.385,00

b) 2.650,00

c) 3.300,00

d) 3.950,00

e) 5.300,00

17. (Uece) Na sala de reuniões de um condomínio, há mesas de 4, 5 e 6 lugares, perfazendo o total de 22 mesas. Na última reunião que houve, compareceram 113 pessoas, que foram acomodadas nessas mesas, ocupando todos os lugares. Se o número de mesas de 6 lugares era o dobro do número de mesas de 5 lugares, então, o número de mesas com 4 lugares era
17. Alternativa **b**.

a) 10

b) 7

c) 4

d) 13

2 Resolução de sistemas de equações lineares

Agora que você já retomou a resolução de sistemas de equações lineares formados por duas equações e duas incógnitas, vamos ampliar esse estudo para outros sistemas com mais de duas incógnitas. Para tais sistemas, o procedimento que utilizaremos é conhecido como **método do escalonamento**. Esse método é fundamental para a compreensão e resolução de sistemas mais complexos e será abordado em detalhes.

Apenas para que possamos iniciar uma discussão sobre esse método, considere os dois sistemas de equações lineares formados por três equações e três incógnitas. Esses sistemas lineares são equivalentes, isto é, têm o mesmo conjunto-solução.

$$\text{Sistema I} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Sistema II} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -2z = -6 \end{cases}$$

Para pensar e discutir

1. Nesses dois sistemas, as incógnitas de todas as equações estão escritas na mesma ordem? 1. Sim.
2. Quantos coeficientes de incógnitas são nulos no sistema I? E no sistema II? 2. Nenhum; 3.
3. Qual dos sistemas você escolheria para encontrar o conjunto-solução? Explique como faria e encontre-o. 3. Respostas pessoais.

Retomando o sistema II anterior, é possível perceber algumas características nele.

- Em cada equação existe pelo menos um coeficiente de alguma incógnita que é não nulo (diferente de zero).
- Observando a ordem em que essas equações estão escritas no sistema (de cima para baixo), a quantidade de coeficientes nulos antes do 1º coeficiente não nulo aumenta de equação para equação.

Quando um sistema de equações lineares tem essas características, ele é dito **sistema escalonado**. Assim, são exemplos de sistemas escalonados:

- 1 coeficiente nulo na 2ª equação:

$$\begin{cases} 2x - 7y = 10 \\ 3y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 25 \\ 3y - z = 12 \end{cases}$$

- 1 coeficiente nulo na 2ª equação e 2 coeficientes nulos na 3ª equação:

$$\begin{cases} 4x - y + 3z = 20 \\ y - 7z = 15 \\ 4z = -16 \end{cases}$$

- 1 coeficiente nulo na 2ª equação e 3 coeficientes nulos na 3ª equação:

$$\begin{cases} 7x - y + 2z + w = 20 \\ 5y - 7z + 3w = 5 \\ w = -1 \end{cases}$$

Um sistema escrito na forma escalonada possibilita a obtenção do conjunto-solução ou alguma conclusão sobre ele de uma maneira mais direta.

Analise os dois sistemas lineares a seguir, formados por três equações a três incógnitas, escritos na forma escalonada. Para cada um deles, apresentamos o conjunto-solução.

Atividades resolvidas

4. Resolva este sistema escalonado em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ \phantom{x+{}} y - z = 5 \\ \phantom{x+y-{}} 2z = 6 \end{cases}$$

- Iniciamos pela 3ª equação, determinando o valor de z:

$$2z = 6 \Rightarrow z = 3$$

- Substituímos o valor de z encontrado na 2ª equação para obtermos y:

$$y - 3 = 5 \Rightarrow y = 8$$

- Na 1ª equação, substituímos os valores de y e z para determinarmos o valor de x:

$$x + 8 + 2 \cdot 3 = 0 \Rightarrow x + 14 = 0 \Rightarrow x = -14$$

Portanto, o conjunto-solução desse sistema é $S = \{(-14, 8, 3)\}$.

5. Resolva o sistema escalonado a seguir em que o número de equações é menor que o número de incógnitas.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ y - z = 5 \end{cases}$$

- Como temos mais incógnitas do que equações, podemos encontrar algumas soluções desse sistema por meio de tentativas. Assim, podemos atribuir valores para z e obter valores em correspondência para y e, depois, para x.
Reescrevemos esse sistema expressando y e x em função de z:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ y = 5 + z \end{cases}$$

- Substituindo y na 1ª equação:

$$\begin{cases} x - 3 \cdot (5 + z) + z = 0 \\ y = 5 + z \end{cases}$$

- Expressando x e y em função de z:

$$\begin{cases} x = 15 + 2z \\ y = 5 + z \end{cases}$$

- Assim, por exemplo, se considerarmos $z = 1$, teremos:

$$\begin{cases} x = 15 + 2 \cdot 1 \\ y = 5 + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 6 \end{cases}$$

Portanto, (17, 6, 1) é uma solução do sistema.

Para pensar e discutir

1. Qual é a solução do sistema anterior considerando $z = 2$? 1. (19, 7, 2)

2. Para $z = 0$, qual é a solução do mesmo sistema? 2. (15, 5, 0)

3. Se você considerar $z = a$, quais serão os valores de y e de x em função de a nesse sistema? 3. $y = 5 + a$ e $x = 15 + 2a$

4. Como você representaria, em função de a, o conjunto-solução do sistema? 4. $S = \{(15 + 2a, 5 + a, a)\}$

A forma escalonada

Nas duas atividades apresentadas, os sistemas estavam escritos na forma escalonada. Entretanto, nas situações que envolvem a resolução de sistemas, geralmente não temos essa forma. Assim, precisaremos saber escalonar um sistema para, então, resolvê-lo.

Considere novamente os dois sistemas lineares equivalentes a seguir, já apresentados anteriormente.

$$\text{Sistema I} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \text{Sistema II} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -2z = -6 \end{cases}$$

Obtendo a forma escalonada.

O sistema II está na forma escalonada e é equivalente ao sistema I, que não está na forma escalonada. Para chegarmos à forma escalonada, precisamos efetuar transformações de tal modo que obtenhamos um sistema que tenha o mesmo conjunto-solução. As transformações que podem ser feitas nesse sentido são:

- trocar a posição de duas equações no sistema;
- multiplicar uma equação qualquer do sistema por um número real diferente de zero;
- substituir uma equação do sistema pela soma dela, membro a membro, com alguma outra equação do próprio sistema.

Nas atividades resolvidas a seguir, observe passo a passo como essas transformações podem ser utilizadas para escalonar um sistema apresentado anteriormente.

Atividades resolvidas

6. Obtenha a forma escalonada do sistema a seguir formado por 3 equações e 3 incógnitas.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

- Iniciamos transformando o sistema de modo que os coeficientes da incógnita x na 2ª e na 3ª equação sejam anulados.

(I) Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por –2:

$-2 \cdot (x + 2y + z) + (2x - 3y - z) = -2 \cdot 3 + 4$

$-7y - 3z = -2$

(II) Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por –3:

$-3 \cdot (x + 2y + z) + (3x - y - 2z) = -3 \cdot 3 + 1$

$-7y - 5z = -8$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases}$$

- Fixando a 1ª equação, repetimos o processo para a 2ª e a 3ª equações, eliminando, agora, a incógnita y na 3ª equação:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases}$$

(I) Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 2ª equação multiplicada por –1:

$-1 \cdot (-7y - 3z) + (-7y - 5z) = -1(-2) + (-8)$

$-2z = -6$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -2z = -6 \end{cases}$$

Obtemos, assim, o sistema equivalente ao inicial, mas na forma escalonada.

Observação:

Para obter a solução do sistema, basta determinar o valor de z na 3ª equação, depois y na 2ª equação (substituindo o valor de z obtido) e determinar o valor de x na 1ª equação (substituindo os valores de y e z determinados anteriormente).

7. A imagem apresenta os cartazes que estavam na vitrine de uma loja de roupas.
Considerando que os valores unitários de cada uma dessas peças de roupas não sejam alterados quando vendidos de dois em dois, ou em mais quantidades, quanto gastará uma pessoa que deseja comprar uma calça, uma camisa e uma bermuda?

Reinaldo Vignati

- Representando por x, y e z, respectivamente, o preço unitário de uma calça, uma camisa e uma bermuda, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 140 \\ x + z = 170 \\ y + z = 120 \end{cases}$$

- Adicionando essas três equações membro a membro, obtemos:

$$2x + 2y + 2z = 430$$

- Dividindo membro a membro por 2, temos:

$$x + y + z = 215$$

Portanto, a pessoa gastará R$ 215,00 pela compra de uma calça, uma camisa e uma bermuda.

Para pensar e discutir

1. A questão foi resolvida sem a forma escalonada. Como você faria para obter, com base no sistema dado e na equação $x + y + z = 215$, o valor de x? E o valor de y? E o valor de z? 1. Respostas pessoais.
2. Qual é o sistema equivalente ao apresentado na forma escalonada? 2. Resposta no Manual do Professor.

8. Retome o sistema apresentado no início deste capítulo sobre o balanceamento químico e obtenha a solução.

- Reescrevendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x = z \\ 6x = 2w \\ 2y = 2z + w \end{cases}$$

- Observe que, a partir da 1ª equação, temos z em função de x e, na 2ª equação, podemos obter w em função de x dividindo membro a membro por 2. Assim, temos:

$$z = 2x \text{ e } w = 3x.$$

- Substituindo essas duas expressões na 3ª equação, vem:

$$2y = 2z + w \Rightarrow 2y = 2 \cdot 2x + 3x$$
$$2y = 7x \Rightarrow y = \frac{7x}{2}$$

- Como expressamos y, z e w em função de x, temos que a solução do sistema, em função de x, pode ser representada por (considerando a ordem das incógnitas como x, y, z e w):

$$\left(x, \frac{7x}{2}, 2x, 3x\right)$$

Lembrando que, em Química, os valores correspondentes devem ser representados por números inteiros positivos, portanto basta atribuir valores pares para x para obter soluções.

Para pensar e discutir

1. Conforme resolução do sistema anterior, por qual motivo x deve ser um número par? 1. Resposta pessoal.
2. Qual é a solução do mesmo sistema considerando $x = 10$? 2. (10, 35, 20, 30)
3. Como esse tipo de problema é resolvido na disciplina de Química? Exemplifique. 3. Respostas pessoais.

Para explorar

Junte-se a um colega e considerem os três sistemas de equações lineares a seguir. Representem esses sistemas lineares na forma escalonada e, caso existam, obtenham suas soluções.

$$\text{I} \rightarrow \begin{cases} 2x+y-z = -3 \\ x-y+2z = 2 \\ -x+3y-4z = -4 \end{cases} \qquad \text{II} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 5 \end{cases} \qquad \text{III} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 7 \end{cases}$$

1. Qual sistema, ao ser escalonado, ficou apenas com duas equações? Qual é a conclusão sobre sua solução? 1. III; resposta pessoal
2. Qual sistema, ao ser escalonado, apresentou uma igualdade impossível? Qual é a conclusão sobre sua solução? 2. II; resposta pessoal
3. Quais são as possibilidades observadas sobre a solução de um sistema? 3. Resposta no Manual do Professor.

Importante:

Ao resolver um sistema formado por equações lineares existem três possibilidades quanto ao número de soluções:

- **1 solução apenas**: dizemos que o sistema é **possível** e **determinado**;
- **Infinitas soluções**: dizemos que o sistema é **possível** e **indeterminado**;
- **Nenhuma solução**: dizemos que o sistema é **impossível**.

Atividades

18. Você já conhece procedimentos para a resolução de sistemas de equações lineares formados por duas equações e duas incógnitas. Entre esses procedimentos estão o método da adição e o método da substituição. Como o método do escalonamento é mais amplo, escreva cada sistema na forma escalonada e, então, obtenha as correspondentes soluções, caso existam.

a) $\begin{cases} x - 2y = 10 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ 18. a) $S = \left\{\left(\frac{20}{7}, -\frac{25}{7}\right)\right\}$

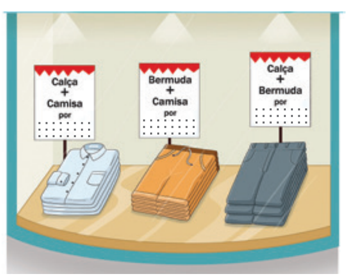
b) $\begin{cases} x + y = 25 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases}$ 18. b) $S = \left\{\left(\frac{93}{5}, \frac{32}{5}\right)\right\}$

c) $\begin{cases} x - y = 10 \\ 3x - 3y = 30 \end{cases}$ 18. c) $S = \{(x, x - 10)\}$

d) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$ 18. d) $S = \{\} = \varnothing$

19. Elabore outra situação alterando os valores do quadro a seguir (utilize o exemplo já apresentado como referência), isto é, substitua a parte hachurada por valores diferentes aos da **atividade resolvida 7**. 19. Resposta pessoal.

Reinaldo Vignati



Calça + Camisa por R$ ::::::::::::
Bermuda + Camisa por R$ ::::::::::
Calça + Bermuda por R$ ::::::::::::

Depois, resolva individualmente a situação e apresente o resultado.

20. Considere o exemplo de equação química indicada a seguir:

$$C_3H_8 + O_2 \rightarrow H_2O + CO_2$$

a) Escreva um sistema que representa a situação de equilíbrio. 20. a) Resposta pessoal.

b) Resolva esse sistema. 20. b) Resposta pessoal.

21. Pesquise outra situação de equação química que envolva o equilíbrio e faça o que se pede.

a) Escreva um sistema que representa a situação de equilíbrio. 21. a) Resposta pessoal.

b) Resolva esse sistema. 21. b) Resposta pessoal.

22. (Uerj) Observe a equação química que representa a fermentação do açúcar.

$$xC_6H_{12}O_6 \rightarrow yCO_2 + zC_2H_5OH$$

Uma das formas de equilibrar essa equação é igualar, em seus dois membros, as quantidades de átomos de cada elemento químico. Esse processo dá origem ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 6x = y + 2z \\ 12x = 6z \\ 6x = 2y + z \end{cases}$$

Determine o conjunto-solução do sistema e calcule os menores valores inteiros positivos de x, y e z que formam uma das soluções desse sistema. 22. $S = \{(x, 2x, 2x)\}$.

23. Ao escalonar um sistema linear homogêneo formado por três equações e três incógnitas, Pedro chegou ao seguinte sistema equivalente ao original:

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 0 \\ \phantom{x - {}} 2y - z = 0 \end{cases}$$

Como esse sistema escalonado tem duas equações e três incógnitas, Pedro fez $z = 2k$ para representar as soluções do sistema em função de k.

a) Qual conjunto-solução Pedro obteve? 23. a) $S = \{(-5k, k, 2k)\}$.

b) Fazendo $k = 2$, obtenha uma solução desse sistema. 23. b) $S = \{(-10, 2, 4)\}$.

c) Esse sistema admite a **solução trivial (0, 0, 0)**? 23. c) Sim.

24. (Cefet-MG) Uma senhora resolveu vender bombons e trufas na porta de uma escola para complementar a renda familiar. No primeiro dia, ela faturou R$ 107,50 com a venda de 25 bombons e 15 trufas. No dia seguinte, seu faturamento foi igual a R$ 185,00 e foram vendidos 20 bombons e 45 trufas. Um aluno que comprou, dessa senhora, 4 bombons e 3 trufas, pagou a quantia de: 24. Alternativa **a**.

a) R$ 19,00. **b)** R$ 19,50. **c)** R$ 22,50. **d)** R$ 23,00.

25. (Mack-SP) Um teste de matemática tem questões valendo 1 ponto, 2 pontos e 3 pontos. Se um estudante obteve 55 pontos em 30 questões desse teste e acertou 5 questões de 2 pontos a mais do que o número de questões de 1 ponto que ele acertou, o número de questões de 3 pontos, respondidas corretamente por ele, foi 25. Alternativa **e**.

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

26. (Acafe-SC) Uma revendedora de carros possui em seu pátio um estoque de carros nos modelos A e B no valor de R$ 7.400.000,00. O valor de cada carro no modelo A é de R$ 70.000,00 e o valor de cada carro no modelo B é R$ 50.000,00. Ao longo de um determinado mês foram vendidos 40% do número de carros do modelo A e 60% do modelo B, gerando uma receita de R$ 3.810.000,00. A porcentagem aproximada de carros vendidos no mês foi de: 26. Alternativa **b**.

a) 51 **b)** 53 **c)** 55 **d)** 57

27. (Unicamp-SP) Considere o sistema linear nas variáveis x, y, z e w, 27. Alternativa **d**.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 2 \\ w - z = 3 \end{cases}$$

Logo, a soma $x + y + z + w$ é igual a

a) –2 **b)** 0 **c)** 6 **d)** 8

28. (Ifal) Um hospital administra 2016 mg de um certo medicamento em cápsulas para três pacientes, em conjunto, por mês. O paciente A usa cápsulas de 10 mg, o paciente B, de 12 mg e o paciente C, de 15 mg. O paciente A toma metade do número de cápsulas de B e os três juntos tomam 163 cápsulas por mês. Quantas cápsulas o paciente C toma por mês? 28. Alternativa **b**.

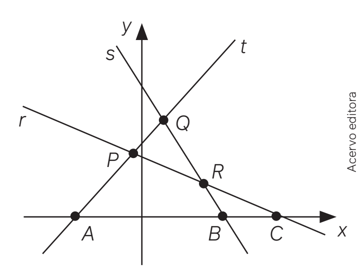
a) 39 **b)** 46 **c)** 62 **d)** 78 **e)** 92

29. (ESPM) Bia é 6 anos mais velha que Carla. Há 2 anos, a idade de Bia era o triplo da idade de Ana e daqui a 1 ano será igual à soma das idades de Ana e Carla. Podemos afirmar que: 29. Alternativa **e**.

a) Ana tem 7 anos.
b) Bia tem 12 anos.
c) Ana é mais velha que Carla.
d) Carla tem 6 anos.
e) Ana e Carla têm a mesma idade.

30. (UFSC) Se a terna (a, b, c) é solução do sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$, então calcule o valor numérico de $a + b + c$. 30. 6

31. (Enem) Na figura estão representadas três retas do plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A, B e C os pontos de intersecções dessas retas com o eixo x. 31. Alternativa **d**.



Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que

a) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.

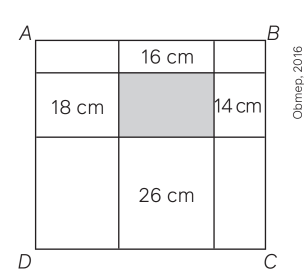
b) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.

c) possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.

d) não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.

e) possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.

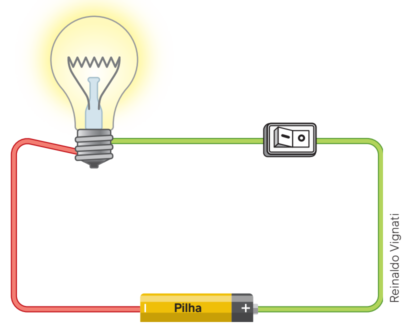
32. (Obmep) O retângulo $ABCD$ foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. O perímetro do retângulo $ABCD$ é 54. Qual é o perímetro do retângulo cinza? 32. Alternativa **c**.



a) 15 cm **b)** 19 cm **c)** 20 cm **d)** 22 cm **e)** 24 cm

Uma aplicação de sistemas lineares na Física

Além do balanceamento na disciplina de Química, que citamos neste capítulo, existem outras aplicações da resolução de sistemas lineares. Uma dessas aplicações diz respeito a redes elétricas. O texto a seguir aborda essa aplicação.



Redes elétricas

Circuitos elétricos são um assunto trabalhado na 3ª série do Ensino Médio com o objetivo de mostrar que os fenômenos elétricos encontram-se presentes no cotidiano de todos, pois há uma infinidade de aparelhos e equipamentos cujo funcionamento depende de correntes elétricas.

Discutiremos as leis básicas dos circuitos elétricos e mostraremos como estas leis podem ser usadas para obtermos os sistemas de equações lineares cujas soluções fornecem as correntes que fluem [em um] dado circuito elétrico.

Os circuitos elétricos consistem dos seguintes componentes:

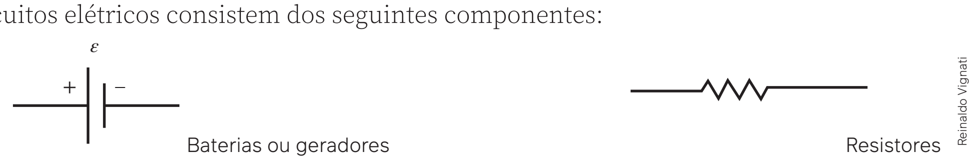


Figura 2.1.a

Os geradores elétricos, tais como as baterias, criam correntes [em um] circuito elétrico e os resistores, como as lâmpadas elétricas, limitam as magnitudes das correntes.

Existem três grandezas físicas usadas no estudo de circuitos elétricos: o *potencial elétrico* (E) medido em volts (V), a *resistência* (R) medida em ohms (Ω) e a *intensidade corrente* (I) medida em ampères (A).

O potencial elétrico é associado com dois pontos de um circuito elétrico e na prática é medido conectando estes dois pontos a um aparelho chamado *voltímetro*. Por exemplo, uma pilha AA comum é classificada como tendo 1,5 V, o que significa que esta é a diferença de potencial elétrico entre seus terminais positivo de negativo.

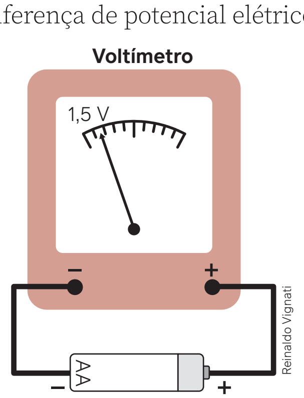


Figura 2.1.b

[Em um] circuito elétrico, o potencial elétrico entre dois pontos é chamado de *diferença de potencial* ou *queda de tensão* entre estes dois pontos. Como veremos, as intensidades de correntes e as quedas de tensão podem ser tanto positivas quanto negativas.

O fluxo da corrente [em um] circuito elétrico é governado por três princípios básicos:

1. A ***lei de Ohm*** – A diferença de potencial através de um resistor é o produto da corrente que passa por ele e a resistência, ou seja, $E = I \cdot R$.
2. A ***lei de Corrente de Kirchhoff*** – A soma algébrica das correntes fluindo para dentro de qualquer ponto de um circuito elétrico é igual à soma algébrica das correntes fluindo para fora do ponto.
3. A ***lei de Voltagem de Kirchhoff*** – Em torno de qualquer circuito fechado (também chamado de *malha*), a soma algébrica das diferenças de potencial é zero.

[...]

Encontre as correntes I_1, I_2 e I_3 no circuito abaixo:

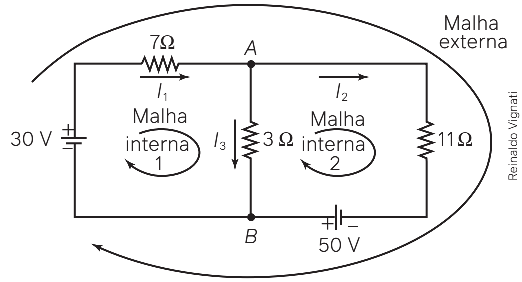


Figura 2.1.c

As direções dos fluxos para as correntes I_1, I_2 e I_3 (marcadas por flechas) foram tomadas arbitrariamente. Se alguma destas correntes for negativa é porque, na realidade, flui no sentido oposto ao selecionado.

Aplicando a lei de Corrente de Kirchhoff aos pontos *A* e *B*, obtemos:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \text{ (ponto } A) \\ I_3 + I_2 = I_1 \text{ (ponto } B) \end{cases}$$

Como as duas equações representam a mesma equação linear $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ precisamos de mais duas equações para determinar I_1, I_2 e I_3 de modo único. Estas equações serão obtidas com a lei de Voltagem de Kirchhoff.

Para aplicar a lei de Voltagem de Kirchhoff a um circuito fechado, selecione um sentido positivo em torno do circuito (digamos, sentido horário) e faça a seguinte convenção de sinais:

- Uma corrente passando por um resistor produz uma diferença de potencial positiva se flui no sentido positivo do circuito e uma diferença de potencial negativa se flui no sentido negativo do circuito.
- Uma corrente passando por um capacitor produz uma diferença de potencial positiva se o sentido positivo do circuito é de + para – e uma diferença de potencial negativa se o sentido positivo do circuito é de – para +.

Aplicando a lei de Voltagem de Kirchhoff e a lei de Ohm à malha interna 1 e 2 da *Figura 2.1.c*, obtemos, respectivamente

$$7 \cdot I_1 + 3 \cdot I_3 - 30 = 0 \text{ e } 11 \cdot I_2 - 3 \cdot I_3 - 50 = 0$$

Combinando estas equações obtemos o sistema linear:

$$S: \begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 7 \cdot I_1 + 3 \cdot I_3 = 30 \\ 11 \cdot I_2 - 3 \cdot I_3 = 50 \end{cases}$$

Infográfico clicável
Sistemas e as leis de Kirchhoff

RUFATO, S. A. C. Aplicações de sistemas de equações lineares. *In*: RUFATO, S. A. C. *Sistemas Lineares, aplicações e uma sequência didática*. 2014. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014. p. 39-41. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-19032014-102209/publico/SoniaRufato_revisada.pdf. Acesso em: 10 set. 2024.

1. Explique oralmente como obter as equações $7 \cdot I_1 + 3 \cdot I_3 - 30 = 0$ e $11 \cdot I_2 - 3 \cdot I_3 - 50 = 0$ apresentadas no texto.
1. Resposta pessoal.

2. Resolva o sistema linear indicando os valores de I_1, I_2 e I_3. 2. $I_1 = \frac{570}{131} A$, $I_2 = \frac{590}{131} A$ e $I_3 = \frac{-20}{131} A$
Importante:
Converse com seu professor ou sua professora de Física em caso de dúvidas.

Atividades finais

1. Considere o sistema de equações lineares escalonado:

$$\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 3y = 12 \end{cases}$$

Quantas soluções tem esse sistema? 1. 1

2. O par ordenado (3, –1) é solução do sistema $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - 5y = 11 \end{cases}$? Justifique. 2. Sim. Resposta pessoal.

3. O que define dois sistemas de equações lineares equivalentes? 3. Sistemas que têm o mesmo conjunto-solução.

4. Explique quantas soluções tem um sistema de equações lineares quando ele é classificado como

a) possível e determinado. 4. a) Uma solução.

b) possível e indeterminado. 4. b) Infinitas soluções.

c) impossível. 4. c) Nenhuma solução.

5. Quantas soluções tem este sistema escalonado? 5. Infinitas.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ 2y + z = 8 \end{cases}$$

6. Após escalonar um sistema de equações lineares, um estudante concluiu que o sistema é impossível, isto é, não admite solução. Observe o resultado e explique o motivo dessa conclusão. 6. Resposta pessoal.

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2y - z = -2 \\ 0 = 10 \end{cases}$$

7. Duas equações do 1º grau com duas incógnitas podem ser representadas no plano cartesiano como duas retas.

a) Se essas retas são paralelas, qual é a interpretação do conjunto-solução do correspondente sistema? 7. a) O conjunto-solução é vazio.

b) Se essas retas são coincidentes, quantas são as soluções desse sistema? 7. b) Infinitas.

c) Se essas retas são concorrentes, qual é a interpretação do conjunto-solução do correspondente sistema? 7. c) O conjunto-solução é unitário.

Questões de vestibulares e Enem

8. (UEA-AM) Se x e y são as soluções do sistema linear $\begin{cases} 2x + 3y = 74 \\ 3x - 2y = 20 \end{cases}$, então $x - y$ é igual a 8. Alternativa **a**.

a) 2 **b)** 10 **c)** 4 **d)** 6 **e)** 8

9. (Famerp-SP) Ana e Beto estão poupando dinheiro individualmente. Atualmente, o dinheiro que Ana e Beto já pouparam está na razão de 13 para 7, nessa ordem. Se Ana desse para Beto R$ 90,00 da sua poupança, os dois ficariam com poupanças de mesmo valor. Na situação dada, a poupança atual de Beto é de 9. Alternativa **d**.

a) R$ 360,00

b) R$ 240,00

c) R$ 300,00

d) R$ 210,00

e) R$ 390,00

10. (FGV-SP) Em certa pizzaria, utiliza-se 0,4 kg de farinha e 0,2 kg de queijo para fazer a pizza simples. Já para fazer a pizza especial utiliza-se 0,5 kg de farinha e 0,3 kg de queijo. Em certa noite foram feitas pizzas simples e especiais, mas os dados de vendas foram perdidos. No entanto, examinando o estoque, notou-se que naquela noite foram usados 40 kg de farinha e 22 kg de queijo. Supondo que as receitas de pizza simples e pizza especial tenham sido seguidas à risca, quantas pizzas simples foram vendidas naquela noite? 10. Alternativa **c**.

a) 40

b) 45

c) 50

d) 55

e) 60

11. (Unicamp-SP) Luísa estava conversando com seu irmão ao telefone quando passou perto de uma feira de adoção de animais. Ela comentou que, na feira, havia cachorros, gatos e pintinhos. O irmão, curioso, perguntou-lhe quantos gatos havia. Luíza, que adora charadas matemáticas, limitou-se a dizer que a quantidade de gatos somada à quantidade de pintinhos era 4 a mais do que a quantidade de cachorros, e que a quantidade de gatos somada à quantidade de cachorros era 6 a mais do que a quantidade de pintinhos. O irmão de Luísa, que adora as aulas de matemática, rapidamente chegou à resposta correta. Havia quantos gatos para adoção? 11. Alternativa **b**.

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7

12. (Uerj) Uma nutricionista recomendou, para uma pessoa adulta, a ingestão de pão, fruta e iogurte no café da manhã. Os três alimentos, em comum, devem conter, exatamente, 16 g de proteínas, 124 g de carboidratos e 10 g de gorduras. Admita a seguinte quantidade de nutrientes, em gramas, em uma porção de 100 g de cada alimento:

QUANTIDADE DE NUTRIENTE (EM g)	PORÇÃO DE 100 g		
	PÃO	FRUTA	IOGURTE
proteínas	8	0	4
carboidratos	60	20	2
gorduras	4	0	3

A partir da tabela, calcule quantas porções de cada alimento essa pessoa deve ingerir de modo a consumir as quantidades de nutrientes recomendadas para seu café da manhã. 12. 1 porção de pão, 3 porções de fruta e 2 porções de iogurte

13. (FMJ-SP) Um grupo de 61 amigos fez uma viagem em 19 veículos, entre motos, carros com 4 lugares e carros com 5 lugares. Cada moto foi ocupada por 2 amigos e 5 carros ficaram com um dos assentos desocupado. Se o número de carros com 4 lugares é o dobro do número de carros com 5 lugares, o número de motos que participou dessa viagem foi 13. Alternativa **a**.

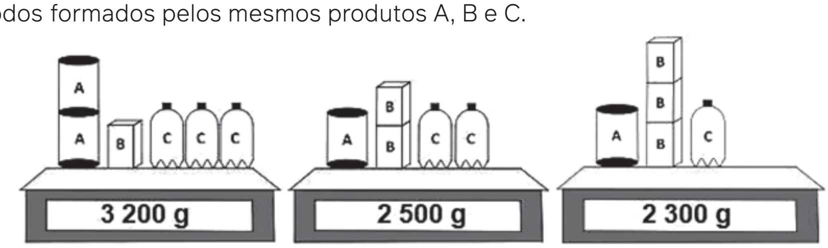
a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

14. (Mack-SP) O Aquário de São Paulo, inaugurado em 2006, é considerado o primeiro Aquário Temático da América Latina. Além de seus milhares de animais de centenas de espécies, o aquário conta com atrações temáticas. Para participar delas, é necessário adquirir ingressos extras que custam R$ 20,00 para “O Mergulho das Sereias” e R$ 15,00, para “Jurassic Aquarium”.

Certo dia, foram vendidos 378 ingressos para essas atrações temáticas e a respectiva arrecadação foi de R$ 6.700,00. Nessas condições, a quantidade de ingressos vendidos para “O Mergulho das Sereias” foi de 14. Alternativa **a**.

a) 206
b) 198
c) 189
d) 172
e) 168

15. (UPE) Um desafio lançado por um programa televisivo consiste em acertar a massa exata de um determinado conjunto de produtos. Sylvie, telespectadora assídua do programa, registrou a massa real dos três conjuntos da figura a seguir, todos formados pelos mesmos produtos A, B e C.



UPE, 2022

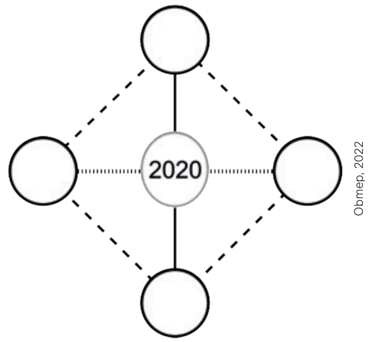
O desafio final da temporada foi acertar a massa total de 3 unidades do produto A, 5 unidades do produto B e 2 unidades do produto C. Sylvie, após alguns cálculos, determinou corretamente que o valor dessa massa, em quilograma, é igual a 15. Alternativa **c**.

a) 4,5
b) 4,6
c) 4,7
d) 4,8
e) 4,9

16. (Unicamp-SP) Certo país adquiriu 5 000 000 de doses das vacinas Alfa, Beta e Gama, pagando um preço de $ 40.000.000,00 pelo total. Cada dose das vacinas Alfa, Beta e Gama custou $ 5,00, $ 10,00 e $ 20,00, respectivamente. Sabendo que o número de doses adquiridas da vacina Beta é o triplo do número de doses adquiridas da vacina Gama, o número de doses adquiridas da vacina Alfa foi de: 16. Alternativa **d**.

a) 1 500 000
b) 2 000 000
c) 2 500 000
d) 3 000 000

17. (Obmep) Priscila escreveu um número em cada um dos círculos vazios da figura, de modo que a soma dos quatro números escritos ficou igual à soma dos três números ligados pela linha vertical e igual à soma dos três números ligados pela linha horizontal. Qual é a soma dos quatro números que Priscila escreveu? 17. Alternativa **c**.



a) 2 020
b) 3 030
c) 4 040
d) 5 050
e) 6 060

18. (FMJ-SP) André, Beto e Carlos colecionaram figurinhas e o número médio de figurinhas que cada um deles tem é igual a 332. Carlos deu 45 figurinhas para André e assim, André e Beto, juntos, ficaram com um total de 490 figurinhas. Inicialmente o número de figurinhas de Carlos era 18. Alternativa **a**.

a) 551
b) 491
c) 521
d) 461
e) 431

19. (Enem) O metrô de um município oferece dois tipos de tíquetes com colorações diferentes, azul e vermelha, sendo vendidos em cartelas, cada qual com nove tíquetes da mesma cor e mesmo valor unitário. Duas cartelas de tíquetes azuis e uma cartela de tíquetes vermelhos são vendidas por R$ 32,40. Sabe-se que o preço de um tíquete azul menos o preço de um tíquete vermelho é igual ao preço de um tíquete vermelho mais cinco centavos. Qual o preço, em real, de uma cartela de tíquetes vermelhos? 19. Alternativa **b**.

a) 4,68
b) 6,30
c) 9,30
d) 10,50
e) 10,65

20. (Enem) O pacote de salgadinho preferido de uma menina é vendido em embalagens com diferentes quantidades. A cada embalagem é atribuído um número de pontos na promoção:
"Ao totalizar exatamente 12 pontos em embalagens e acrescentar mais R$ 10,00 ao valor da compra, você ganhará um bichinho de pelúcia".
Esse salgadinho é vendido em três embalagens com as seguintes massas, pontos e preços:

Massa da embalagem (g)	Pontos da barra	Preço (R$)
50	2	2,00
100	4	3,60
200	6	6,40

A menor quantia a ser gasta por essa menina que a possibilite levar o bichinho de pelúcia nessa promoção é

20. Alternativa **c**.

a) R$ 10,80.
b) R$ 12,80.
c) R$ 20,80.
d) R$ 22,00.
e) R$ 22,80.

21. (Enem) A meta de uma concessionária de automóveis é vender, pelo menos, 104 carros por mês. Sabe-se que, em média, em dias em que não são oferecidos descontos, são vendidos 3 carros por dia; em dias em que há o desconto mínimo, são vendidos 4 carros por dia; e, em dias em que há desconto máximo, são vendidos 5 carros por dia.
No mês atual, até o fim do expediente do sexto dia em que a concessionária abriu, não foram oferecidos descontos, tendo sido vendidos 18 carros, conforme indicava a média. Ela ainda abrirá por mais 20 dias neste mês.
A menor quantidade de dias em que será necessário oferecer o desconto máximo, de modo que ainda seja possível a concessionária alcançar sua meta de vendas para o mês, é 21. Alternativa **a**.

a) 6
b) 10
c) 11
d) 13
e) 18

22. (Enem) Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$ 20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo deverá pagar R$ 10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R$ 100,00. Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo? 22. Alternativa **a**.

a) 30 **b)** 36 **c)** 50 **d)** 60 **e)** 64

23. (Enem) Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa igual a 2/3 do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos. Qual a expressão que representa a relação entre X e Y? 23. Alternativa **b**.

a) $5X - 3Y + 15 = 0$
b) $5X - 2Y + 10 = 0$
c) $3X - 3Y + 15 = 0$
d) $3X - 2Y + 15 = 0$
e) $3X - 2Y + 10 = 0$

24. (Enem) Visando atingir metas econômicas previamente estabelecidas, é comum no final do mês algumas lojas colocarem certos produtos em promoção. Uma determinada loja de departamentos colocou em oferta os seguintes produtos: televisão, sofá e estante. Na compra da televisão mais o sofá, o cliente pagaria R$ 3 800,00. Se ele levasse o sofá mais a estante, pagaria R$ 3 400,00. A televisão mais a estante sairiam por R$ 4 200,00. Um cliente resolveu levar duas televisões e um sofá que estavam na promoção, conseguindo ainda mais 5% de desconto pelo pagamento à vista.

O valor total, em real, pago pelo cliente foi de 24. Alternativa **d**.

a) 3 610,00. **b)** 5 035,00. **c)** 5 415,00. **d)** 5 795,00. **e)** 6 100,00.

25. (Enem) Três amigos, A, B e C, se encontram em um supermercado. Por coincidência, estavam comprando os mesmos itens, conforme o quadro.

Amigos	Arroz (kg)	Feijão (kg)	Macarrão (kg)
A	3	2	4
B	2	3	3
C	2	2	2

Os amigos estavam muito entretidos na conversa e nem perceberam que pagaram suas compras, pegaram seus trocos e esqueceram seus comprovantes. Já longe do supermercado, "A" lembrou que precisava saber o quanto pagou por um quilo de arroz e dois quilos de macarrão, pois estava comprando para sua vizinha e esperava ser ressarcido. "B", que adorava desafios matemáticos, disse que pagou suas compras com R$ 40,00 e obteve troco de R$ 7,30, e que conseguiria determinar o custo desses itens se os amigos dissessem como pagaram e quanto foram seus respectivos trocos. "A" disse que pagou R$ 40,00 e obteve troco de R$ 4,00, e "C" pagou com R$ 30,00 e obteve troco de R$ 5,40.

A vizinha de "A" deve a ele pela compra, em reais, o valor de 25. Alternativa **c**.

a) 8,10 **b)** 10,00 **c)** 11,40 **d)** 12,00 **e)** 13,20

Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão em relação aos assuntos e objetivos trabalhados ao longo do presente capítulo.

Objetivos de aprendizagem	Sim	Preciso retomar
Identifico equações lineares com mais de uma incógnita.		
Compreendo o que representa a solução de um sistema de equações lineares com duas ou mais incógnitas.		
Resolvo sistemas de equações lineares por meio do método do escalonamento.		
Identifico quando um sistema de equações lineares possui solução única, não possui solução ou admite infinitas soluções.		
Resolvo problemas relacionados a sistemas de equações lineares.		

Hedzun Vasyl/Shutterstock.com

Neste capítulo, você vai:

- empregar o diagrama de árvore na resolução de problemas de contagem;
- utilizar o princípio aditivo de contagem para resolver problemas;
- utilizar o princípio multiplicativo de contagem para resolver problemas;
- elaborar situações de contagem que possam ser resolvidas pelo princípio aditivo ou princípio multiplicativo;
- diferenciar problemas de contagem em que a ordem dos elementos influencia no total de possibilidades daqueles problemas em que a ordem dos elementos não influencia;
- calcular o número de possibilidades de ocorrência de um evento utilizando estratégias de arranjo, combinação, permutação simples e permutação com repetição;
- construir o triângulo de Pascal e compreender propriedades entre os elementos correspondentes.

Jogo de xadrez.

CAPÍTULO

4

Análise combinatória

Na elaboração das placas dos automóveis, na análise de possibilidades para lançamentos consecutivos de um dado, nas diferentes possibilidades para a resolução de uma jogada em uma disputa de um jogo de xadrez temos exemplos em que a contagem representa algo indispensável. Neste capítulo, você vai resolver problemas de contagem levando em consideração se há ou não repetição de elementos, se todos os elementos serão considerados em determinado agrupamento e se a ordem dos elementos importa ou não para formar um novo agrupamento.

1. **Quantas voltas em um relógio analógico o ponteiro dos minutos faz ao longo de um dia? Como você fez esse cálculo?** 1. 24; resposta pessoal.
2. **De quantas maneiras diferentes você pode escolher duas pessoas de sua turma para formar uma comissão? Explique como pensou.** 2. Resposta pessoal.

1 Princípios de contagem

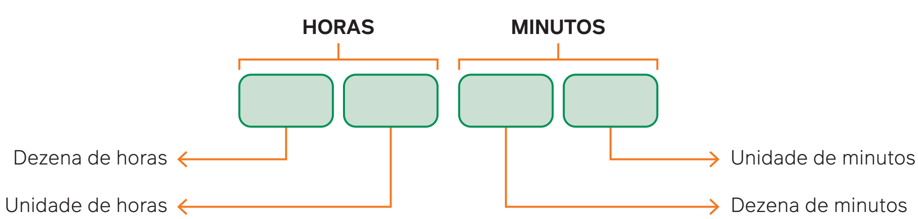
O relógio digital a seguir registra três momentos diferentes de um mesmo dia. O primeiro momento é zero hora (meia-noite), o segundo momento já é o início da tarde e o terceiro momento, o final do dia. Note que, da esquerda para a direita, existem quatro algarismos para representar as horas: dezenas das horas, unidades das horas, dezenas dos minutos e unidades dos minutos.

Mauro Salgado

Para pensar e discutir

1. Considere o intervalo de uma hora, isto é, por exemplo, de 00h00min até 01h00min. Quantas trocas de algarismos foram feitas na unidade de minuto? 1. 60
2. E na dezena de minutos? 2. 6
3. Considere o intervalo de exatamente um dia inteiro: Quantas trocas de algarismos foram feitas na unidade de hora? 3. 24
4. E na dezena de horas? 4. 3
5. Em um dia completo, quantas trocas de algarismos ao todo foram feitas nas quatro unidades do mostrador? 5. 1 611

Essa situação de contagem não é simples de ser resolvida. Exige de você uma organização para analisar o que acontece com cada uma das “leitoras” do relógio digital: na leitora de horas (unidades e dezenas de horas) e na leitora dos minutos (unidades e dezenas de minutos).



Acervo editora

mmtsales/Shutterstock.com

A Via Láctea pode ser vista no céu da Ilha de Fernando de Noronha (PE), Brasil, 2017.

Em um dos primeiros contatos que temos com a Matemática, somos colocados diante de situações de contagem. Os dedos das mãos constituem nossa primeira “máquina de calcular”. No início recitamos os números sem saber a que se referem. Depois, iniciamos contando as pessoas presentes em uma sala, avaliamos a quantidade de brinquedos e, algumas vezes, ensaiamos calcular até as estrelas do céu. Você saberia estimar quantas estrelas existem? É possível contá-las diretamente?

A contagem representa, assim, a primeira operação matemática feita por uma criança. As contagens são frequentes na nossa realidade!

Existem situações em que a contagem é utilizada para responder a questões sobre a quantidade de elementos de um conjunto qualquer.

Exemplos:

- Qual é a população brasileira atualmente?
- Quantos são os automóveis circulando em nossa cidade em um determinado dia?
- Quantas horas passamos estudando em uma semana?
- Qual é a lotação máxima de determinado estádio de futebol?
- Quantos estudantes brasileiros estão atualmente no Ensino Médio?

Joacy Souza/Alamy/Fotoarena

Avenida Luiz Viana, Salvador (BA), 2019.

Entretanto, existem situações relacionadas à contagem de possibilidades na realização de determinada formação de agrupamentos de elementos. Apenas para exemplificar, analise individualmente cada questão apresentada a seguir. Pense em possíveis estratégias para resolvê-las. Troque ideias com os colegas a respeito disso.

- A turma deverá ser dividida em 4 grupos com 8 estudantes em cada grupo: De quantas maneiras isso poderá ser feito?
- Todos os estudantes da turma se cumprimentam uma única vez com um aperto de mão: Qual será o total de apertos de mãos?
- Em um jogo de cartelas são sorteados 6 números, de 1 a 60. Qual é o número total de maneiras que isso pode ocorrer?
- Em um restaurante há 3 tipos de prato principal e 4 tipos de sobremesas. Escolhendo um prato principal e uma sobremesa, qual é o total de possibilidades de escolha?
- Considerando o sistema de emplacamento de veículos utilizando-se 4 letras do nosso alfabeto e 3 algarismos, conforme ilustração, qual é o total de placas diferentes que podem ser formadas?

Rafael Berlandi/Shutterstock.com

Modelo de placa de veículo conforme sistema vigente.

Essas e outras situações similares envolvem contagem e exigem cálculos sobre a formação de agrupamentos: representam exemplos que são de nosso interesse no estudo de **análise combinatória**. Esse estudo possibilita conhecer certos modelos que resolvem determinados tipos de situações envolvendo contagem. Sugerimos que você, ao longo deste capítulo, retome essas questões para resolvê-las usando as estratégias que serão discutidas a partir de agora.

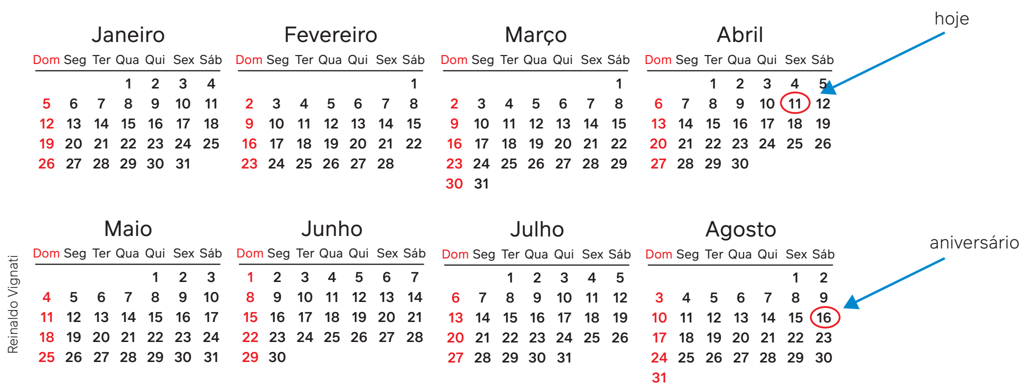
A análise combinatória pode ser considerada um conjunto de procedimentos cujo objetivo maior está relacionado à contagem do número de possibilidades em situações de agrupamentos.

Problemas iniciais de contagem

Existem problemas de contagem que podem ser resolvidos sem a necessidade de desenvolver métodos especiais. Eles podem ser solucionados por meio da contagem direta ou, dependendo do caso, por meio de uma operação aritmética.

Exemplo:

Se hoje é dia 11 de abril de 2025 e o meu aniversário será dia 16 de agosto, quantos dias faltam para o meu aniversário?



Esse é um exemplo de problema que pode ser resolvido por meio de contagem direta. Você pode, por exemplo, descobrir quantos dias faltam para completar o mês de abril e a esse número adicionar os dias que têm os meses de maio, de junho e de julho. Com base nesse resultado, pode contar os dias de agosto até chegar no aniversário.

Analise, a seguir, outros exemplos resolvidos que utilizam estratégias diferentes de contagem.

Atividades resolvidas

1. Uma pessoa trabalhou em uma empresa do início de janeiro de 1998 até o início de janeiro de 2020. Quantos anos essa pessoa trabalhou nessa empresa?

- Uma maneira de você determinar a quantidade de anos é fazer uma contagem direta com base na descrição dos anos trabalhados.

- Podemos também pensar na quantidade n de números inteiros de 1998 até 2019. Sendo assim, temos:

$$n = 2019 - 1998 + 1$$

$$n = 22$$

Portanto, são 22 anos.

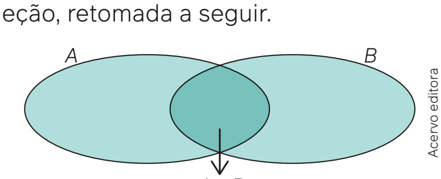
Para pensar e discutir

1. Por que o ano 2020 não entrou na contagem? 1. Resposta pessoal.

2. Por qual razão no cálculo feito ao lado acrescentou-se 1 à diferença 2019 – 1998? 2. Resposta pessoal.

Utilizando teoria dos conjuntos

Existem situações de contagem que são resolvidas com a utilização de conhecimentos sobre a teoria dos conjuntos. Nesses casos, utilizamos uma relação que envolve o número de elementos da união de dois conjuntos, estudada no primeiro volume desta coleção, retomada a seguir.



Vamos considerar que temos os conjuntos A e B relacionados por meio do diagrama indicado, no qual a região comum indica elementos que são dos dois conjuntos simultaneamente. Dizemos que esses elementos estão na intersecção dos dois conjuntos, isto é, pertencem ao conjunto A e ao conjunto B (lemos: A intersecção com B).

A união desses dois conjuntos A e B é o conjunto representado por $A \cup B$ (lemos: conjunto A união com o conjunto B) formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou pertencem ao conjunto B. Para calcular o número total de elementos da união, representado por $n(A \cup B)$, fazemos:

$$\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

Observações:

1. Em relação a um conjunto A qualquer representamos por $n(A)$ o número de elementos desse conjunto.

2. Caso os dois conjuntos não tenham elementos em comum (dizemos que a intersecção é o conjunto vazio), o cálculo do número de elementos pode ser feito adicionando-se o número de elementos de A ao número de elementos de B, isto é:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B), \text{ para } A \cap B = \varnothing$$

Apenas para retomar a teoria dos conjuntos, analise e discuta as questões a seguir.

Para pensar e discutir

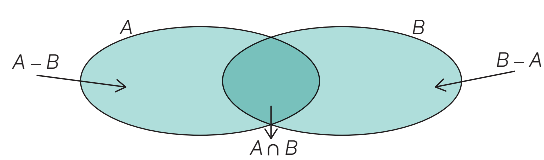
1. Na teoria dos conjuntos, o que significa o conjunto representado por $\varnothing$? Quantos são os seus elementos, isto é, qual o valor de $n(\varnothing)$? 1. Representa o conjunto vazio; esse conjunto não tem elementos.

2. Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, ..., 20\}$ e seja o conjunto $B = \{7, 8, 9, ..., 20\}$, qual o valor de $n(A)$, de $n(B)$ e de $n(A \cup B)$? E de $n(A \cap B)$? 2. $n(A) = 20$; $n(B) = 14$; $n(A \cup B) = 20$; $n(A \cap B) = 14$

3. Qual a condição para que se tenha $n(A \cup B) = n(A)$, dados dois conjuntos não vazios A e B? 3. Quando B é subconjunto de A.

Observação:

Outra maneira de obtermos o número de elementos da união entre os conjuntos A e B é utilizando o conceito de diferença entre dois conjuntos. Assim, retomando o diagrama anterior vamos representar os conjuntos $A - B$ (elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B) e $B - A$ (elementos que pertencem ao conjunto B e não pertencem ao conjunto A).



Acervo editora

O número de elementos da união dos conjuntos A e B pode ser obtido por:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

Atividades resolvidas

2. Em uma turma do Ensino Médio foi feita uma pesquisa sobre quais idiomas os estudantes estão cursando como matéria complementar aos estudos. Todos os estudantes responderam à pesquisa e obteve-se o resultado a seguir.

- Estão cursando Inglês: 20 estudantes.
- Estão cursando Espanhol: 12 estudantes.
- Estão cursando Inglês e Espanhol: 6 estudantes.
- Não estão cursando nenhum idioma: 10 estudantes.

Qual é o número total de estudantes dessa turma?

- Representando por I e por E os conjuntos formados pelos estudantes de Inglês e Espanhol, respectivamente, pelo enunciado, temos:

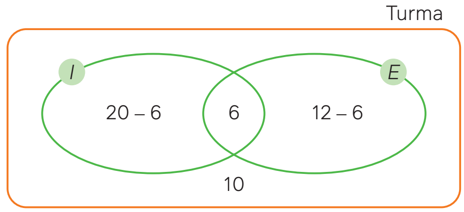
$$n(I) = 20$$
$$n(E) = 12$$
$$n(I \cap E) = 6$$

- Cálculo do número de elementos da união desses dois conjuntos:

$$n(I \cup E) = n(I) + n(E) - n(I \cap E)$$
$$n(I \cup E) = 20 + 12 - 6$$
$$n(I \cup E) = 26$$

Como a turma tem ainda 10 alunos que não estudam nem Inglês nem Espanhol, o número total de alunos dessa turma é 36, isto é, 26 + 10 = 36.

- Outra maneira de fazer esse cálculo é utilizando o diagrama de Venn para indicar no interior dos conjuntos as quantidades correspondentes. Nesse caso, inicie pela intersecção para evitar contagem em duplicidade.



Acervo editora

- Assim, sendo x o total de alunos da turma e analisando o diagrama, temos:

$$x = (20 - 6) + 6 + (12 - 6) + 10$$
$$x = 14 + 6 + 6 + 10 = 36$$

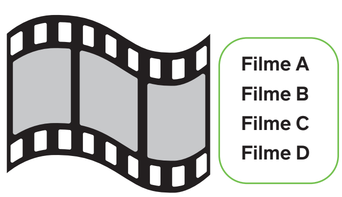
Portanto, 36 alunos.

Para pensar e discutir

1. Você utilizaria outro procedimento para essa resolução? Explique. 1. Resposta pessoal.
2. Na segunda maneira de resolver, no diagrama de Venn, foram colocados os valores 20 – 6, 6, 12 – 6 e 10. O que significa cada uma dessas quantidades? 2. Resposta no Manual do Professor.

3. Juliana observou que estavam sendo lançados 4 filmes neste fim de semana e 3 peças de teatro. Ligou para suas amigas e decidiram que iriam assistir a um dos filmes ou a uma das peças de teatro. Qual é o número total de possibilidades para essa escolha?

Reinaldo Vignati



Reinaldo Vignati

- Como elas irão assistir a um filme ou a uma peça de teatro, temos:

número de escolhas para o filme: 4

número de escolhas para a peça: 3

número de possibilidades de escolha: 4 + 3 = 7

Portanto, o total de possibilidades de escolhas é 7.

Para pensar e discutir

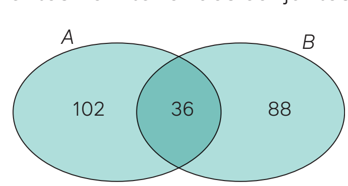
1. Explique por que o número total de possibilidades é obtido adicionando-se os números de escolhas para o filme ao número de escolhas para a peça. 1. Resposta pessoal.
2. Se fosse possível assistir a um filme e a uma peça de teatro, qual seria o número total de possibilidades? Explique indicando todas as possibilidades. 2. 12; resposta pessoal

Atividades

1. Considere a sequência de números naturais de 100 até 500. Em seguida, responda:
   a) Quantos números naturais há nessa sequência? 1. a) 401
   b) Quantos desses números naturais têm o algarismo 1 na centena? 1. b) 100
   c) Em quantos desses números o algarismo das dezenas é igual a 9? 1. c) 40
   d) Qual é a quantidade de números pares nessa sequência? 1. d) 201
   e) E de números ímpares? 1. e) 200

2. Tendo como referência a questão anterior, elabore um desafio com quatro itens para um colega resolver. Você resolve o que ele vai elaborar. Depois, juntos, discutam as resoluções. 2. Resposta pessoal.

3. No diagrama a seguir, foram colocadas quantidades de elementos no interior dos conjuntos A e B.



Acervo editora

Interpretando o diagrama, faça o que se pede.

a) Indique a quantidade de elementos do conjunto *A*. 3. a) 138

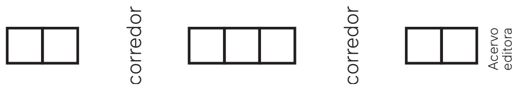
b) Responda: Quantos desses elementos são apenas do conjunto *A*? 3. b) 102

c) Indique a quantidade de elementos do conjunto *B*. 3. c) 124

d) Responda: Quantos desses elementos são apenas do conjunto *B*? 3. d) 88

e) Determine o número de elementos da união desses dois conjuntos, isto é, n($A \cup B$). 3. e) 226

4. Na figura estão ilustrados os assentos de um avião em uma mesma fileira. Paulo e Roberta irão viajar e ocuparão dois desses assentos.



De quantas maneiras diferentes eles poderão se posicionar de tal modo que não fiquem separados por um corredor? 4. 10

5. Em um campeonato de futebol de salão entre escolas, 13 times disputam em um único turno, isto é, cada time enfrenta os demais uma vez apenas. Quando vence, o time ganha 3 pontos; quando empata ganha 1 ponto e, caso perca, 0 ponto. O campeão será aquele que somar mais pontos.

a) Quantas partidas cada time irá jogar? 5. a) 12

b) No total, quantas partidas serão disputadas? 5. b) 78

c) Qual é o máximo de pontos que um time poderá obter? 5. c) 36

6. Considere a sequência de todos os números naturais de 1 até 900. Determine a quantidade total de:

a) números naturais nessa sequência; 6. a) 900

b) números que são múltiplos de 3; 6. b) 300

c) números que são múltiplos de 5; 6. c) 180

d) números que são múltiplos de 7. 6. d) 128

7. Utilizando como referência a atividade anterior, elabore uma questão similar para determinar a quantidade de múltiplos de 4, múltiplos de 10 e múltiplos de 11. Depois, resolva a atividade e peça a um colega que a resolva também. Ao final, confrontem as respostas. 7. Resposta pessoal.

8. Interprete a sequência descrita a seguir.

Uma sequência de números naturais, representada por *S*(*n*), é formada de modo que se um número é par, o próximo será sua metade, mas, se for ímpar, o próximo será uma unidade a mais que ele, até chegar ao número 1. Assim, vamos considerar *S*(42) como exemplo: *S*(42) = (42; 21; 22; 11; 12; 6; 3; 4; 2; 1). O número de termos dessa sequência é igual a 10. Determine:

a) o número de elementos de *S*(44); 8. a) 9

b) o número de elementos de *S*(100). 8. b) 11

9. Uma pessoa escreveu todos os números naturais de 1 a 100 utilizando os algarismos indo-arábicos. Responda:

a) Quantos números pares ela escreveu? 9. a) 50

b) Quantos números ímpares ela escreveu? 9. b) 50

c) Ao escrever esses 100 números naturais, quantas vezes ela utilizou o algarismo zero? 9. c) 11

d) E quantas vezes ela utilizou o algarismo 2? 9. d) 20

10. (Integrado-PR) Uma pesquisa foi realizada com um grupo de 150 pessoas para verificar a deficiência de vitamina C e D no organismo. Verificou-se que 65 pessoas apresentavam deficiência de vitamina C, 60 pessoas apresentavam deficiência de vitamina D e 23 pessoas apresentavam deficiência de vitaminas C e D. Com base nesses dados, qual o número de pessoas que não apresentavam deficiência das vitaminas testadas? 10. Alternativa **e**.

a) 2 **b)** 18 **c)** 25 **d)** 32 **e)** 48

11. (Ufscar-SP) Ana tem um cartão com uma senha de 4 dígitos. Certo dia, ao tentar realizar uma compra, ela esqueceu da senha, porém lembra que

- Sua senha tem exatamente um dígito 1;
- Sua senha tem exatamente dois dígitos 3;
- O dígito 1 não é sucedido imediatamente por um dígito 3.

Supondo que Ana escreva todas as possíveis senhas que cumprem essas condições, quantas são as possibilidades de senha que ela escreverá?

a) 48 **b)** 58 **c)** 68 **d)** 78

11. Alternativa **a**.

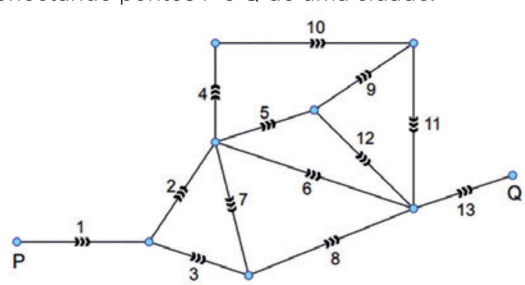
12. (UEA-AM) Márcia tem 3 canetas, uma azul, uma amarela e uma vermelha; 3 lápis, um amarelo, um laranja e um verde; e 5 gizes de cera, um azul, um laranja, um roxo, um marrom e um cinza. Ela quer escolher uma caneta, um lápis e um giz de cera de modo que nenhuma cor se repita. O número de diferentes maneiras de ela fazer essa escolha é

a) 34 **c)** 24 **e)** 12

b) 10 **d)** 30

12. Alternativa **a**.

13. (Famerp-SP) O diagrama retrata 13 ruas de mão única, com sentido de tráfego indicado pelas setas, conectando pontos P e Q de uma cidade.



FAMERP, 2022

De acordo com esse diagrama, o número de trajetos diferentes para ir do ponto P ao ponto Q é igual a

a) 8 **c)** 6 **e)** 7

b) 10 **d)** 9

13. Alternativa **c**.

14. (UFRGS) Tomando-se os números primos compreendidos entre 0 e 20, o número de frações do tipo $\frac{a}{b}$, em que $a < b$, que pode ser formada é

a) 21 **c)** 28 **e)** 36

b) 27 **d)** 30

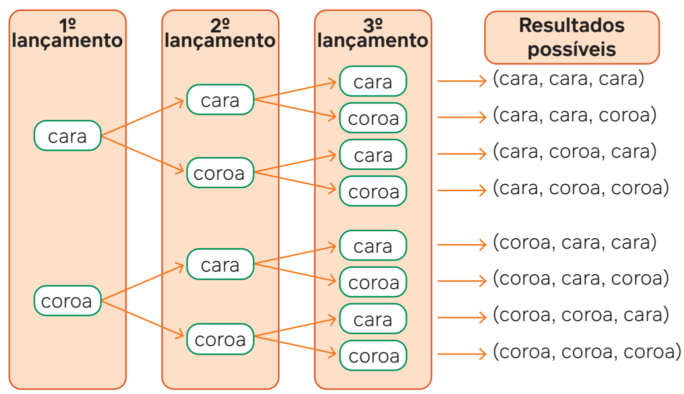
14. Alternativa **c**.

Princípio multiplicativo

Há um dispositivo bem simples e interessante que você pode utilizar para calcular a contagem do número de possibilidades de realização de um evento: o **diagrama de árvore**. Ele consiste em uma figura que descreve não apenas as possibilidades em cada etapa mas também todas as possibilidades.

Vamos utilizar, como exemplo, o lançamento consecutivo de uma mesma moeda três vezes e a observação das sequências possíveis dos resultados. No lançamento de uma moeda, existem dois resultados possíveis: cara ou coroa.

Considerando que são três lançamentos consecutivos, podemos organizar os resultados no esquema a seguir (diagrama de árvore).



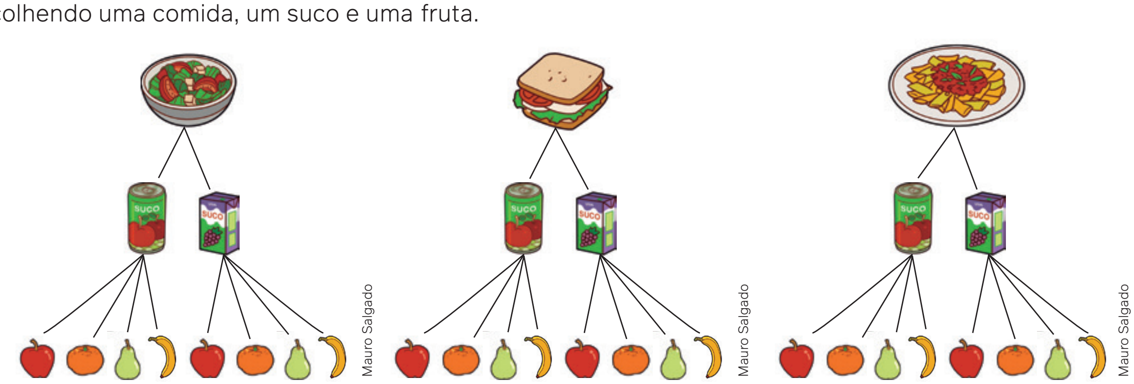
Para pensar e discutir

1. Quantas são as etapas no evento descrito acima? 1. 3
2. Qual é o número de possibilidades para a realização de cada lançamento? 2. 2
3. Qual é o total de possibilidades? Como você o calculou? 3. 8; resposta pessoal.
4. Se no 1º lançamento deu cara, quantos são os resultados possíveis para os dois próximos lançamentos? 4. 4

Em problemas de contagem, quando você utiliza o diagrama de árvore, ele não precisa estar ricamente ilustrado. O que importa é que as etapas sejam bem claras para que ele possa ser interpretado adequadamente. É esperado que o próprio diagrama possa descrever o que está sendo analisado.

Atividades resolvidas

4. O diagrama de árvore a seguir representa as possibilidades de escolha de uma pessoa para fazer uma refeição escolhendo uma comida, um suco e uma fruta.



Interpretando a árvore de possibilidades, responda:

a) Quantas possibilidades de escolha essa pessoa tem para a comida? E para o suco? E para a fruta?

b) Qual o total de possibilidades que essa pessoa tem se tiver que escolher uma comida, um suco e uma fruta?

- Item **a**. Conforme a árvore de possibilidades, essa pessoa terá:

  3 possibilidades de escolha para comida;
  2 possibilidades de escolha para o suco;
  4 possibilidades de escolha para a fruta.

- Item **b**. Para cada suco que escolhe, ela tem 4 possibilidades de escolhas para a fruta. Como são 2 possibilidades para a escolha de suco, temos:

$2 \cdot 4$ escolhas para suco e fruta.

- Para cada comida que escolhe, ela tem $2 \cdot 4$ possibilidades de escolhas para suco e fruta. Como são 3 possibilidades para a comida, temos:

$3 \cdot 2 \cdot 4$ escolhas para comida, suco e fruta.

Portanto, são 24 possibilidades.

Agora que você já analisou uma situação com o diagrama de árvore das possibilidades, deve ter observado a existência de certa limitação em relação à sua utilização. Quando em uma situação de contagem o número de etapas e o total de possibilidades de cada etapa são muito grandes, torna-se trabalhosa a elaboração da árvore de possibilidades. Entretanto, o importante não está exatamente na construção, mas na compreensão, por meio da visualização de algumas árvores construídas e analisadas, de como obter o número total de possibilidades.

Princípio multiplicativo

Se um evento A_1 pode ocorrer de $\boldsymbol{n_1}$ modos diferentes, e se, para cada uma dessas maneiras, um segundo evento A_2 pode ocorrer de $\boldsymbol{n_2}$ modos diferentes, então o número de modos em que esses eventos podem ocorrer na ordem indicada é:

$$\boldsymbol{n_1 \cdot n_2}$$

Observação:

Essa mesma ideia pode ser ampliada para mais de dois eventos.

5. Calcule a quantidade de números naturais com três algarismos distintos que podemos formar com os algarismos do nosso sistema decimal.

Centena	Dezena	Unidade

- Devemos escolher 3 algarismos para formar o número. O 1º evento (ou acontecimento) é a escolha de um algarismo para a centena; o 2º evento é a escolha de um algarismo para a dezena e o 3º evento é a escolha de um algarismo para a unidade.

1ª escolha (evento 1): **9** possibilidades, pois o zero na situação não implicaria um número com 3 algarismos – podemos escolher qualquer outro algarismo do conjunto {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}.

2ª escolha (evento 2): **9** possibilidades, pois, como o algarismo das dezenas deve ser diferente do algarismo escolhido para a centena, sobram assim 8 possibilidades e como o algarismo 0 pode ocupar a dezena, temos 9 possibilidades.

3ª escolha (evento 3): **8** possibilidades, pois o algarismo das unidades deverá ser diferente do algarismo das centenas e das dezenas.

- Pelo princípio multiplicativo e considerando que n representa a quantidade total de números que podem ser formados, temos:

$$n = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$$

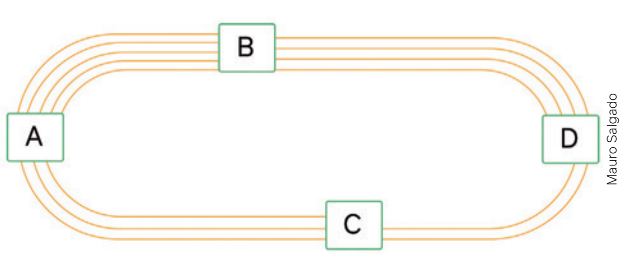
Portanto, são 648 possibilidades.

Para pensar e discutir

1. Você saberia dizer quais dos números do conjunto {100; 101; 102; ...; 998; 999} deveriam ser excluídos no exemplo anterior? 1. Resposta pessoal.

2. Se na situação não houvesse a restrição de que os algarismos devam ser distintos, como você calcularia utilizando o princípio multiplicativo? 2. Resposta pessoal.

6. Você está na cidade A e precisa ir até a cidade D. Para isso, ou passa pela cidade B ou passa pela cidade C. A quantidade de caminhos entre essas cidades está indicada por linhas no desenho. De quantas maneiras diferentes você poderá, de acordo com as condições, ir da cidade A até a cidade D?



- Analisando os trajetos:
  Trajeto de A até B (5 possibilidades) e de B até D (4 possibilidades):
  $$5 \cdot 4 = 20 \rightarrow 20 \text{ maneiras}$$
  Trajeto de A até C (3 possibilidades) e de C até D (2 possibilidades):
  $$3 \cdot 2 = 6 \rightarrow 6 \text{ maneiras}$$

Podcast
Falando de análise combinatória

- Como temos duas escolhas excludentes (passar pela cidade B ou passar pela cidade C), o número *n* de maneiras diferentes é obtido adicionando-se as quantidades anteriores, isto é:
  $$n = (5 \cdot 4) + (3 \cdot 2)$$
  $$n = 20 + 6 = 26$$
  Portanto, são 26 maneiras diferentes de ir da cidade A até a cidade D.

Para explorar

Junte-se a dois colegas para fazer estas atividades.

1. Escolham 5 letras maiúsculas distintas do nosso alfabeto. 1. Resposta pessoal.
2. Dessas 5 letras, escolham 3 letras distintas para formar uma sigla. 2. Resposta pessoal.
3. Em relação à escolha acima, elaborem uma árvore de possibilidades que descreva todas as possibilidades para formar essa sigla. 3. Resposta pessoal.
4. Utilizem recursos digitais para essa construção (ou uma folha de papel). 4. Resposta pessoal.
5. Indiquem, com base na árvore das possibilidades, a quantidade total de possibilidades para formação dessa sigla.

5. Resposta pessoal.

Atividades

15. Para ilustrar a previsão do tempo em determinada localidade, um aplicativo oferece a possibilidade de informar a temperatura máxima do dia ou a temperatura mínima do dia ou, ainda, as temperaturas máxima e mínima juntas. Também é possível utilizar uma das seguintes figuras para indicar a situação esperada.

Mauro Salgado

De quantas maneiras diferentes o aplicativo poderá fazer a apresentação da previsão do tempo em determinado dia de acordo com as condições acima? 15. 15

16. Regina lança uma moeda 4 vezes consecutivamente para observar o resultado. Ela obtém a seguinte sequência:

Banco Central do Brasil

Esse é um dos *n* resultados possíveis. Determine *n*. 16. 16

17. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.
Formem números com 3 algarismos utilizando os algarismos {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}.
Determinem a quantidade de números:

a) que podem ser formados; 17. a) 900

b) que podem ser formados considerando que os algarismos devem ser distintos; 17. b) 648

c) pares que podem ser formados; 17. c) 450

d) pares que podem ser formados considerando que os algarismos devem ser distintos; 17. d) 328

e) ímpares que podem ser formados; 17. e) 450

f) ímpares que podem ser formados considerando que os algarismos devem ser distintos. 17. f) 320

18. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.
Elaborem e resolvam uma situação de contagem similar à anterior que contenha 4 itens, mas alterando a formação de números para 4 algarismos. Em seguida, troquem com outra dupla a atividade elaborada para que ela a resolva também. Ao final, as respostas devem ser confrontadas e discutidas. 18. Resposta pessoal.

19. Os números dos telefones celulares de determinada cidade são formados por 9 algarismos, todos iniciando pelo algarismo 9, conforme ilustrado a seguir.

9								

a) No máximo, quantos números de telefone essa cidade pode ter? 19. a) 10^8

b) Em quantos desses números os últimos 4 algarismos são 1 234? 19. b) 10^4

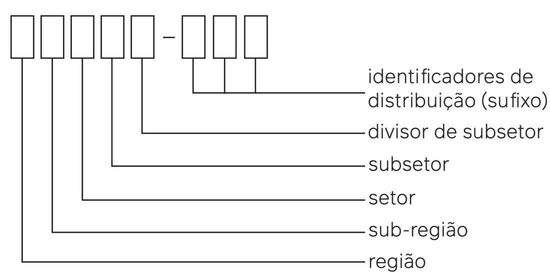
20. Uma avaliação de conceitos relacionados à Matemática é composta de 10 itens. Em cada item, o estudante deveria escrever V ou F, conforme o item fosse verdadeiro ou falso, respectivamente, como ilustrado a seguir.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F

Qual é a quantidade de maneiras diferentes de responder a essa avaliação de forma que só seja assinalada apenas uma alternativa em cada item? 20. 1 024

21. (Enem) O Código de Endereçamento Postal (CEP) é um código numérico constituído por oito algarismos. Seu objetivo é orientar e acelerar o encaminhamento, o tratamento e a distribuição de objetos postados nos Correios. Ele está estruturado segundo o sistema métrico decimal, sendo que cada um dos algarismos que o compõe codifica região, sub-região, setor, subsetor, divisor de subsetor e identificadores de distribuição conforme apresenta a ilustração.

Acervo editora



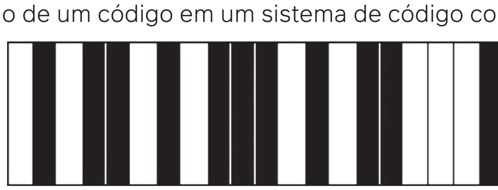
O Brasil encontra-se dividido em dez regiões postais para fins de codificação. Cada região foi dividida em dez sub-regiões. Cada uma dessas, por sua vez, foi dividida em dez setores. Cada setor, dividido em dez subsetores. Por fim, cada subsetor foi dividido em dez divisores de subsetor. Além disso, sabe-se que os três últimos algarismos após o hífen são denominados de sufixos e destinam-se à identificação individual de localidades, logradouros, códigos especiais e unidades dos Correios. A faixa de sufixos utilizada para codificação dos logradouros brasileiros inicia em 000 e termina em 899.

Disponível em: www.correios.com.br. Acesso em: 22 ago. 2014 (adaptado).

Quantos CEPs podem ser formados para a codificação de logradouros no Brasil? 21. Alternativa **e**.

a) $5 \cdot 0 + 9 \cdot 10^2$ **b)** $10^5 + 9 \cdot 10^2$ **c)** $2 \cdot 9 \cdot 10^7$ **d)** $9 \cdot 10^2$ **e)** $9 \cdot 10^7$

22. (Enem) O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre suas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe a seguir um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.



Mauro Salgado

- Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001.
- Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010.

No sistema de código de barras, para organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima. 22. Alternativa **d**.

Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é:

a) 14. **b)** 12. **c)** 8. **d)** 6. **e)** 4.

23. (UEG-GO) Maria tem 5 saias, sendo uma de cada cor: azul, vermelha, branca, preta e lilás. Ela possui ainda 4 blusas: azul, rosa, marfim e preta. De quantas formas diferentes ela poderá se vestir de modo a não usar saia e blusa da mesma cor? 23. Alternativa **c**.

a) 10 **b)** 9 **c)** 18 **d)** 12 **e)** 16

24. (Ufam) A quantidade de números, com três algarismos distintos, que podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 8 é: 24. Alternativa **d**.

a) 105 **b)** 330 **c)** 400 **d)** 210 **e)** 540

25. (Uece) A quantidade de números inteiros maiores que 2 500 formados com quatro dígitos distintos é

a) 3 917 **b)** 3 808 **c)** 3 528 **d)** 3 712 25. Alternativa **b**.

26. (Unicamp-SP) João tem uma camisa azul, uma camisa vermelha, uma camisa preta, uma camisa branca e uma camisa rosa. Ele também tem uma calça azul, uma calça preta e uma calça branca. Ele nunca usa a camisa da mesma cor que a calça. De quantas formas João pode se vestir? 26. Alternativa **c**.

a) 10 **b)** 11 **c)** 12 **d)** 13

27. (Fatec-SP) No mundo digital, podem-se definir as cores com o auxílio de um sistema de códigos que é composto pelo sinal de sustenido (#) seguido por seis caracteres que podem ser algarismos (que vão de 0 até 9) ou letras (de A até F). Deste modo, são exemplos de códigos que representam cores:

Código	Cor
#084D6E	Azul Petróleo
#DA70D6	Orquídea
#FF00FF	Fúcsia

Logo, utilizando esse código, a quantidade de cores que é possível representar é igual a 27. Alternativa **e**.

a) 2^6 **b)** 2^{10} **c)** 2^{12} **d)** 2^{18} **e)** 2^{24}

28. (Uerj) Apenas com os algarismos 2, 4, 5, 6 ou 9, foram escritos todos os números possíveis com cinco algarismos. Cada um desses números foi registrado em um único cartão, como está exemplificado a seguir.

Cartão A	Cartão B	Cartão C	Cartão D	Cartão E
24644	45996	66666	99696	66969

Acervo editora

Alguns desses cartões podem ser lidos de duas maneiras, como é o caso dos cartões C, D e E. Observe:

Cartão C	Cartão D	Cartão E
99999	96966	69699

Acervo editora

O total de cartões que admitem duas leituras é: 28. Alternativa **a**.

a) 32 **b)** 64 **c)** 81 **d)** 120

29. (UTFPR) Uma aluna da UTFPR deseja montar um computador que atenda às suas necessidades mínimas de processamento, respeitando o seu orçamento. Ela tem à disposição três modelos de processadores e cinco modelos de placas-mãe que são compatíveis e atendem às suas necessidades.
De quantas maneiras diferentes ela pode escolher um processador e uma placa-mãe? 29. Alternativa **b**.

a) 12 **b)** 15 **c)** 18 **d)** 21 **e)** 25

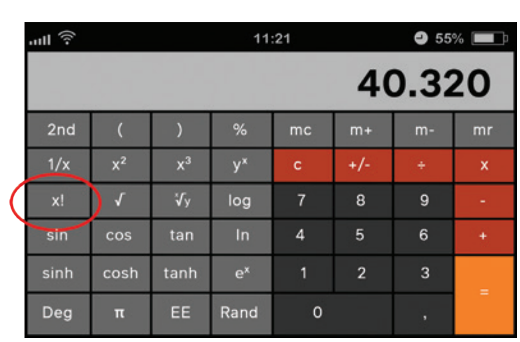
Fatorial de um número natural

A ilustração representa uma calculadora que pode ser encontrada em aparelhos *smartphone*.

O número que está no visor foi obtido por meio da multiplicação do número natural 8 por todos os seus antecessores até chegar à unidade 1, isto é:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$$

Esse mesmo resultado poderia ser obtido por meio da tecla destacada na calculadora representada na figura. Em uma calculadora real, experimente digitar o número 8 e, então, apertar a tecla destacada para ver o que acontece! Faça isso com outros números.



Mauro Salgado

Para pensar e discutir

1. Qual resultado se obtém para 10!, 9! e 2!? 1. 3 628 800, 362 880 e 2, respectivamente.
2. E qual resultado é possível obter utilizando essa mesma tecla quando se tenta fazer esse cálculo para um número negativo ou um número qualquer que não seja natural? 2. No visor da calculadora aparece a mensagem ERRO.

Existem situações de contagem em que, ao utilizarmos o princípio fundamental da contagem, acabamos recaindo em produtos de números naturais e consecutivos.

Exemplo:

Na quadra esportiva, 7 crianças foram colocadas em fila reta, uma depois da outra. Vamos determinar o número de maneiras diferentes de posicionarmos essas crianças nessa fila.

Mauro Salgado

Podemos considerar os retângulos a seguir como as posições que as crianças irão ocupar.

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª

7 maneiras para a escolha da criança que ocupará a 1ª posição;

6 maneiras para a escolha da criança que ocupará a 2ª posição;

5 maneiras para a escolha da criança que ocupará a 3ª posição;

⋮

1 maneira para a escolha da criança que ocupará a 7ª posição.

Pelo princípio multiplicativo, sendo n o total de possibilidades, temos:

$$n = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$n = 7! \text{ (lemos: fatorial de sete)}$$

$$n = 5\,670$$

Portanto, o número de resultados possíveis é 5 670.

Para simplificar o cálculo que envolve o produto de números naturais consecutivos, utilizamos o chamado **fatorial de um número natural**.

Seja n um número natural, com $n \geq 2$. Define-se o **fatorial de *n*** (ou n fatorial), que é representado por $\boldsymbol{n!}$, como o produto dos números naturais consecutivos n, $n - 1$, $n - 2$, ..., 1, isto é:

$$\boldsymbol{n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

Define-se, também: $1! = 1$ e $0! = 1$.

Justificamos com base em uma propriedade após o exemplo.

Exemplo:

Vamos calcular o fatorial dos números 6 e 5:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Utilizando os fatoriais acima, observe como podemos expressar 6! em função de 5!:

$$6! = 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5!}$$

Propriedade do fatorial

Podemos expressar o fatorial de um número natural n, com $n \geq 2$, em função do fatorial de seu antecedente, isto é:

$$\boldsymbol{n! = n \cdot (n - 1)!}$$

Essa propriedade nos permite "justificar" a conveniência de termos definido $1! = 1$ e $0! = 1$. Analise a atividade resolvida a seguir.

Atividades resolvidas

7. Com base na propriedade do fatorial, mostre que 1! = 1 e 0! = 1.

- Como a igualdade $n! = n \cdot (n-1)!$ é verdadeira para $n \geq 2$, ao substituir n por 2, temos:

$$n! = n \cdot (n-1)! \xrightarrow{n=2} 2! = 2 \cdot (2-1)!$$

$$2 \cdot 1 = 2 \cdot 1! \Rightarrow 1 = 1!$$

- Agora, se na mesma igualdade $n! = n \cdot (n-1)!$ substituirmos n por 1, vem:

$$n! = n \cdot (n-1)! \xrightarrow{n=1} 1! = 1 \cdot (1-1)!$$

$$1 = 1 \cdot 0! \Rightarrow 1 = 0!$$

8. Utilizando o conceito de fatorial de um número natural n, resolva a equação $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20$.

- Observe que podemos reescrever o numerador da fração em função do denominador utilizando o conceito e a propriedade de fatorial.

$$\frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = 20$$

$$(n+1) \cdot n = 20$$

$$n^2 + n - 20 = 0$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow n = \frac{-1 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ n = -5 \end{cases}$$

Como n é um número natural, temos que $n = 4$.

Observação:

Nesse tópico, propomos apenas atividades que envolvem fatorial de um número natural; assim, depois, poderemos utilizar isso como uma ferramenta para o cálculo de contagens em outras situações de agrupamentos.

Atividades

30. Responda:

a) Quais são os números naturais cujo fatorial é igual ao próprio número? 30. a) 1 e 2

b) Para quantos números naturais n tem-se $n! < 1\,000$? Quais são os valores de n? 30. b) 7; 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6

31. Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira (V) ou falsa (F).

a) $4! + 5! = 9!$ 31. a) F

b) $(4!) \cdot (3!) = 12!$ 31. b) F

c) $5! + 5! = 2 \cdot 5!$ 31. c) V

d) $\frac{8!}{4!} = 2!$ 31. d) F

32. Calcule o valor da expressão numérica a seguir utilizando o conceito de fatorial de um número natural.
$E = (3!)^2 + 2 \cdot 4! + (4 - 2!) + (2!)^{3!}$ 32. 150

33. Represente os cálculos a seguir utilizando a notação de fatorial.

a) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ 33. a) 8!

b) $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!$ 33. b) 14!

c) $(k+1) \cdot k \cdot (k-1)!$, sendo k um número natural maior que 2 33. c) $(k+1)!$

34. Simplifique e calcule os resultados de cada expressão numérica a seguir.

a) $\frac{8!}{5!}$ 34. a) 336

b) $\frac{10!}{(4!) \cdot (10-4)!}$ 34. b) 210

c) $\frac{15!}{(15-3)!}$ 34. c) 2 730

35. Considere as expressões algébricas a seguir, em que os fatoriais são de números naturais representados em função de n. Simplifique cada expressão.

a) $\frac{n!}{(n-2)!}$ 35. a) $n^2 - n$

b) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$ 35. b) $n^2 - 3n + 2$

c) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$ 35. c) $\frac{1}{n^2 + n}$

36. Considere que a expressão E, dada por $E = \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+1)!}$, pode ser simplificada de tal forma que o resultado não contém o símbolo fatorial. Simplifique essa expressão. 36. $E = n + 3$

37. Utilizando o conceito de fatorial de um número natural, determine o valor de x para que seja verificada cada equação a seguir.

a) $\frac{x!}{(x-1)!} = 5!$ 37. a) $x = 120$

b) $\frac{(x+1)! - x!}{(x-1)!} = 81$ 37. b) $x = 9$

Permutações

2

Ao reunir alguns talhares em uma gaveta, ao colocar livros em certa ordem em uma estante, ao reunir algumas pessoas para uma atividade qualquer, estamos fazendo **agrupamentos**. O estudo de análise combinatória aborda a questão de contagem na formação de agrupamentos. Existem agrupamentos em que a ordem dos elementos não é relevante; entretanto, há aqueles em que a ordem é fundamental.

Observe atentamente as imagens a seguir.

Wavebreakmedia/iStockphoto.com

Pessoas fazendo piquenique em um parque.

mediaphotos/E+/iStockphoto.com

Fila de pessoas para autoatendimento em caixa eletrônico.

andresr/E+/iStockphoto.com

Pessoas alcançando a linha de chegada de uma maratona.

Ivanko80/Shutterstock.com

Pessoas em reunião de trabalho.

Para pensar e discutir

1. O que há em comum nessas imagens? 1. Resposta pessoal.

2. É possível constatar alguma característica que diferencia os agrupamentos de pessoas entre si? 2. Resposta pessoal.

No estudo de análise combinatória nos deparamos com situações de contagem relacionadas a agrupamentos. Nesse caso, podemos nos deparar com a necessidade de efetuar cálculos apenas envolvendo o número de escolhas de elementos para a formação de um grupo.

Podemos, entretanto, encontrar situações de cálculo em que, além de envolver escolhas de elementos, também é necessário ordená-los (em qualquer sequência). Nas situações que serão analisadas, algumas vezes será escolhida parte dos elementos de um grupo; em outras, o grupo todo pode ser escolhido.

Permutações simples

Um grupo de seis amigos se encontra para uma atividade de pesquisa. Como nunca participaram juntos em uma mesma equipe, resolvem posar para uma fotografia colocando-se um ao lado do outro, como sugere a ilustração a seguir.

Mauro Salgado

Existem 720 maneiras diferentes de posicionar esses amigos um ao lado do outro para fazer uma foto, considerando que uma maneira difere da outra apenas na "posição" ocupada.

Como podemos chegar ao resultado 720?

Que tal se alguns estudantes da turma simularem essa situação e outras que serão sugeridas a seguir?

Não é considerado aqui a escolha dos amigos para as fotos. Considere que 2 amigos, ou 3, 4 ou ainda 5 amigos, estejam perfilados para a foto.

Mauro Salgado

Mauro Salgado

Mauro Salgado

Mauro Salgado

Nas perguntas seguintes, o que interessa é o número de maneiras de posicionar os amigos em cada grupo formado para a foto, isto é, uma foto se difere da outra apenas pelo posicionamento das pessoas.

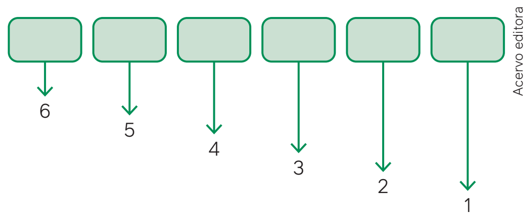
Para pensar e discutir

De acordo com as condições acima, responda:

1. Quantas posições diferentes existem para 2 amigos? Explique como calculou. 1. 2; resposta pessoal.
2. Quantas posições diferentes existem para 3 amigos? Explique como calculou. 2. 6; resposta pessoal.
3. Quantas posições diferentes existem para 4 amigos? Explique como calculou. 3. 24; resposta pessoal.
4. Quantas posições diferentes existem para 5 amigos? Explique como calculou. 4. 120; resposta pessoal.

Vamos retornar ao grupo dos seis amigos que se encontraram para a atividade de pesquisa.

Considere que os retângulos a seguir representam as posições que serão ocupadas pelas pessoas. Temos 6 possibilidades para a posição mais à esquerda (poderíamos começar pela direita). Uma pessoa ocupa essa posição, logo sobram 5 possibilidades para a segunda posição. Uma pessoa ocupa essa posição, sobrando apenas 4 para possibilidades para a próxima e assim sucessivamente.



Pelo princípio multiplicativo, temos que o número total n de possibilidades é:

$$n = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

ou

$$n = 6!$$

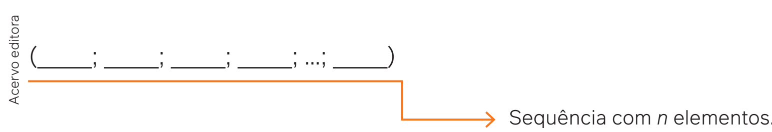
$$n = 720$$

Portanto, são 720 maneiras diferentes.

Em problemas de contagem, quando todos os elementos do grupo participam do evento e, além disso, um agrupamento se diferencia do outro apenas pela ordem que os elementos ocupam no agrupamento, temos uma situação de **permutação**.

Dado um conjunto com $\boldsymbol{n}$ elementos distintos, chama-se permutação desses $\boldsymbol{n}$ elementos todo agrupamento ordenado (sequência) formado por esses $\boldsymbol{n}$ elementos.

Para calcular o número total de permutações possíveis desses n elementos, que serão indicados por P_n, procedemos da seguinte maneira:



Temos:

- $\boldsymbol{n}$ possibilidades (para escolha do 1º elemento da sequência);
- ($\boldsymbol{n} - \mathbf{1}$) possibilidades (para escolha do 2º elemento da sequência, dado que o 1º já foi escolhido);
- ($\boldsymbol{n} - \mathbf{2}$) possibilidades (para escolha do 3º elemento da sequência, dado que os 2 primeiros já foram escolhidos);

...

- **2** possibilidades (para escolha do ($\boldsymbol{n} - \mathbf{1}$)º elemento da sequência, dado que os ($\boldsymbol{n} - \mathbf{2}$) primeiros já foram escolhidos);
- **1** possibilidade (para escolha do n-ésimo elemento da sequência, dado que os ($\boldsymbol{n} - \mathbf{1}$) primeiros já foram escolhidos).

Assim, pelo princípio fundamental da contagem, o total de permutações pode ser dado por:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$
$$P_n = n!$$

Chamamos de permutação simples dos n elementos.

Dado um conjunto com n elementos distintos, o total de permutações simples desses n elementos é dado pela relação:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

A denominação “simples” se dá pelo fato de não haver repetição de elementos, como veremos mais adiante.

Atividades resolvidas

9. Quando trocamos apenas a ordem das letras de uma palavra qualquer, estamos formando anagramas. No quadro, estão todos os anagramas possíveis de serem formados com as letras da palavra TIME.

TIME	TIEM	TEIM	TEMI	TMEI	TMIE
ITME	ITEM	IETM	IEMT	IMTE	IMET
METI	MEIT	MITE	MIET	MTEI	MTIE
EMIT	EMTI	EIMT	EITM	ETMI	ETIM

Mostre como calcular e obter o número total de anagramas sem construí-los um a um.

- Como um agrupamento se diferencia do outro pelas posições das letras, temos permutações simples das 4 letras, isto é, o número total de possibilidades n é dado por:

$$n = P_4$$
$$n = 4!$$
$$n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow n = 24$$

Portanto, são 24 anagramas ao todo.

Uma reflexão importante!

Você provavelmente deve estar pensando que não precisaríamos ter abordado o tópico permutação, pois essas situações poderiam ser resolvidas por meio do princípio multiplicativo.

Você está correto, porém, à medida que o número de elementos utilizados aumenta, fica mais direto dizer que basta considerar que estamos diante da permutação de 10 elementos, de 25 elementos etc. Além disso, não é necessário descrever ou analisar cada etapa indicando as possibilidades de realização.

Há situações nas quais algumas exigências dificultam o cálculo, mas a utilização de permutação, como foi apresentada anteriormente, acaba auxiliando bastante. Veja a atividade resolvida a seguir.

10. Quantos são os anagramas da palavra ALUNO que se iniciam por vogal?

- Precisamos escolher uma vogal para ocupar a 1ª posição. Dispomos de 3 possibilidades:

A				

U				

O				

- Temos 3 possibilidades de escolher uma vogal para ocupar a 1ª posição no anagrama. As 4 letras que sobram, simplesmente são "permutadas" nas 4 posições restantes. Assim, se n representa o número total de possibilidades, temos:

$$n = 3 \cdot P_4$$
$$n = 3 \cdot 4!$$
$$n = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow n = 72$$

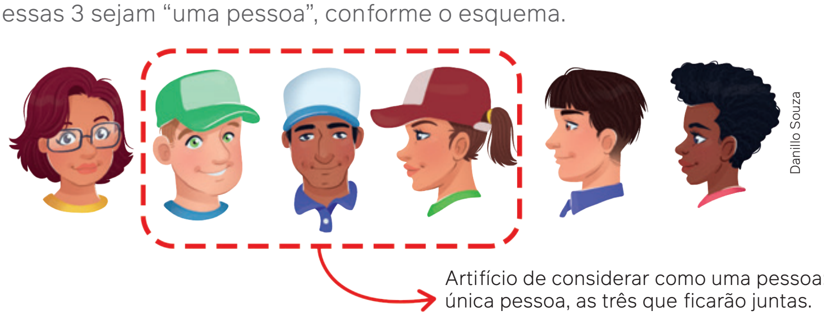
Para pensar e discutir

1. E qual seria o total de anagramas com as mesmas letras, porém iniciando por consoante? Explique utilizando permutação.
1. 48; resposta pessoal
2. E qual seria o total de anagramas começando e terminando por uma vogal? Explique.
2. 36; resposta pessoal

Portanto, são 72 anagramas formados com as letras da palavra ALUNO que começam por vogal.

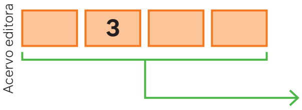
11. Considere 6 estudantes em sua turma com as seguintes condições: 3 que usam bonés e 3 que não usam bonés. Se colocarmos essas 6 pessoas uma ao lado da outra, de quantas maneiras elas podem ser permutadas de lugares considerando que as pessoas que utilizam bonés sempre devem ficar juntas, uma do lado da outra?

- A condição importante é que as pessoas que usam boné deverão ficar juntas. Vamos utilizar o artifício de considerar que essas 3 sejam "uma pessoa", conforme o esquema.



- Assim, para facilitar, vamos considerar que cada retângulo representa “uma pessoa”.

Acervo editora



- Dessa maneira, garantimos que os 3 que usem bonés fiquem juntos. Entretanto, mesmo que fiquem juntos, ainda podem trocar de posições entre eles (permutamos os 3 de bonés). Assim, o total é n, tal que:

$$n = (P_4) \cdot (P_3)$$
$$n = (4!) \cdot (3!)$$
$$n = 24 \cdot 6 \Rightarrow n = 144$$

Portanto, são ao todo 144 possibilidades.

Para pensar e discutir

1. Em quantas dessas permutações das 6 pessoas não teríamos juntas as 3 que usam boné? Explique utilizando permutação. 1. 576; resposta pessoal
2. Considere que devemos alternar pessoas com e sem bonés. De quantas maneiras isso poderia ocorrer? Explique utilizando permutação. 2. 72; resposta pessoal
3. Escreva um algoritmo para calcular o número de permutações de n elementos, sendo n um número natural. Em seguida, represente esse algoritmo por meio de um **fluxograma**. 3. Respostas pessoais.

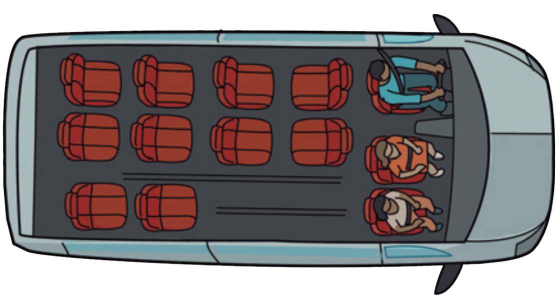
A atitude que deve ser valorizada quando você estiver diante de um problema de análise combinatória é se colocar de tal maneira que você faça parte da situação, manipulando, observando; enfim, buscando a compreensão do que exatamente está sendo analisado, o que difere um agrupamento do outro.

Atividades

38. Considere que você esqueceu os 4 últimos algarismos do celular de sua nova amiga. Entretanto, você sabe quais são os algarismos, só não se lembra da ordem deles. Quantas são as possibilidades de acertar a sequência correta? 38. 24

39. Na ilustração, estão os 3 bancos dianteiros de uma *van* e os 10 bancos destinados aos passageiros. Os bancos da frente já estão ocupados, e, ao iniciar uma pequena viagem turística, 10 pessoas entram na *van* para ocupar os 10 bancos.

Mauro Salgado



a) De quantas maneiras essas 10 pessoas podem se distribuir nos 10 bancos? 39. a) 3 628 800

b) Marta e Pedro são 2 dos 10 passageiros. De quantas maneiras é possível distribuir as 10 pessoas nos bancos considerando que Marta e Pedro irão ocupar os dois lugares de costas para os três bancos dianteiros? 39. b) 80 640

40. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.

a) Escrevam uma palavra com 7 letras distintas. 40. a) Resposta pessoal.

b) Elaborem e resolvam 4 situações que envolvam os anagramas das 7 letras da palavra escolhida na parte 1. 40. b) Resposta pessoal.

c) Apresentem as situações elaboradas para que outra dupla as resolva. Ao final, confrontem as respostas e resolvam possíveis discrepâncias. 40. c) Resposta pessoal.

41. Em sua turma, vamos considerar um grupo de 15 estudantes: 5 vestem camisetas amarelas, 5 vestem camisetas vermelhas e 5 vestem camisetas verdes. Deseja-se formar uma fila com essas 15 pessoas de tal maneira que as 3 primeiras vistam camisetas de cores diferentes e as seguintes mantenham a sequência de cores dadas pelas 3 primeiras. Qual é o total de maneiras distintas de formar essa fila? 41. 10 368 000

42. Considere todos os números naturais de 6 algarismos distintos obtidos permutando-se os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Utilizando essas condições, faça o que se pede.

a) Escreva o maior número que se pode formar. 42. a) 654 321

b) Escreva o menor número que se pode formar. 42. b) 123 456

c) Quantos, dos possíveis números que se podem formar, iniciam pelo algarismo 1? 42. c) 120

d) Quantos, dos possíveis números que se podem formar, iniciam pelo algarismo 4? 42. d) 120

e) Quantos, dos possíveis números que se podem formar, são maiores que 452 316? 42. e) 279

f) E quantos são menores que 345 612? 42. f) 304

43. Um restaurante "por quilo" coloca os alimentos ao longo de uma fila. São 3 diferentes pratos com salada, 5 diferentes pratos quentes e 4 diferentes pratos de sobremesa.
Considerando que os pratos de salada devem ficar juntos, os pratos quentes devem ficar juntos e, também, os pratos de sobremesa, responda:

a) Em quantas dessas disposições dos pratos é possível obter a ordem "salada, prato quente, sobremesa"? 43. a) 17 280

b) Qual é o número total de possibilidades de dispor os pratos? 43. b) 103 680

44. Considere todos os anagramas que podem ser formados com as letras da palavra ELOGIAR. Responda:

a) Em quantos desses anagramas as letras A e R aparecem juntas? 44. a) 1 440

b) Em quantos desses anagramas as letras A e R aparecem juntas nessa ordem? 44. b) 720

c) Em quantos desses anagramas as letras A, R e G aparecem juntas? 44. c) 720

d) Em quantos desses anagramas as letras A, R e G aparecem juntas nessa ordem? 44. d) 120

45. Em uma reunião internacional de representantes de Organizações Não Governamentais (ONGs) estão presentes: 3 brasileiros, 4 americanos e 5 mexicanos. Essas pessoas vão posar para uma fotografia em fila de tal modo que os de mesma nacionalidade fiquem juntos. De quantas maneiras distintas isso pode ocorrer? 45. 103 680

46. (UFJF-MG) Em três sofás de dois lugares cada, dispostos em uma fila, deverão se assentar 3 rapazes e 3 moças. Uma expressão que permite calcular a quantidade de maneiras que essas pessoas podem se sentar nesses sofás, de modo que em cada sofá fiquem sentados um rapaz e uma moça, é: 46. Alternativa **a**.

a) $6 \times 4 \times 2 \times 3!$ **b)** $2! \times 2! \times 2!$ **c)** $3 \times 2!$ **d)** $6!$ **e)** $\frac{6!}{3}$

47. (UEMG) Em uma apresentação na escola, oito amigos, entre eles Carlos, Timóteo e Joana, formam uma fila. Calcule o número de diferentes formas que esta fila de amigos pode ser formada de modo que Carlos, Timóteo e Joana fiquem sempre juntos. 47. Alternativa **c**.

a) $8!$ **b)** $(5!) \cdot (3!)$ **c)** $(6!) \cdot (3!)$ **d)** $(8!) \cdot (3!)$

48. (Integrado-PR) Deseja-se fazer uma foto de sete estudantes sentados [carteiras em fila, lado a lado], porém três deles devem estar sempre juntos na foto. O número de maneiras diferentes que eles podem sentar-se é

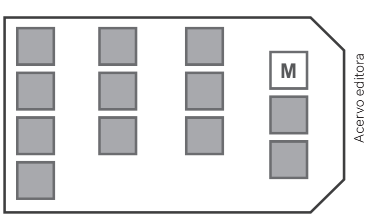
a) 24 **b)** 120 **c)** 480 **d)** 720 **e)** 5 040

48. Alternativa **d**.

49. (FGV-SP) Considere a sequência de números (3, 5, 7, 9). O número de maneiras diferentes de se escrever os 4 elementos dessa sequência de tal forma que não haja 3 elementos consecutivos em ordem crescente nem 3 elementos consecutivos em ordem decrescente é: 49. Alternativa **c**.

a) 8 **b)** 9 **c)** 10 **d)** 11 **e)** 12

50. (FMP-SP) A figura abaixo mostra o desenho de uma van. O lugar do motorista está assinalado com M e os lugares dos passageiros são os quadradinhos sombreados.



A van está, inicialmente, vazia e Bruno e Ana serão os primeiros a entrar. Eles desejam sentar juntos (um ao lado do outro), mas Ana não quer ficar ao lado do motorista. Considerando esse contexto, de quantas maneiras esse casal pode se sentar nessa van? 50. Alternativa **e**.

a) 6 **b)** 14 **c)** 30 **d)** 7 **e)** 15

51. (EAM) Assinale a opção que contém o número de anagramas da palavra APRENDIZ. 51. Alternativa **b**.

a) 40 300 **b)** 40 320 **c)** 40 330 **d)** 40 340 **e)** 40 350

52. (Unicamp-SP) Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lado a lado. O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas é igual a 52. Alternativa **b**.

a) 48 **b)** 72 **c)** 96 **d)** 120

53. (Acafe-SC) Um grupo de seis amigos, sendo dois meninos e quatro meninas, está comemorando a formatura do Ensino Médio. O fotógrafo solicitou ao grupo que se sentasse em um banco de seis lugares e que os meninos se sentassem nas extremidades do banco. Com essa configuração, o número de maneiras distintas que o grupo pode se sentar é de: 53. Alternativa **c**.

a) 720 **b)** 24 **c)** 48 **d)** 120

54. (Uece) Se forem listados, em ordem crescente, todos os números de cinco dígitos distintos obtidos com os algarismos 2, 3, 4, 6 e 7, é correto dizer que o número 62 437 ocupa a posição (ordem) de número

a) 75 **b)** 73 **c)** 77 **d)** 71 54. Alternativa **a**.

55. (Ifal) Em uma civilização antiga, o alfabeto tinha apenas três letras. Na linguagem dessa civilização, as palavras tinham de uma a quatro letras. Quantas palavras existiam na linguagem dessa civilização? 55. Alternativa **e**.

a) 4 **b)** 12 **c)** 16 **d)** 40 **e)** 120

Permutações com repetição

Já foi aqui comentado que a utilização da relação de permutação facilita o cálculo associado à contagem de determinados agrupamentos. Vimos exemplos, como a disposição de pessoas em filas ou de objetos em determinada ordem. Citamos exemplos que envolviam a formação de anagramas. Tais situações se referiam a elementos não repetidos. E o que ocorre quando temos elementos que são iguais e precisamos determinar a quantidade de maneiras distintas de ordená-los?

Exemplos:

Acervo editora

M A R I A → Anagramas da palavra MARIA: 2 letras iguais.

4 2 3 4 2 3 → Números naturais com 6 algarismos: algarismos 2, 3 e 4 aparecem repetidos.

Vamos considerar a seguinte situação:

De quantas maneiras diferentes podemos dispor na vertical os 4 livros ilustrados, considerando que dois deles são exatamente iguais?

Mauro Salgado

Nessa situação, o que interessa é colocar um livro ao lado do outro, considerando que um agrupamento irá se diferenciar do outro pela ordem dos elementos.

Como temos 4 livros e dois deles são iguais, podemos representá-los por letras **A**, **B**, **C** e **c**. Note que estamos utilizando uma letra maiúscula **C** e uma minúscula **c** para representar dois livros iguais. Assim, 4 elementos serão permutados obtendo as seguintes possibilidades:

ABCc	ABcC	ACBc	ACcB	AcCB	AcBC
BACc	BAcC	BcAC	BcCA	BCcA	BCAc
CABc	CAcB	CBAc	CBcA	CcAB	CcBA
cABC	cACB	cBAC	cBCA	cCAB	cCBA

Para pensar e discutir

1. Considerando **c** diferente de **C**, quantas são as permutações possíveis? 1. 24
2. Considerando que **c** é igual a **C** nas representações, quais delas precisam ser descartadas? 2. Aquelas em que são trocadas apenas as posições entre **c** e **C**.
3. Por meio da permutação de 4 elementos, como podemos obter o resultado que indica a permutação dos 4 elementos, sendo 2 deles iguais? Escreva em função de permutação. 3. $\frac{P_4}{P_2} = \frac{4!}{2!} = 12$

Ao permutarmos dois ou mais elementos que são exatamente iguais, isto é, que são indistinguíveis, não obtemos uma nova permutação. Estamos, nesses casos, diante de **permutação com repetição**. Um exemplo em que isso fica evidente é a formação de anagramas de palavras com letras repetidas.

Por exemplo, a seguir estão todos os anagramas que podem ser formados com as letras da palavra OSSOS, eles foram obtidos por construção, tomando o cuidado de não repetir anagrama.

OOSSS	**OSOSS**	**OSSOS**	**OSSSO**	**SOOSS**
SOSOS	**SOSSO**	**SSOOS**	**SSOSO**	**SSSOO**

Se observar esse quadro a fim de verificar os anagramas apresentados, é bem provável que você se faça pelo menos uma das seguintes perguntas:

- Será que todas as possibilidades estão descritas no quadro?
- De fato não há repetição de anagramas?

Para pensar e discutir

1. Se todas as letras fossem consideradas distintas, quantos seriam os anagramas? Escreva como permutação. 1. $P_5 = 5! = 120$
2. Desse total, quantas permutações podem ser consideradas idênticas apenas pelas posições das letras S? Expresse como permutação. 2. $P_3 = 3! = 6$
3. E quantas delas podem ser consideradas idênticas apenas pelas posições das letras O? Expresse como permutação. 3. $P_2 = 2! = 2$
4. Como você calcularia todos os anagramas das letras da palavra OSSOS? Coincide com a quantidade indicada no quadro? 4. Resposta pessoal.

Tanto a situação dos 4 livros vista anteriormente quanto o exemplo dos anagramas das letras da palavra OSSOS são casos de permutação com repetição de elementos, isto é, permutação em que aparecem elementos iguais.

Dados n elementos, dos quais n_1 são iguais a A_1, n_2 são iguais a A_2, n_3 são iguais a A_3, ..., n_r são iguais a A_r, com $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_r = n$, o número de permutações possíveis desses n elementos é dado por:

$$\boldsymbol{P_n^{n_1, n_2, n_3, \dots n_r} = \frac{n!}{(n_1!) \cdot (n_2!) \cdot (n_3!) \cdot \dots \cdot (n_r!)}}$$

Veja uma justificativa para essa relação matemática.

Para calcular o número total de permutações desses elementos, temos que posicioná-los em sequência:

$$\left(\underbrace{A_1, A_1, \dots, A_1}_{n_1}, \underbrace{A_2, A_2, \dots, A_2}_{n_2}, \underbrace{A_3, A_3, \dots, A_3}_{n_3}, \dots \underbrace{A_r, A_r, \dots, A_r}_{n_r}\right)$$

- n_1 elementos são iguais a A_1;
- n_2 elementos são iguais a A_2;
- n_3 elementos são iguais a A_3;

(...)

- n_r elementos são iguais a A_r.

Carrossel de imagens
Permutação

Se todos os elementos fossem distintos, o resultado de todas as permutações seria P_n. Porém, cada vez que mudamos a ordem dos n_1 elementos iguais a A_1 entre si, dos n_2 elementos iguais a A_2 entre si, dos n_3 elementos iguais a A_3 entre si, ..., e dos n_r elementos iguais a A_r entre si, temos as mesmas sequências. Logo:

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \dots, n_r} = \frac{P_n}{(P_{n_1}) \cdot (P_{n_2}) \cdot (P_{n_3}) \cdot \dots \cdot (P_{n_r})}$$

Observação:

Os elementos que não se repetem aparecem apenas uma vez. Como 1! = 1, a relação matemática apresentada anteriormente pode ser escrita contendo no denominador apenas os fatoriais correspondentes aos elementos que se repetem. É o que será utilizado nas duas atividades a seguir envolvendo permutações com repetição.

Atividades resolvidas

12. Retomando o exemplo apresentado, calcule o número de anagramas das letras da palavra MARIA.

Acervo editora

M	A	R	I	A

- Devemos permutar 5 letras sendo que 2 delas se repetem. Assim, utilizando a relação matemática para o cálculo de permutação com repetição, temos:

$$n = P_5^2$$

$$n = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} \Rightarrow n = 60$$

Portanto, são 60 anagramas possíveis.

13. Retomando a outra situação: calcule a quantidade de números naturais de 6 algarismos que podem ser obtidos utilizando em cada número os seguintes algarismos:

Acervo editora

4	2	3	4	2	3

- Os números serão formados por 6 algarismos; cada um dos algarismos 2, 3 e 4 aparece 2 vezes no mesmo número. Assim, temos:

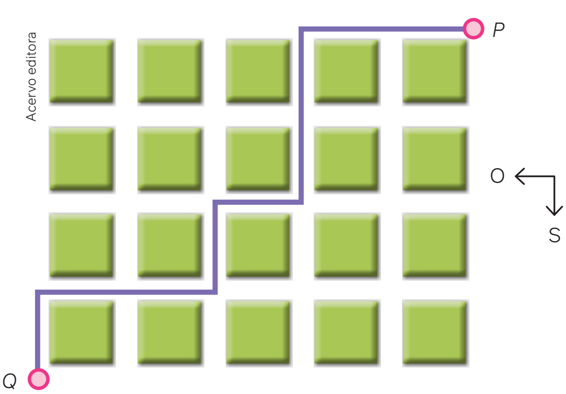
$$n = P_6^{2,\,2,\,2}$$

$$n = \frac{6!}{(2!) \cdot (2!) \cdot (2!)}$$

$$n = \frac{720}{8} \Rightarrow n = 90$$

Portanto, são 90 números possíveis.

14. A ilustração a seguir representa quadras e ruas de uma localidade. Considere que uma pessoa está no ponto *P* e deseja ir até o ponto *Q*. Para isso, se deslocará ou para oeste (O) ou para o sul (S). Observe, por exemplo, que na ilustração está indicado um trajeto possível: (O, O, S, S, O, S, O, O, S).



Quantos trajetos diferentes são possíveis fazer por essa pessoa considerando-se as condições estabelecidas?

- Inicialmente é importante observar que, conforme condições estabelecidas, essa pessoa se deslocará sempre 5 quadras para oeste e 4 quadras para o sul, isto é, percorrerá 9 quadras. Um exemplo é a sequência exemplificada de um trajeto:

$$\underbrace{(\text{O, O, S, S, O, S, O, O, S})}_{\text{Exemplo de trajeto}}$$

- Como um trajeto se diferenciará de outro pela sequência dessas direções, temos que calcular o total de sequências possíveis; sabendo que dos 9 "elementos", um deles aparece 4 vezes e outro aparece 5 vezes. Temos a permutação com repetição, ou seja:

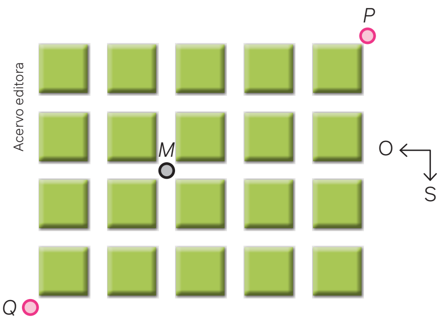
$$n = P_9^{4,\,5}$$

$$n = \frac{9!}{(4!)\cdot(5!)}$$

$$n = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5!} \Rightarrow n = 126$$

Portanto, são 126 trajetos diferentes.

15. Aproveitando a situação anterior, vamos considerar que a pessoa tenha que sair do ponto *P* para chegar ao ponto *Q*, porém observando que há um ponto intermediário *M*. Assim, essa pessoa deve sair do ponto *P*, passar pelo ponto *M* e, então, ir até o ponto *Q*. Quantos caminhos diferentes podem ser feitos?



- Note que, para ir de *P* a *M*, deve-se andar 3 quadras para oeste e 2 para o sul, não necessariamente nesta ordem:

(O, O, O, S, S)

- Como podemos mudar essa ordem, temos permutação de 5 com 3 e 2 repetições:

$$P_5^{3,\,2}$$

- Para ir de *M* a *Q*, deve-se andar 2 quadras para oeste e 2 para o sul, não necessariamente nessa ordem:

(O, O, S, S)

- Novamente, como podemos mudar essa ordem, temos permutação de 4 com 2 e 2 repetições:

$$P_4^{2,\,2}$$

- Observando que a condição estabelece que se deve percorrer de *P* a *M* e de *M* a *Q*, pelo princípio multiplicativo o total *n* de possíveis caminhos que podem ser feitos é:

$$n = P_5^{3,5}\cdot P_4^{2,2}$$

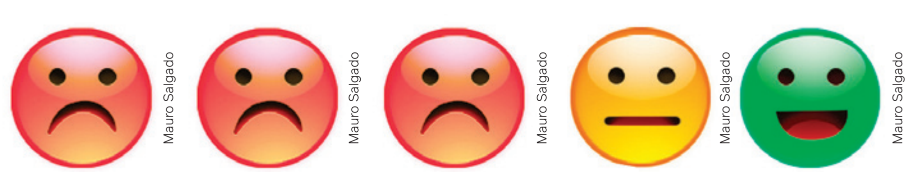
$$n = \frac{5!}{(3!)\cdot(2!)}\cdot\frac{4!}{(2!)\cdot(2!)}$$

$$n = 10\cdot 6 \Rightarrow n = 60$$

São 60 caminhos diferentes.

Atividades

56. Na avaliação de um *site*, utilizam-se "carinhas" que externam a opinião das pessoas. Considere que as possibilidades de expressar essas "carinhas" sejam as seguintes: Em uma avaliação com 5 quesitos (numerados de 1 a 5) apareceram 3 "carinhas tristes", 1 "carinha alegre" e 1 "carinha regular". De quantas maneiras essas "carinhas" poderiam ter sido ordenadas? 56. 20



57. Sobre a palavra ASAS, faça o que se pede a seguir.

a) Obtenha todos os anagramas que podem ser formados com as letras da palavra ASAS. 57. a) AASS, ASSA, SSAA, SASA, ASAS, SAAS.

b) Como você calcularia o número total desses anagramas? 57. b) Resposta pessoal.

58. Ao fazer os anagramas das letras da palavra ASAS provavelmente não houve muita dificuldade. Entretanto, à medida que o número de letras aumenta, a dificuldade também tende a aumentar. Daí a necessidade de se organizar. Construa todos os anagramas da palavra ARARA e, somente depois, faça o cálculo utilizando permutação com repetição para verificar se não faltou nenhum anagrama. 58. São 10 anagramas: AAARR, AARRA, ARRAA, RRAAA, RARAA, RAARA, RAAAR, ARARA, ARAAR, AARAR.

59. Seis bolas novas de voleibol estão colocadas lado a lado em uma estante na sala de Educação Física.

Colocando-as em fila, qual é o total de possibilidades para ordená-las, considerando que trocar as posições de duas bolas iguais não altera a disposição? 59. 30

60. Junte-se a mais um colega para fazer esta atividade. 60. Resposta pessoal.

Parte 1

Elaborem uma situação que envolva contagem relacionada à permutação com repetição.

Parte 2

Resolvam a situação que vocês elaboraram.

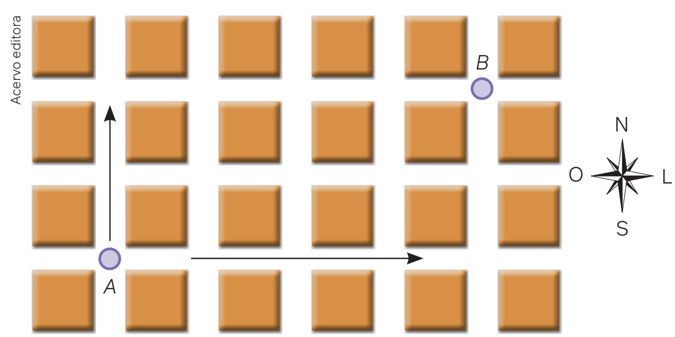
Parte 3

Apresentem a situação para que outra dupla a resolva.

Parte 4

Confrontem as respostas obtidas e, em caso de discordância, troquem ideias com a turma toda.

61. A figura a seguir representa um conjunto de quadras de uma cidade planejada. Admita que uma pessoa se encontra no ponto *A* e precisa ir até o ponto *B*, porém seguindo apenas para norte ou para leste.



a) Indique um caminho que essa pessoa possa fazer e escreva sentidos que ela possa seguir. 61. a) Resposta pessoal.

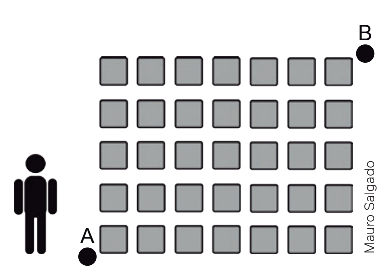
b) Quantos caminhos diferentes ao todo ela pode percorrer? 61. b) 15

62. Utilize a situação anterior para elaborar outra acrescentando as seguintes informações: 62. Resposta pessoal.

- insira um ponto *P* em uma esquina situada no trajeto entre *A* e *B*;
- estabeleça que se deva sair de *A* até *B*, porém passando pelo ponto *P*.

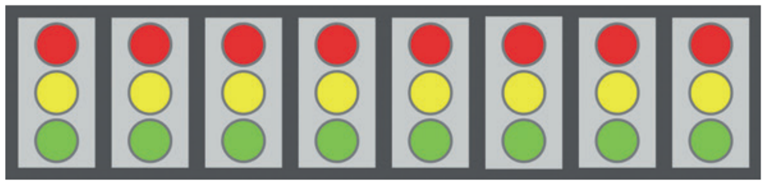
Após a elaboração, calcule o total de caminhos que podem ser feitos. Apresente a situação e a solução a um colega para que ele também a resolva, confrontando os resultados.

63. (Unesp) A figura mostra a planta de um bairro de uma cidade. Uma pessoa quer caminhar do ponto A ao ponto B por um dos percursos mais curtos. Assim, ela caminhará sempre nos sentidos “de baixo para cima” ou “da esquerda para a direita”. O número de percursos diferentes que essa pessoa poderá fazer de A até B é: 63. Alternativa **d**.



a) 95 040. **b)** 40 635. **c)** 924. **d)** 792. **e)** 35.

64. (Uerj) Um sistema luminoso, constituído de oito módulos idênticos, foi montado para emitir mensagens em código. Cada módulo possui três lâmpadas de cores diferentes – vermelha, amarela e verde. Observe a figura:



Acervo editora

Considere as seguintes informações:

- Cada módulo pode acender apenas uma lâmpada por vez;
- Qualquer mensagem é configurada pelo acendimento simultâneo de três lâmpadas vermelhas, duas verdes e uma amarela, permanecendo dois módulos com as três lâmpadas apagadas;
- Duas mensagens são diferentes quando pelo menos uma das posições dessas cores acesas é diferente.

Calcule o número de mensagens distintas que esse sistema pode emitir. 64. 1 680

65. (UFRGS) O Sr. Asdrúbal se preocupa muito com a segurança na internet, por isso troca mensalmente a senha de seu correio eletrônico. Para não esquecer a senha, ele utiliza o ano de nascimento de seu gato e a palavra *pet* para formar sua senha, totalizando 7 caracteres. No momento de alterar a senha, ele apenas inverte a ordem da palavra e dos números. Sabendo que o gato nasceu no ano de 2009 e que as letras da palavra *pet* são mantidas juntas e nessa mesma ordem, quantas senhas distintas o Sr. Asdrúbal consegue formar? 65. Alternativa **e**.

P	E	T	2	0	0	9

a) 5 040　**b)** 72　**c)** 720　**d)** 120　**e)** 60

66. (Ifal) Listando todos os anagramas da palavra NATURAL e excluindo aqueles em que as letras T, U e R aparecem juntas, em qualquer ordem, sobram 66. Alternativa **c**.

a) 2 520 palavras
b) 2 480 palavras
c) 2 160 palavras
d) 1 860 palavras
e) 1 385 palavras

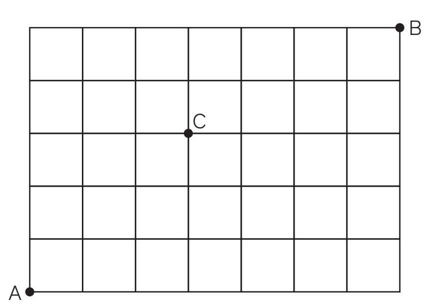
67. (Unicamp-SP) O número de anagramas da palavra REFLORESTAMENTO que começam com a sequência FLORES é 67. Alternativa **c**.

a) $9!$　**b)** $\frac{9!}{2!}$　**c)** $\frac{9!}{(2!)\cdot(2!)}$　**d)** $\frac{9!}{(2!)\cdot(2!)\cdot(2!)}$

68. (Unisinos-RS) Um anagrama é uma palavra ou frase formada pela permutação das letras de outra palavra ou frase. Um exemplo é o nome da personagem Iracema, anagrama de América, no romance de José de Alencar. Quantos anagramas distintos podemos formar com a palavra MEDICINA? 68. Alternativa **d**.

a) 36　**b)** 2 520　**c)** 5 040　**d)** 20 160　**e)** 40 320

69. (UFGRS) Um aplicativo de transporte disponibiliza em sua plataforma a visualização de um mapa com ruas horizontais e verticais que permitem realizar deslocamentos partindo do ponto A e chegando ao ponto B, conforme representado na figura abaixo.



Acervo editora

O número de menores caminhos possíveis que partem de A e chegam a B, passando por C, é 69. Alternativa **d**.

a) 28
b) 35
c) 100
d) 300
e) 792

3

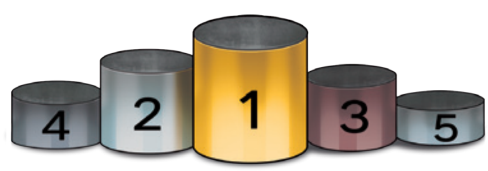
Formando agrupamentos

Nas situações de contagem apresentadas e discutidas anteriormente nos tópicos “Permutação simples” e “Permutação com repetição”, **todos os elementos** participavam dos agrupamentos. Nelas um agrupamento se diferenciava do outro pela ordem em que os elementos eram considerados. Podemos ter, entretanto, problemas de contagem em que, além de os agrupamentos se diferenciarem pela ordem de seus elementos, nem todos os elementos precisam participar.

A posição de largada para iniciar uma corrida de *kart* envolve 11 pilotos. Quem vai ganhar?

Reinaldo Vignati

Ao final da corrida, os cinco primeiros colocados ocupam suas posições no pódio, representado a seguir, para receber as premiações correspondentes. Quem serão os cinco primeiros colocados? Não podemos saber antes de terminar a corrida, mas podemos determinar a quantidade de maneiras de isso ocorrer, isto é, a análise combinatória!



Mauro Salgado

Para pensar e discutir

1. Qual é o número de possibilidades para o 1º lugar na corrida? Justifique. 1. 11; resposta pessoal
2. Sabendo quem é o 1º colocado, quantas possibilidades teríamos para o 2º lugar? Justifique. 2. 10; resposta pessoal
3. Como você calcula o número total de possibilidades para os cinco primeiros colocados dessa corrida? Qual é o total de possibilidades? 3. Resposta pessoal; 55 440.

Nesta última questão, referente aos cinco primeiros colocados, para determinarmos o total de possibilidades de conseguir essa informação, precisamos obter a quantidade de maneiras diferentes de “arranjarmos” os 11 pilotos de 5 em 5. Note que, por exemplo, podemos ter os mesmos pilotos A, B, C, D e E no pódio, mas com **diferentes posições**.

Danillo Souza

Danillo Souza

Esse e outros problemas similares são problemas de **arranjos simples**.

Arranjo simples

Vamos considerar outro exemplo também de corrida. Que tal a Fórmula 1?

A foto é do *grid* de largada de uma corrida de Fórmula 1. Nesse caso, já sabemos qual foi a colocação final, isto é, a ordem em que os pilotos chegaram ao final da corrida.

Dan Mullan/Getty Images

Largada do Grand Prix da Alemanha de Fórmula1 em Hockenheimring, 2019.

Mas, para examinarmos a situação aqui em análise combinatória, vamos considerar que 20 pilotos iniciaram a corrida. De quantas maneiras diferentes poderíamos ter os 3 primeiros colocados ocupando o pódio?

Podemos iniciar pensando em quantas possibilidades temos para o 1º colocado. A partir daí, pensamos no número de possibilidades para o 2º colocado e, somente então, consideramos o número de possibilidades para o 3º colocado.

1º colocado	2º colocado	3º colocado
↓	↓	↓
20	19	18

Utilizando o princípio multiplicativo da contagem e sendo n o número total de possibilidades, temos:

$$n = 20 \cdot 19 \cdot 18$$
$$n = 6\,840$$

Portanto, são 6 840 possibilidades de termos o 1º, o 2º e o 3º colocados na corrida com 20 pilotos competindo.

Observe, com base nesse exemplo, que poderíamos utilizar no cálculo o conceito de **fatorial** de um número natural para chegarmos à resposta.

$$n = 20 \cdot 19 \cdot 18$$

↓ multiplicamos e dividimos pelo fatorial de 17

$$n = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \frac{17!}{17!}$$

↓ utilizando o conceito de fatorial e considerando que 17 = 20 − 3

$$n = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{(20-3)!}$$

$$n = \frac{20!}{(20-3)!}$$

→ Arranjo de 20 elementos tomados de 3 em 3.
Notação: $A_{20,\,3}$ ou A_{20}^{3}.

Para pensar e discutir

1. Qual é o significado da palavra **arranjo**? 1. Resposta pessoal.
2. Como você representaria, utilizando um arranjo, as possibilidades dos 5 primeiros colocados no exemplo inicial do *kart*? 2. $A_{11,\,5} = \frac{11!}{(11-5)!}$.

Nas situações que envolvem o que chamamos de arranjos simples (por não haver repetição de elementos no mesmo agrupamento), os elementos são colocados em ordem.

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se arranjo desses n elementos, tomados k a k ($k \leq n$), qualquer agrupamento ordenado de k elementos distintos escolhidos entre os n existentes.

São exemplos de arranjos simples:

- possibilidades de escolhas de quem será o presidente e o vice-presidente que representará a turma;
- cálculo do número de resultados possíveis dos 4 primeiros times em um campeonato de futebol em que participam 20 times;
- determinação do número de maneiras diferentes de 5 pessoas que estão em pé ocuparem os 3 lugares disponíveis em um assento.

Para calcular o número total de arranjos possíveis desses n elementos, que indicaremos por $A_{n,\,k}$, procedemos da seguinte maneira:

$$\underbrace{(\_\_;\ \_\_;\ \_\_;\ \_\_;\ \ldots;\ \_\_)}_{\text{Sequência com } k \text{ elementos.}}$$

- para o **1º** elemento:
  n possibilidades de escolha;
- para o **2º** elemento:
  (n – 1) possibilidades de escolha (o 1º foi escolhido e não haverá repetições de elementos);
- para o **3º** elemento:
  (n – 2) possibilidades de escolha (os 2 primeiros já foram escolhidos e não haverá repetições de elementos);

...

- para o ***k*º** elemento:
  $n - (k - 1) = (n - k + 1)$ possibilidades de escolha (os **(k – 1)**) primeiros já foram escolhidos).

Assim, pelo princípio fundamental da contagem, o total de arranjos pode ser dado por:

$$A_{n,\,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

$\downarrow$ multiplicando e dividindo o 2º membro por $(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$

$$A_{n,\,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$\downarrow$ (conforme conceito de fatorial)

$$A_{n,\,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$A_{n,\,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

O cálculo do número de arranjos simples de n elementos, tomados k a k, sendo $k \leq n$, é dado pela relação:

$$\boldsymbol{A_{n,\,k} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Observação:

A relação acima também pode ser escrita como: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Para pensar e discutir

1. O que obtemos nessa fórmula quando consideramos que $n = k$? 1. $n!$

2. Ao substituir n por k nessa fórmula, surge 0!, que foi definido como sendo 1. Assim, como você define permutação simples em função de arranjos simples? 2. Resposta pessoal.

Atividades resolvidas

16. Três letras distintas escolhidas entre as letras A, B, C, D e E formarão uma sigla. Qual é o número total de possibilidades de formação dessa sigla?

- Precisamos formar todas as sequências possíveis com 3 letras distintas a partir das 5 letras disponíveis. Um modo de resolução está fundamentado no princípio multiplicativo:

1ª	**2ª**	**3ª**

Escolha da 1ª letra: 5 possibilidades
Escolha da 2ª letra: 4 possibilidades
Escolha da 3ª letra: 3 possibilidades

- Sendo n o número total de siglas distintas, pelo princípio multiplicativo, temos:

$$n = 5 \cdot 4 \cdot 3 \Rightarrow n = 60$$

- Como devemos formar sequências de 3 elementos a partir de 5, temos um problema de arranjo simples de 5 elementos tomados 3 a 3:

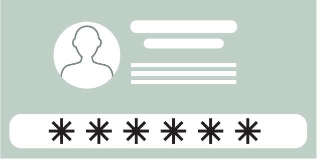
$$n = A_{5,\,3}$$
$$n = \frac{5!}{(5-3)!}$$
$$n = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} \Rightarrow n = 60$$

Portanto, são 60 siglas possíveis de serem formadas.

Observação:

As siglas ABC, ACB, BAC, BCA, CAD e CDA estão entre as 60 siglas que podem ser formadas. Note que, nesse caso, uma sigla se diferencia da outra pela posição ocupada pelas mesmas três letras.

17. A senha de acesso a uma plataforma é constituída de uma sequência de 6 dígitos de 0 a 9, porém não pode haver repetição de dígitos na mesma senha. Calcule o número total de senhas que podem ser elaboradas.



Reinaldo Vignati

- Temos que formar sequências distintas de 6 dígitos a partir de 10 dígitos disponíveis. Assim, o total de senhas é o número de arranjos simples de 10 elementos tomados 6 a 6:

$$n = A_{10,\,6}$$
$$n = \frac{10!}{(10-6)!}$$
$$n = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!}$$
$$n = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \Rightarrow n = 151\,200$$

Portanto, são 151 200 senhas possíveis.

Atividades

70. Em relação às possibilidades de senhas da atividade resolvida anteriormente, escreva, utilizando a notação de arranjo simples, o que se pede:

a) o número dessas senhas que começam pelo dígito zero; 70. a) $A_{9,\,5}$

b) o número dessas senhas que iniciam por um dígito par; 70. b) $5 \cdot A_{9,\,5}$

c) o número dessas senhas que iniciam por um dígito par e terminam com um dígito ímpar. 70. c) $25 \cdot A_{8,\,4}$

71. Calcule os valores a seguir, relacionados à formação de arranjos simples.

a) A_{10}^{2} 71. a) 90

b) A_{8}^{3} 71. b) 336

72. Resolva cada uma das seguintes equações:

a) $A_n^3 = 120$ 72. a) $n = 6$

b) $A_n^2 = 3 \cdot n + 5$ 72. b) $n = 5$

73. Na fotografia a seguir, três cadeiras são colocadas em linha. Considere ainda que 7 pessoas estão em pé e 3 delas ocuparão esses lugares.

kibri_ho/Shutterstock.com

a) Utilizando o princípio multiplicativo, determine o número de maneiras de essas 7 pessoas ocuparem os três lugares. 73. a) 210

b) Esse problema poderia ser resolvido utilizando arranjos simples? Explique. 73. b) Sim; resposta pessoal.

74. Responda:

a) Em problemas de arranjos, a mudança de ordem dos elementos no agrupamento altera o agrupamento? Explique. 74. a) Sim; resposta pessoal.

b) O cálculo de P_5 (permutação simples de 5 elementos) pode ser feito por meio de arranjos simples? Justifique. 74. b) Sim; resposta pessoal.

75. Para o ingresso em uma universidade, o estudante deve escolher a primeira e a segunda opções de curso. Se nessa universidade há 12 opções de cursos, calcule:

a) O número de maneiras distintas que um estudante pode escolher a primeira e a segunda opções de curso. 75. a) 132

b) Como esse total de maneiras é calculado pelo princípio multiplicativo? 75. b) $12 \cdot 11$

c) E como é calculado por meio de arranjo simples? 75. c) $A_{12,\,2} = \frac{12!}{(12-2)!}$

76. Junte-se a um colega para fazer esta atividade. 76. Resposta pessoal.

Parte 1

Elaborem uma situação que envolva o número de estudantes de sua turma e 4 cadeiras colocadas uma ao lado da outra.

Parte 2

Resolvam a situação utilizando o princípio multiplicativo e também a relação de arranjos simples.

Parte 3

Apresentem a situação elaborada a outra dupla para que ela a resolva.

Parte 4

Confrontem os resultados obtidos. Caso não sejam iguais, discutam com essa dupla os procedimentos utilizados.

77. Na aula de Educação Física, o professor resolveu verificar, entre 10 estudantes que ele selecionou, quais são os três mais rápidos em uma corrida de 100 m. Entre eles, um era Ricardo.

a) De quantas maneiras diferentes podemos ter os 3 primeiros colocados? 77. a) 720

b) Em quantas dessas maneiras Ricardo não está entre os 3 primeiros colocados? 77. b) 504

c) Em quantas dessas maneiras Ricardo está entre os 3 primeiros colocados? 77. c) 216

78. (Enem) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito no computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares. Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é: 78. Alternativa **e**.

a) 24. **b)** 31. **c)** 32. **d)** 88. **e)** 89.

79. Considere que no emplacamento dos carros sejam utilizadas 4 letras (entre 26 letras disponíveis) e 3 algarismos (entre 10 algarismos disponíveis), como indicado na figura.

Cesar Diniz/Pulsar Imagens

De quantas maneiras diferentes pode-se escolher 4 letras distintas para uma placa desse tipo? 79. 358 800

80. (Ufam) A quantidade de números, com três algarismos distintos, que podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 8 é 80. Alternativa **d**.

a) 105 **b)** 330 **c)** 400 **d)** 210 **e)** 540

81. (UFT-TO) Carol abriu uma conta em uma rede social que permite que sejam postadas nove fotos em uma grade com espaços dispostos como na figura seguinte. Em uma das linhas horizontais, Carol pretende colocar três fotos distintas de sua viagem para Salvador, em outra ela pretende colocar três fotos distintas de sua viagem para o Jalapão e, na restante, pretende colocar três fotos distintas de sua viagem para o Rio de Janeiro. Carol possui 4 fotos de sua viagem para Salvador, 5 fotos de sua viagem para o Jalapão e 5 fotos de sua viagem para o Rio de Janeiro, todas distintas.

FOTO 9	FOTO 8	FOTO 7
FOTO 6	FOTO 5	FOTO 4
FOTO 3	FOTO 2	FOTO 1

81. Alternativa **b**.

Nestas condições, é correto afirmar que o número total de possibilidades de Carol organizar suas fotos é:

a) $(5!)^2 \times (3!)$ **b)** $(5!)^2 \times (3!)^2$ **c)** $(5!)^2 \times (4!)^2$ **d)** $(5!) \times (4!)$

82. (UFJF-MG) Um ônibus com 40 assentos numerados de 01 a 40 foi alugado para uma excursão que fará uma viagem com 25 turistas. De quantos modos distintos os turistas poderão ser acomodados para a viagem considerando que não há preferência por lugares? 82. Alternativa **a**.

a) $\dfrac{40!}{15!}$ **b)** $\dfrac{25!}{15!}$ **c)** 40 **d)** 15! **e)** 40! – 15!

83. (Uerj) Em uma reunião, trabalhadores de uma indústria decidiram fundar um sindicato com uma diretoria escolhida entre todos os presentes e composta de um presidente, um vice-presidente e um secretário. O número total de possibilidades de composição dessa diretoria é trinta vezes o número de pessoas presentes nessa reunião.
O número de trabalhadores presentes é: 83. Alternativa **d**.

a) 13 **b)** 11 **c)** 9 **d)** 7

84. (Unip-SP) Interessado em saber a preferência dos alunos do último ano de Medicina quanto à especialidade a seguir após a conclusão do curso, foi realizada uma pesquisa em que cada aluno deveria escolher, em ordem de preferência, 3 especialidades, entre 8 sugeridas. Sabe-se que uma das especialidades é Pediatria. Nessas condições, analise as assertivas e assinale a alternativa que aponta as corretas.

I. O número de respostas diferentes que podem ser dadas pode ser encontrado utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, ou seja, realizando o cálculo $8 \times 7 \times 6$.

II. O número de respostas diferentes que podem ser dadas pode ser encontrado utilizando a fórmula $A_{8,\,3}$.

III. O número de respostas possíveis que apresentam Pediatria como a especialidade preferida em 1º lugar pode ser encontrado utilizando a fórmula $A_{7,\,2}$.

IV. O número de respostas possíveis que não contêm Pediatria entre as especialidades escolhidas pode ser encontrado utilizado a fórmula $A_{7,\,3}$. 84. Alternativa **a**.

a) I, II, III e IV. **b)** Apenas I e III. **c)** Apenas I e IV. **d)** Apenas II e III. **e)** Apenas II e IV.

85. (Enem) Um determinado campeonato de futebol, composto de 20 times, é disputado no sistema de pontos corridos. Nesse sistema, cada time joga contra todos os demais times em dois turnos, isto é, cada time joga duas partidas com cada um dos outros times, sendo que cada jogo pode terminar empatado ou haver um vencedor.
Sabendo-se que, nesse campeonato, ocorreram 126 empates, o número de jogos em que houve ganhador é igual a

85. Alternativa **c**.

a) 64 **b)** 74 **c)** 254 **d)** 274 **e)** 634

86. (FCM-MG) Um hospital possui 5 salas de cirurgias eletivas, utilizadas diariamente por 8 médicos cirurgiões. Duas dessas salas destinam-se apenas aos procedimentos ortopédicos, sendo ocupadas, em todos os momentos de funcionamento do hospital, por 1 dos 2 ortopedistas que compõem a equipe.
Em certo momento, o número de possibilidades de organizações para a ocupação das salas é de:

86. Alternativa **b**.

a) 120 **b)** 240 **c)** 336 **d)** 6 720

87. (FPP-PR) Uma pessoa quer criar uma *playlist* de músicas favoritas para ouvir e tem a seu dispor uma biblioteca contendo 50 músicas, divididas em 5 grandes gêneros: *rock*, *dance*, *pop*, *blues* e clássica. Há 10 músicas em cada gênero. Hoje ela fará uma *playlist* em que vai escutar 25 músicas da seguinte forma: 5 músicas de cada de um dos 5 gêneros, sendo que músicas de um mesmo gênero devem ser tocadas em seguida até se esgotarem as músicas daquele gênero. Em uma *playlist*, nenhuma música pode se repetir e a ordem com a qual elas são tocadas faz diferença. É correto afirmar que o número total de *playlists* possíveis será de 87. Alternativa **e**.

a) 2 500 **b)** 6 048 **c)** 30 240 **d)** $30\,240^5$ **e)** $120 \times 30\,240^5$

Para explorar

Junte-se a três colegas para fazer estas atividades.

1. A imagem a seguir mostra um modelo de emplacamento de automóveis formado por 3 letras e 4 algarismos. Descubram quantas possíveis placas podem ser formadas nesse sistema. 1. 175 760 000

Iara Venanzi/Pulsar Imagens

2. Essa outra imagem mostra um modelo de placa em implantação no Brasil.

Daniel Cymbalista/Pulsar Imagens

Pesquisem e respondam:

a) Quais as posições dos algarismos e das letras nesse sistema de emplacamento? 2. a) Letra, letra, letra, número, letra, número, número.

b) Qual é o total de placas que podem ser produzidas nesse sistema? 2. b) 456 976 000

3. Comparem os dois sistemas, elaborem e apresentem um pequeno texto comentando as semelhanças, as diferenças e as quantidades dos possíveis emplacamentos. 3. Resposta pessoal.

Combinação simples

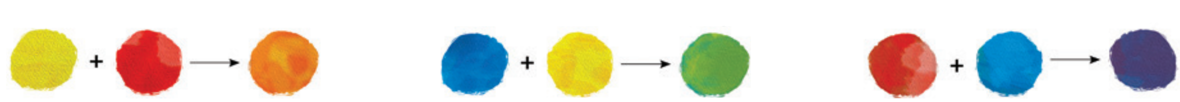
Já formamos agrupamentos em que a ordem dos elementos era importante. Assim, procedemos com as situações que foram resolvidas por meio do princípio multiplicativo, da ideia de permutação simples (quando os elementos não se repetem), da permutação com repetição (quando há elementos iguais) e com agrupamentos que denominamos de arranjos simples.

E quando precisarmos **apenas escolher** determinado número de elementos para formar um agrupamento, isto é, quando a ordem dos elementos não diferenciar um agrupamento do outro, como proceder?

Danillo Souza

Danillo Souza

Considere, por exemplo, a questão da formação das cores. As três principais cores no círculo cromático são: amarelo, vermelho e azul. São as chamadas cores primárias. Combinando essas cores entre si, por exemplo, de duas em duas, podemos obter outras três cores secundárias: laranja, verde e violeta. Observe a ilustração a seguir.



Mauro Salgado

Para pensar e discutir

1. Se você fizesse o arranjo dessas 3 cores primárias de 2 em 2, quantos resultados obteria? 1. 6
2. Quantas cores secundárias resultariam? 2. 3
3. Ao "misturar" as cores primárias entre si, a ordem delas altera a cor secundária resultante? 3. Não.

Esses agrupamentos em que a ordem dos elementos não "altera" o resultado são conhecidos como combinações. Aqui serão consideradas situações ideais, e não situações subjetivas, como "O que é melhor: arroz em cima do feijão ou o feijão em cima do arroz?".

Fernando Favoretto/Criar Imagem

Prato com arroz em cima do feijão.

Fernando Favoretto/Criar Imagem

Prato com feijão em cima do arroz.

As combinações que vamos resolver e calcular estão relacionadas com a ideia de formação de conjuntos. São agrupamentos em que a ordem de seus elementos não os difere um do outro. Assim, por exemplo, os seguintes conjuntos são iguais:

$$\underbrace{\{2, 3, 4\}, \{2, 4, 3\}, \{3, 2, 4\}, \{3, 4, 2\}, \{4, 2, 3\}, \{4, 3, 2\}}_{\text{Representações de um mesmo conjunto.}}$$

Para o cálculo do número de agrupamentos que podem ser formados com a característica de que em cada agrupamento a ordem dos elementos não importa, podemos partir do conhecimento sobre arranjos simples. Analise as duas atividades resolvidas a seguir.

Atividades resolvidas

18. Considere que um grupo de 10 estudantes está em uma quadra esportiva. Em determinado momento, de 2 em 2, os estudantes vão apertar as mãos; entretanto, cada um deverá apertar a mão do outro apenas uma vez. Como calcular o total de apertos de mãos que podem ser feitos?

- Podemos utilizar, inicialmente, a ideia de formar grupos com 2 elementos a partir de 10:

$$A_{10}^{2} = \frac{10!}{(10-2)!}$$

$$A_{10}^{2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 \Rightarrow A_{10}^{2} = 90$$

- Se dois desses estudantes forem Maria e Antônio, nesse cálculo, entre eles, os apertos de mãos serão considerados em duplicidade (ou seja, duas vezes), pois, em arranjos, Maria e Antônio é considerado diferente de Antônio e Maria. Dessa forma, o número total n de apertos de mãos poderia ser calculado por:

$$n = \frac{A_{10}^{2}}{2!}$$

$$n = \frac{90}{2} \Rightarrow n = 45$$

Portanto, são 45 apertos de mãos.

Para pensar e discutir

1. Cada um dos 10 estudantes apertará a mão de quantos outros estudantes? 1. 9
2. Multiplicando o número de estudantes (10) pelo número de apertos de mãos de cada um, qual é o resultado? 2. 90
3. Esse resultado fornece o total de apertos de mãos? Justifique. 3. Não; resposta pessoal.

19. Utilizando ainda os 10 estudantes, vamos agora escolher 3 deles para formar uma comissão que representará a turma. Essa comissão não terá cargos, isto é, cada um dos três estudantes terá a mesma função. Quantas são as possíveis comissões?

- Vamos calcular o número de arranjos desses 10 estudantes tomados 3 a 3:

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!}$$

$$A_{10}^{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \Rightarrow A_{10}^{3} = 720$$

- Lembre-se de que, no cálculo envolvendo arranjo, a ordem dos elementos na formação do grupo é importante. Aqui não nos interessa a ordem. Assim, para exemplificar, se 3 desses estudantes são *A*, *B* e *C*, os arranjos *ABC*, *ACB*, *BAC*, *BCA*, *CBA* e *CAB* correspondem ao mesmo grupo {*A*, *B*, *C*}. Portanto, sendo *n* o número total de maneiras de formarmos uma comissão com 3 elementos a partir de 10, temos:

$$n = \frac{A_{10}^{3}}{3!}$$

$$n = \frac{720}{6} \Rightarrow n = 120$$

Portanto, podem ser formadas ao todo 120 possíveis comissões.

Agora, observe como podemos reescrever os cálculos feitos anteriormente utilizando o conceito de fatorial:

$$n = \frac{A_{10,3}}{3!} = \frac{1}{3!} \cdot A_{10,\,3}$$

$$n = \frac{1}{3!} \cdot \frac{10!}{(10-3)!}$$

$$n = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!}$$

Combinação de 10 elementos tomados 3 a 3.
Notação: $C_{10,\,3}$ ou C_{10}^{3}

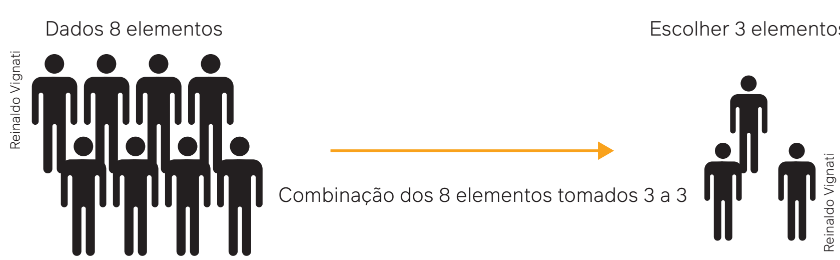
$$n = C_{10,\,3}$$

Representamos:

$C_{10,\,3}$ ou C_{10}^{3}

Dados *n* elementos distintos, chama-se **combinação** desses *n* elementos, tomados *k* a *k* ($k \leq n$), qualquer subconjunto formado por *k* elementos distintos, escolhidos entre os *n*.

Exemplo:



Para calcular o número total de combinações desses *n* elementos, tomados *k* a *k* ($k \leq n$), que indicaremos por $C_{n,\,k}$, procedemos da maneira descrita a seguir.

Utilizamos o princípio multiplicativo para obtermos a quantidade de agrupamentos ordenados (arranjos) formados por *k* elementos distintos, escolhidos entre os *n* elementos, isto é:

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot [n-(k-1)]}_{A_{n,\,k}}$$

Novamente utilizamos o princípio multiplicativo para obtermos a quantidade de sequências distintas que podem ser formadas com os *k* elementos escolhidos acima:

$$\underbrace{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ \ldots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{P_k}$$

Observando que qualquer uma das permutações desses k elementos dá origem a uma única combinação com k elementos, temos que o total de combinações dos n elementos, tomados k a k, é:

$$C_{n,\,k} = \frac{A_{n,\,k}}{P_k}$$

$$C_{n,\,k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$\boldsymbol{C_{n,\,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$

Para pensar e discutir

1. Compare os resultados de $C_{n,\,k}$ com $C_{n,\,n-k}$, sendo $n \geq k$. Qual é a conclusão? 1. São iguais.
2. Ao calcular, por exemplo, $C_{10,\,3}$ estamos determinando o total de subconjuntos que podemos formar a partir de 10 elementos disponíveis. Qual é o motivo de esse resultado ser igual a $C_{10,\,7}$? Justifique sua resposta com base na formação de conjuntos. 2. Resposta pessoal.
3. Dadas 8 pessoas (exemplo da página anterior) queremos escolher 3 delas para formar um grupo. Quantos são os grupos que podem ser formados? 3. 56

O cálculo envolvendo combinações está relacionado com a formação de grupos em que a ordem dos elementos não altera o agrupamento. Nesse caso, trata-se de formar um conjunto em que a ordem dos elementos não é relevante.

Atividades resolvidas

20. Dado o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$, qual o número total de subconjuntos de A que podem ser formados? Lembre-se de que, em um conjunto, a ordem em que os elementos são escritos não importa.

- Um subconjunto de A é um conjunto formado com elementos do conjunto A. Temos as seguintes possibilidades para a formação dos subconjuntos de A:

subconjunto com 0 elemento: 1 possibilidade $\longrightarrow \varnothing = \{\}$;

subconjunto com 1 elemento: 5 possibilidades $\longrightarrow \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}$;

subconjunto com 2 elementos: 10 possibilidades $\longrightarrow \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}$;

subconjunto com 3 elementos: 10 possibilidades $\longrightarrow \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d\}, \{b; c; e\}, \{b; d; e\}, \{c; d; e\}$;

subconjunto com 4 elementos: 5 possibilidades $\longrightarrow \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}$;

subconjunto com 5 elementos: 1 possibilidade $\longrightarrow \{a, b, c, d, e\} = A$.

- Sendo n o total de subconjuntos que podemos formar a partir de 5 elementos, temos:

$$n = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$$

$$n = \frac{5!}{0!(5-0)!} + \frac{5!}{1!(5-1)!} + \frac{5!}{2!(5-2)!} + \frac{5!}{3!(5-3)!} + \frac{5!}{4!(5-4)!} + \frac{5!}{5!(5-5)!}$$

$$n = \frac{5!}{1 \cdot 5!} + \frac{5!}{1 \cdot 4!} + \frac{5!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} + \frac{5!}{3! \cdot 2 \cdot 1} + \frac{5!}{4! \cdot 1} + \frac{5!}{5! \cdot 1}$$

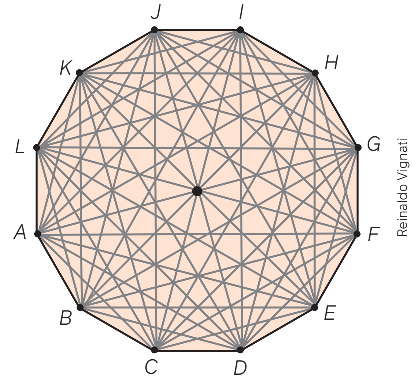
$$n = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 \Rightarrow n = 32$$

Portanto, são 32 subconjuntos que podem ser formados com os elementos de A.

Para pensar e discutir

1. Utilizando como argumento os subconjuntos formados, explique o motivo de C_5^2 ser igual a C_5^3. 1. Resposta pessoal.
2. Qual é o total de subconjuntos que podemos formar com os elementos de um conjunto que contenha 6 elementos? 2. 64

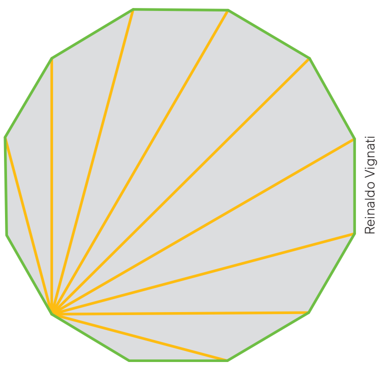
21. A seguir está representado um dodecágono, ou seja, um polígono formado por 12 lados (e 12 vértices) com todas as diagonais traçadas. Quantas são essas diagonais?



- Como todas as diagonais foram traçadas, podemos determinar a quantidade por meio de contagem um a um.

Existem dois modos diferentes de fazermos essa contagem para chegarmos ao total de diagonais:

- **Modo 1**: Podemos calcular essa quantidade escolhendo inicialmente um vértice e, a partir dele, traçar todas as diagonais, como sugere a figura.



Como partem, de cada vértice, 9 diagonais e o polígono é formado por 12 vértices, o número d de diagonais é:

$$d = \frac{12 \cdot 9}{2} \Rightarrow d = 54$$

Portanto, são 54 diagonais.

- **Modo 2**: Podemos empregar a ideia de combinação, uma vez que há 12 elementos (12 vértices) que devem ser ligados 2 a 2, sem importar a ordem. Assim, temos:

$$d = C_{12,\,2} - 12$$

$$d = \frac{12!}{2!(12-2)!} - 12$$

$$d = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2 \cdot 1 \cdot 10!} - 12$$

$$d = 66 - 12 \Rightarrow d = 54$$

Ao todo são 54 diagonais.

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.

Para pensar e discutir

1. No **Modo 1**, por que dividir por 2 o produto $12 \cdot 9$?

2. No **Modo 2**, qual é o motivo de subtrair 12 de C_{12}^{2}?

Para explorar

Estas são atividades para serem feitas em equipes de três ou quatro estudantes. Cada equipe deverá fazer o que se pede a seguir.

1. Em uma folha de papel, escrevam os nomes de 10 estudantes de sua turma. 1. Resposta pessoal.

2. A partir desses 10 nomes, façam grupos discriminando os nomes, em cada caso, dos grupos assim formados:
- cada grupo deverá ter 2 nomes; 2. Resposta pessoal.
- cada grupo deverá ter 3 nomes;
- cada grupo deverá ter 4 nomes;
- cada grupo deverá ter 5 nomes.

3. Determinem a quantidade total de grupos que podem ser formados a partir de 10 elementos, agrupando-os:
- de 2 em 2 (grupos com 2 elementos); 3. Resposta pessoal.
- de 3 em 3 (grupos com 3 elementos);
- de 4 em 4 (grupos com 4 elementos);
- de 5 em 5 (grupos com 5 elementos).

4. Apresentem os resultados à turma. 4. Resposta pessoal.

Atividades

88. b) {2, 3}, {2, 5}, {2, 7}, {2, 11}, {2, 13}, {3, 5}, {3, 7}, {3, 11}, {3, 13}, {5, 7}, {5, 11}, {5, 13}, {7, 11}, {7, 13}, {11, 13}

88. Considere o conjunto $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Você formará subconjuntos com os elementos desse conjunto. 88. a) {2}, {3}, {5}, {7}, {11}, {13}

a) Escreva todos os subconjuntos de A com exatamente 1 elemento em cada subconjunto.

b) Escreva todos os subconjuntos de A com exatamente 2 elementos em cada subconjunto.

c) Calcule o número de subconjuntos de A que podem ser formados com exatamente 3 elementos. 88. c) 20

d) Calcule o número de subconjuntos de A que podem ser formados com exatamente 4 elementos. 88. d) 15

89. Dos 12 jogadores de um mesmo time disponíveis para uma partida de voleibol, apenas 6 entrarão no início do jogo. Sabendo que há apenas um líbero e que o técnico vai começar a partida com ele, determine o número de maneiras de formar o time inicial considerando que os demais atuam em qualquer posição. 89. $C_{11,\,5} = 462$

90. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.

Parte 1 90. Respostas pessoais.

Utilizando os dados de sua turma, elaborem 4 situações de escolha de estudantes em que a mudança de ordem deles não altere o agrupamento.

Parte 2

Resolvam cada uma das situações elaboradas.

Parte 3

Apresentem as situações a outra dupla para que ela as resolva.

Parte 4

Confrontem as respostas. Em caso de divergências ou dificuldades, exponham as situações à turma para que seja discutido.

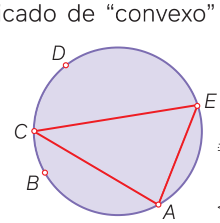
91. Você é uma das 20 pessoas presentes em determinado encontro. Duas pessoas são sorteadas aleatoriamente. Calcule:

a) o número de possibilidades de essas duas pessoas serem sorteadas; 91. a) 190

b) o número de possibilidades de essas duas pessoas serem sorteadas, porém você não é uma delas; 91. b) 171

c) o número de possibilidades de essas duas pessoas serem sorteadas, sendo você uma delas. 91. c) 19

92. Ligando pontos de uma circunferência em certa ordem, podemos formar polígonos convexos (caso seja necessário, reveja o significado de "convexo" antes de prosseguir). Observe, no exemplo indicado, que 5 pontos foram marcados na circunferência. Ao ligar os pontos A, C e E, formamos um triângulo (polígono com 3 lados).



Acervo editora

a) Calcule o número total de triângulos que podem ser formados com vértices nos pontos indicados na figura. 92. a) 10

b) Calcule o número total de quadriláteros convexos que podem ser formados ligando esses pontos de 4 em 4. 92. b) 5

c) Determine o número de pentágonos convexos que podem ser formados ligando esses pontos de 5 em 5. 92. c) 1

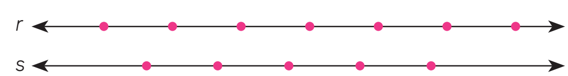
93. Em um sorteio, 6 números são sorteados no intervalo de 1 a 60. Ganha o prêmio máximo quem acertar os 6 números. Responda:

a) Quantas são as possiblidades para um sorteio? 93. a) 50 063 860

b) Alguém que aposta em 7 números está concorrendo com quantas possíveis senas? 93. b) 7

c) Alguém que aposta em 8 números está concorrendo com quantas possíveis senas? 93. c) 28

94. Na figura a seguir há duas retas paralelas r e s. Na primeira, estão indicados 7 pontos, e, na segunda, 5 pontos.



Acervo editora

a) Explique como você pode formar triângulos com vértices somente nesses 12 pontos. 94. a) Resposta pessoal.

b) Quantos triângulos ao todo podem ser formados unindo-se 3 pontos quaisquer dos 12 pontos indicados? 94. b) 175

95. (UFPB) Um sorveteiro vende sorvetes de três bolas, de sabores escolhidos entre os de coco, manga, graviola, cajá, acerola, maracujá e pitanga. Calcule o número de possibilidades de escolha de três sabores distintos que devem compor um sorvete, de modo que uma das bolas seja, necessariamente, de coco. 95. 15

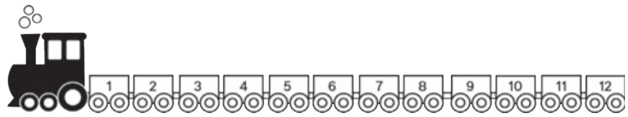
96. (Enem) A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por

Enem, 2005

O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é 96. Alternativa **d**.

a) 12.
b) 31.
c) 36.
d) 63.
e) 720.

97. (Enem) Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



Mauro Salgado

De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por: 97. Alternativa **e**.

a) $C_{12}^{4} \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{3} \times C_{12}^{2}$

b) $C_{12}^{4} + C_{8}^{3} + C_{5}^{3} + C_{2}^{2}$

c) $C_{12}^{4} \times 2 \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{2}$

d) $C_{12}^{4} + 2 \times C_{12}^{3} + C_{12}^{2}$

e) $C_{12}^{4} \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{3} \times C_{2}^{2}$

98. (UEA-AM) Um grupo de 9 amigos irá viajar em dois carros. No carro maior irão 5 pessoas e no carro menor irão 4 pessoas. Sabendo que todos sabem dirigir, o número de maneiras distintas de esses 9 amigos se dividirem entre esses dois carros é 98. Alternativa **d**.

a) 98 **b)** 63 **c)** 82 **d)** 126 **e)** 20

99. (Fuvest-SP) Um professor precisa elaborar uma prova multidisciplinar que consta de duas questões de Matemática e seis de Física. Ele deve escolher questões de um banco de dados que contém três questões de Matemática e oito de Física. O número de provas distintas possíveis, sem levar em conta a ordem em que as questões aparecem, é:

a) 42 **b)** 54 **c)** 62 **d)** 72 **e)** 84

99. Alternativa **e**.

100. (UPR-RS) Uma clínica médica ortopédica conta com equipe interdisciplinar para atendimento com 3 fisioterapeutas, 5 traumatologistas e 4 enfermeiros. Nos finais de semana, são organizados plantões de atendimento. As equipes de plantão deverão ser constituídas por 1 fisioterapeuta, 2 traumatologistas e 2 enfermeiros. O número de equipes de plantão que podem ser formadas é 100. Alternativa **b**.

a) 5 **b)** 180 **c)** 12 **d)** 60 **e)** 19

101. (Integrado-PR) Dados 12 pontos distintos inscritos em uma circunferência, quantas possibilidades distintas temos para formar um quadrilátero usando 4 destes 12 pontos? 101. Alternativa **d**.

a) 210 **b)** 345 **c)** 415 **d)** 495 **e)** 720

102. (Uece) Na primeira fase do Campeonato Brasileiro de Futebol, Série A, disputado por 20 clubes, quaisquer dois dos disputantes jogam entre si uma única vez. Na segunda fase, as mesmas 20 equipes repetem as disputas, também cada dois participantes jogando entre si uma única vez. Ao final do Campeonato, quantas partidas terão sido disputadas? 102. Alternativa **c**.

a) 400 **b)** 360 **c)** 380 **d)** 420

103. (FMC-SP) Com cinco médicos e sete enfermeiros, devem-se formar equipes com 5 desses profissionais. Se em cada equipe deve ter, pelo menos, um médico e um enfermeiro, o número de equipes distintas que podem ser formadas é:

a) 35 **b)** 175 **c)** 210 **d)** 350 **e)** 770

103. Alternativa **e**.

104. (FMJ-SP) Uma praia tem 9 postos de guarda-vidas. Em cada posto atua um mesmo número de guarda-vidas de modo que cada guarda-vidas atua em apenas 2 postos e quaisquer 2 postos têm exatamente 1 guarda-vidas em comum. Dessa maneira, o número de guarda-vidas dessa praia é 104. Alternativa **b**.

a) 54 **b)** 36 **c)** 27 **d)** 18 **e)** 45

105. (Eear) Simplificando a expressão $y = \dfrac{C_{n,\,4}}{C_{n-1,\,3}}$, encontra-se y igual a 105. Alternativa **d**.

a) n **b)** $\frac{n}{2}$ **c)** $\frac{n}{3}$ **d)** $\frac{n}{4}$

106. (Unicamp-SP) Em um campeonato, os times de vôlei são compostos de 6 jogadores. O treinador de um dos times tem à sua disposição 8 pessoas para montar a equipe. De quantas formas distintas ele pode fazer isso?

a) 8 **b)** 18 **c)** 28 **d)** 38

106. Alternativa **c**.

107. (UFMS) Para a composição da comissão de formatura de Veterinária de 2021 da UFMS, há 8 estudantes, sendo 5 homens e 3 mulheres. A comissão deverá ser composta de 6 estudantes. Se 2 mulheres são de caráter obrigatório estar na comissão, o número de possibilidades para a composição da comissão de formatura é:

a) 5 **b)** 8 **c)** 25 **d)** 56 **e)** 120

107. Alternativa **c**.

108. (UEG-GO) O corpo de bombeiros possui uma equipe de 10 paramédicos. A cada chamada, 3 paramédicos saem juntos para fazer o atendimento. A quantidade de diferentes composições com 3 paramédicos que podem ser formadas é 108. Alternativa **b**.

a) 125 **b)** 120 **c)** 110 **d)** 100 **e)** 90

4 Triângulo de Pascal

Existem padrões numéricos interessantes que são obtidos e explicados de diversas maneiras. Podemos compor tabelas com números, também podemos dispor pontos em configurações triangulares, pentagonais etc., mas seguindo certa regra. Alguns desafios numéricos intrigantes são feitos no sentido de descobrir qual é o próximo número de uma sequência ou como determinada sequência é formada.

Para exemplificar, os números a seguir, estão dispostos em linhas e colunas seguindo um padrão numérico a partir da linha mais acima.

									1									
								1		1								
							1		2		1							
						1		3		3		1						
					1		4		6		4		1					
				1		5		10		10		5		1				
			1		6		15		20		15		6		1			
		1		7		21		35		35		21		7		1		
	1		8		28		56		70		56		28		8		1	
1		9		36		84		126		126		84		36		9		1

Acervo editora

⋮

Para auxiliá-lo na investigação dessa "construção", propomos algumas questões para iniciar uma pequena discussão. Sugerimos que se junte a mais algum colega para tal investigação.

Para pensar e discutir

1. Como as linhas são formadas? 1. Resposta no Manual do Professor.

2. A soma de todos os elementos de cada linha tem alguma característica comum? Qual?
2. São sempre uma potência inteira de 2.

3. Em cada linha, há um padrão numérico envolvendo os termos extremos ou os termos equidistantes dos extremos. Você sabe qual é esse padrão? 3. Termos extremos ou termos equidistantes dos extremos têm o mesmo valor.

Uma curiosidade a respeito desses números é que eles estão relacionados com o desenvolvimento de potências naturais de binômios. Observe, nos exemplos a seguir, os coeficientes destacados do desenvolvimento de cada uma das potências.

$(x + a)^0 = 1$

$(x + a)^1 = 1x^1a^0 + 1x^0a^1$

$(x + a)^2 = 1x^2a^0 + 2x^1a^1 + 1x^0a^2$

$(x + a)^3 = 1x^3a^0 + 3x^2a^1 + 3x^1a^2 + 1x^0a^3$

$(x + a)^4 = 1x^4a^0 + 4x^3a^1 + 6x^2a^2 + 4x^1a^3 + 1x^0a^4$

$(x + a)^5 = 1x^5a^0 + 5x^4a^1 + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5x^1a^4 + 1x^0a^5$

$(x + a)^6 = 1x^6a^0 + 6x^5a^1 + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6x^1a^5 + 1x^0a^6$

$(x + a)^7 = 1x^7a^0 + 7x^6a^1 + 21x^5a^2 + 35x^4a^3 + 35x^3a^4 + 21x^2a^5 + 7x^1a^6 + 1x^0a^7$

⋮

Vale observar que o desenvolvimento de cada um dos binômios acima pode ser obtido algebricamente. Entretanto, o padrão que relaciona os expoentes e os coeficientes nos permite obter esses desenvolvimentos apoiados no triângulo numérico apresentado.

Esse triângulo (ou seja, essa disposição em forma de triângulo) é conhecido como o **triângulo de Pascal** ou **triângulo de Tartaglia** e corresponde com as combinações que você calculou. Observe a seguir o mesmo triângulo, porém com os elementos representados por meio de combinações simples.

$$
\begin{array}{c}
C_{0,0} \\
C_{1,0} \quad C_{1,1} \\
C_{2,0} \quad C_{2,1} \quad C_{2,2} \\
C_{3,0} \quad C_{3,1} \quad C_{3,2} \quad C_{3,3} \\
C_{4,0} \quad C_{4,1} \quad C_{4,2} \quad C_{4,3} \quad C_{4,4} \\
C_{5,0} \quad C_{5,1} \quad C_{5,2} \quad C_{5,3} \quad C_{5,4} \quad C_{5,5} \\
C_{6,0} \quad C_{6,1} \quad C_{6,2} \quad C_{6,3} \quad C_{6,4} \quad C_{6,5} \quad C_{6,6} \\
C_{7,0} \quad C_{7,1} \quad C_{7,2} \quad C_{7,3} \quad C_{7,4} \quad C_{7,5} \quad C_{7,6} \quad C_{7,7} \\
C_{8,0} \quad C_{8,1} \quad C_{8,2} \quad C_{8,3} \quad C_{8,4} \quad C_{8,5} \quad C_{8,6} \quad C_{8,7} \quad C_{8,8} \\
C_{9,0} \quad C_{9,1} \quad C_{9,2} \quad C_{9,3} \quad C_{9,4} \quad C_{9,5} \quad C_{9,6} \quad C_{9,7} \quad C_{9,8} \quad C_{9,9} \\
\vdots
\end{array}
$$

Acervo editora

Observações:

1. Essas combinações também são chamadas de **números binomiais**. Assim, por exemplo, sendo n e k números naturais tais que $n \geq k$, tem-se que:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_{n,\,k}$$

Nessa forma binomial, n é chamado de **numerador** e k é chamado de **denominador** ou **taxa**.

2. Serão utilizadas aqui tanto a forma de combinação quanto a forma binomial.

Propriedades dos números binomiais

Existem três propriedades dos números binomiais que podem ser verificadas com base na observação dos padrões numéricos do triângulo de Pascal.

1ª propriedade

Dois números binomiais de taxas complementares são iguais:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n-k}}, \text{ sendo } n \geq k$$

Observe que as taxas se complementam em relação a n: $k + (n - k) = n$

Exemplos:

- $\binom{10}{2} = \binom{10}{8}$ ou $C_{10,\,2} = C_{10,\,8} \rightarrow 2 + 8 = 10$
- $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$ ou $C_{7,\,4} = C_{7,\,3} \rightarrow 4 + 3 = 7$

2ª propriedade

Relação de Stifel:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k+1}} = \binom{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{k+1}}, \text{ sendo } n \geq k + 1$$

Exemplos:

- $\binom{10}{2} + \binom{10}{3} = \binom{11}{3}$ ou $C_{10,\,2} + C_{10,\,3} = C_{11,\,3}$
- $\binom{7}{3} + \binom{7}{4} = \binom{8}{4}$ ou $C_{7,\,3} + C_{7,\,4} = C_{8,\,4}$

3ª propriedade
Para números binomiais, temos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Exemplos:

- $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \dots + \binom{10}{10} = 2^{10}$ ou $C_{10,\,0} + C_{10,\,1} + C_{10,\,2} + \dots + C_{10,\,10} = 2^{10}$
- $\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \dots + \binom{7}{7} = 2^7$ ou $C_{7,\,0} + C_{7,\,1} + C_{7,\,2} + \dots + C_{7,\,7} = 2^7$

Para pensar e discutir

1. Como você identifica a 1ª propriedade de números binomiais no triângulo de Pascal? 1. Resposta pessoal.
2. A 2ª propriedade de números binomiais está relacionada à construção do triângulo de Pascal. Como você explica? 2. Resposta pessoal.
3. Qual é o significado da 3ª propriedade de números binomiais em relação ao triângulo de Pascal?
3. Resposta pessoal.

Atividades resolvidas

22. Determine o valor de n para que o número binomial $\binom{n+2}{n}$ seja igual a 10.

- Resolvendo a equação correspondente:

$$\binom{n+2}{n} = 10$$

$$C_{n+2,\,2} = 10$$

$$\frac{(n+2)!}{2!(n+2-2)!} = 10$$

$$\frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n!}{2\cdot 1\cdot n!} = 10$$

$$\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2} = 10$$

$$n^2 + n + 2n + 2 = 20$$

$$n^2 + 3n - 18 = 0$$

$$n = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot(-18)}}{2\cdot 1}$$

$$n = \frac{-3 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = -6 \rightarrow \textit{não se aplica} \end{cases}$$

Portanto, n é igual a 3.

23. Obtenha os valores de n que tornam verdadeira a igualdade entre os números binomiais a seguir:

$$\binom{12}{3n-1} = \binom{12}{n+1}$$

- Para que dois números binomiais com o mesmo numerador sejam iguais, eles podem ter taxas iguais ou taxas complementares; assim, segue:

taxas iguais:

$$3n - 1 = n + 1$$

$$2n = 2 \Rightarrow n = 1$$

taxas complementares em relação a 12:

$$(3n - 1) + (n + 1) = 12$$

$$4n = 12 \Rightarrow n = 3$$

- Verificando os dois valores encontrados:

$$n = 1 \Rightarrow \binom{12}{3\cdot 1 - 1} = \binom{12}{1+1} \Rightarrow \binom{12}{2} = \binom{12}{2}$$

$$n = 3 \Rightarrow \binom{12}{3\cdot 3 - 1} = \binom{12}{3+1} \Rightarrow \binom{12}{8} = \binom{12}{4} \rightarrow 8 + 4 = 12$$

Portanto, n pode ser igual a 1 ou igual a 3.

Para explorar

Junte-se a dois ou três colegas para estas atividades.

1. Os quatro primeiros termos da sequência dos chamados números triangulares estão representados pelos pequenos círculos nas figuras.

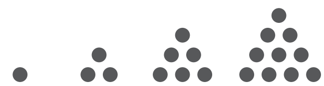


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

Acervo editora

a) Descubra qual é esse padrão numérico e escreva os oito primeiros termos dessa sequência.
1. a) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36

b) Identifique a sequência dos números triangulares no triângulo de Pascal. 1. b) É a terceira diagonal.

Considere o desenvolvimento das potências dos binômios a seguir, cujos coeficientes destacados podem ser obtidos no triângulo de Pascal para responder as **atividades 2** e **3**.

$$(x + a)^2 = 1x^2a^0 + 2x^1a^1 + 1x^0a^2$$
$$(x + a)^3 = 1x^3a^0 + 3x^2a^1 + 3x^1a^2 + 1x^0a^3$$
$$(x + a)^4 = 1x^4a^0 + 4x^3a^1 + 6x^2a^2 + 4x^1a^3 + 1x^0a^4$$

2. Com base nessas ideias obtenha os desenvolvimentos das seguintes potências de binômios:

a) $(x - a)^2$ 2. a) $x^2 - 2xa + a^2$
b) $(x - a)^3$ 2. b) $x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$
c) $(x - a)^4$ 2. c) $x^4 - 4x^3a + 6x^2a^2 - 4xa^3 + a^4$

3. Desenvolva cada uma das seguintes potências de binômios a seguir:

a) $(2x - 1)^3$ 3. a) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
b) $(y + 2)^3$ 3. b) $y^3 + 6y^2 + 12y + 8$
c) $(\sqrt{3} + 3)^4$ 3. c) $252 + 144\sqrt{3}$

Atividades

109. Considere o triângulo de Pascal representado na figura a seguir em que os números estão dispostos em linhas e colunas.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

a) Qual propriedade dos números binomiais explica a relação 5 + 10 = 15 conforme destaque no triângulo de Pascal? 109. a) 2ª

b) O resultado de 2^8 representa a soma de todos os elementos de uma linha do triângulo de Pascal. Qual é essa linha? 109. b) 9ª

c) Na oitava linha do triângulo está destacado duas vezes o número 21. Qual propriedade dos números binomiais está relacionada ao fato de esses números serem iguais? 109. c) 1ª

110. No triângulo de Pascal ilustrado no início desta seção, mostramos os valores correspondentes até a linha que contém $C_{9,\,0}, C_{9,\,1}, C_{9,\,2}, \ldots, C_{9,\,9}$. Com base nesses valores, informe:

a) os valores correspondentes a $C_{10,\,0}, C_{10,\,1}, C_{10,\,2}, \ldots, C_{10,\,10}$; 110. a) 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1

b) o valor da soma $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \ldots + \binom{10}{10}$
110. b) 1 024

111. O desenvolvimento da potência de um determinado binômio corresponde a:

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

Identifique a potência correspondente a esse desenvolvimento. 111. $(x + 1)^4$

112. Utilizando a propriedade de taxas complementares, cada equação com números binomiais apresenta duas soluções. Identifique-as. 112. a) $x = 2$ ou $x = 9$ 112. c) $x = 14$ ou $x = 6$

a) $\binom{11}{x} = \binom{11}{2}$

c) $\binom{20}{14} = \binom{20}{x}$

b) $\binom{8}{x-1} = \binom{8}{3}$
112. b) $x = 4$ ou $x = 6$

d) $\binom{9}{3} = \binom{9}{x+2}$
112. d) $x = 1$ ou $x = 4$

113. Utilize a ideia do desenvolvimento de potência natural de um binômio e o triângulo de Pascal para calcular o valor numérico de y, sendo

$$y = 1 \cdot (999)^5 + 5 \cdot (999)^4 + 10 \cdot (999)^3 + 10 \cdot (999)^2 + 5 \cdot (999)^1 + 1$$

Escreva a resposta como uma potência de base 10.
113. 10^{15}

114. A equação apresenta uma solução no conjunto dos números naturais. Determine-a.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 256$$ 114. $n = 8$

115. (Mack-SP) O valor de x, para os quais os coeficientes binomiais $\binom{6}{2x}$ e $\binom{6}{x^2}$ sejam iguais, é

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

115. Alternativa **b**.

O triângulo de Pascal

Elaboramos um texto contendo algumas ideias importantes não apenas em relação às propriedades e curiosidades a respeito do triângulo de Pascal mas também para conhecer um pouco mais sua história.

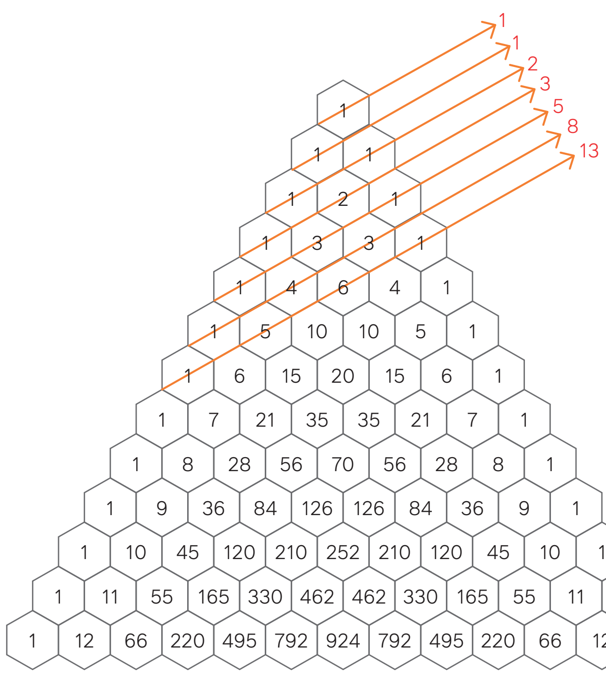
Curiosidades sobre o triângulo de Pascal

Hoje sabemos que o triângulo denominado de Pascal já era conhecido muito antes do próprio Pascal, isto é, antes do século XVII. Esse triângulo, por exemplo, no Irã, tem a denominação de triângulo de Caiam, em razão de Omar Caiam, que foi um dos muitos matemáticos islâmicos que estudaram suas propriedades entre os séculos VII e XIII. Sabe-se que também na China, cerca do ano 1050, Jia Xian elaborou um triângulo similar ao de triângulo de Pascal.

Mas a referência mais antiga que temos do triângulo de Pascal é um texto indiano de 450 a.C., uma espécie de métrica poética, com a denominação de “Escada do monte Menu”.

Além do que já vimos ao longo deste capítulo sobre potências naturais de binômios e sobre as propriedades dos chamados números binomiais, existem outros padrões numéricos relacionados ao triângulo de Pascal que geralmente surpreendem os matemáticos.

Uma propriedade interessante, nessa construção de números que formam o triângulo de Pascal, diz respeito à mais famosa sequência numérica: a sequência de Fibonacci. Para explicar como obter essa sequência, tem-se o auxílio de números colocados dentro dos hexágonos abaixo e das semirretas traçadas.



Acervo editora

- A 1ª semirreta atravessa apenas 1 hexágono regular com o número 1.
- A 2ª semirreta atravessa apenas 1 hexágono regular com o número 1.
- A 3ª semirreta atravessa dois hexágonos regulares cuja soma dos números é 2.
- A 4ª semirreta atravessa dois hexágonos regulares cuja soma dos números é 3.
- A 5ª semirreta atravessa três hexágonos regulares cuja soma dos números é 5.
- A 6ª semirreta atravessa três hexágonos regulares cuja soma dos números é 8.
- A 7ª semirreta atravessa quatro hexágonos regulares cuja soma dos números é 13.

E assim por diante, formando a sequência de Fibonacci:

1 – **1** – **2** – **3** – **5** – **8** – **13** – ...

Outra curiosidade é utilizarmos uma disposição dos números em colunas. Experimente adicionar os números de uma coluna qualquer, desde seu início, até uma determinada linha, como indicado a seguir.

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Acervo editora

O resultado dessa adição é o número na coluna à direita e na linha imediatamente a seguir.

1. Pesquise outro padrão numérico que possa ser observado no triângulo de Pascal. Apresente-o aos colegas. 1. Resposta pessoal.

Atividades finais

1. Em um dia completo, determine a quantidade total de

a) minutos; 1. a) 1 440 minutos

b) segundos. 1. b) 86 400 segundos

2. Existem 2 empresas aéreas e 3 linhas de ônibus que fazem o percurso de Curitiba a São Paulo. De quantas maneiras diferentes é possível ir de Curitiba a São Paulo e de São Paulo a Curitiba utilizando empresa aérea ou linha de ônibus? 2. 10 maneiras

3. Lança-se uma mesma moeda 10 vezes consecutivamente e observa-se a sequência de resultados. Qual é o total de sequências possíveis? 3. 1 024

4. Obtenha o valor de x na expressão $x = 0! + 1! + 2! + 3! + 4! + 5!$. 4. 154

5. Considere que n representa um número natural qualquer e $n!$ representa o fatorial desse número. Responda:

a) Para quais valores de n tem-se que $n!$ resulta em um número ímpar? 5. a) Apenas para $n = 0$ e para $n = 1$.

b) E para quais valores de n tem-se que $n!$ será um número par? 5. b) Para qualquer valor de n natural maior ou igual a 2.

6. Responda:

a) Qual é o significado de **permutar**? 6. a) Trocar.

b) Quantos são os números de três algarismos distintos que podem ser formados utilizando-se apenas os algarismos do conjunto {2, 3, 4, 5, 6}? 6. b) 60

7. Responda:

a) O que diferencia um arranjo de uma combinação em agrupamentos? 7. a) Resposta no Manual do Professor.

b) Quantos são os conjuntos de três elementos distintos que podem ser formados utilizando-se apenas os elementos do conjunto {2, 3, 4, 5, 6, 7}? 7. b) 20

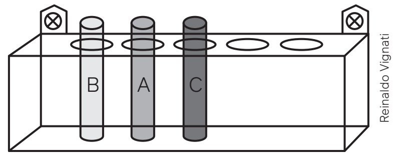
c) Quantos são os números de três algarismos distintos que podem ser formados utilizando-se apenas os algarismos do conjunto {2, 3, 4, 5, 6, 7}? 7. c) 120

Questões de vestibulares e Enem

8. (UFRGS) Uma caixa contém 32 esferas numeradas de 1 a 32. O número de maneiras distintas de retirar 3 esferas da caixa, ordenadas como primeira, segunda e terceira, em que a esfera com o número 8 seja pelo menos a terceira a ser retirada, é: 8. Alternativa **e**.

a) 27 **b)** 96 **c)** 2 000 **d)** 2 018 **e)** 2 790

9. (Famema) Três tubos de ensaio, com rótulos A, B e C, serão colocados em um suporte que possui cinco lugares alinhados e encontra-se fixado em uma parede. A figura a seguir mostra uma das possíveis disposições dos tubos.



Sabendo que o tubo com o rótulo A não pode ocupar as extremidades do suporte, o número de maneiras distintas de esses tubos serem colocados nesse suporte é: 9. Alternativa **c**.

a) 12. **b)** 24. **c)** 36. **d)** 18. **e)** 30.

10. (Uego) Uma comissão será composta do presidente, tesoureiro e secretário. Cinco candidatos se inscrevem para essa comissão, na qual o mais votado será o presidente, o segundo mais votado, o tesoureiro e o menos votado, o secretário. Dessa forma, de quantas maneiras possíveis essa comissão poderá ser formada? 10. Alternativa **b**.

a) 120 **b)** 60 **c)** 40 **d)** 20 **e)** 10

11. (Fuvest-SP) Vinte times de futebol disputam a Série A do Campeonato Brasileiro, sendo seis deles paulistas. Cada time joga duas vezes contra cada um dos seus adversários. A porcentagem de jogos nos quais os dois oponentes são paulistas é: 11. Alternativa **b**.

a) menor que 7%.
b) maior que 7%, mas menor que 10%.
c) maior que 10%, mas menor que 13%.
d) maior que 13%, mas menor que 16%.
e) maior que 16%.

12. (Uerj) Seis times de futebol disputaram um torneio no qual cada time jogou apenas uma vez contra cada adversário. A regra de pontuação consistia em marcar 0 ponto para o time perdedor, 3 pontos para o vencedor e, no caso de empate, 1 ponto para cada time. A tabela mostra a pontuação final do torneio.

Times	A	B	C	D	E	F
Pontos	9	6	4	2	6	13

O número de empates nesse torneio foi igual a: 12. Alternativa **b**.

a) 4. **b)** 5. **c)** 6. **d)** 7.

13. (Fuvest-SP) Doze pontos são assinalados sobre quatro segmentos de reta de forma que três pontos sobre três segmentos distintos nunca são colineares, como na figura.

O número de triângulos distintos que podem ser desenhados com os vértices nos pontos assinalados é:

a) 200. **b)** 204. **c)** 208. **d)** 212. **e)** 220.

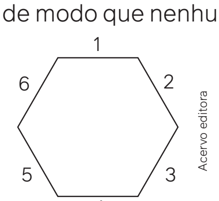
13. Alternativa **d**.

14. (Uece) A senha de um cartão de crédito é formada com cinco dígitos, dispostos sequencialmente e sem repetição, sendo os dois primeiros escolhidos entre as 27 letras do alfabeto e os três seguintes escolhidos entre os nove algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. A diferença entre duas senhas é caracterizada pela diferença de pelo menos um dígito ou pela ordem em que estão dispostos seus dígitos. Nessas condições, a quantidade de senhas que podem ser geradas é 14. Alternativa **d**.

a) 353 880 **b)** 335 088 **c)** 535 888 **d)** 353 808

15. (UFPR) Ana, Beatriz e Carlos escolhem lugares para se sentar em uma mesa hexagonal regular. Cada lugar corresponde a um dos lados do hexágono, que estão numerados de 1 a 6, conforme a figura abaixo. Os lados 1 e 4 são considerados lados opostos na mesa, assim como 2 e 5, e 3 e 6. De quantas formas diferentes Ana, Beatriz e Carlos podem escolher os lugares numerados de modo que nenhum deles fique sentado ao lado oposto do outro?

15. Alternativa **a**.



a) 48 **b)** 36 **c)** 24 **d)** 12 **e)** 8

16. (Unicamp-SP) Em um sorteio com cartelas numeradas de 0001 a 2 000, João decidiu comprar todas as cartelas em que a numeração exibisse os números de 2 a 5, e nenhuma a mais. Por exemplo, João comprou as cartelas 1 205 e 0025, mas não comprou as cartelas 0514 e 2 000.

Considere as afirmações:

I. João comprou 108 cartelas.

II. Se ao invés das cartelas com 2 e 5, João tivesse comprado as cartelas com 1 e 5, ele teria comprado menos cartelas.

III. João comprou 18 cartelas que possuem o número 3.

Assinale a alternativa correta: 16. Alternativa **b**.

a) Todas as afirmações são verdadeiras.
b) Apenas a afirmação I é verdadeira.
c) Apenas a afirmação II é verdadeira.
d) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

17. (UPE) Em uma academia de musculação, um dos aparelhos foi projetado para comportar uma carga máxima de 95 kg. Um dos atletas tem a sua disposição:

4 pesos diferentes de 5 kg;
3 pesos diferentes de 10 kg;
2 pesos diferentes de 15 kg;
1 peso de 20 kg.

Todos os pesos são diferentes entre si, inclusive os de mesma massa, que se diferenciam através de cores distintas. Quantos agrupamentos diferentes podem ser feitos com pelo menos um dos pesos disponíveis, de tal forma que a carga máxima seja respeitada? 17. Alternativa **d**.

a) 23 **b)** 45 **c)** 968 **d)** 1 022 **e)** 3 600

18. (Uece) Considere os conjuntos $M = \{1, 2\}$, $P = \{3, 4, 5\}$ e $Q = \{6, 7, 8, 9\}$. Se X é o conjunto de todos os números naturais escritos com três algarismos, sendo cada algarismo escolhido em um dos conjuntos M, P ou Q, não sendo permitido em nenhum desses números mais de um algarismo de um mesmo conjunto, então, a quantidade de elementos de X é 18. Alternativa **b**.

a) 132 **b)** 144 **c)** 140 **d)** 152

19. (UEA-AM) Permutando-se os algarismos do número 15 792, obtemos 120 números distintos, incluindo o próprio número 15 792. O total dessas permutações que são números maiores que 30 000 e menores que 70 000 é

a) 96 **b)** 60 **c)** 48 **d)** 30 **e)** 24

19. Alternativa **e**.

20. (UFPR) Ana quer descobrir a senha do celular de seu irmão Carlos, a qual é formada por uma sequência de quatro dígitos numéricos dentre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Ela sabe que o irmão sempre usa, em suas senhas, os três dígitos de sua residência: 4, 6 e 8. Recentemente, ela descobriu que o número formado pela senha é ímpar. De acordo com essas informações, quantas possibilidades Ana deve considerar para descobrir a senha de Carlos?

a) 8 **b)** 11 **c)** 15 **d)** 24 **e)** 30

20. Alternativa **e**.

21. (FGV-SP) O número de anagramas da palavra COMUM nos quais as duas letras M não aparecem juntas é

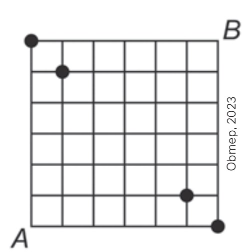
a) 18 **b)** 24 **c)** 36 **d)** 48 **e)** 60

21. Alternativa **c**.

22. (ESPM-SP) Escrevendo-se todos os anagramas da palavra PORTA em ordem alfatética, a posição ocupada pela palavra PRATO é a: 22. Alternativa **c**.

a) 60ª **b)** 61ª **c)** 62ª **d)** 63ª **e)** 64ª

23. (Obmep) Uma formiga, inicialmente no vértice A, anda sobre as linhas do quadriculado da figura, sempre para a direita ou para cima, até chegar ao vértice B. De quantas maneiras ela pode fazer isso passando por algum dos quatro pontos destacados? 23. Alternativa **e**.



a) 4 **b)** 32 **c)** 36 **d)** 64 **e)** 74

24. (Unisinos-RS) Um anagrama é uma palavra ou frase formada pela permutação das letras de outra palavra ou frase. Como exemplos, podemos citar: repito é um anagrama de perito; frutas, de trufas. Na contagem de anagramas são permitidas palavras que não fazem sentido, como rraaa, que seria um anagrama de arara. Quantos anagramas distintos podemos formar com a palavra UNISINOS? 24. Alternativa **c**.

a) 64 **b)** 2 520 **c)** 5 040 **d)** 20 160 **e)** 40 320

25. (Ufam) Considerando que o conjunto A possui 5 elementos e o conjunto B, 8 elementos, podemos afirmar que a quantidade de funções injetoras $f: A \rightarrow B$ que podemos formar é: 25. Alternativa **c**.

a) 7 200 **b)** 8 740 **c)** 6 720 **d)** 25 900 **e)** 32 768

26. (UFRGS) Uma biblioeteca está elaborando etiquetas de identificação para os livros do acervo de tal forma que, em cada etiqueta, são usadas quatro letras distintas, de um alfabeto de 26 letras, e quatro algarismos também distintos, de 0 a 9. A figura abaixo mostra um exemplo de modelo da etiqueta produzida.

E M A T 9 5 0 1

Assinale a alternativa que apresenta o número total de etiquetas distintas produzidas pela biblioteca. 26. Alternativa **c**.

a) $26 + 10$

b) $26 \cdot 10$

c) $A_{26,\,4} \cdot A_{10,\,4}$

d) $A_{26,\,4} + A_{10,\,4}$

e) $10 \cdot A_{26,\,4} + 26 \cdot A_{10,\,4}$

27. (Unicamp-SP) Terminado o almoço, Ana foi à cozinha para a escolha das sobremesas. A garota estava decidida a pegar dois itens. Seu pai, preocupado com a alimentação dela, instruiu-a da seguinte forma: “Escolha o que quiser, mas, se você pegar algum pirulito, pegue também alguma fruta”. Na cozinha, tinha 5 frutas diferentes, 3 pirulitos diferentes e 2 pedaços de bolos de sabores diferentes. De quantas formas Ana poderia escolher seus dois itens? 27. Alternativa **b**.

a) 34 **b)** 36 **c)** 45 **d)** 47

28. (Uece) São conhecidos sete sintomas de uma certa enfermidade que é diagnosticada de maneira segura se o médico detecta, no paciente, quatro ou mais dos sintomas. O médico pode constatar uma, entre *k* combinações mínimas de sintomas, para que o diagnóstico seja dado de maneira segura. Nesse caso, o valor de *k* é 28. Alternativa **c**.

a) 21 **b)** 56 **c)** 35 **d)** 48

29. (UEA-AM) Um assinante de TV paga selecionou 6 filmes para assistir, porém sem ordem de preferência. Sabendo que em um domingo esse assinante assistirá a 2 desses filmes selecionados, o número de maneiras distintas de ele fazer essa escolha é 29. Alternativa **d**.

a) 10 **b)** 30 **c)** 12 **d)** 15 **e)** 24

30. (Fempar-PR) Com 10 consoantes diferentes dadas e as 5 vogais, queremos formar conjuntos de 3 letras diferentes, sendo 2 consoantes e 1 vogal. A ordem das 3 letras em cada conjunto não o faz diferente. Por exemplo, o conjunto {A,B,C} é igual ao conjunto {B,A,C}. Assinale a opção que indica o número de conjuntos que podemos formar, nas condições dadas. 30. Alternativa **e**.

a) 455 **b)** 450 **c)** 360 **d)** 250 **e)** 225

31. (Uece) Cinco rapazes e quatro moças fundaram uma empresa e resolveram que a diretoria da empresa seria composta de cinco sócios entre os quais pelo menos dois seriam mulheres. Assim, é correto afirmar que o número de maneiras que se pode escolher a diretoria dessa empresa é 31. Alternativa **c**.

a) 110 **b)** 95 **c)** 105 **d)** 100

32. (Enem) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que “L” e “D” representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções. A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes. A opção que mais se adéqua às condições da empresa é 32. Alternativa **e**.

a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

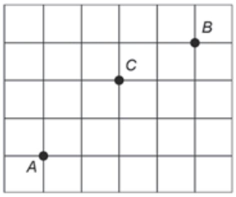
33. (Enem) Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *video game*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas? 33. Alternativa **e**.

a) 64 **b)** 56 **c)** 49 **d)** 36 **e)** 28

34. (Enem) Três amigos, André, Bernardo e Carlos, moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos A, B e C estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.



Enem, 2020

André deseja deslocar-se da sua casa até a casa de Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio, fazendo sempre deslocamentos para a direita (→) ou para cima (↑), segundo o esquema da figura. O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é 34. Alternativa **c**.

a) 4 **b)** 14 **c)** 17 **d)** 35 **e)** 48

35. (Enem) Um diretor esportivo organiza um campeonato no qual haverá disputa de times em turno e returno, isto é, cada time jogará duas vezes com todos os outros, totalizando 380 partidas a serem disputadas. A quantidade de times (x) que faz parte desse campeonato pode ser calculada pela equação 35. Alternativa **b**.

a) $x = 380 - x^2$ **b)** $x^2 - x = 380$ **c)** $x^2 = 380$ **d)** $2x - x = 380$ **e)** $2x = 380$

36. (Enem) Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1 000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central de multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis.

Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é

a) 8 **b)** 9 **c)** 11 **d)** 18 **e)** 24

36. Alternativa **b**.

Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão em relação aos assuntos e objetivos trabalhados ao longo do presente capítulo.

Objetivos de aprendizagem	**Sim**	**É necessário retomar**
Emprego o diagrama da árvore na resolução de problemas de contagem.		
Utilizo o princípio aditivo de contagem para resolver problemas.		
Utilizo o princípio multiplicativo de contagem para resolver problemas.		
Elaboro situações de contagem que possam ser resolvidas pelo princípio aditivo ou princípio multiplicativo.		
Diferencio problemas de contagem em que a ordem dos elementos influencia no total de possibilidades daqueles problemas em que a ordem dos elementos não influencia.		
Calculo o número de possibilidades de ocorrência de um evento utilizando estratégias de arranjo, combinação, permutação simples e permutação com repetição.		
Construo o triângulo de Pascal e compreendo propriedades entre os elementos correspondentes.		

Faizal Ramli/Shutterstock.com

Neste capítulo, você vai:

- identificar, no cotidiano, situações de uso de probabilidades;
- reconhecer diferentes tipos de espaços amostrais (discretos ou não);
- calcular a probabilidade condicional de dois eventos simultâneos;
- identificar e descrever o espaço amostral em diferentes experimentos aleatórios;
- elaborar e resolver situações relacionadas com o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios;
- reconhecer eventos independentes em situações relacionadas a eventos equiprováveis consecutivos;
- diferenciar eventos dependentes de eventos independentes em experimentos aleatórios;
- calcular a quantidade de elementos do evento e do espaço amostral utilizando contagem das possibilidades relacionadas à análise combinatória.

O seguro-viagem é essencial para garantir assistência médica e cobertura financeira durante viagens internacionais, proporcionando segurança e tranquilidade aos viajantes.

CAPÍTULO

5

Probabilidades

Você sabe como é calculado o seguro-viagem? As seguradoras analisam o perfil do cliente, o destino da viagem, a quantidade de dias que o cliente vai ficar hospedado e o risco de ocorrência de acidentes. Esse risco é baseado no número de acidentes que já ocorreram naquele destino e na probabilidade de acontecerem novamente no futuro. Neste capítulo, você vai se aprofundar no estudo de probabilidade com base na análise de situações práticas.

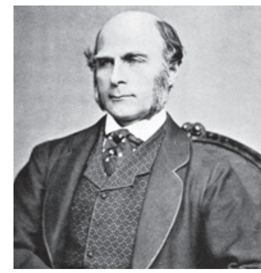
1. **Você já estudou sobre probabilidade ao longo do Ensino Fundamental. Tente se lembrar do que aprendeu e faça uma lista de tudo o que você se lembrar. Podem ser palavras, frases ou até conceitos. Em seguida, discuta com os colegas o que vocês colocaram em suas listas.**
1. Resposta pessoal.

2. **Em quais situações do seu dia a dia você usa a probabilidade? E na escola, em que conteúdos de outras áreas esse assunto é abordado?** 2. Resposta pessoal.

1 Probabilidade

Você já ouviu falar em tabuleiro de Galton?

É um dispositivo criado por Francis Galton (1822-1911) cuja estrutura consiste em um tabuleiro com várias linhas separadas uniformemente. Em cada linha há pinos também separados de maneira uniforme. Do topo são abandonadas diversas bolinhas de mesmo tamanho que, ao colidirem com o primeiro pino, se distribuem. Na parte inferior do tabuleiro são colocados tubos.

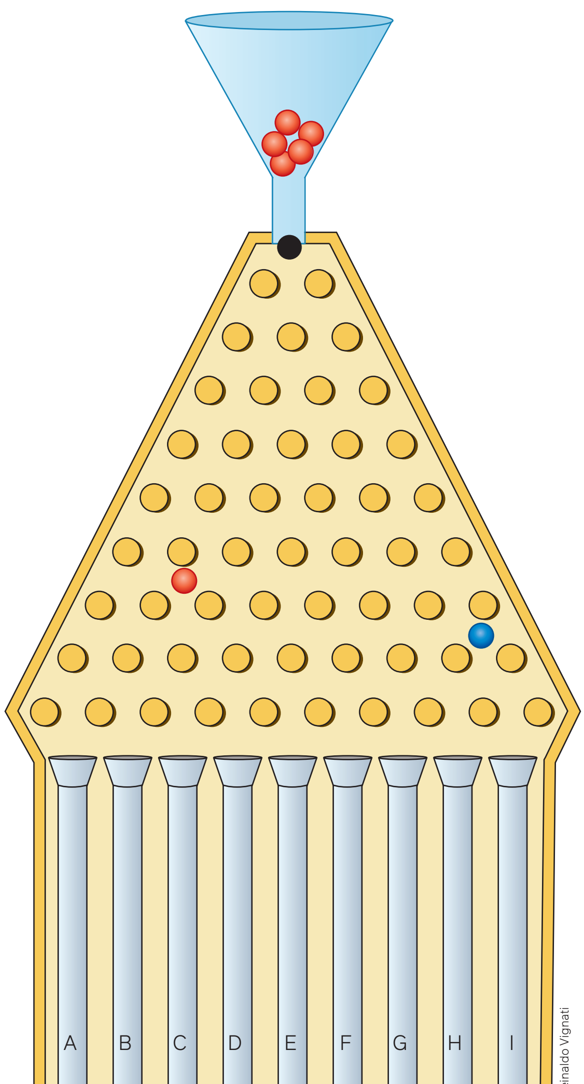


Karl Pearson/SSPL/Getty Images

Francis Galton (1822-1911).

A ilustração não é o tabuleiro original de Galton, mas funciona como referência. Observe que o tabuleiro deve ser posicionado na vertical e, quando uma bolinha é solta, ela não cai pelas laterais de madeira, pois não há espaço suficiente para isso.

Considere, conforme a ilustração, que três bolinhas coloridas foram soltas da parte superior: uma azul, uma vermelha e uma preta, nessa ordem.



Reinaldo Vignati

Para pensar e discutir

1. É muito provável que a bolinha azul caia em quais tubos? 1. H ou I.
2. Em qual tubo cairá a bolinha vermelha? 2. Não é possível saber.
3. É possível ter certeza de que há algum tubo em que a bolinha preta não cairá? Em qual deles é mais provável que caia?

3. Não; nos tubos centrais.

Voltaremos a essa experiência idealizada por Galton mais adiante porque está intimamente relacionada não apenas ao estudo de probabilidade mas à distribuição estatística.

O assunto **probabilidade** não é totalmente novidade, você já teve contato com ele no Ensino Fundamental e em momentos diferentes do cotidiano, mesmo sem saber.

Quem nunca brincou de par ou ímpar? Em uma partida de futebol, para escolher quem começa ou quem escolhe o lado do campo, qual é o procedimento? Quantas pessoas jogam, semanalmente, nas loterias federais? E as brincadeiras com o famoso dado? O que é mais provável: sair a face com 6 pontinhos ou a face com 2 pontinhos?

Foi no contexto de disputas de jogos e apostas que o assunto probabilidade ganhou corpo. Ainda neste capítulo, apresentaremos um texto que conta essa história. Primeiramente é necessário compreender algumas ideias relacionadas ao estudo de probabilidade.

Um exemplo é a ideia de **experimento aleatório**. Talvez o caso mais simples que você conheça de experimento aleatório seja o lançamento de uma moeda ou de um dado.

Banco Central do Brasil

Moedas de 1 real.


Saran_Poroong/Shutterstock.com

Dados de 6 faces.

Mesmo que você lance a moeda inúmeras vezes para cima, em condições idênticas, não é possível saber qual resultado entre os possíveis (cara ou coroa) irá ocorrer. Isso também acontece com um dado não viciado, isto é, um dado no qual todas as faces tenham iguais condições de ficarem voltadas para cima. Não podemos saber qual será o resultado (1, 2, 3, 4, 5 ou 6).

Esses dois exemplos referem-se a **experimentos aleatórios**, que, embora possam ser repetidos muitas vezes e sob condições idênticas, não apresentam os mesmos índices de ocorrência entre os resultados possíveis.

Experimentos aleatórios são aqueles que, mesmo repetidos várias vezes sob condições idênticas, apresentam resultados imprevisíveis.

Entretanto, há os **experimentos determinísticos**, que, quando realizados nas mesmas condições, se repetem. O experimento de ferver a água, por exemplo, representado na imagem, é determinístico. É claro que você pode dizer que a água não ferve sempre à mesma temperatura, por isso é importante entender o que significa a expressão "nas mesmas condições" nessa situação.


Steven Coling/Shutterstock.com

Vasilha de vidro com água fervendo.

Podcast
Probabilidade na história

A água ferve a 100 °C apenas quando é pura e está à pressão atmosférica de 1 atm (que é a pressão atmosférica ao nível da água do mar).

Um experimento é chamado determinístico quando podemos determinar o seu resultado antes de ele ser realizado e, se caso repetirmos o processo, o resultado for o mesmo.

Em nosso estudo não serão abordados os experimentos determinísticos. Nosso interesse são os chamados experimentos aleatórios.

Alguns dos jogos de loteria podem ser interpretados como experimentos aleatórios. Veja a seguir, a representação de um jogo de loteria que chamaremos de HiperMilhão. Como existem vários tipos desses jogos, os cartões podem ter formatos diferentes, e a frequência dos sorteios também pode mudar.

Mauro Salgado

Vamos considerar, para o HiperMilhão, as mesmas condições de um dos jogos mais populares de loteria, que traz cartões com 60 números e tem sorteios duas vezes por semana, nos quais 6 números são aleatoriamente sorteados. Quando uma pessoa escolhe 6 números entre os 60 disponíveis, não sabe antecipadamente se os números irão ou não ser sorteados. Ela sabe, entretanto, que tem chance de que seus 6 números sejam sorteados, assim como outros 6 números quaisquer.

Surge, então, o interesse em avaliar qual é a probabilidade de que seus 6 números sejam sorteados.

Para pensar e discutir

1. Imagine que você tenha escolhido os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 no HiperMilhão e um colega seu tenha escolhido os números 10, 22, 34, 41, 52 e 59. Quem tem mais "chances" de acertar os 6 números que serão sorteados? 1. Os dois têm a mesma chance.
2. Considere que você tenha escolhido os números 11, 14, 22, 33, 34 e 50 (6 números) e seu colega tenha escolhido os números 12, 25, 27, 30, 42, 48 e 55 (7 números). Considerando que apenas 6 números serão sorteados, quantas possibilidades você tem de ser sorteado e quantas possibilidades seu colega tem de ser sorteado? 2. 1 possibilidade; 7 possibilidades

A **teoria das probabilidades** é um ramo da Matemática que investiga os chamados **experimentos aleatórios**.

Para explorar

Vamos organizar um sorteio na turma.

Parte 1: Preparação e sorteio

- Você e os colegas devem escrever o próprio nome em um pedaço de papel. Todos os pedaços de papel devem ser do mesmo tamanho.
- Dobrem os pedaços de papel com o nome de todos os participantes da turma e coloquem-nos dentro de um recipiente (pode ser uma sacola).
- Três desses pedaços de papel serão escolhidos aleatória e consecutivamente (o nome sorteado não volta para o recipiente); tira-se um papel e anuncia-se o nome; tira-se um segundo papel e anuncia-se o nome; tira-se um terceiro papel e anuncia-se o nome. Parte 1: Resposta pessoal.
- A turma pode combinar que haverá três prêmios (que tal três maçãs, sendo uma para cada vencedor?).

Parte 2: Conclusões

A turma deve elaborar coletivamente respostas para as questões a seguir e justificá-las.

1. O experimento é aleatório? Parte 2: 1. Sim.
2. Todos os estudantes têm, antes de iniciar o sorteio, iguais condições de serem sorteados? Parte 2: 2. Sim.
3. Um estudante qualquer da turma tem mais chance de ser sorteado no primeiro ou no segundo sorteio? Parte 2: 3. No segundo.
4. Quantos são os possíveis resultados para o primeiro sorteio? E para o segundo sorteio? E para o terceiro sorteio? Parte 2: 4. n; $n - 1$; $n - 2$

Espaço amostral e evento

Algumas iniciativas promovem sorteios para arrecadar fundos para instituições não governamentais que necessitam de apoio financeiro, estimulando, assim, que os participantes façam contribuições. Entre as formas de sorteio está o jogo “bingo”.

Nas ilustrações, há uma urna contendo bolinhas numeradas de 1 a 75 e duas cartelas. A pessoa responsável pelo sorteio da bola faz a urna girar frequentemente para que as bolinhas sejam sorteadas consecutivamente. Vamos considerar que será ganhador quem tiver todos os números da cartela sorteados.

Mike Flippo/Shutterstock.com

Urna com bolinhas numeradas, muito comum em “bingos”.

B	I	N	G	O
6	16	34	51	62
10	18	33	56	69
15	24	●	55	71
8	21	42	52	75
4	25	39	53	64

Mauro Salgado

A

B	I	N	G	O
10	29	33	53	68
15	28	45	55	65
9	23	●	57	67
11	17	40	48	62
14	18	41	50	73

Mauro Salgado

B

Para pensar e discutir

1. Você sabe com certeza qual bolinha será sorteada inicialmente? Justifique. 1. Não; resposta pessoal.
2. Quantas são as possibilidades no sorteio da primeira bolinha? 2. 75
3. As cartelas A e B têm iguais condições de ganharem o prêmio? Justifique. 3. Sim; resposta pessoal.

Nesse exemplo, você determinou a quantidade de possíveis resultados de ocorrência para a 1ª bolinha. Ao fazer isso, obteve o número de elementos do espaço amostral, isto é, a quantidade de elementos de um conjunto formado por todos os resultados possíveis do experimento aleatório.

Em um experimento aleatório, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado de **espaço amostral** e representado por Ω (lê-se “ômega”).

Representamos por $n(\Omega)$ o número de elementos do conjunto Ω.

Para representar o espaço amostral do exemplo do “bingo”, fazemos:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 75\}$$

Já para representar a quantidade de elementos de Ω, isto é, o número de possíveis resultados do experimento aleatório, escrevemos:

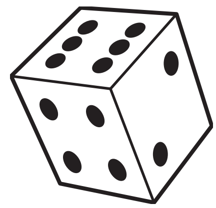
$$n(\Omega) = 75$$

Observe a seguir alguns exemplos de espaço amostral por meio de algumas atividades resolvidas.

Atividades resolvidas

1. Considere o experimento correspondente ao lançamento de um dado e o registro dos resultados que são possíveis. Qual é o espaço amostral e quantos são os seus elementos?

- Em um dado, o espaço amostral corresponde ao conjunto com todos os resultados possíveis de ocorrência (número de elementos do espaço amostral). Assim, sendo Ω o espaço amostral, temos:



Reinaldo Vignati

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ e } n(\Omega) = 6$$

2. Obtenha o espaço amostral e a quantidade de elementos correspondente ao experimento: número que será sorteado ao girar a roleta representada a seguir.

Mauro Salgado

- Conforme os números indicados na roleta, temos:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 19, 20\} \text{ e } n(\Omega) = 20$$

3. Obtenha todos os elementos do espaço amostral correspondente ao experimento: lançamento de 2 moedas perfeitamente distinguíveis e registro da sequência obtida.

Banco Central do Brasil

- No lançamento de uma moeda pode ocorrer cara ou coroa. Assim, como queremos o espaço amostral do lançamento de duas moedas, considerando C para indicar cara e K para indicar coroa:

$$\Omega = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K. K)\} \text{ e } n(\Omega) = 4$$

Vamos retomar uma situação apresentada anteriormente.

Ao verificar os elementos que farão parte do conjunto correspondente ao espaço amostral, é necessário refletir sobre o que o experimento pretende determinar. Pense no experimento do HiperMilhão.

Mauro Salgado

Para pensar e discutir

1. Seis números serão sorteados nesse experimento. Como é formado o espaço amostral?
1. Por todos os conjuntos de 6 elementos que podem ocorrer.

2. Indique dois elementos desse espaço amostral. 2. Resposta pessoal.

3. Qual é o número total de elementos do espaço amostral? 3. 50 063 860

Valendo um suco de laranja!

Africa Studio/Shutterstock.com

Copo com suco de laranja.

Vamos considerar que, no experimento aleatório – lançamento de um dado e registro do resultado –, você apostou um suco de laranja com um colega. Se cair um número par, você ganha; caso seja um número ímpar, perde (e o colega ganha o suco). Além disso, vamos supor que o dado é “honesto”, isto é, tem a mesma chance de cair com qualquer uma de suas faces para cima.

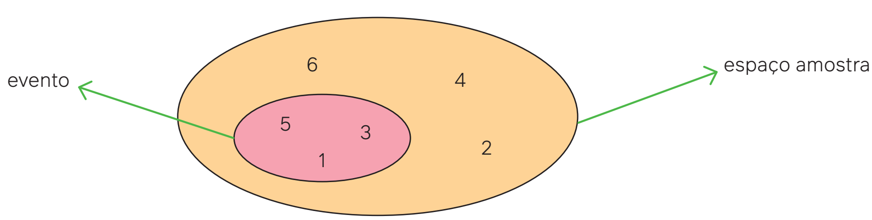
- Resultados que interessam a você: {2, 4, 6}.
- Resultados que interessam ao colega: {1, 3, 5}.

Tanto você quanto o colega têm a mesma quantidade de **resultados favoráveis**, pois os dois conjuntos têm o mesmo número de elementos. Podemos dizer que os dois têm iguais chances de sair com um suco de laranja no final, pois cada face tem a mesma chance de cair virada para cima. Você concorda?

Nesse exemplo, dois **eventos** são indicados: o conjunto formado pelos números pares e o conjunto formado pelos números ímpares.

Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de evento.

O subconjunto de um espaço amostral é “um conjunto dentro de um conjunto”. Veja na ilustração a seguir a representação de conjunto conhecida como **diagrama de Venn**. Esse diagrama representa o espaço amostral (lançamento de um dado e registro do resultado) e o evento indica “sair um número ímpar”.

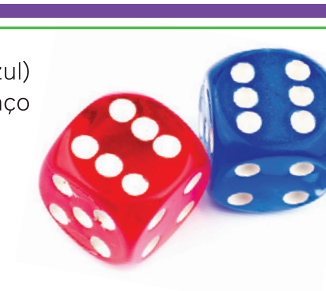


Acervo editora

Esse tipo de representação facilita a observação de que todo elemento do conjunto **evento** é também elemento do conjunto **espaço amostral**. Por isso, o evento será um subconjunto do espaço amostral.

Atividades resolvidas

4. No lançamento simultâneo de dois dados (um vermelho e outro azul) e pela observação das faces voltadas para cima, descreva o espaço amostral e o evento no qual os resultados obtidos sejam iguais.



banu sevim/
Shutterstock.com

- O quadro a seguir mostra os resultados possíveis; em cada par ordenado, o primeiro valor é do dado vermelho e o segundo, do dado azul. Os pares ordenados coloridos representam os elementos do evento "resultados obtidos iguais".

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

- Observando o quadro, temos que:

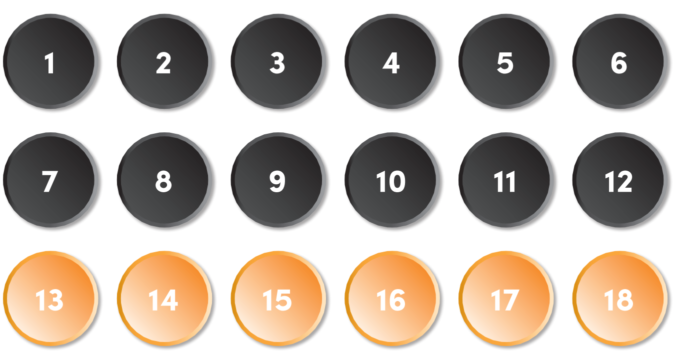
número de elementos do espaço amostral: 36;
número de elementos do evento: 6.

Para pensar e discutir

1. Observando ainda esse quadro, responda: Considerando a soma dos resultados, qual é a soma mais provável? 1. 7
2. E qual é a soma menos provável? 2. 2 ou 12

Em experimentos aleatórios podemos pensar em eventos que jamais vão acontecer (**eventos impossíveis**), mas podemos também elaborar eventos que sempre irão acontecer (**eventos certos**). Se pensarmos um pouco mais, podemos encontrar eventos que, quando considerados juntos, formam o próprio espaço amostral. Veja este exemplo.

5. Pedro, André, Rose e Cláudia confeccionaram 20 fichas de mesmo tamanho em cartolina, utilizando duas cores. Numeraram as fichas de 1 a 18, como ilustrado a seguir.



Acervo editora

Depois, colocaram as 18 fichas em uma caixa e fecharam-na, de modo que ninguém pudesse ver o número nem a cor. O espaço amostral estava pronto para a brincadeira. Cada um deles elaborou um evento para a retirada de uma das 18 fichas.

Pedro – Evento *A*: a ficha retirada deve ser da cor preta.

André – Evento *B*: a ficha retirada deve ser da cor laranja.

Rose – Evento *C*: a ficha retirada deve ser um número maior que 19.

Cláudia – Evento *D*: a ficha retirada deve ser um número menor que 19.

Qual desses eventos é certo? E qual desses eventos é impossível?

- Evento certo é aquele que irá ocorrer com certeza. Não podemos garantir a ocorrência de uma ficha de cor preta (evento *A*), nem a ocorrência de ficha de cor laranja (evento *B*). Como todos os números são menores que 19, um deles irá ocorrer. Assim temos:

Evento *D* – exemplo de evento certo.

- Evento impossível é aquele que jamais ocorrerá. Pode ser que ocorra ficha de cor preta (evento *A*), pode ser que ocorra ficha de cor laranja (evento *B*), ocorrerá com certeza um número menor que 19 (evento *D*). Como nenhum número é maior que 19, temos que:

Evento *C* – exemplo de evento impossível.

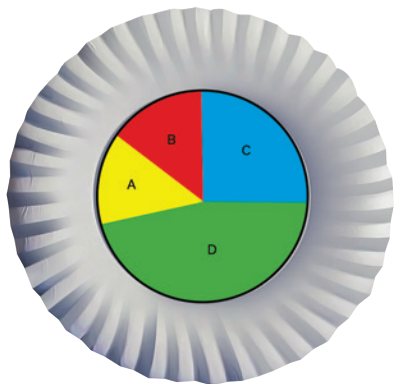
Quando um evento coincide com o próprio espaço amostral é chamado de **evento certo**.
Quando um evento é vazio é chamado de **evento impossível**.

Na atividade resolvida a seguir, temos uma situação em que o espaço amostral não é discreto, ou seja, o espaço amostral é contínuo.

6. Acertando o alvo!

Este jogo foi elaborado por uma turma do Ensino Médio. A região circular interna de um prato de papelão foi dividida em 4 partes. Cada estudante, na sua vez, lança um grão de milho dentro do prato, que cairá em uma das quatro regiões (setores circulares). Caso o grão não caia no prato ou fique metade em um setor e metade em outro setor, o estudante lança o milho novamente até que ele ocupe claramente um dos setores ou a maior parte dele fique em um dos setores.

Mauro Salgado



Prato de papelão com setores circulares utilizado para jogo de alvo.

a) Em qual setor é mais provável que o grão de milho caia?

b) É menos provável que o grão de milho caia no setor A do que no setor C. Isso é correto?

c) O que representa o espaço amostral desse experimento?

- **Item a**: considerando que o grão de milho caia dentro do prato, quanto maior o setor circular, mais provável a região em que o milho cairá. Portanto, o setor D é o mais provável.
- **Item b**: sim. O setor A tem área menor que a do setor C. Sendo assim, é menos provável que o grão de milho caia no setor A que no setor C. Logo, a afirmação é correta.
- **Item c**: o espaço amostral será formado pela união dos quatro setores circulares coloridos, ou seja, corresponde ao círculo colorido.

Atividades

1. Suponha que um estudante de sua turma será sorteado para declamar um poema na abertura da Mostra Cultural de sua escola. Com base nisso, responda aos itens a seguir.

a) Nesse espaço amostral, qual é a quantidade de elementos? 1. a) Resposta pessoal.

b) Considere que o evento seja “escolher um estudante que tenha o nome começado por vogal”. Qual é o número de elementos desse evento? 1. b) Resposta pessoal.

c) Considere que o evento seja “escolher um estudante que tenha o primeiro nome começado por consoante”. Qual é o número de elementos desse evento? 1. c) Resposta pessoal.

d) Qual dos dois eventos dos itens anteriores é mais provável de ocorrer? 1. d) Resposta pessoal.

2. Sobre o experimento “lançamento de um dado perfeito”, faça o que se pede.

a) Escreva todos os elementos do espaço amostral Ω. 2. a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) Escreva todos os elementos do evento A: “sair número maior que 3”. 2. b) $A = \{4, 5, 6\}$

c) Escreva todos os elementos do evento B: “sair número primo”. 2. c) $B = \{2, 3, 5\}$

d) Escreva todos os elementos do evento C: “sair número quadrado perfeito”. 2. d) $C = \{1, 4\}$

e) Escreva todos os elementos do evento D: “sair número maior que 6”. 2. e) $D = \{\ \}$

f) Escreva todos os elementos do evento E: “sair número menor que 7”. 2. f) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Cameramannz/Shutterstock.com

Dado comum com 6 faces.

3. Em relação ao experimento da atividade anterior e aos eventos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, responda ao que se pede.

a) Quais eventos são igualmente prováveis de acontecer? 3. a) *A* e *B*.

b) Qual é o evento impossível? 3. b) *D*.

c) Qual é o evento certo? 3. c) *E*.

4. Além do tradicional dado em forma de cubo, existem outros tipos de dados. Na figura, estão representados um dado com 12 faces (dodecaedro) e outro com 20 faces (icosaedro).


lifentsova Olga/ Shutterstock.com

Dado com 12 faces (dodecaedro).


lifentsova Olga/ Shutterstock.com

Dado com 20 faces (icosaedro).

a) Elabore um experimento e um evento usando o dodecaedro. Depois, descreva os elementos desse espaço amostral e, também, os elementos do experimento. 4. a) Resposta pessoal.

b) Elabore um experimento e um evento usando o icosaedro. Depois, descreva os elementos desse espaço amostral e, também, os elementos do experimento. 4. b) Resposta pessoal.

5. Observe a ilustração de uma roleta com os números de 0 a 36, que é um exemplo de experimento aleatório. O ponteiro é girado até que pare em uma das casas indicadas.


Mauro Salgado

Roda de roleta.

a) Determine o número de elementos do espaço amostral. 5. a) 37

b) Considere o evento *A*: sair um número múltiplo de 3. Qual o número de elementos desse evento? 5. b) n(*A*) = 13

c) Considere o evento *B*: sair um número múltiplo de 5. Qual é o número de elementos desse evento? 5. c) n(*B*) = 8

d) Considere o evento *C*: sair um número que seja múltiplo de 3 e de 5. Qual é o número de elementos desse evento? 5. d) n(*C*) = 3

6. Considere no experimento "retirar uma carta, ao acaso, de um baralho de 52 cartas" os eventos a seguir.


Mauro Salgado

Cartas de baralho.

- Evento *A*: ocorrência de uma carta com o naipe espadas.
- Evento *B*: ocorrêancia de uma carta com o número 3.
- Evento C: ocorrência de uma carta com o rei de ouros.
- Evento *D*: ocorrência de uma carta com o ás.

Descreva cada um desses eventos e informe qual é o mais provável de acontecer e qual é o menos provável de acontecer no experimento. 6. Resposta no Manual do Professor; mais provável: *A*; menos provável: *C*.

7. Rubens escreveu as letras de seu nome em 6 cartões de mesmo tamanho, como a seguir.

Acervo editora

Depois, ele embaralhou os cartões e colocou-os, um do lado do outro, com a face virada para baixo. Logo em seguida, desvirou as cartas. Nesse experimento, faça o que se pede.

a) Determine o número de elementos do espaço amostral, isto é, a quantidade de possíveis maneiras de formar sequências com essas seis letras. 7. a) 720

b) Considere o evento “resultar a ordem das letras que formam o nome Rubens”. Qual é o número de elementos desse evento? 7. b) 1

8. Junte-se a um colega para investigar esta situação: Carlos pratica tiro ao alvo com flechas, profissionalmente. Nos fundos de sua casa, ele elaborou um alvo na parede usando dois quadrados de tamanhos diferentes: o maior com medida de lado 2 m e, o menor, com medida de lado 1 m. Veja a ilustração.

Acervo editora

Considere o experimento “lançamento da flecha no alvo” e, também, que Carlos sempre acerta o alvo na região amarela ou na região preta. Nesse experimento, considere os eventos a seguir.

- Evento *A*: Carlos acerta a flecha na região amarela.
- Evento *B*: Carlos acerta a flecha na região preta.

Avalie qual dos dois eventos é mais provável. Justifique e informe o que seria o espaço amostral do experimento.
8. *A*; resposta pessoal.

9. Um experimento consiste em lançar uma mesma moeda 5 vezes consecutivamente e observar a face voltada para cima (cara ou coroa). Nesse experimento, o evento *A* consiste em 5 resultados iguais à cara.

a) Determine o número de elementos do espaço amostral. 9. a) 32

b) Quantos são os elementos do evento *A*? 9. b) 1

10. Em um determinado momento, no restaurante do Mané há 13 pessoas, sendo 9 clientes e 4 funcionários. Um experimento consiste em sortear uma dessas pessoas aleatoriamente. O evento *A* consiste em ser sorteado um cliente, enquanto o evento *B* consiste em ser sorteado um funcionário. Determine:

a) o número de elementos do espaço amostral; 10. a) 13

b) o número de elementos do evento *A*; 10. b) 9

c) o número de elementos do evento *B*. 10. c) 4

11. Em uma brincadeira, foram escritos em pedaços de papel os seguintes números, sendo que um deles seria sorteado ao acaso:

2	3	4	5	6	7

Considere os eventos:

A – o número sorteado é par; *B* – o número sorteado é primo.

Determine o número de elementos desses dois eventos. 11. n(*A*) = 3; n(*B*) = 4

12. Em uma urna foram colocadas 21 bolas de mesmo tamanho e de mesma massa, sendo:

- 6 bolas vermelhas;
- 3 bolas verdes;
- 5 bolas brancas;
- 7 bolas amarelas.

Considere o experimento em que duas bolas serão retiradas sucessivamente e sem reposição. Além disso, considere que o evento *A* consiste em retirar a 1ª bola vermelha e a 2ª bola amarela.

a) Quantos elementos tem o espaço amostral? 12. a) 420

b) Quantos elementos tem o evento *A*? 12. b) 42

13. Em um baralho com 52 cartas, uma carta será escolhida ao acaso. Marcos deseja retirar uma carta que não seja ás. Obtenha:

a) o número de elementos do espaço amostral; 13. a) 52

b) o número de possibilidades que interessam a Marcos. 13. b) 48

14. Elabore um experimento aleatório e um evento relativo a esse experimento. Em seguida, apresente-o a um colega para que ele determine:

a) o número de elementos do espaço amostral; 14. a) Resposta pessoal.

b) o número de elementos do evento. 14. b) Resposta pessoal.

Análise e contexto

O mais provável

Leia o texto a seguir para saber um pouco mais sobre a fascinante história de um conhecimento amplamente utilizado na atualidade em Biologia e Química por seguradoras, investidores econômicos e tantas outras áreas em que decisões são tomadas com base em "o mais provável".

Não é de hoje que o acaso é objeto de fascínio. Desde a Pré-História os seres humanos observaram a infinidade de fenômenos sem explicação, irregulares, sem causas aparentes, que lhe eram oferecidos pela natureza. Numa primeira etapa, a culpa era atribuída aos deuses. Eclipses, arco-íris, terremotos, epidemias, cometas ou enchentes excepcionais dos rios eram manifestações interpretadas como mensagens divinas endereçadas a quem fosse capaz de decifrá-las. Da missão foram incumbidos feiticeiros, oráculos, sacerdotes e xamãs que, diante da necessidade de ganhar a vida, aproveitaram para desenvolver todo um repertório de rituais destinados a interrogar os deuses, para não precisar esperar que eles se prestassem a se manifestar por livre e espontânea vontade. Em outras palavras, os homens começaram a imaginar meios de criar o aleatório de acordo com a demanda.

A belomancia, arte da adivinhação pelas flechas, é um dos exemplos mais antigos. Inscreva em flechas as diferentes alternativas do questionário endereçado ao seu deus, junte-as na aljava, sacuda e tire uma ao acaso: aí está a resposta. Era assim, por exemplo, que Nabucodonosor II, rei da Babilônia, escolhia os inimigos aos quais declarava guerra, no século VI antes da nossa era. Além das flechas, os objetos tirados podiam assumir diferentes formas: seixos, tabuletas, bastões ou bolas coloridas. Os romanos deram a esses objetos o nome de *sors*. Dessa palavra vem a nossa expressão "sortear", assim como o termo "sortilégio", que designa originalmente o adivinho que interroga os deuses ou o veredito do próprio deus.

Aos poucos, os mecanismos de extração aleatória se multiplicam, encontrando numerosas aplicações. Eles seriam utilizados por vários sistemas políticos, como, por exemplo, em Atenas, para designar os quinhentos cidadãos que tinham assento na Bulé, ou, alguns séculos depois, em Veneza, nos processos de escolha do doge. O acaso também se revelaria importante fonte de inspiração para os criadores de jogos. É a invenção do cara ou coroa, dos dados numerados, que viriam a assumir as formas dos sólidos de Platão, ou ainda dos jogos de cartas.


Banco Central do Brasil


Cameramannz/Shutterstock.com


lifentsova Olga/Shutterstock.com


lifentsova Olga/Shutterstock.com


Mauro Salgado

Justamente por meio dos jogos de azar é que as decisões dos deuses acabariam atraindo a atenção de alguns matemáticos. Eles teriam a estranha ideia de bancar medidores do destino, estudando por meio da lógica e do cálculo as propriedades do futuro, antes da sua chegada.

Tudo tem início em meados do século XVII, durante uma reunião da Academia Parisiense, ancestral da Academia de Ciências, fundada em 1635 pelo matemático e filósofo Marin Mersenne. Durante um debate entre cientistas de diversos horizontes, o escritor Antoine Gombaud, amante da matemática nas horas vagas, apresenta à assembleia um problema que havia encontrado. Suponham, diz ele, que dois jogadores tenham apostado uma soma em dinheiro num jogo de azar a ser dado por encerrado quando um dos jogadores vencer três vezes, mas que a partida seja interrompida quando o primeiro jogador estiver vencendo por duas rodadas a uma. Como os dois jogadores terão de dividir a aposta?

Entre os cientistas presentes nesse dia, o problema atrai particularmente a atenção de dois franceses: Pierre de Fermat e Blaise Pascal. Depois de algumas trocas epistolares, os dois acabam concluindo que três quartos da aposta devem ser atribuídos ao primeiro jogador, e o quarto restante, ao segundo.

LAUNAY, M. *A fascinante história da Matemática*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019. p. 203-204.

1. Você concorda com a solução citada no texto para o problema proposto? Justifique. 1. Resposta pessoal.

2. Como Fermat e Pascal podem ter chegado à solução apresentada? Simule a situação para verificar.
2. Resposta pessoal.

Probabilidade

Pedro, como de costume, acordou atrasado para ir à escola. Meio sonolento ainda, foi ao armário de roupas, abriu a gaveta de meias, pegou um pé de meia sem olhar e calçou em um dos pés; depois, pegou outro pé de meia sem olhar e calçou no outro pé. Detalhe: na gaveta das meias havia, inicialmente, 6 pares de meias diferentes, totalmente espalhadas, isto é, 12 pés de meia misturados. Qual é a probabilidade de Pedro ter calçado os 2 pés do mesmo par de meias?

Mauro Salgado

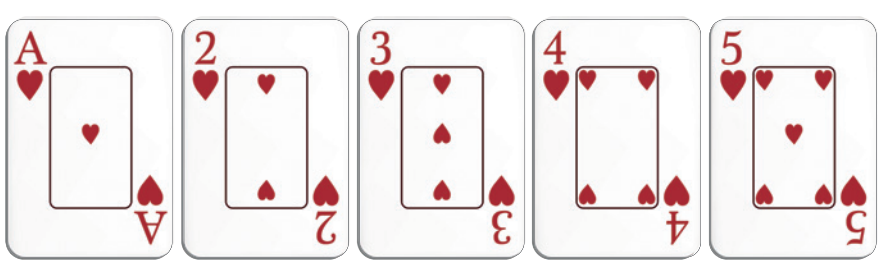
Mauro Salgado

Para pensar e discutir

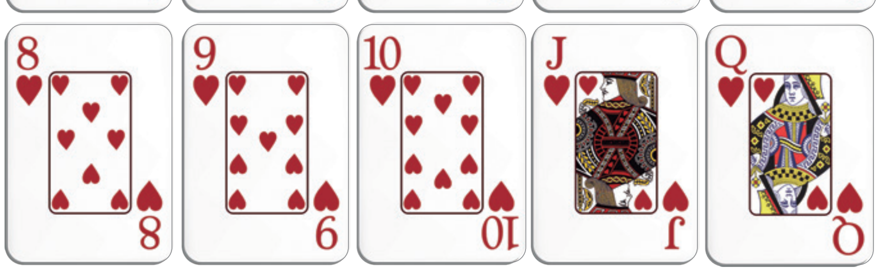
1. É mais provável que Pedro acerte ou erre as meias de um mesmo par? Explique como pensou. 1. Erre; resposta pessoal.
2. Nesse experimento, as meias são diferentes apenas na estampa. É um experimento aleatório? 2. Sim.
3. Qual é o espaço amostral desse experimento? Quantos são os elementos do espaço amostral? 3. O número de maneiras de escolher 2 de 12 meias; 66.
4. Qual é o evento? Quantos são os elementos do evento? 4. O conjunto formado pelos pares de meias; 6.

Note que, na discussão proposta acima, não pedimos ainda para você calcular a probabilidade, embora você já tenha noções de probabilidade adquiridas ao longo do Ensino Fundamental. Pense não apenas em uma resposta mas também em um procedimento para calcular a probabilidade. Depois, retomaremos essa situação.

Quando estamos diante de um experimento aleatório em que o espaço amostral é finito, consideramos que todo **evento elementar** (evento com apenas 1 elemento) tem a mesma chance de ocorrer; em outras palavras, o **espaço amostral é equiprovável**. Por exemplo, se sortearmos aleatoriamente uma carta entre as cartas seguintes, cada uma delas tem igual condição de ser a escolhida.



Mauro Salgado



Mauro Salgado

De acordo com esse exemplo, temos as situações a seguir.

- Espaço amostral:

$$\Omega = \{A, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, J, Q\} \text{ e } n(\Omega) = 10$$

- Eventos elementares:

$$\{A\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}, \{J\}, \{Q\}$$

e

$$n(\{A\}) = n(\{2\}) = n(\{3\}) = \ldots = n(\{10\}) = n(\{J\}) = n(\{Q\}) = 1$$

Para cada um desses eventos elementares podemos dizer que existe **1 situação favorável em 10 situações possíveis** de ele ser escolhido, ou seja, a probabilidade é de $\frac{1}{10}$.

A probabilidade $P(E)$ de ocorrer um evento E de um espaço amostral equiprovável Ω é dada por:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de elementos de } E}{\text{número de elementos de } \Omega}$$

ou

$$\mathbf{P(\boldsymbol{E}) = \frac{n(\boldsymbol{E})}{n(\boldsymbol{\Omega})} = \frac{\textbf{número de resultados favoráveis}}{\textbf{número total de situações possíveis}}}$$

Existem situações em que o espaço amostral é **contínuo**, não é um conjunto de elementos, mas uma área, um comprimento, por exemplo. Vamos retomar a **atividade 8**, uma situação em que você intuitivamente analisou a probabilidade associada a um espaço amostral contínuo.

Carlos pratica tiro ao alvo com flechas profissionalmente. Nos fundos de sua casa ele elaborou um alvo na parede usando dois quadrados de tamanhos diferentes: o maior com medida de lado 2 m e o menor com medida de lado 1 m. Veja a ilustração a seguir.

Acervo editora

Considere o experimento “lançamento da flecha no alvo” e também que Carlos sempre acerta o alvo na região amarela ou na região preta. Nesse experimento, considere os eventos a seguir.

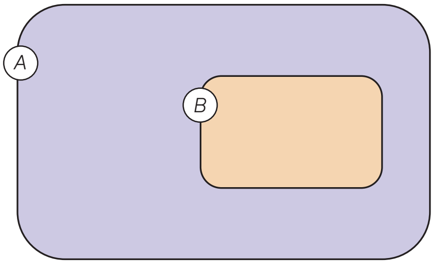
- Evento A: Carlos acerta a flecha na região amarela.
- Evento B: Carlos acerta a flecha na região preta.

Para pensar e discutir

1. Como calcular a probabilidade de ocorrer o evento A? 1. Resposta no Manual do Professor.
2. E a probabilidade de ocorrer o evento B? 2. Resposta no Manual do Professor.

Nesse caso, a probabilidade é proporcional à área. Considerando que Carlos sempre acerta o alvo, a área do quadrado maior representa o espaço amostral (100%). Assim, quanto maior a área, mais provável; quanto menor a área, menos provável.

De modo geral, se há uma região B de um plano que está contida em uma região A, a probabilidade de um ponto P também pertencer à região B **é proporcional** à área de B e não depende da posição que a região B ocupa na região A.

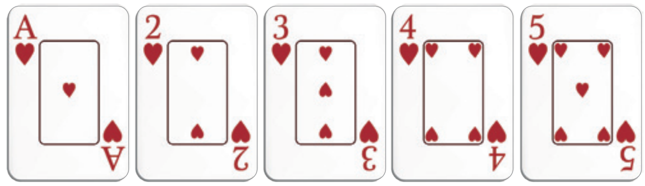


Acervo editora

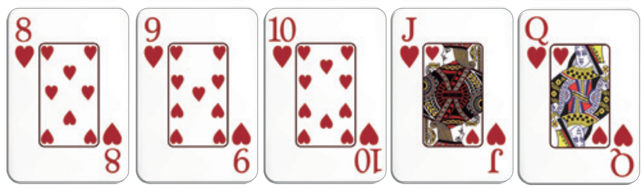
$$P = \frac{\text{área de } B}{\text{área de } A}$$

Atividades resolvidas

7. Voltando às cartas, considere que iremos escolher aleatoriamente uma das 10 cartas a seguir e que queremos saber qual é a probabilidade de a carta escolhida ter uma letra.



Mauro Salgado



Mauro Salgado

- O evento E é formado por 3 elementos (A, J e Q), isto é, há 3 situações favoráveis. Portanto, a probabilidade é:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

$$P(E) = \frac{3}{10} = 0,3 = 0,30 = 30\%$$

Podemos expressar a probabilidade na forma fracionária, decimal ou mesmo em porcentagem.

Assim, a probabilidade é de 30%.

8. Foram feitos 15 salgados especiais para um grupo de pessoas. Somente em 2 deles há uma azeitona dentro. Você escolhe um salgado aleatoriamente. Qual é a probabilidade de você escolher um salgado em que há azeitona? E qual é a probabilidade de escolher um salgado em que não há azeitona?

rocharibeiro/Shutterstock.com

Recipiente com 15 salgados.

- O espaço amostral é formado por 15 elementos (são 15 salgados).
- Escolher o salgado com azeitona – evento formado por 2 elementos (são 2 salgados que têm azeitona). Representando a probabilidade pela letra P, temos:

$$P = \frac{\text{número de situações favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

$$P = \frac{2}{15}$$

- Escolher o salgado sem azeitona – evento formado por 13 elementos (são 13 salgados que não têm azeitona). Representando a probabilidade por $\overline{P}$ (não P), temos:

$$\overline{P} = \frac{\text{número de situações favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

$$\overline{P} = \frac{13}{15}$$

Para pensar e discutir

1. Calculando a probabilidade de escolher um salgado com azeitona, você pode dizer como calcular a probabilidade de escolher um salgado sem azeitona? Explique aos colegas como pensou. 1. Resposta pessoal.

9. As três chaves ilustradas a seguir são idênticas, porém somente uma delas abre a porta da casa de Renato, que está chegando em casa e precisa ir rapidamente ao banheiro. Ele pega uma das três chaves e consegue, em uma única tentativa, abrir a porta. Seria mais provável ele acertar na primeira tentativa ou errar na primeira tentativa?

Mauro Salgado

- Sendo P a probabilidade de ele acertar na 1ª tentativa e $\overline{P}$ a probabilidade de ele não acertar, temos:

$$P = \frac{1}{3} \text{ e } \overline{P} = \frac{2}{3}$$

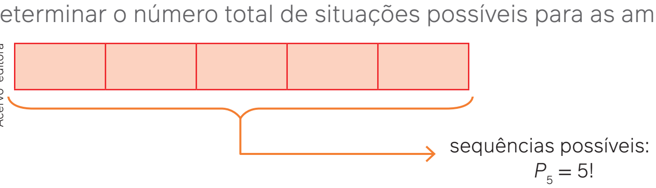
Portanto, seria mais provável ele errar a chave na primeira tentativa.

10. As amigas Andreia, Bruna, Carla, Daniela e Eliane estão em uma fila para entrar no cinema; Andreia é a 1ª da fila. Ao olhar para trás, Andreia percebe que as cinco estão na fila com os nomes em ordem alfabética do começo para o fim. Qual é a probabilidade de as cinco amigas, aleatoriamente, formarem uma fila e ficarem em ordem alfabética, como Andreia constatou?

Mauro Salgado

- Primeiramente, vamos determinar o número total de situações possíveis para as amigas estarem em fila.

Acervo editora



- Somente em uma dessas sequências possíveis elas estarão em ordem alfabética do começo para o fim da fila. Sendo P a probabilidade de isso acontecer, temos:

$$P = \frac{1}{P_5}$$

$$P = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} \Rightarrow P = \frac{1}{120}$$

Para pensar e discutir

1. Qual seria a probabilidade de as amigas estarem posicionadas em ordem alfabética do começo para o fim da fila ou do fim para o começo? 1. $\frac{2}{120}$

Você notou que, no cálculo de probabilidades, utilizamos também cálculo combinatório? Por isso, é importante compreender bem qual é o espaço amostral da situação na qual se calcula a probabilidade. Para ampliar essas ideias, vamos retomar o caso das meias e os exemplos relacionados com o HiperMilhão.

11. A soma das faces opostas de um dado é igual a 7. Um fabricante, propositalmente, fez um dado viciado de forma que, ao lançá-lo muitas vezes, a face 1 sai o triplo de vezes de qualquer outra face e as demais têm igual probabilidade de sair de um dado normal. Qual é a probabilidade de sair cada uma dessas faces?

- Vamos representar por $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$ e $P(6)$ as probabilidades de saírem, respectivamente, as faces 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Então:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$\Big\downarrow \text{ Fazemos: } P(1) = 3x \text{ e } P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = x$$

$$3x + x + x + x + x + x = 1$$

$$8x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$$

Portanto, a probabilidade de sair a face 1 é $\frac{3}{8}$ e cada uma das demais é $\frac{1}{8}$.

Para pensar e discutir

1. Nesse exemplo, as faces dos dados são equiprováveis? Justifique. 1. Não; resposta pessoal.

2. Qual é a probabilidade de ocorrer cada face de um dado viciado considerando que a probabilidade de sair cada face é diretamente proporcional ao número que indica a face? Explique como calculou.

2. $P(1) = \frac{1}{21}$, $P(2) = \frac{2}{21}$, $P(3) = \frac{3}{21}$, $P(4) = \frac{4}{21}$, $P(5) = \frac{5}{21}$ e $P(6) = \frac{6}{21}$; resposta pessoal.

12. Retomando a situação das meias, vamos calcular a probabilidade de Pedro ter calçado os 2 pés do mesmo par de meias.

Mauro Salgado

- O espaço amostral é formado por todas as possíveis "duplas" de meias que podemos escolher para formar um par. Temos de fazer escolhas de 12 meias, de 2 em 2. Logo, o número total dessas escolhas é calculado por:

$$n(\Omega) = C_{12,2}$$

$$n(\Omega) = \frac{12!}{2!(12-2)!} = 66$$

- O evento E consiste em escolher duas meias do mesmo par. Existem apenas 6 possibilidades de isso acontecer, pois podemos formar 6 pares de meias do mesmo tipo.

$$n(E) = C_{6,\,1}$$

$$n(E) = \frac{6!}{1!(6-1)!} = 6$$

- Cálculo da probabilidade de ocorrer o evento E:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

$$P(E) = \frac{C_{6,\,1}}{C_{12,\,2}}$$

$$P(E) = \frac{6}{66} \Rightarrow P(E) = \frac{1}{11}$$

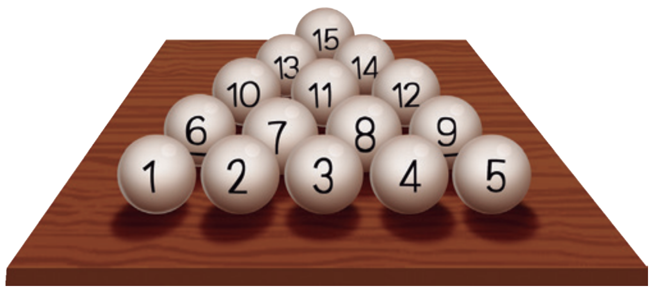
Observação:

Nesse caso, há outras maneiras de chegar ao resultado proposto. Um dos raciocínios é o indicado a seguir: o primeiro pé de meia escolhido por Pedro não importa (pode ser qualquer um dos 12 pés de meia da gaveta).

Assim, ele escolhe qualquer pé de meia e dentro da gaveta ficam 11 pés de meias. Somente 1 pé de meia, entre os 11 que ficaram na gaveta, faz par com o pé de meia que ele escolheu inicialmente. Logo a probabilidade é $\frac{1}{11}$.

Atividades

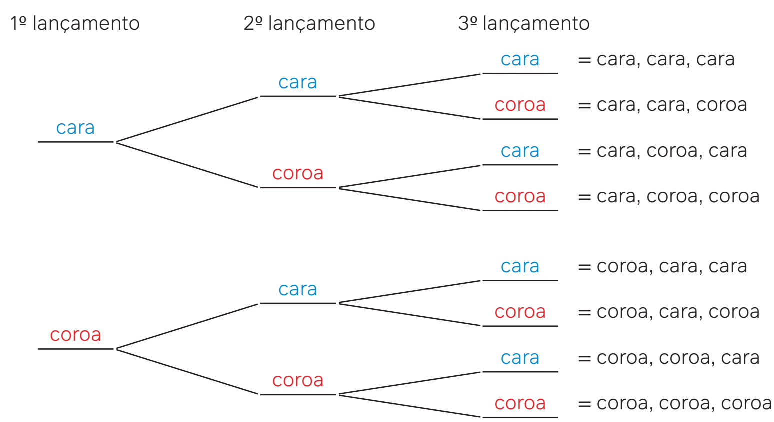
15. Considere 15 bolas numeradas, todas de mesmo tamanho, colocadas dentro de uma urna sem que seja possível observar o número. Uma bola é extraída aleatoriamente. Utilizando o conceito de probabilidade, avalie qual dos três eventos a seguir é mais provável e qual é o menos provável de acontecer.



Mauro Salgado

- Evento A: a bola retirada tem um número par.
- Evento B: a bola retirada tem um número ímpar.
- Evento C: a bola retirada não tem um número múltiplo de 3. 15. Mais provável: C; menos provável: A.

16. A seguir está representada a árvore das possibilidades dos lançamentos consecutivos de uma mesma moeda três vezes e a observação da sequência desses resultados.



De acordo com essas informações, faça o que se pede.

a) Qual é a probabilidade de obtermos pelo menos duas caras nesse experimento? 16. a) $\frac{4}{8}$

b) Qual é a probabilidade, nesse experimento, de obtermos três resultados iguais? 16. b) $\frac{2}{8}$

c) Elabore uma situação para o cálculo da probabilidade de um evento desse espaço amostral e apresente a probabilidade correspondente. 16. c) Resposta pessoal.

17. Um cadeado de três segredos só é aberto com uma senha de três algarismos colocados na mesma ordem. Considere que você não sabe qual é o segredo e, aleatoriamente, tenta descobrir. Qual é a probabilidade de acertar o segredo na primeira tentativa e abrir o cadeado? 17. $P = \frac{1}{1\,000}$

18. Junte-se a um colega para resolver esta atividade. Imaginem que seja n a quantidade de nomes de todos os estudantes da turma que foram escritos em pedaços de papel iguais e colocados dentro de uma sacola. Aleatoriamente, extraem-se dois nomes da sacola. Respondam aos itens a seguir.

a) Qual é a probabilidade de vocês serem escolhidos? 18. a) $P = \frac{1}{C_{n,\,2}}$

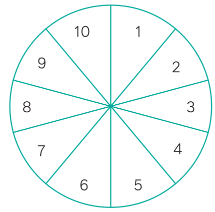
b) Qual é a probabilidade de que nem você nem esse colega sejam escolhidos? 18. b) $P = 1 - \frac{1}{C_{n,\,2}}$

19. Uma pessoa percebeu que, ao lançar muitas vezes um dado viciado, a face 6 saía com o dobro de frequência da face 1 (essas faces são opostas no dado), e as outras faces saíam com a frequência esperada em um dado não viciado. Determine a probabilidade de, lançando-se esse dado, sair:

a) a face 2; 19. a) $\frac{1}{6}$ **b)** a face 1; 19. b) $\frac{1}{9}$ **c)** a face 6. 19. c) $\frac{2}{9}$

Observação:
O experimento a seguir é aleatório e os elementos do espaço amostral não são equiprováveis.

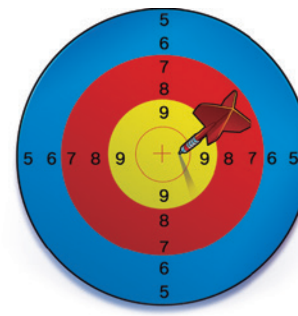
20. Esta é uma roleta diferente. Ao acionar um painel eletrônico, um dos 10 setores (todos do mesmo tamanho) se ilumina: é a indicação do número sorteado.



Acervo editora

Sabe-se que todos os setores pares têm a mesma probabilidade de ocorrer e o mesmo acontece com os setores ímpares. Entretanto, o fabricante dessa roleta construiu-a de maneira que a probabilidade de ocorrer um número ímpar é o dobro da probabilidade de ocorrer um número par. Calcule a probabilidade de ocorrer, em uma jogada, o número 7 e explique como você pensou. 20. $P(7) = \frac{2}{15}$; resposta pessoal.

21. Em uma brincadeira de "tiro ao alvo", cada ponto da região do alvo tem iguais condições de ser atingido. Assim, atingir uma região do alvo é proporcional à área dessa região. Com isso em mente, use a fórmula para o cálculo da área de um círculo de raio R, isto é, πR^2, para calcular a probabilidade de um atirador profissional acertar cada região colorida do alvo a seguir. Considere que ele sempre acerta o alvo, ou seja, sempre acerta uma das regiões.



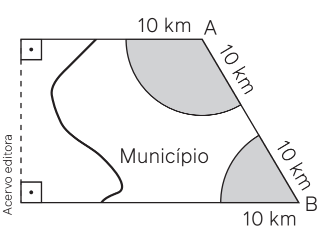
Mauro Salgado

Dados:

- a circunferência azul de maior raio mede 50 cm;
- circunferência vermelha de maior raio mede 30 cm;
- circunferência amarela de maior raio mede 10 cm.

21. P(azul) = 0,64, P(vermelho) = 0,32, P(amarelo) = 0,04.

22. (Enem) Um município de 628 km² é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura.



Acervo editora

Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.
Essa probabilidade é de, aproximadamente: 22. Alternativa **b**.

a) 20%. **b)** 25%. **c)** 30%. **d)** 35%. **e)** 40%.

23. Junte-se a um colega para fazer esta atividade. Resolvam a situação a seguir, que envolve uma investigação de possibilidades.
Carla pergunta a Laura se ela pode trocar uma cédula de R$ 100,00 por duas cédulas de R$ 50,00. Laura examina sua carteira e resolve brincar com Carla dizendo que tem exatamente R$ 200,00 na carteira em cédulas de R$ 50,00, de R$ 20,00 e de R$ 10,00. Além disso, informa que tem pelo menos uma cédula de cada valor, mas não diz quantas cédulas tem de cada valor. Nessas condições, qual é a probabilidade de Laura fazer a troca pedida por Carla? 23. $\frac{6}{13}$

24. Retornando ao HiperMilhão, considere que Laura e Andreia fizeram as seguintes apostas:

Mauro Salgado

Aposta de Laura.

Aposta de Andreia.

Mauro Salgado

a) Qual delas tem maior probabilidade de ter feito a aposta que será sorteada? Justifique.
24. a) As duas têm a mesma probabilidade; resposta pessoal.

b) Qual é a probabilidade de cada uma delas ganhar no HiperMilhão? Explique como calculou.
24. b) $\frac{1}{50\,063\,860}$; resposta pessoal.

Para explorar

No Brasil, há um jogo similar ao do HiperMilhão (mencionado anteriormente) e os cartões correspondentes costumam trazer, no verso, várias observações interessantes sobre a aposta, inclusive a probabilidade que você calculou anteriormente. Outra curiosidade é que, ao fazer uma aposta, pode-se escolher 6 dezenas, 7 dezenas, 8 dezenas... até 15 dezenas. Isso está indicado no cartão. É claro que o valor a ser pago em cada uma dessas possibilidades é diferente, pois poderá competir com mais ou com menos dezenas.

Junte-se a 3 colegas para esta atividade. Vocês precisarão de um cartão do jogo similar ao do HiperMilhão que é praticado no Brasil e de uma calculadora. Façam o que se pede a seguir.

1. Pesquisem os valores das apostas para a escolha de 6 dezenas, 7 dezenas, 8 dezenas... até 15 dezenas.
   1. Depende dos valores na data da pesquisa.
2. Elaborem uma tabela com o número de dezenas e o valor que é pago para cada tipo de aposta.
   2. Depende dos valores atuais cobrados.
3. Calculem, para cada uma dessas possibilidades de escolhas de dezenas, as probabilidades de ganhar.
   3. Resposta no Manual do Professor.
4. Investiguem o motivo de os valores cobrados em cada tipo de aposta e apresentem as conclusões.
   4. Respostas pessoais.

Propriedades das probabilidades

Você já viu alguns exemplos de como calcular a probabilidade de um evento em um espaço amostral. Entretanto, é importante compreender algumas ideias e propriedades a respeito desse cálculo. Quando você lança uma moeda para cima, por exemplo, e aposta que sairá cara, a probabilidade de isso acontecer é 50% e a probabilidade de não acontecer também é 50%.

Banco Central do Brasil

Mas o que isso significa?

Observe a representação, em uma fração, da probabilidade de ocorrer cara no espaço amostral "lançamento de uma moeda e observação da face resultante":

$$P(\text{cara}) = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

Isso **não** significa que se você lançar a moeda 10 vezes, em 50% das vezes sairá cara e nos outros 50% o resultado será coroa. Significa que, à medida que aumentamos o número de lançamentos de uma moeda, verifica-se, experimentalmente, que as frequências relativas correspondentes às ocorrências tanto de cara quanto de coroa ficam cada vez mais próximas de 50%.

Existem, entretanto, propriedades relacionadas ao cálculo de probabilidades que auxiliam na compreensão desse tipo de situação, conforme apresentaremos a seguir. Inicialmente vamos discutir a situação a seguir.

Situação:

Considere o espaço amostral equiprovável correspondente ao resultado do lançamento de um dado e a observação das faces numeradas de 1 a 6. Nesse espaço amostral, vamos investigar os eventos a seguir.

- Evento A: a face resultante é um número menor que 7.
- Evento B: a face resultante é um número múltiplo de 10.
- Evento C: a face resultante é um número múltiplo de 3.
- Evento $\overline{C}$: a face resultante não é um número múltiplo de 3.

Para pensar e discutir

1. Quais são as probabilidades de ocorrência dos eventos A, B, C e $\overline{C}$? 1. 1; 0; $\frac{2}{6}$ e $\frac{4}{6}$
2. Qual é a conclusão sobre a ocorrência do evento A? E do evento B? 2. *A* é certo; *B* é impossível.
3. Adicionando-se as probabilidades de ocorrência dos eventos C e $\overline{C}$, qual é o resultado? O que esse resultado significa? 3. 1; os eventos são complementares
4. A probabilidade de ocorrência de um evento aleatório pode variar de quanto a quanto? E em porcentagem, como ocorre essa variação? 4. De 0 a 1; de 0% a 100%.

Nessa discussão, você investigou fatos sobre determinado espaço amostral. Esses fatos também poderiam ser constatados em outros espaços amostrais **finitos**, pois representam propriedades associadas ao cálculo de probabilidades. Conheça a seguir essas propriedades e suas correspondentes justificativas. É importante que você analise cada propriedade, válida para o espaço amostral finito, e, também, suas justificativas. Após apresentarmos as justificativas dessas propriedades, propomos um momento de discussão.

1ª propriedade
A probabilidade do **evento certo** é igual a 1.

Justificativa:

Um evento E é considerado certo quando ele coincide com o próprio espaço amostral, isto é, $E = \Omega$. Nesse caso, o número de situações favoráveis é igual ao número total de resultados possíveis. Observe o que acontece quando calculamos $P(E)$:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

$$P(E) = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1 \Rightarrow P(E) = 1$$

2ª propriedade
A probabilidade do **evento impossível** é igual a 0.

Justificativa:

Um evento E é considerado impossível se for igual ao conjunto vazio, isto é, $E = \varnothing$. Nesse caso, o número de situações favoráveis é zero. Logo:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

$$P(E) = \frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} = \frac{0}{n(\Omega)} = 0 \Rightarrow P(E) = 0$$

3ª propriedade
Se E é um evento do espaço amostral Ω, então $0 \leq P(E) \leq 1$.

Justificativa:

Sendo E um subconjunto do espaço amostral Ω, temos que $n(\varnothing) \leq n(\text{E}) \leq n(\Omega)$, isto é:

$$0 \leq n(E) \leq n(\Omega)$$

$$\Big\downarrow \text{ dividindo por } (\Omega)$$

$$\frac{0}{n(\Omega)} \leq \frac{n(E)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$$

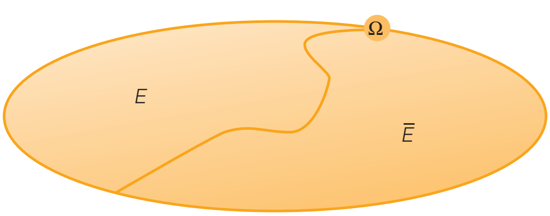
$$\Big\downarrow \text{ conceito de probabilidade}$$

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

4ª propriedade
Se E é um evento do espaço amostral Ω e $\overline{E}$ é o evento complementar, então $P(E) + P(\overline{E}) = 1$.

Justificativa:

Se E e $\overline{E}$ são conjuntos complementares em relação ao conjunto Ω (espaço amostral), temos que a união deles resulta no próprio espaço amostral; além disso, nenhum elemento está simultaneamente em E e $\overline{E}$, como mostra o diagrama a seguir.



Acervo editora

Nessas condições, temos:

$$n(E) + n(\overline{E}) = n(\Omega)$$

$$\Big\downarrow \text{ dividindo os dois membros dessa igualdade por } n(\Omega)$$

$$\frac{n(E)}{n(\Omega)} + \frac{n(\overline{E})}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$$

$$\Big\downarrow \text{ conceito de probabilidade}$$

$$P(E) + P(\overline{E}) = 1$$

Carrossel de imagens
De olho na probabilidade

As questões a seguir permitem discutir sobre as propriedades apresentadas e as justificativas anteriores.

Para pensar e discutir

1. Se, em uma turma do Ensino Médio, for sorteado aleatoriamente o nome de um estudante e a probabilidade de ser sorteado alguém com cabelo preto for igual a 1, o que se pode concluir? 1. Todos têm cabelo preto.

2. Se, em uma turma do Ensino Médio, for sorteado aleatoriamente o nome de um estudante e a probabilidade de ser sorteado alguém com tênis vermelho for igual a zero, o que se pode concluir? 2. Ninguém está com tênis vermelho.

3. Em uma turma qualquer do Ensino Médio, o nome de um estudante será sorteado. Quais são os possíveis valores para a probabilidade de seu nome ser o sorteado? 3. A probabilidade será representada por um número maior ou igual a zero e menor que 1.

4. Se a probabilidade de acontecer um evento aleatório é 30%, qual é a probabilidade de esse evento não acontecer? 4. 70%

Atividades resolvidas

13. Em um sorteio de um número natural de 1 a 20, sabe-se que a probabilidade de escolher um número múltiplo de 3 é igual a $\frac{3}{10}$. Determine a probabilidade de que esse número escolhido não seja múltiplo de 3.

- Uma maneira seria considerar todos os elementos que interessam e calcular a probabilidade.

  Números que não são múltiplos de 3:

$$\overline{A} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20\} \Rightarrow n(\overline{A}) = 14$$

  Probabilidade de um deles ser escolhido:

$$P(\overline{A}) = \frac{14}{20} \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{7}{10}$$

- Entretanto, podemos utilizar a propriedade sobre o evento complementar:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$$\frac{3}{10} + P(\overline{A}) = 1$$

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{10} \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{7}{10}$$

14. Em uma moeda viciada, a probabilidade de ocorrer a cara (C) em um lançamento é 4 vezes a probabilidade de ocorrer a coroa (K). Calcule a probabilidade de ocorrer a face coroa no lançamento dessa moeda.

- Considerando $P(\text{C})$ e $P(\text{K})$ como as probabilidades de ocorrer cara e coroa, respectivamente, conforme enunciado, temos:

$$P(\text{C}) = 4 \cdot P(\text{K})$$

- Como esses eventos são complementares, temos:

$$P(\text{C}) + P(\text{K}) = 1$$

$$4 \cdot P(\text{K}) + P(\text{K}) = 1$$

$$5 \cdot P(\text{K}) = 1$$

$$P(\text{K}) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(\text{K}) = 20\%$$

  Portanto, a probabilidade de ocorrer coroa é 20%.

Atividades

25. Marta está participando de um bingo em sua escola. Veja a cartela dela: vários números já estão marcados. Do total de 75 números, 40 já foram sorteados. Entre outras premiações, o participante que consegue preencher uma linha inteira ou uma coluna inteira também recebe um prêmio.

B	I	N	G	O
~~12~~	~~22~~	~~43~~	~~59~~	75
~~11~~	21	32	~~57~~	~~66~~
~~6~~	20	☆	50	61
2	26	45	~~54~~	~~69~~
~~15~~	~~24~~	~~37~~	55	71

Mauro Salgado

a) Qual é a probabilidade de Marta conseguir preencher, com o próximo número sorteado, uma linha ou uma coluna? 25. a) $P = \frac{2}{35}$

b) E qual é a probabilidade de ela não conseguir preencher, com o próximo número sorteado, uma linha ou uma coluna? 25. b) $P = \frac{33}{35}$

26. Responda ao que se pede.

a) Se a probabilidade de ocorrer determinado evento é 45%, qual é a probabilidade de ele não ocorrer? 26. a) 55%

b) Se, em um dado viciado, a probabilidade de sair a face 6 é de $\frac{1}{5}$, qual é a probabilidade de não sair essa face? 26. b) $\frac{4}{5}$

27. A probabilidade de ocorrência de um evento em um espaço amostral finito varia de 0 (evento impossível) a 1 (evento certo).

a) Elabore um evento, de um espaço amostral, que seja impossível. 27. a) Resposta pessoal.

b) Elabore um evento, de um espaço amostral, que seja certo. 27. b) Resposta pessoal.

28. Considere o experimento de retirada aleatória de uma carta de um baralho com 52 cartas. Elabore:

a) dois eventos que sejam complementares em relação ao espaço amostral; 28. a) Resposta pessoal.

b) um evento em que a probabilidade do resultado seja muito próxima de zero. 28. b) Resposta pessoal.

29. Um dado é lançado ao chão e observa-se o número da face voltada para cima. 29. b) $\frac{4}{6}$

a) Qual é a probabilidade de ocorrer o evento *A*: sair uma face com um número menor que 3? 29. a) $\frac{2}{6}$

b) Qual é a probabilidade de ocorrer o evento *B*: sair uma face com um número maior ou igual a 3?

c) Esses dois eventos são complementares? Justifique. 29. c) Sim; resposta pessoal.

30. Em uma fábrica de parafusos foram produzidos 100 parafusos em uma máquina durante 30 minutos. Observou-se que, desses parafusos, 10 apresentavam defeitos. Aleatoriamente, o inspetor de qualidade retirou 6 parafusos. Responda às perguntas.

a) Qual é a probabilidade de que os 6 parafusos sejam perfeitos? 30. a) $P = \frac{C_{90,\,6}}{C_{100,\,6}}$

b) Qual é a probabilidade de que os 6 parafusos sejam defeituosos? 30. b) $P = \frac{C_{10,\,6}}{C_{100,\,6}}$

c) Qual é a probabilidade de que nenhum dos 6 parafusos sejam perfeitos? 30. c) $P = \frac{C_{10,\,6}}{C_{100,\,6}}$

d) Qual é a probabilidade de que nenhum dos 6 parafusos sejam defeituosos? 30. d) $P = \frac{C_{90,\,6}}{C_{100,\,6}}$

e) Qual é a probabilidade de que ao menos um deles seja perfeito? 30. e) $P = 1 - \frac{C_{10,\,6}}{C_{100,\,6}}$

f) Qual é a probabilidade de que ao menos um deles seja defeituoso? 30. f) $P = 1 - \frac{C_{90,\,6}}{C_{100,\,6}}$

31. Junte-se a um colega para fazer esta atividade. Considerem todos os números de três algarismos distintos que podem ser formados permutando-se os algarismos 2, 3 e 4. Em seguida, um dos números formados é escolhido aleatoriamente.
Avaliem os eventos a seguir e calculem a probabilidade de ocorrer cada um deles.

a) Evento *A*: o número formado é múltiplo de 3. 31. a) 100%

b) Evento *B*: o número formado não é múltiplo de 3. 31. b) 0%

c) Evento *C*: o número formado é múltiplo de 5. 31. c) 0%

d) Evento *D*: o número formado não é múltiplo de 5. 31. d) 100%

32. O quadro a seguir apresenta a soma dos resultados do lançamento de dois dados.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

gomolach/Shutterstock.com

a) Dos 36 resultados possíveis, quais resultados diferentes podem ocorrer? 32. a) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12

b) O espaço amostral correspondente à soma dos resultados do lançamento de dois dados é equiprovável? Justifique. 32. b) Não; resposta pessoal.

c) Qual é a probabilidade de ocorrer a soma 7? 32. c) $\frac{6}{36}$

d) E de não ocorrer a soma 7? 32. d) $\frac{30}{36}$

e) Qual é a probabilidade de a soma ser um número ímpar? 32. e) $\frac{18}{36}$

f) E de não ser um número ímpar? 32. f) $\frac{18}{36}$

Análise e contexto

O uso da probabilidade

O ideal é que você não apenas saiba fazer cálculos envolvendo probabilidades mas compreenda o que está calculando. O texto a seguir enfatiza a essência do uso da probabilidade.

> A essência da teoria da probabilidade pode ser vislumbrada dos fatos simples a seguir. Ninguém pode predizer com certeza qual a face que uma moeda lícita jogada ao ar mostrará ao cair. Mesmo que a moeda tenha acabado de mostrar cara dez vezes seguidas, isso não melhora em nada nossa habilidade de predizer com certeza a próxima jogada. Mesmo assim, podemos predizer com certeza que, se você jogar ao ar aquela moeda 10 milhões de vezes, um número bem próximo da metade das jogadas mostrará cara e um número bem próximo da metade mostrará coroa. De fato, no fim do século XIX, o estatístico Karl Pearson teve a paciência de jogar uma moeda 24 mil vezes. Ele obteve cara em 12 012 das jogadas. É com isso, num certo sentido, que a teoria da probabilidade realmente tem a ver. A teoria da probabilidade nos fornece informações precisas sobre a coleção dos resultados de um grande número de experimentos; ela nunca pode predizer o resultado de qualquer experimento específico. Se um experimento pode produzir n resultados possíveis, cada qual com resultado é $\frac{1}{n}$.
>
> Se você rolar um dado lícito, a probabilidade de obter o número 4 será $\frac{1}{6}$, porque o dado tem seis faces e cada face é um resultado igualmente provável. Suponhamos que o dado seja rolado sete vezes seguidas e, a cada vez, seja obtido um 4, qual seria a probabilidade de se obter um 4 no próximo lançamento? A teoria da probabilidade dá uma resposta clara como a água: a probabilidade ainda seria $\frac{1}{6}$ – o dado não tem memória e todas as noções 6 de "mão quente" ou da próxima jogada compensando o desequilíbrio anterior são apenas mitos. O verdadeiro é que se você rolasse um dado um milhão de vezes, os resultados chegariam a uma média e o 4 apareceria um número bem próximo de um sexto das vezes.
>
> Examinemos uma situação um pouco mais complexa. Suponhamos que três moedas sejam lançadas simultaneamente. Qual a probabilidade de se obter duas coroas e uma cara? Podemos encontrar a resposta pela simples listagem de todos os resultados possíveis.
>
> Se denotarmos cara por "Ca" e coroa por "Co", então haverá oito resultados possíveis: CoCoCo, CoCoCa, CoCaCo, CoCaCa, CaCoCo, CaCoCa, CaCaCo, CaCaCa. Destes, podemos verificar que três são favoráveis ao evento "duas coroas e uma cara". Portanto, a probabilidade deste evento é $\frac{3}{8}$. Ou, mais genericamente, se dos n resultados de iguais chances, m forem favoráveis ao evento de interesse, então a probabilidade de tal evento acontecer será $\frac{m}{n}$. Notemos que isso significa que a probabilidade sempre toma um valor entre zero e um. Se o evento de interesse for de fato impossível, então $m = 0$ (sem resultado favorável) e a probabilidade seria zero. Se, por outro lado, o evento for absolutamente certo, isso significará que todos os eventos são favoráveis ($m = n$) e a probabilidade será, então, simplesmente $\frac{n}{n} = 1$. Os resultados dos três lançamentos de moeda demonstram mais um outro resultado importante da teoria da probabilidade – se tivermos vários eventos que sejam inteiramente independentes entre si, então a probabilidade de todos eles acontecerem será o produto das probabilidades individuais. Por exemplo, a probabilidade de obtenção de três caras é $\frac{1}{8}$, que é o produto das probabilidades de obtenção de caras em cada uma das três moedas: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
>
> LIVIO, M. *Deus é matemático?* Rio de Janeiro: Record, 2010. p. 164-165.

1. É possível, no lançamento de uma mesma moeda dez vezes consecutivas, que os dez resultados sejam cara? E qual será o resultado do próximo lançamento? 1. Sim; não é possível saber.

2. Veja o argumento de um contumaz jogador: "Perdi 50 vezes seguidas, vou continuar apostando porque uma hora eu tenho de ganhar, a sorte vai virar". Como refutar esse argumento utilizando seu conhecimento de probabilidade? 2. Resposta pessoal.

Saran_Poroong / Shutterstock.com

Banco Central do Brasil

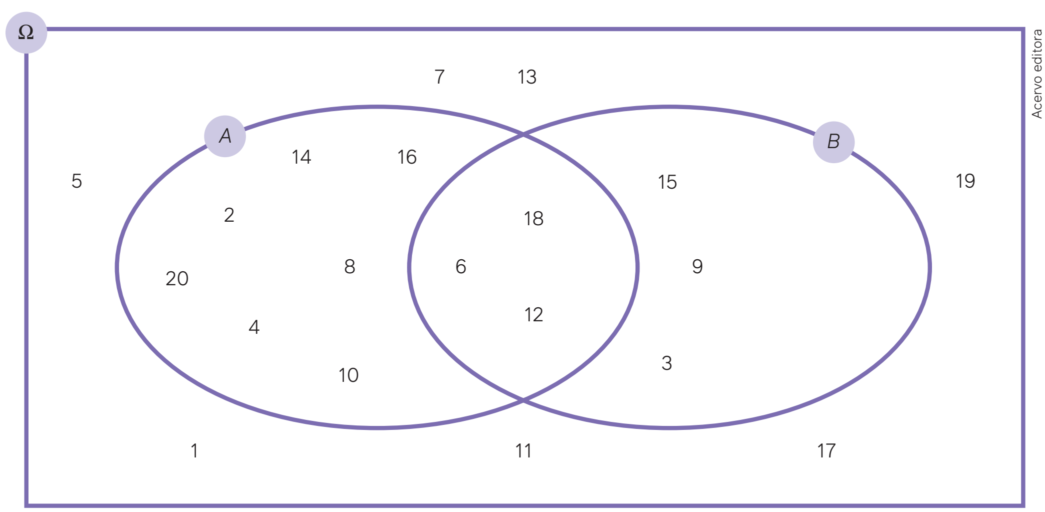
Saran_Poroong / Shutterstock.com

Banco Central do Brasil

2

Adição de probabilidades

Em alguns tópicos estudados neste livro, mencionamos, de forma direta ou indireta, o que em Matemática é chamado de **teoria dos conjuntos**. No estudo de Estatística, por exemplo, quando se fala em população para uma pesquisa, essa população é um **conjunto**. Se escolhermos uma amostra dessa população, temos exemplo de outro conjunto, chamado de **subconjunto** do conjunto da população. Em análise combinatória, quando escolhemos um grupo de objetos significa que formamos um conjunto de objetos, e cada objeto é um elemento do conjunto (dizemos que **pertence** ao conjunto). Quando nos referimos à probabilidade zero de acontecer um evento, esse evento no espaço amostral é vazio, isto é, um conjunto vazio representado por $\varnothing$. Podemos realizar "operações" entre conjuntos, como **união** e **intersecção**. Observe, por exemplo, nos diagramas, dois subconjuntos do conjunto dos números naturais de 1 a 20, representado por Ω.



- Conjunto A: formado por todos os números naturais múltiplos de 2 e de 1 a 20.
- Conjunto B: formado por todos os números naturais múltiplos de 3 e de 1 a 20.

Para pensar e discutir

1. Quantos desses números são elementos do conjunto A ou do conjunto B, isto é, são elementos da união desses dois conjuntos (representados por $A \cup B$)? Descreva o conjunto formado por esses elementos. 1. 13; $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 3, 9, 15\}$
2. Quantos desses números são elementos do conjunto A e do conjunto B simultaneamente, isto é, são elementos da intersecção desses dois conjuntos (representados por $A \cap B$)? Descreva o conjunto formado por esses elementos. 2. 3; $A \cap B = \{6, 12, 18\}$
3. Quantos desses números não são elementos do conjunto $A \cup B$? Descreva o conjunto formado por esses elementos. 3. 7; $\Omega - A \cup B = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
4. Qual é a probabilidade de se escolher aleatoriamente um número desse espaço amostral Ω que seja um elemento do conjunto $A \cup B$? 4. $\frac{13}{20}$
5. Essa probabilidade é a mesma que a adição das probabilidades $P(A)$ – escolher um elemento do conjunto A – com $P(B)$ – escolher um elemento do conjunto B? Justifique. 5. Não; resposta pessoal.

Retorne ao diagrama e observe que o número de elementos da união dos dois conjuntos A e B pode ser calculado adicionando-se o número de elementos de A ao número de elementos de B e, do resultado, deve-se subtrair o número de elementos de $A \cap B$. Em símbolos:

$$\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - A \cap B}$$

Deve-se subtrair o número de elementos de $A \cap B$, pois esses elementos foram considerados duas vezes.

Vamos discutir a resposta para a questão a seguir.

- Em que situação temos $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$?

Agora que retomamos aspectos relacionados à união entre dois conjuntos, é preciso pensar na **probabilidade da união entre dois eventos**. De modo geral, quando temos os eventos A e B de um mesmo espaço amostral, a ocorrência do evento A **ou** do evento B é indicada por $A \cup B$. Já a ocorrência do evento A **e** do evento B é indicada por $A \cap B$.

Considerando que A e B são eventos de um mesmo espaço amostral Ω finito, não vazio e equiprovável, a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B é igual à probabilidade de ocorrer A mais a probabilidade de ocorrer B menos a probabilidade de ocorrer A e B simultaneamente. Em símbolos:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Justificativa:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Big\downarrow \text{ dividindo por } n(\Omega)$$

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

$$\Big\downarrow \text{ conceito de probabilidade}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

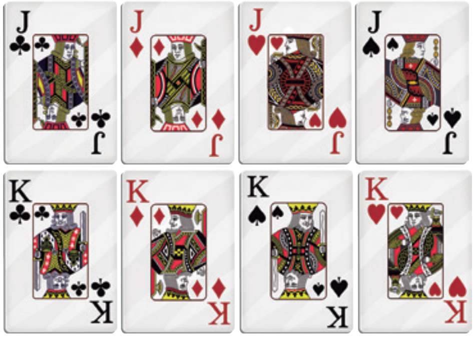
Quando $A \cap B = \varnothing$, os eventos A e B são chamados de **mutuamente exclusivos**. Nesse caso, temos:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}.$$

Analise e discuta com os colegas as situações resolvidas a seguir envolvendo probabilidade da união de dois eventos (adição de probabilidades).

Atividades resolvidas

15. Em um baralho normal há 52 cartas, sendo 13 cartas de cada naipe (paus, espadas, copas e ouros). Uma carta será retirada aleatoriamente desse baralho. Vamos determinar a probabilidade de essa carta ser um valete ou um rei.



Mauro Salgado

- Obtendo o número de elementos dos eventos.

  Evento A: ocorrência de a carta retirada ser um valete $\rightarrow n(A) = 4$.

  Evento B: ocorrência de a carta retirada ser um rei $\rightarrow n(B) = 4$.

- Cálculo da probabilidade da ocorrência de a carta retirada ser um valete ou um rei (observe que os eventos A e B são mutuamente exclusivos, não pode ocorrer simultaneamente uma carta valete e um rei).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} - \frac{0}{52}$$

$$P(A \cup B) = \frac{8}{52} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{2}{13}$$

Portanto, a probabilidade é $\frac{2}{13}$.

16. De um grupo de 10 estudantes, entre eles Paula e Eduardo, deve-se escolher, ao acaso, uma comissão de 4 pessoas para representar a turma em um encontro nacional de estudantes. Qual é a probabilidade de Paula ou Eduardo participar dessa comissão?

- O espaço amostral Ω é o conjunto formado por todas as possíveis maneiras de se formar a comissão com quatro elementos de 10.

$$n(\Omega) = C_{10}^{4}$$

$$n(\Omega) = \frac{10!}{4!(10-4)} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \Rightarrow n(\Omega) = 210$$

- Evento A: Paula irá participar. É o conjunto formado por todas as comissões em que Paula e outros três estudantes podem fazer parte.

$$n(A) = C_{10-1}^{4-1}$$

$$n(A) = C_{9}^{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \Rightarrow n(A) = 84$$

- Evento B: Eduardo irá participar. É o conjunto formado por todas as comissões em que Eduardo e outros três estudantes podem fazer parte.

$$n(B) = C_{10-1}^{4-1}$$

$$n(B) = C_{9}^{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \Rightarrow n(B) = 84$$

- Evento $A \cap B$: Paula e Eduardo irão participar. É o conjunto formado por todas as comissões formadas por Paula, Eduardo e outros dois estudantes.

$$n(A \cap B) = C_{10-2}^{4-2}$$

$$n(A \cap B) = C_{8}^{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28 \Rightarrow n(A \cap B) = 28$$

- Cálculo da probabilidade de Paula ou Eduardo participar da comissão:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{84}{210} + \frac{84}{210} - \frac{28}{210}$$

$$P(A \cup B) = \frac{140}{210}$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3} \cong 0{,}67 = 67\,\% \Rightarrow P(A \cup B) \cong 67\%$$

Portanto, a probabilidade de Paula ou Eduardo participar da comissão é de aproximadamente 67%.

Para pensar e discutir

1. Você resolveria a situação acima de outra maneira? Explique. 1. Resposta pessoal.

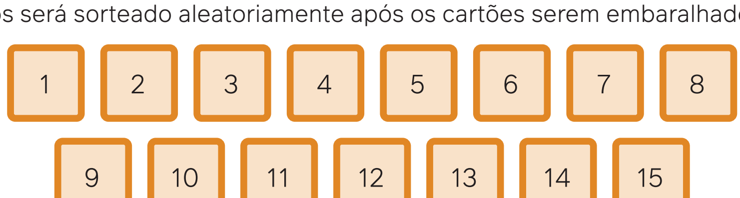
2. Se a probabilidade de Paula ou Eduardo participar da comissão é de aproximadamente 67%, qual é a probabilidade de nenhum deles participar? 2. Aproximadamente 33%.

3. Como você calcularia a probabilidade de nem Paula nem Eduardo participarem da comissão? 3. $P = \frac{C_{8,\,4}}{C_{10,\,4}}$

Atividades

33. Em um mesmo espaço amostral, a probabilidade de ocorrer um evento A ou um evento B pode ser calculada pela relação $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, isto é, a probabilidade é a soma das probabilidades de ocorrer o evento A com o evento B. Em que situações isso é verdadeiro? 33. Quando os eventos A e B forem mutuamente exclusivos.

34. Um destes números será sorteado aleatoriamente após os cartões serem embaralhados.



Acervo editora

Considere os eventos a seguir.

Evento *A*: o número sorteado é um quadrado perfeito {1, 4, 9}.

Evento *B*: o número sorteado é um número ímpar {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}.

a) Calcule a probabilidade de ocorrer *A* ou *B*. 34.a) $\frac{9}{15}$

b) Os eventos *A* e *B* são mutuamente exclusivos? Justifique. 34. b) Não; resposta pessoal.

35. Utilizando o mesmo espaço amostral do experimento da atividade anterior, elabore dois eventos *A* e *B* que sejam mutuamente exclusivos e calcule a probabilidade de ocorrência de *A* ou de *B*. 35. Resposta pessoal.

36. Retirando-se aleatoriamente uma carta de um baralho de 52 cartas, calcule a probabilidade de ocorrer um rei ou uma dama. Depois, responda: Os eventos "ocorrer um rei" e "ocorrer uma dama" são mutuamente exclusivos? Justifique. 36. Sim; resposta pessoal.

37. Junte-se a um colega para esta atividade. Façam o que se pede a seguir.

a) Elaborem dois eventos *A* e *B*, que não sejam mutuamente exclusivos, usando o sorteio de uma carta de um baralho com 52 cartas. 37. a) Resposta pessoal.

b) Com base nos eventos que elaboraram, formulem uma situação de probabilidade correspondente a $P(A \cup B)$. 37. b) Resposta pessoal.

c) Calculem a probabilidade $P(A \cup B)$. 37. c) Resposta pessoal.

d) Apresentem a situação elaborada a outra dupla para que a resolvam e comparem com sua resposta no final. 37. d) Resposta pessoal.

38. (UFPE) Escolhendo aleatoriamente um número natural no conjunto {1, 2, ..., 100} de naturais sucessivos, seja *P* a probabilidade de esse número natural ser divisível por 2 ou 3. Indique 100*P*. 38. 67

39. (Insper-SP) Um grupo de pesquisadores estudou a relação entre a presença de um gene A em um indivíduo e a chance de esse indivíduo desenvolver uma doença *X*, que tem tratamento, mas não apresenta cura. Os dados do estudo mostraram que 8% da população é portadora do gene A e 10% da população sofre da doença *X*. Além disso, 88% da população não é portadora do gene A nem sofre da doença *X*. De acordo com esses dados, se uma pessoa sofre da doença *X*, então a probabilidade de que seja portadora do gene A é igual a: 39. Alternativa **e**.

a) 90%.

b) 80%.

c) 75%.

d) 66%.

e) 60%.

40. (Uerj) Um menino vai retirar ao acaso um único cartão de um conjunto de sete cartões. Em cada um deles está escrito apenas um dia da semana, sem repetições: segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado, domingo. O menino gostaria de retirar sábado ou domingo.

A probabilidade de ocorrência de uma das preferências do menino é: 40. Alternativa **d**.

a) $\frac{1}{49}$.

b) $\frac{2}{49}$.

c) $\frac{1}{7}$.

d) $\frac{2}{7}$.

41. Um número é escolhido ao acaso entre os 20 números naturais de 1 a 20. Calcule a probabilidade de o número escolhido ser número primo ou número quadrado perfeito. 41. $\frac{3}{5}$

42. (UEA-AM) Uma urna continha 20 bolas numeradas de 1 a 20. Em determinado momento, foram retiras dessa urna 4 bolas, sem reposição, todas numeradas com múltiplos de 5. Em seguida, foi retirada outra bola da urna e verificou-se que ela estava numerada com um número maior do que 5. A probabilidade de essa última bola retirada estar numerada com múltiplo de 6 é 42. Alternativa **e**.

a) 75%

b) 60%

c) 50%

d) 45%

e) 25%

Probabilidade condicional

O que chamamos de probabilidade condicional está relacionado ao cálculo da probabilidade que envolve dois eventos, mas de modo diferente do que você estudou a respeito da probabilidade da união de eventos. No caso de dois eventos A e B, podemos calcular a probabilidade de ocorrer o evento A, sabendo que o evento B já ocorreu. Vamos investigar uma situação.

Situação:

Um grande grupo de amigos organizou uma viagem à Amazônia. Saindo de Belo Horizonte, o avião rumou a Manaus, capital do estado do Amazonas. A ideia era conhecer de perto a beleza natural da região e observar como as pessoas vivem, conhecer seus costumes.

Matej Kastelic/Shutterstock.com

Passageiros acomodados em um avião.

O quadro a seguir contém algumas informações sobre os tripulantes dessa curiosa viagem.

	Pessoas que nunca tinham viajado de avião antes	Pessoas que já tinham viajado de avião
Pessoas com 50 anos ou mais	95	35
Pessoas com menos de 50 anos	30	20

Depois de iniciar a viagem, os organizadores fizeram um sorteio entre todos os presentes. O prêmio foi uma diária totalmente grátis no hotel em que se hospedariam, em Manaus.

Para pensar e discutir

1. Ao anunciar o vencedor do sorteio, o responsável disse que era uma pessoa que jamais tinha viajado de avião. Qual é a probabilidade de ter sido sorteada uma pessoa com menos de 50 anos? Explique como calculou. 1. $\frac{30}{125}$; resposta pessoal

2. E qual seria a probabilidade de ter sido sorteada uma pessoa com 50 anos ou mais, mantendo o fato de que a pessoa sorteada jamais tinha viajado de avião? Explique como calculou. 2. $\frac{95}{125}$; resposta pessoal

Quando foi anunciado que o vencedor do sorteio era uma pessoa que jamais tinha viajado de avião, o espaço amostral foi alterado. Assim, calculamos a probabilidade de ter sido sorteada uma pessoa com menos de 50 anos dado que jamais tinha viajado de avião. Isso é o que denominamos **probabilidade condicional**.

Sejam A e B eventos não vazios de um mesmo espaço amostral Ω finito. A probabilidade condicional do evento A, sabendo que ocorreu o evento B, indicada por $P(A|B)$, é dada por:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Se você resolveu a situação sobre o sorteio entre os passageiros do avião, provavelmente não precisou utilizar a relação acima para o cálculo da probabilidade. É esperado que tenha reduzido o espaço amostral e calculado a probabilidade solicitada.

Há outra maneira de calcular a probabilidade condicional: usar a relação apresentada e, com base nela, dividir pelo número de elementos do espaço amostral. Como A e B são eventos não vazios do espaço amostral Ω, temos que $n(\Omega) \neq 0$. Logo:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Atividades resolvidas

17. Utilizando a relação acima, retome o sorteio da diária do hotel em Manaus e calcule a probabilidade de ser sorteada uma pessoa com menos de 50 anos, dado que ela jamais viajou de avião.

	Pessoas que nunca tinham viajado de avião antes	**Pessoas que já tinham viajado de avião**
Pessoas com 50 anos ou mais	95	35
Pessoas com menos de 50 anos	30	20

- Vamos considerar os eventos a seguir.

Evento A: sortear uma pessoa que tenha menos de 50 anos.

$$n(A) = 50$$

Evento B: sortear uma pessoa que nunca tinha viajado de avião antes.

$$n(B) = 125$$

Evento $A \cap B$: sortear uma pessoa que tenha menos de 50 anos e nunca tinha viajado de avião.

$$n(A \cap B) = 30$$

- Cálculo da probabilidade de acontecer A dado que aconteceu B sendo $n(\Omega) = 180$:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{30}{180}}{\frac{125}{180}}$$

$$P(A|B) = \frac{30}{125} = 0{,}24 = 24\%$$

Portanto, a probabilidade é de 24%.

18. Em uma escola de idiomas há dois cursos: Inglês, com 50 estudantes, e Espanhol, com 40 estudantes. Houve um levantamento de que 10% dos estudantes que estudam Inglês estão com a mensalidade atrasada, e 20% dos que estudam Espanhol estão também com a mensalidade atrasada. O coordenador resolveu fazer um sorteio, entre todos os estudantes da escola, de uma viagem de aperfeiçoamento do idioma para um local ainda a ser escolhido. Qual é a probabilidade de o estudante sorteado cursar Inglês e estar com a mensalidade atrasada?

- Vamos analisar os eventos relacionados a seguir.

Evento A: ser sorteado um estudante de Inglês.

$n(A) = 50$

Evento B: ser sorteado um estudante que está com a mensalidade atrasada.

$$n(B) = \frac{10}{100} \cdot 50 + \frac{20}{100} \cdot 40$$

$$n(B) = 5 + 8 \Rightarrow n(B) = 13$$

Evento $A \cap B$: ser sorteado um estudante que estude Inglês e esteja com a mensalidade atrasada.

$$n(A \cap B) = 5$$

- Cálculo da probabilidade solicitada:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{5}{13} = 0{,}38 = 38\%$$

Portanto, a probabilidade será de aproximadamente 38%.

Para pensar e discutir

1. Você resolveria essa situação de outra maneira? Explique. 1. Resposta pessoal.

Para explorar

Junte-se a um colega para elaborarem e calcularem situações com o cálculo de probabilidade condicional.

	 gomolach/ Shutterstock.com	 gomolach/ Shutterstock.com	 gomolach/ Shutterstock.com	 gomolach/ Shutterstock.com	 gomolach/ Shutterstock.com	 gomolach/ Shutterstock.com
 gomolach/ Shutterstock.com	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
 gomolach/ Shutterstock.com	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
 gomolach/ Shutterstock.com	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
 gomolach/ Shutterstock.com	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
 gomolach/ Shutterstock.com	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
 gomolach/ Shutterstock.com	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Observem o quadro de resultados do lançamento de dois dados, um azul e um vermelho. Cada par ordenado representa, nessa ordem, o resultado do azul e depois o resultado do vermelho.

1. Os dois dados são lançados. Sabendo-se que a soma dos dois é menor que 7, qual é a probabilidade de que, em ao menos um dos dados, ocorra a face 2? $\frac{7}{15}$

2. Elaborem uma situação condicionada ao fato de que nos dois dados o resultado seja de faces pares. Em seguida, calculem a probabilidade. 2. Resposta pessoal.

3. Elaborem uma situação condicionada ao fato de que a soma dos resultados obtidos no lançamento dos dois dados seja igual 10. Depois, calculem a probabilidade. 3. Resposta pessoal.

4. Elaborem uma situação estabelecendo uma condição inicial e que se deseja, com base nela, calcular a probabilidade de que a soma dos valores obtidos seja 10. Em seguida, calculem a probabilidade. 4. Resposta pessoal.

Atividades

43. Um dos estudantes de sua turma foi sorteado aleatoriamente e não foi você. Logo em seguida, haverá um segundo sorteio, que escolherá outro nome. Qual é a probabilidade de você ter o nome sorteado no segundo sorteio? 43. $\frac{1}{(n-1)}$

44. Um almoço de confraternização reuniu pessoas da mesma família. Havia crianças, adolescentes e adultos. Veja o quadro.

	Crianças	Adolescentes	Adultos
Mulheres	12	18	8
Homens	16	14	10

Uma das pessoas foi sorteada, ao acaso, para receber uma lembrança do encontro. Constatou-se que era mulher. Qual é a probabilidade de não ser uma adulta? 44. $\frac{30}{38}$

45. Considere que Raul tirou uma carta de um baralho com 52 cartas. Sabendo que a carta é de paus, qual é a probabilidade de ser um número de 2 a 10? 45. $\frac{9}{13}$

46. Em uma caixa foram colocadas 3 bolas pretas e 5 bolas vermelhas; a não ser pela cor, todas são idênticas. Retira-se, sem ver a cor, consecutivamente e com reposição, 2 bolas dessa caixa. Calcule:

a) a probabilidade de ambas serem pretas; 46. a) $\frac{9}{64}$

b) a probabilidade de ambas serem vermelhas;

c) a probabilidade de a primeira ser preta e a segunda ser vermelha; 46. c) $\frac{15}{64}$ 46. b) $\frac{25}{64}$

d) a probabilidade de a primeira ser vermelha e a segunda ser preta. 46. d) $\frac{15}{64}$

47. Agora, considere a mesma situação, porém sem reposição.
Calcule:

a) a probabilidade de ambas serem pretas; 47. a) $\frac{6}{56}$

b) a probabilidade de ambas serem vermelhas;

c) a probabilidade de a primeira ser preta e a segunda ser vermelha; 47. c) $\frac{15}{56}$ 47. b) $\frac{20}{56}$

d) a probabilidade de a primeira ser vermelha e a segunda ser preta. 47. d) $\frac{15}{56}$

48. O quadro a seguir apresenta o resultado de uma pesquisa entre 200 funcionários de uma grande indústria em uma campanha contra o fumo.

	Mulheres	Homens
Fumantes	15	35
Não fumantes	85	65

Um dos funcionários é sorteado ao acaso para uma entrevista inicial cujo objetivo é verificar seus hábitos diários.

a) Qual é a probabilidade de que seja sorteado um homem, sabendo que foi sorteado um fumante? 48. a) $\frac{35}{50}$

b) Qual é a probabilidade de que seja sorteada uma mulher, dado que foi sorteado um não fumante? 48. b) $\frac{85}{150}$

49. (IFSP) Uma escola de Ensino Médio fez uma pesquisa para conhecer as carreiras que os alunos escolheram para prestar o vestibular. A tabela a seguir apresenta as carreiras escolhidas pelos 160 estudantes universitários.

Carreira	Masculino	Feminino
Medicina	12	20
Direito	10	16
Publicidade	12	24
Letras	6	16
Outras	20	24

Um desses estudantes é escolhido ao acaso e sabe-se que ele é do sexo masculino. A probabilidade de este estudante ter escolhido Medicina é de:

a) 6%. 49. Alternativa **e**.

b) 7,5%.

c) 12%.

d) 18,5%.

e) 20%.

50. A questão anterior envolve o cálculo de probabilidade condicional. Utilizando os mesmos dados apresentados, elabore outra situação que exija o cálculo de probabilidade condicional. Em seguida, resolva a situação elaborada e apresente-a a um colega para que também resolva. Assim, as respostas podem ser confrontadas. Em caso de divergência, troque ideias com ele e, se necessário, com toda a turma.
50. Resposta pessoal.

51. (IFPE) Numa pesquisa realizada com 300 alunos dos cursos subsequentes do campus Recife, observou-se que $\frac{1}{5}$ dos alunos atuam no mercado de trabalho em área diferente do curso escolhido, $\frac{3}{8}$ do restante não estão trabalhando e os demais trabalham na mesma área do curso escolhido. Sorteando um destes alunos ao acaso, qual a probabilidade de ele estar trabalhando na mesma área do curso que escolheu? 51. Alternativa **a**.

a) 0,5

b) 0,4

c) 0,2

d) 0,3

e) 0,8

3

Multiplicação de probabilidades

Neste capítulo, apresentamos um trecho do livro *A fascinante história da Matemática,* que aborda o contexto histórico do surgimento do estudo de probabilidades. Dois personagens com muitas contribuições em diversos ramos da Matemática se envolveram em uma discussão: Fermat e Pascal.

The History Collection/Alamy/Fotoarena

Pierre de Fermat (1601-1665).

Christophel Fine Art/Universal Images Group/Getty Images – Castelos de Versalhes e Trianon, França

Blaise Pascal (1623-1662).

Vamos retomar uma parte do texto que relaciona uma situação que iremos discutir.

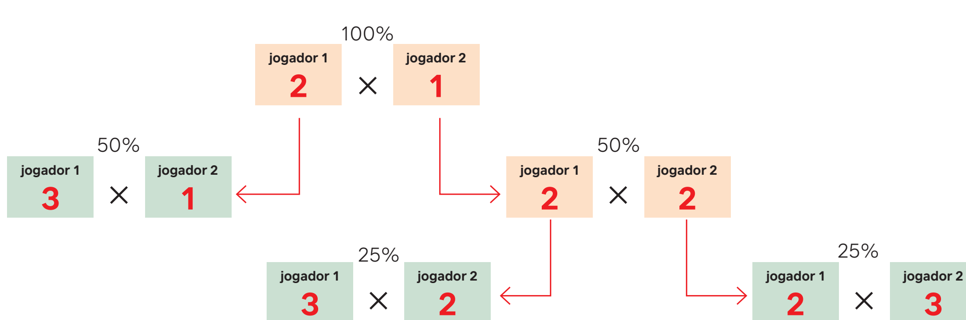
Tudo tem início em meados do século XVII, durante uma reunião da Academia Parisiense, ancestral da Academia de Ciências, fundada em 1635 pelo matemático e filósofo Marin Mersenne. Durante um debate entre cientistas de diversos horizontes, o escritor Antoine Gombaud, amante da matemática nas horas vagas, apresenta à assembleia um problema que havia encontrado. Suponham, diz ele, que dois jogadores tenham apostado uma soma em dinheiro num jogo de azar a ser dado por encerrado quando um dos jogadores vencer três vezes, mas que a partida seja interrompida quando o primeiro jogador estiver vencendo por duas rodadas a uma. Como os dois jogadores terão de dividir a aposta?

Entre os cientistas presentes nesse dia, o problema atrai particularmente a atenção de dois franceses: Pierre de Fermat e Blaise Pascal. Depois de algumas trocas epistolares, os dois acabam concluindo que três quartos da aposta devem ser atribuídos ao primeiro jogador, e o quarto restante, ao segundo.

LAUNAY, M. *A fascinante história da Matemática*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019. p. 203-204.

Como esses dois personagens chegaram a essa conclusão? Considerando o momento em que a partida é interrompida, o esquema a seguir ilustra o modo como eles podem ter encontrado esse valor.

Acervo editora



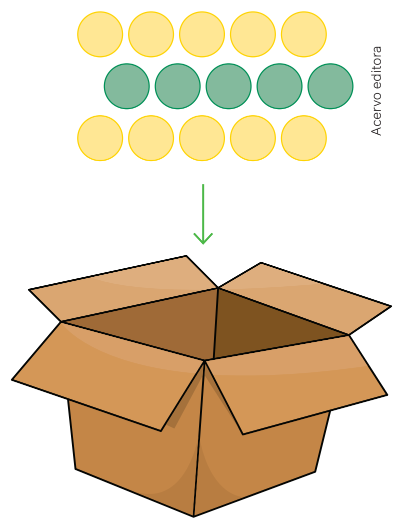
2. A probabilidade de o jogador 2 vencer é de 25% e a do jogador 1 é de 75%.

Para pensar e discutir

1. Quantas são as possibilidades, conforme o esquema, do jogador 1 ser vencedor? Quantas possibilidades há no total? 1. 2 de 3 possibilidades
2. Pensando em probabilidade, por que se distribuiu três quartos para o jogador 1 e um quarto para o jogador 2?

Existem situações envolvendo o cálculo de probabilidades em que precisamos analisar a probabilidade de ocorrer eventos sucessivos. Nessas situações, é necessário tomar cuidado se entre os eventos há ou não alguma **dependência**, isto é, se os possíveis resultados de um deles têm influência sobre os possíveis resultados dos demais.

É interessante observarmos uma situação. Na ilustração, temos 5 fichas verdes e 10 fichas amarelas diferentes apenas na cor. Imagine que você irá colocar essas fichas dentro de uma caixa sem que seja possível distinguir a cor.



Acervo editora

Blue Fish Learn/ Shutterstock.com

Vamos analisar duas situações.

Situação 1	**Situação 2**
Qual é a probabilidade de retirarmos, sucessivamente, uma ficha verde e outra amarela, considerando que **há reposição** de fichas (a ficha retirada volta para a caixa)?	Qual é a probabilidade de retirarmos, sucessivamente, uma ficha verde e outra amarela, considerando que **não há reposição** de fichas (a ficha retirada não volta para a caixa)?

Antes de você pensar em calcular a probabilidade de cada situação apresentada, é importante compreender que "**com reposição**" significa que retiramos a 1ª ficha, observamos, anotamos a cor e, a seguir, repomos a ficha dentro da caixa. Já na situação "**sem reposição**", retiramos a 1ª ficha, observamos e anotamos a cor, mas não repomos a ficha dentro da caixa.

Para pensar e discutir

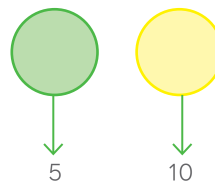
1. Em qual das duas situações a probabilidade resultante será maior? Justifique. 1. Situação 2; resposta pessoal.
2. Na **situação 1**, a probabilidade de extrair inicialmente uma ficha verde altera a probabilidade de extrair a ficha amarela depois? Justifique. 2. Não; resposta pessoal.
3. Na **situação 2**, a probabilidade de extrair inicialmente uma ficha verde altera a probabilidade de extrair a ficha amarela depois? Justifique. 3. Sim; resposta pessoal.

Utilizando o princípio multiplicativo que estudamos em análise combinatória, temos de calcular o número de possibilidades de extrairmos uma ficha verde na primeira retirada e uma ficha amarela na segunda retirada. Vamos separar essas duas situações e mostrar como calcular a probabilidade resultante em cada caso.

Atividades resolvidas

19. Resolvendo a **situação 1 – com reposição**.

- Cálculo do total de possibilidades de retirar 1 ficha verde primeiro e 1 ficha amarela depois:



Acervo editora

$$5 \cdot 10 = 50$$

- Cálculo do total de possibilidades para a retirada da primeira e da segunda fichas:

$$15 \cdot 15 = 225$$

- Probabilidade P de retirada de uma ficha verde e uma amarela sucessivamente, com a reposição da primeira ficha:

$$P = \frac{50}{225} \cong 0{,}22 = 22\%$$
$$P \cong 22\%$$

- Observe que poderíamos chegar a esse resultado considerando que a probabilidade de obter a ficha verde na primeira retirada é $\frac{5}{15}$ e a probabilidade de sair amarela na segunda retirada é de $\frac{10}{15}$. Assim, podemos calcular a probabilidade solicitada da seguinte maneira:

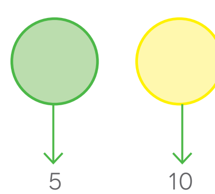
$$P = \frac{50}{225} = \left(\frac{5}{15}\right) \cdot \left(\frac{10}{15}\right)$$
$$P \cong 0{,}22 = 22\% \Rightarrow P \cong 22\%$$

Nesse procedimento, a probabilidade de sair ficha verde na primeira retirada e amarela na segunda é igual ao **produto das probabilidades** de cada um dos eventos.

Nessa situação, as exigências feitas para as retiradas são **independentes**, pois a segunda retirada só é feita após a reposição da ficha extraída na primeira retirada.

20. Resolvendo a **situação 2 – sem reposição**.

- Cálculo do total de possibilidades de retirar 1 ficha verde primeiro e 1 ficha amarela depois:



Acervo editora

$$5 \cdot 10 = 50$$

- Cálculo do total de possibilidades para a retirada da primeira e da segunda fichas:

$$15 \cdot 14 = 210$$

- Probabilidade P de retirada de uma ficha verde e uma amarela sucessivamente, sem a reposição da primeira ficha:

$$P = \frac{50}{210} \cong 0{,}24 = 24\%$$
$$P \cong 24\%$$

- Observe que poderíamos chegar a esse resultado considerando que a probabilidade de obter a ficha verde na primeira retirada é $\frac{5}{15}$ e a probabilidade de sair amarela na segunda retirada é de $\frac{10}{14}$ (foi diminuída 1 ficha, pois não houve reposição da primeira que foi retirada). Assim, podemos calcular a probabilidade da seguinte maneira:

$$P = \frac{50}{210} = \left(\frac{5}{15}\right) \cdot \left(\frac{10}{14}\right)$$
$$P \cong 0{,}24 = 24\% \Rightarrow P \cong 24\%$$

Nesse procedimento, a probabilidade de sair ficha verde na primeira retirada e amarela na segunda é igual ao **produto das probabilidades** de cada um dos eventos.

Nessa situação, a probabilidade de retirada da segunda ficha foi alterada pela retirada da primeira ficha. Assim, dizemos que os eventos são **dependentes**.

É necessário que você observe e compreenda uma explicação para a multiplicação de probabilidades. Para isso, vamos analisar a situação a seguir com base na probabilidade condicional vista anteriormente.

Quando A e B são eventos não vazios de um mesmo espaço amostral Ω finito, a probabilidade **condicional** do evento A, sabendo que ocorreu o evento B, indicada por $P(A|B)$, é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Vídeo
Os perigos das apostas *on-line*

Nessa relação de probabilidades, temos:

- $P(A|B) \rightarrow$ probabilidade de ocorrer A dado que ocorreu B;
- $P(A \cap B) \rightarrow$ probabilidade de ocorrer simultaneamente os eventos A e B;
- $P(B) \rightarrow$ probabilidade de ocorrer B.

Observe o que acontece quando, na igualdade anterior, isolamos $P(A \cap B)$:

$$\underbrace{P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)}$$

A probabilidade da ocorrência simultânea dos eventos A e B (intersecção) é o produto da probabilidade de ocorrer o evento A sabendo que já ocorreu o evento B, pela probabilidade de ocorrer o evento B.

Isso é o que ocorreu na 2ª situação quando a probabilidade da segunda ficha foi alterada pela retirada da primeira. Já na 1ª situação (com reposição) podemos escrever:

$$\underbrace{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

A probabilidade da ocorrência simultânea dos eventos A e B (intersecção) é o produto das probabilidades de ocorrência de cada evento.

Quando os eventos A e B, não vazios, de um mesmo espaço amostral são **dependentes**, a ocorrência simultânea deles é dada por:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Quando os eventos A e B, não vazios, de um mesmo espaço amostral são **independentes**, a ocorrência simultânea deles é dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Cuidado!

Esta última relação só é verdadeira quando os eventos A e B são independentes. Assim, ao calcular a probabilidade de eventos simultâneos, verifique se a ocorrência de um deles não interfere na ocorrência de outro.

21. Encontrando a chave certa somente na última tentativa.

Considere, como na ilustração, que as três chaves são idênticas, porém somente uma delas abre a porta da casa e você não sabe qual é. Qual é a probabilidade de você abrir a porta somente na 3ª tentativa?


Mauro Salgado

- Para que você acerte somente na 3ª tentativa, deve ocorrer o seguinte:

  1ª tentativa (deve errar);
  2ª tentativa (deve errar);
  3ª tentativa (deve acertar).

- O cálculo da probabilidade leva em conta que, ao tentar abrir a porta pela 1ª vez e não conseguir, a chave utilizada é separada das outras. Da mesma forma, quando tentar pela 2ª vez e não conseguir, essa chave também será separada, sobrando apenas uma chave que abrirá a porta. Assim, temos:
  - $P = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1}$
  - $P = \frac{1}{3}$

Para pensar e discutir

1. Considere que você tem 5 chaves e somente uma delas abre a porta de sua casa. Qual é a probabilidade de você, aleatoriamente, escolher a chave correta na 1ª tentativa? 1. $\frac{1}{5}$
2. Separando as chaves que não abrem a porta, qual é a probabilidade de você abrir a porta somente na 4ª tentativa? 2. $\frac{1}{5}$
3. Uma mesma moeda é lançada três vezes consecutivamente para se observar o resultado da face voltada para cima. Qual é a probabilidade de resultar 3 coroas consecutivamente? Explique como você calculou.

3. $\frac{1}{8}$; resposta pessoal

22. A cor dos olhos!

Vamos considerar que a cor dos olhos seja estabelecida por pares de genes, em que C seja dominante para o olho escuro e c recessivo para olho claro. Um homem que tem olhos escuros e mãe de olhos claros, casou-se com uma mulher de olhos claros cujo pai tem olhos escuros. Qual é a probabilidade de nascer uma menina de olhos claros?

- Inicialmente, observe que os pares de genes do homem são C (dominante) e c (recessivo), pois ele tem olhos escuros, mas sua mãe tem olhos claros. A mulher é cc, pois tem olhos claros. Nessas situações, é interessante organizar as informações em um quadro. Veja a seguir.

H / M	C	c
c	Cc	cc
c	Cc	cc

- Interpretando esse quadro, temos:

probabilidade de nascer com olhos claros: $\frac{2}{4} = 50\%$;

probabilidade de nascer menina: $\frac{1}{2} = 50\%$.

- Cálculo da probabilidade de nascer menina e de olhos claros:

$$P = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$$
$$P = 25\%$$

Portanto, a probabilidade é de 25%.

Esse exemplo relacionou genética com probabilidade. E pensar que o estudo da probabilidade teve início nas pesquisas com ervilhas! Logo após as atividades propostas encaminhamos um texto que apresenta essa história.

Atividades

52. Uma prova tem 5 questões de múltipla escolha, cada questão tem 4 alternativas com apenas uma correta. Um estudante "chutou" todas as respostas. Calcule:

a) a probabilidade de ele acertar apenas uma questão; 52. a) $\frac{1}{4}$

b) a probabilidade de ele acertar todas as questões; 52. b) $\frac{1}{1\,024}$

c) a probabilidade de ele errar todas as questões; 52. c) $\frac{1\,023}{1\,024}$

d) a probabilidade de ele acertar as 3 primeiras e errar as 2 últimas. 52. d) $\frac{9}{1\,024}$

53. $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{3}{10}$ e $P(C) = \frac{1}{10}$

53. Junte-se a um colega para resolver a situação a seguir. Três corredores *A*, *B* e *C* participam de uma maratona somente entre eles. Estima-se que a probabilidade de *A* vencer é o dobro da probabilidade de *B* vencer; e que a probabilidade de *B* vencer é o triplo da probabilidade de *C* vencer. Qual é a probabilidade de cada um deles vencer?

54. Na situação anterior, os experimentos "*A* vencer", "*B* vencer" e "*C* vencer" não são equiprováveis. Ainda considerando a situação apresentada, elabore outra situação alterando as estimativas de cada um deles vencer. Depois, resolva a situação e apresente-a a um colega para que ele também a resolva. Assim, pode-se confrontar as respostas obtidas e, se necessário, discutir possíveis discrepâncias. 54. Resposta pessoal.

55. (Unesp) Um piloto de Fórmula 1 estima que suas “chances” de subir ao pódio numa dada prova são de 60% se chover no dia da prova e de 20% se não chover. O serviço de meteorologia prevê que a probabilidade de chover durante a prova é de 75%. Nessas condições, calcule a probabilidade de que o piloto venha a subir no pódio. 55. 50%

56. (Enem) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região. Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva? 56. Alternativa **c**.

a) 0,075
b) 0,150
c) 0,325
d) 0,600
e) 0,800

57. A herança de determinado tipo de miopia é autossômica (não relacionada aos cromossomos sexuais *X* e *Y*) e recessiva. O quadro representa o cruzamento entre dois indivíduos de visão normal, heterozigotos para esse tipo de miopia. Lembre-se de que, em relação ao sexo biológico, em todo cruzamento humano há 50% de chance de nascer uma criança do sexo feminino e 50%, do sexo masculino.

Acervo editora

	M	**m**
M	MM	Mm
m	Mm	mm

a) Qual é a probabilidade de nascer uma criança com esse tipo de miopia? 57. a) 25%

b) Qual é a probabilidade de nascer uma criança do sexo masculino com esse tipo de miopia? 57. b) 12,5%

58. (UPE) Dois atiradores, André e Bruno, disparam simultaneamente sobre um alvo.

- A probabilidade de André acertar no alvo é de 80%.
- A probabilidade de Bruno acertar no alvo é de 60%.

Se os eventos “André acerta no alvo” e “Bruno acerta no alvo” são independentes, qual é a probabilidade de o alvo não ser atingido? 58. Alternativa **a**.

a) 8%
b) 16%
c) 18%
d) 30%
e) 92%

59. (FGV-SP) Num certo país, 10% das declarações de Imposto de Renda são suspeitas e submetidas a uma análise detalhada; entre estas verificou-se que 20% são fraudulentas. Entre as não suspeitas, 2% são fraudulentas.

a) Se uma declaração é escolhida ao acaso, qual é a probabilidade de ela ser suspeita e fraudulenta? 59. a) 2%

b) Se uma declaração é fraudulenta, qual é a probabilidade de ela ter sido suspeita? 59. b) Aproximadamente 52,6%.

60. (UEG-GO) Em uma caixa mágica temos 3 lenços azuis e 4 lenços brancos. O mágico, ao realizar o seu número, deseja retirar aleatoriamente e sem reposição 2 lenços da mesma cor. A probabilidade de que ele tenha sucesso nesse número é de 60. Alternativa **c.**

a) $\frac{1}{7}$
b) $\frac{5}{7}$
c) $\frac{3}{7}$
d) $\frac{1}{6}$
e) $\frac{1}{147}$

61. (FMC-SP) Em certo hospital, existem 60 pessoas adultas internadas. Sabe-se que $\frac{1}{5}$ dos enfermos do sexo masculino tem a doença *X* e que, escolhido ao acaso um paciente dessa unidade de saúde, a probabilidade de ele ser do sexo masculino e ter a doença *X* é de $\frac{1}{12}$.

Nessas condições, o número de mulheres internadas é: 61. Alternativa **d**.

a) 55
b) 48
c) 38
d) 35
e) 25

62. (Faema-SP) Uma confecção de roupas produziu um lote com um total de 150 camisetas, distribuídas entre os tamanhos P e M, sendo 59 lisas e as demais estampadas. Nesse lote, havia 100 camisetas tamanho P, das quais 67 eram estampadas. Retirando-se, ao acaso, uma camiseta desse lote e sabendo que seu tamanho é M, a probabilidade de que seja uma peça estampada é igual a 62. Alternativa **c**.

a) 36%
b) 24%
c) 48%
d) 60%
e) 72%

Análise e contexto

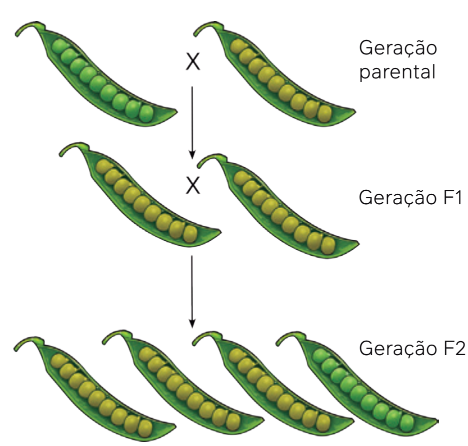
Probabilidade e ciência natural

O texto a seguir aborda uma história que relaciona probabilidade e ciência natural. A leitura permitirá a você conhecer um pouco mais não apenas sobre o cálculo de probabilidades mas também sobre um experimento extremamente importante no desenvolvimento das Ciências.

A hipótese estatística na ciência natural

De três maneiras distintas se emprega a teoria matemática da probabilidade. A primeira e, indubitavelmente, a mais fecunda de todas, é a construção da hipótese estatística na ciência natural. Como podemos usar a teoria matemática como um modelo do que acontece nos jogos de azar, podemos usar o que acontece nos jogos de azar como modelo físico dos fenômenos naturais. Se a experiência corrobora as conclusões extraídas destas premissas, podemos usar a hipótese como guia de conduta. Eis o princípio subjacente a duas das mais férteis hipóteses científicas concretizadas em meados do século XIX. Uma, a teoria cinética dos gases. A outra, a moderna teoria dos genes. Aquela repousa, em sua essência, o fato experimental de os gases se combinarem para formar novas entidades químicas, em proporções numéricas constantes. Isso levou à conclusão de que os gases são constituídos de pequeninas unidades (moléculas), que em número aproximadamente igual se apresentam em iguais volumes de qualquer gás, sujeitos à igual pressão e à mesma temperatura. A origem da teoria do gene foi a descoberta de Mendel que híbridos de pais puro-sangue, pertencentes a diferentes variedades ou tipos, produzem diferentes tipos de filhos, em proporção numérica definida. Isto levou à conclusão de que a constituição hereditária de um indivíduo depende de pequeninas partículas (genes) análogas à molécula dos gases. Na teoria cinética supomos que a velocidade das diferentes moléculas varie da mesma maneira, isto é, como uma distribuição binômia. Na teoria dos genes supomos que a fecundação de uma certa célula-ovo feminina, por uma certa célula-esperma masculina, aconteça com a mesma frequência que, como se mais não fora, a retirada de bolas coloridas de uma sacola.

O emprego da probabilidade matemática na teoria dos genes, ilustrá-lo-emos por uma das experiências originais de Mendel. Mendel fez o cruzamento de variedades puras de ervilhas, uma de sementes amarelas, a outra de sementes verdes. Os híbridos tiveram sementes amarelas e foram fecundadas com o próprio pólen: um quarto dos descendentes saíram de sementes verdes, e também os descendentes. O restante saiu de sementes amarelas. Um terço deste restante, isto é, um quarto de toda a descendência, procriaram exatamente como seus pais de semente amarela. Os outros, fecundados, produziram descendentes de sementes amarelas e verdes, na mesma proporção que seus pais (3 para 1). Vê-se, pois, que o cruzamento de raças puras se assemelha a uma reação química nas duas características essenciais que levaram a ciência a formular a teoria atômica da combinação química. A primeira, é que é possível tornar a obter, em sua pureza original, as características dos pais originais dos híbridos. A segunda é que as várias combinações de caracteres hereditários ocorrem em proporções numéricas constantes.



Mauro Salgado

HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática*: influência e função matemática nos conhecimentos humanos. Porto Alegre: Editora Globo, 1958. p. 674-675.

Agora que você leu o texto, use-o como motivador em uma atividade de investigação relacionando Biologia à Matemática. Junte-se a três colegas para fazer estas atividades.

1. Pesquisem detalhadamente o experimento das ervilhas de Mendel e produzam uma animação em vídeo descrevendo o experimento. Depois, façam uma apresentação para toda a turma. 1. Resposta pessoal.
2. Pesquisem três exemplos relacionando Biologia à probabilidade, como indicado a seguir. 2. Resposta pessoal.

   1º exemplo: cor dos olhos;
   2º exemplo: miopia;
   3º exemplo: doença hereditária.
3. Com base nos exemplos pesquisados, escrevam um texto sobre a relação observada entre cada exemplo e as probabilidades. 3. Resposta pessoal.

4 Probabilidade e estatística

Com base em dados estatísticos sobre fatos ocorridos ou fenômenos naturais, usa-se a probabilidade para fornecer informações a respeito de algo que pode acontecer pela análise dos dados. Uma questão comumente discutida, nesse sentido, é o que é mais provável: ir a óbito em um acidente de avião ou em um acidente de automóvel? Qual é, afinal, o meio de transporte mais seguro?

muratart/Shutterstock.com

Decolagem de avião em um aeroporto.

Estatisticamente o avião é considerando um meio de transporte muito seguro, pois a probabilidade de ir a óbito em um acidente aéreo é de apenas 1 em 8 milhões, aproximadamente. Essa é uma pesquisa feita há alguns anos pela Condé Nast, grande editora de revistas dos Estados Unidos. Para ilustrar essa probabilidade, a seguir estão relacionados, conforme essa fonte, alguns meios de transportes e as respectivas probabilidades de acidente que podem levar a óbito (o termo **chance** na imagem está sendo utilizado como sinônimo de probabilidade).

Reinaldo Vignati

Compare as chances de morrer

Saiba quais são os meios de transporte mais seguros em relação a outras formas mais comuns de morrer

ATAQUE CARDÍACO	1 chance em 300
CÂNCER	1 chance em 509
ACIDENTE DE CARRO	1 chance em 18.800
ACIDENTE DE MOTO	1 chance em 118.000
ACIDENTE DE BICICLETA	1 chance em 341.000
ACIDENTE DE BARCO	1 chance em 402.000
ACIDENTE DE ÔNIBUS	1 chance em 4.400.000
ACIDENTE DE TREM	1 chance em 5.050.000
TERREMOTO	1 chance em 5.930.000
ACIDENTE DE AVIÃO	1 chance em 8.450.000

Fonte: MARTINS, J. P. Qual o meio de transporte mais seguro? *Encontro*, Brasília, DF, 7 jan. 2015. Disponível em: http://sites.correioweb.com.br/app/noticia/encontro/atualidades/2015/01/07/interna_atualidades,1959/qual-o-meio-de-transporte-mais-seguro.shtml. Acesso em: 21 set. 2024.

Mesmo que esses dados não sejam atuais ou tenham sido produzidos com base em pesquisas durante certo período, eles permitem, sob certas circunstâncias, uma comparação.

Para pensar e discutir

1. Qual informação mais chama sua atenção dos dados acima? 1. Resposta pessoal.
2. Em sua opinião, a quem esses dados são importantes? 2. Resposta pessoal.

É claro que o levantamento sobre as "chances de morrer" evidencia dados de acidentes ou óbitos que já ocorreram, o que não significa que irão se repetir com o passar do tempo. Entretanto, com base nesse tipo de dado estatístico, uma seguradora, por exemplo, elabora seus custos de seguro.

Observe a seguir um exemplo (situação fictícia) do cálculo de probabilidades que pode ser feito utilizando dados estatísticos.

Atividades resolvidas

23. Considere que uma indústria farmacêutica fez uma estimativa da eficiência de um medicamento para tratamento de determinada doença, ministrando-o a um grande número de pessoas portadoras dessa doença. Os resultados obtidos, classificados em três categorias: cura, melhora (mas não cura total) e nenhuma alteração, são mostrados no quadro a seguir.


Danilio Souza

Resultado	%	Probabilidade
Cura	70	0,7
Melhora	20	0,2
Nenhuma alteração	10	0,1

Considere a experiência aleatória que consiste em selecionar 4 pessoas portadoras da doença, ministrar-lhes o medicamento e determinar em que categoria o resultado se enquadra. Calcule a probabilidade de a 1ª pessoa apresentar melhora, a 2ª e a 3ª não terem qualquer alteração e a 4ª ser curada.

- Conforme dados do quadro e considerando um grande número de pessoas no levantamento, temos as seguintes probabilidades:

1ª pessoa → apresentar melhora: 0,2
2ª pessoa → nenhuma alteração: 0,1
3ª pessoa → nenhuma alteração: 0,1
4ª pessoa → apresentar cura: 0,7

- Cálculo da probabilidade (produto das probabilidades):

$$P = 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}7$$
$$P = 0{,}0014$$
$$P = 0{,}14\%$$

Portanto, a probabilidade é de 0,14%.

Para pensar e discutir

1. Como são obtidas as informações a respeito da eficácia de um remédio ministrado para o tratamento de uma doença? 1. Pela utilização do remédio em muitas pessoas que são portadoras da doença.

2. Por que a escolha da 1ª pessoa não altera a probabilidade da escolha da 2ª pessoa na situação acima?
2. A escolha da 1ª pessoa não altera percentualmente a escolha da 2ª pessoa.

24. (Unesp) Analise a tabela, que indica os resultados de um estudo para avaliação entre o peso e a pressão arterial de um grupo de indivíduos.

Pressão arterial	Peso deficiente	Peso normal	Peso em excesso
Normal	20%	45%	15%
Elevada	1%	9%	10%

Renato fez parte desse estudo e sabe que está com excesso de peso. Ao ver a tabela com o resultado do estudo, calculou corretamente que a probabilidade da aferição da sua pressão arterial ter indicado valores elevados é de

a) 12% **b)** 4% **c)** 50% **d)** 40% **e)** 10%

- Conforme dados do levantamento e considerando que Renato está com excesso de peso, a probabilidade de sua pressão arterial ter indicado valores elevados é:

$$P = \frac{10\%}{10\% + 15\%}$$

$$P = \frac{10\%}{25\%}$$

$$P = \frac{10}{25} = 0{,}4 \Rightarrow P = 40\%$$

A probabilidade é 40%.

Atividades

63. Observou-se estatisticamente que uma doença congênita afeta 1 em cada 800 pessoas de determinado país. Nesse país, em uma população de 1 milhão de pessoas, escolhemos aleatoriamente uma pessoa. Analise cada afirmação a seguir indicando **V** se for verdadeira ou **F** se for falsa.

I. A probabilidade de que a pessoa escolhida seja afetada pela doença é de aproximadamente 99%. 63. I. F

II. A probabilidade de que a pessoa escolhida não seja afetada pela doença é de 99,875%. 63. II. V

III. É pouco provável que essa pessoa seja afetada pela doença. 63. III. V

64. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.

a) Pesquisem uma informação publicada em jornal ou revista que contenha dados em gráficos estatísticos. 64. a) Resposta pessoal.

b) Usando essas informações, elaborem uma situação relacionada ao cálculo de probabilidade. 64. b) Resposta pessoal.

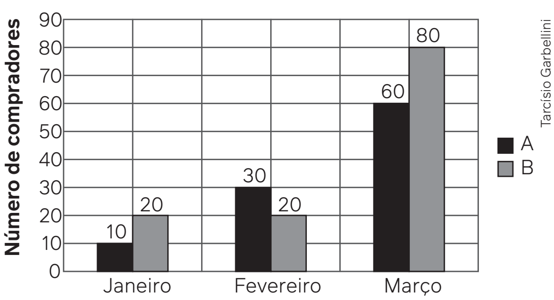
c) Resolvam a situação e apresentem-na a outra dupla de estudantes para que a resolvam. Depois, confrontem os resultados obtidos. 64. c) Resposta pessoal.

65. (Enem) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico.

A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012? 65. Alternativa **a**.

a) $\frac{1}{20}$ **c)** $\frac{5}{22}$ **e)** $\frac{7}{15}$

b) $\frac{3}{242}$ **d)** $\frac{6}{25}$



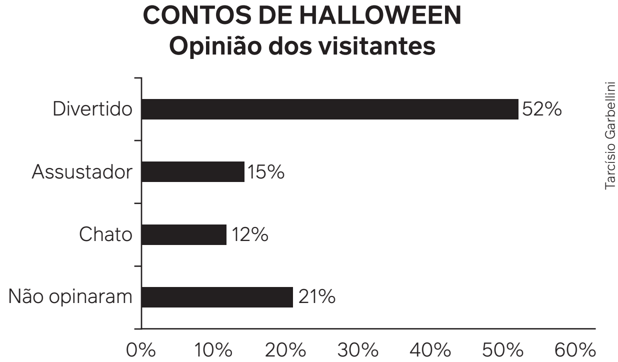
66. (IFSP) O sangue humano é classificado em quatro tipos: A, B, AB e O. Além disso, também pode ser classificado pelo fator Rh em: Rh^+ ou Rh^-. As pessoas do tipo O com Rh^- são consideradas doadoras universais, e as do tipo AB com Rh^+ são receptoras universais. Feita uma pesquisa sobre o tipo sanguíneo com 200 funcionários de uma clínica de estética, o resultado foi exposto na tabela a seguir.

	A	B	AB	O
Rh^+	27	24	23	55
Rh^-	15	13	13	30

Um desses 200 funcionários será sorteado para um tratamento de pele gratuito. A probabilidade de que o sorteado seja doador universal é: 66. Alternativa **c**.

a) 7,5%. **b)** 10%. **c)** 15%. **d)** 17,5%. **e)** 20%.

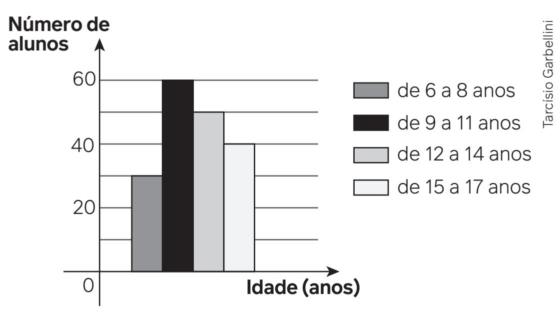
67. (Enem) Em um *blog* de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados "Contos de *Halloween*". Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em "divertido", "assustador" ou "chato". Ao final de uma semana, o *blog* registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem. O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do *blog* irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem "Contos de *Halloween*". Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que "Contos de *Halloween*" é "chato" é mais aproximada por: 67. Alternativa **d**.

a) 0,09. **b)** 0,12. **c)** 0,14. **d)** 0,15. **e)** 0,18.

68. (IFSP) O gráfico representa o número de alunos de uma escola distribuídos por idade. Sabe-se que os alunos com exatamente 15 anos correspondem à quinta parte do grupo de idade a que pertence. Se um aluno dessa escola é escolhido ao acaso, a probabilidade de esse aluno ter exatamente 15 anos é: 68. Alternativa **e**.



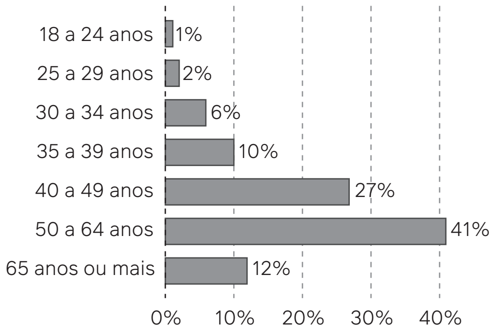
a) $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{4}{15}$ **c)** $\frac{2}{9}$ **d)** $\frac{9}{50}$ **e)** $\frac{2}{45}$

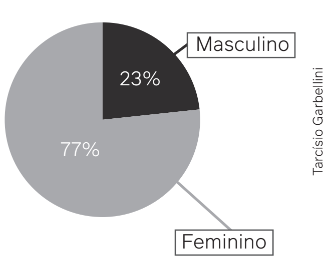
69. (UFRJ) Um novo exame para detectar certa doença foi testado em trezentas pessoas, sendo duzentas sadias e cem portadoras de tal doença. Após o teste verificou-se que, dos laudos referentes a pessoas sadias, cento e setenta resultaram negativos e, dos laudos referentes a pessoas portadoras da doença, noventa resultaram positivos.

a) Sorteando-se ao acaso um desses trezentos laudos, calcule a probabilidade de que ele seja positivo. 69. a) $\frac{2}{5}$

b) Sorteado um dos trezentos laudos, verificou-se que ele era positivo. Determine a probabilidade de que a pessoa correspondente ao laudo sorteado tenha realmente a doença. 69. b) $\frac{3}{4}$

70. (Fatec-SP) O artesão brasileiro é um agente de produção nas áreas cultural e econômica do país, gerando empregos e contribuindo para a identidade regional. Observe os gráficos e admita a distribuição homogênea de dados.





Suponha que uma viagem será sorteada entre todos os artesãos brasileiros, a probabilidade de que o ganhador da viagem seja uma mulher de 65 anos ou mais é de: 70. Alternativa **d**.

a) 31,57%. **b)** 20,79%. **c)** 12,43%. **d)** 9,24%. **e)** 4,85%.

71. (Faema-SP) Em um grupo de voluntários, sabe-se que 2% estão infectados com um determinado vírus. Em um experimento para avaliar a eficácia de um teste para detectar a presença do vírus nesse grupo de voluntários, verificou-se que dos que estavam infectados, 10% testaram negativo e dos não infectados, 3% testaram positivo.

Considerando-se os resultados desse experimento, quando uma pessoa testa positivo nesse teste, a probabilidade de ela estar realmente infectada é, aproximadamente, de 71. Alternativa **e**.

a) 98% **b)** 90% **c)** 65% **d)** 56% **e)** 38%

72. (Famerp-SP) Um grupo de 50 pessoas foi questionado sobre a prática regular de exercícios aeróbicos e anaeróbicos. Os resultados da pesquisa estão indicados na tabela.

Exercício praticado regularmente	Total de pessoas
Aeróbico	37
Anaeróbico	29
Nenhum	6

Sorteando-se ao acaso uma dessas pessoas, a probabilidade de que ela pratique regularmente ambas as formas de exercícios avaliadas no estudo é de 72. Alternativa **a**.

a) 44% **b)** 2% **c)** 60% **d)** 22% **e)** 10%

73. (FMC-SP) Em uma universidade, foi feito um teste com um grupo de 2 000 pessoas para detectar a presença de certa doença. É sabido que tal teste não é totalmente eficaz, visto que existem pessoas saudáveis com resultado do teste positivo e pessoas portadoras de tal doença com resultado do teste negativo. Com exames complementares, concluiu-se que apenas 400 pessoas são portadoras da tal doença. Esse resultado, e outros dados obtidos com o teste, estão registrados na tabela:

Situação da pessoa	Quantidade de pessoas com resultado do teste POSITIVO	Quantidade de pessoas com resultado do teste NEGATIVO	Quantidade TOTAL de pessoas
Doente	320	80	400
Saudável	160	1 440	1 600

O resultado do teste de certa pessoa do grupo, escolhida ao acaso, foi positivo. Considerando-se os dados da tabela, a probabilidade de essa pessoa ser saudável é de: 73. Alternativa **a**.

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{1}{10}$ **d)** $\frac{1}{5}$ **e)** $\frac{3}{10}$

74. (Unisinos-RS) Uma doença atinge 1% de determinada população. Um exame que detecta a doença tem falso positivo (quando o exame indica positivo, mas a pessoa não tem a doença) em 2% dos testes. O falso negativo (quando o exame indica negativo, mas a pessoa tem a doença) apareceu em 5% dos testes. Qual a probabilidade de que uma pessoa, escolhida ao acaso, tenha a doença, sabendo que seu resultado deu positivo? 74. Alternativa **a**.

a) $\frac{95}{293}$ **b)** $\frac{198}{293}$ **c)** $\frac{95}{198}$ **d)** $\frac{93}{95}$ **e)** $\frac{93}{100}$

75. (Unesp) Um estudo para determinar a probabilidade da efetividade de um novo exame para obtenção do diagnóstico de uma doença baseou-se nos resultados obtidos em um grupo constituído de 1 620 pessoas. A tabela mostra os resultados desse estudo.

		Possui a doença?	
		SIM	NÃO
Resultado do Exame	Positivo	204	612
	Negativo	36	768

A análise dos resultados mostra que, apesar de a probabilidade de o teste detectar a doença em quem a possui ser de ____, a probabilidade de uma pessoa desse grupo que obtém um resultado positivo não ter a doença, ou seja, um falso positivo, é de ____, indicando que esse novo exame precisa ser aprimorado.

Os percentuais que contemplam, respectivamente, a frase são: 75. Alternativa **e**.

a) 85%; 38% **b)** 50%; 38% **c)** 50%; 75% **d)** 85%; 44% **e)** 85%; 75%

Obtenção de uma curva

Em Estatística, há um interesse em saber como os dados se distribuem em relação às medidas de tendência central. Ao iniciar esta unidade, abordamos um experimento relacionado a uma distribuição: o tabuleiro de Galton. Vamos retomar essa ideia para relacionar o estudo de probabilidade a uma curva de distribuição chamada **curva normal**.

Sugestão inicial

Visite a página a seguir na internet para acompanhar como ocorre a distribuição. Nela você encontrará um simulador como o ilustrado. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/zfnMZw7T. Acesso em: 21 set. 2024.

Máquina de Galton

Tarcísio Garbellini

Fonte: FLEITAS, C. Máquina de Galton virtual. *In*: GEOGEBRA. [*S. l.*], [20–?]. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/zfnMZw7T. Acesso em: 18 jun. 2024.

Acione o simulador clicando em “início”. Regule a velocidade e acompanhe a distribuição das “bolinhas” conforme o histograma que irá aparecer um pouco abaixo da forma triangular.

Note que, ao lado da ilustração, há duas indicações de valores (x_i e f_i). O x_i indica a posição na horizontal e o f_i, a frequência na vertical.

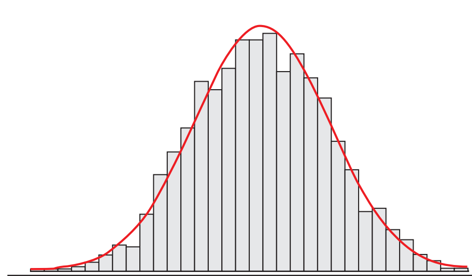
Quando chegar à indicação do total de frequência 10 000, pare o simulador.

Para pensar e discutir

1. Como se deu a distribuição das frequências? Explique. 1. Resposta pessoal.
2. Em quais posições as frequências são maiores? 2. Nas posições centrais.
3. Em relação ao conjunto de valores de *x*, de 1 até 21, qual medida estatística representa a posição *x* que teve maior frequência? 3. A mediana *x*.

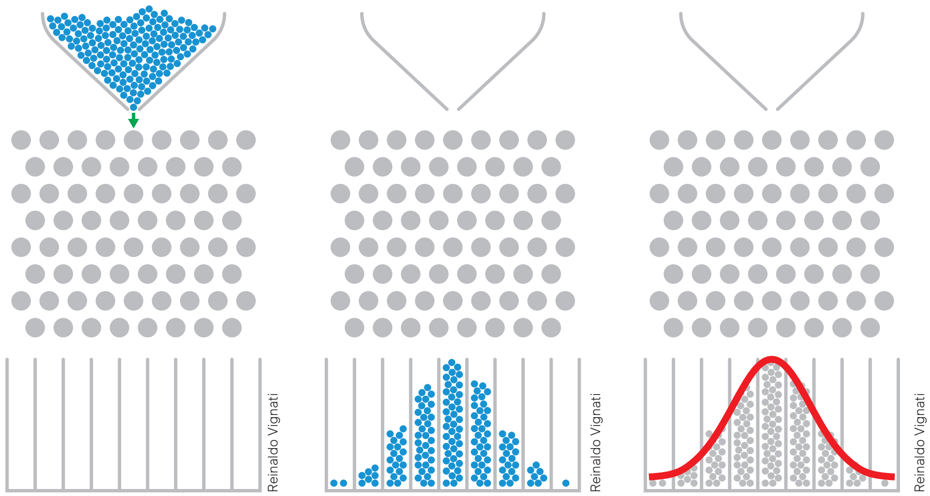
No capítulo sobre Estatística desta coleção, você observou, ao estudar as medidas de tendência central, uma curva denominada curva normal de distribuição.

Analise a representação a seguir.

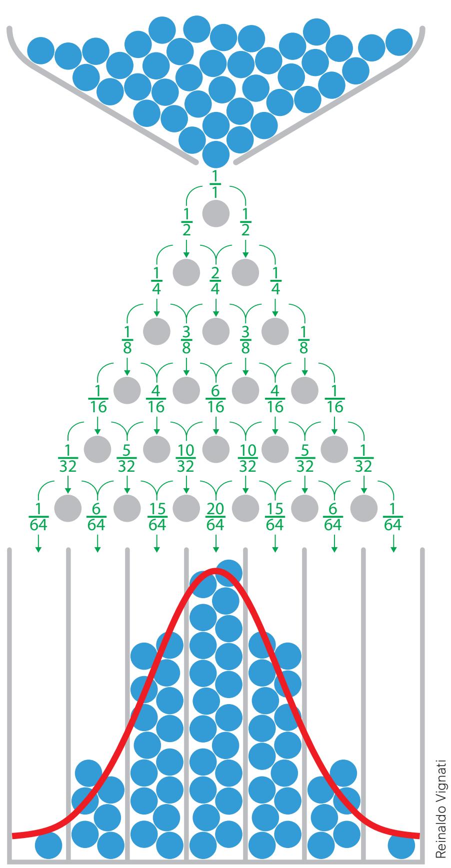


Tarcísio Garbellini

Utilizando a ideia de Galton, podemos chegar a essa mesma curva de distribuição. Analise a distribuição a seguir.



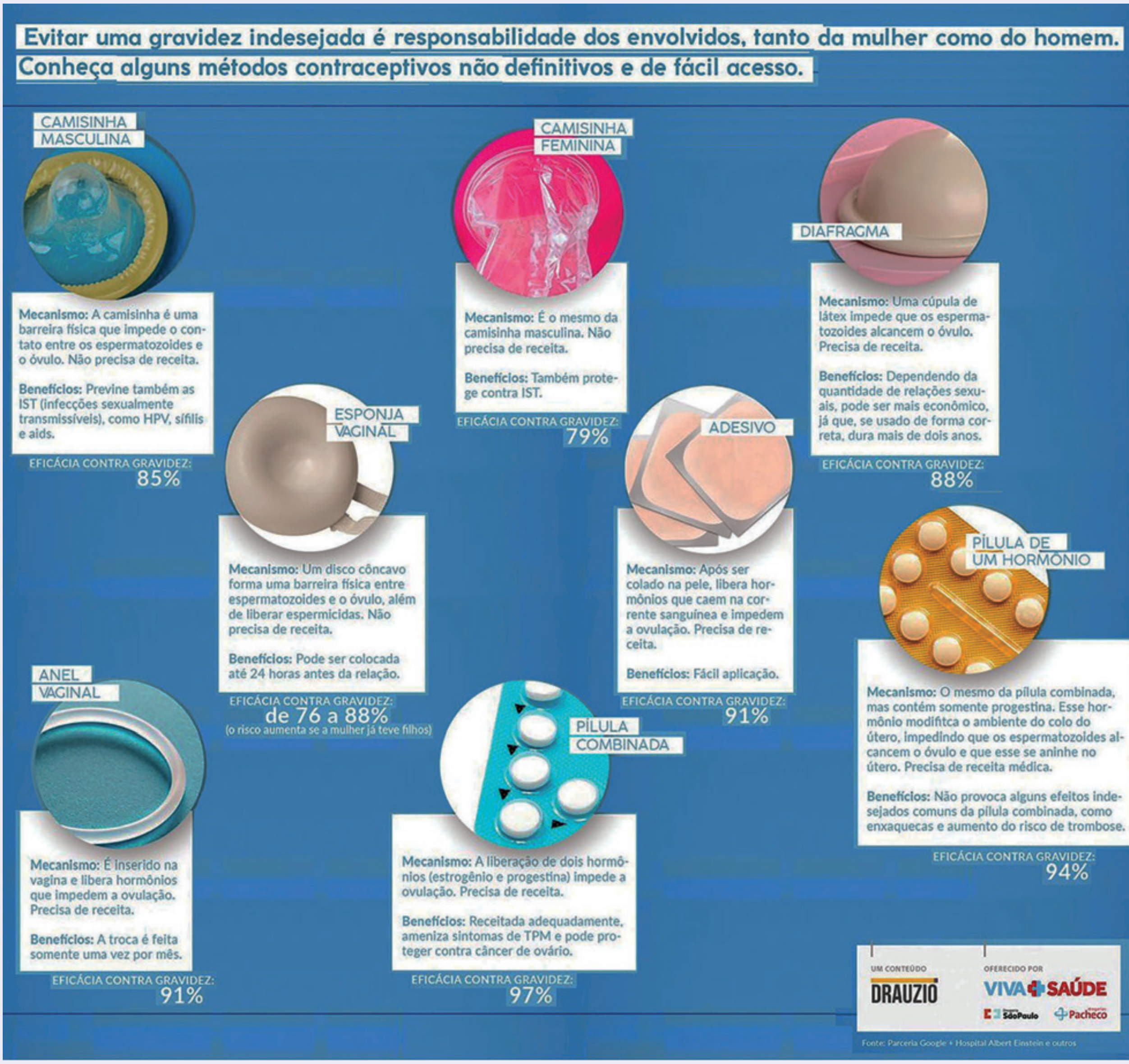
E tudo isso pode ser observado pelo cálculo de probabilidade. No esquema a seguir, observe, em cada passagem, a probabilidade de uma bolinha seguir o caminho indicado quando consideramos apenas 7 tubos no final.



Para pensar e discutir

1. De acordo com o esquema acima, quais as probabilidades (em porcentagem) da distribuição das bolinhas nos tubos, da esquerda para a direita? 1. 1,5625%; 9,375%; 23,4375%; 31,25%; 23,4375%; 9,375%; 1,5625%
2. Essa distribuição é simétrica em relação ao tubo central? Justifique. 2. Sim; resposta pessoal.

Não é nosso interesse estudar a curva normal de distribuição. A ideia é você conhecer um pouco mais a relação entre Estatística e Probabilidade. Apenas como curiosidade, a curva normal está baseada em dois parâmetros: a média e o desvio-padrão.



Site Drauzio Varella

Fonte: ASTOLFI, L. B. G. Gravidez na adolescência. *In*: INSTITUTO CLARO. [*S. l.*], 25 out. 2019. Disponível em: https://www.institutoclaro.org.br/educacao/para-ensinar/planos-de-aula/gravidez-na-adolescencia/. Acesso em: 21 set. 2024.

Todos temos responsabilidades sobre nossos atos e possíveis consequências. Porém, quanto mais conhecimentos adquirimos, maior a probabilidade de tomarmos decisões acertadas. Em relação aos métodos contraceptivos mostrados anteriormente, uma informação fica muito clara: nenhum deles é 100% seguro. Outra reflexão fundamental é que, por menor que seja a probabilidade de engravidar empregando um método contraceptivo, ela aumenta consideravelmente com o uso incorreto ou imprudente.

Junte-se a três colegas para fazer uma reflexão importante.

1. Retomem o infográfico e analisem os métodos contraceptivos apresentados observando estatisticamente a probabilidade de eficácia para evitar uma gravidez. 1. Resposta pessoal.
2. Escrevam um texto com base nos dados do infográfico. Avaliem a questão dos possíveis problemas a serem enfrentados em uma relação sexual sem os devidos cuidados e a possibilidade de ter um filho sem planejamento. 2. Resposta pessoal.

Atividades finais

1. Se lançarmos uma moeda 2 vezes consecutivamente e nos dois resultados der cara, qual é a probabilidade de no próximo lançamento resultar novamente cara? 1. $\frac{1}{2}$

2. Responda:

a) O que é um experimento aleatório? 2. a) Aquele que depende exclusivamente do acaso.

b) O que significa, em um experimento aleatório, o espaço amostral? 2. b) O conjunto formado por todos os resultados possíveis.

c) O que significa, em um experimento aleatório, um evento? 2. c) O conjunto formado por todos os resultados favoráveis.

d) O que é probabilidade zero de um evento em um espaço amostral? 2. d) Evento impossível de ocorrer.

e) O que é probabilidade 1 de um evento em um espaço amostral? 2. e) Evento certo.

3. Em um experimento aleatório concluiu-se que a probabilidade de um evento ocorrer é de 2,8%. Qual é a probabilidade desse evento não ocorrer? 3. 97,2%

4. Responda:

a) Quando dois eventos são mutuamente exclusivos? 4. a) Quando a interseção é vazia.

b) Quando dois eventos são independentes? 4. b) Quando a realização de um deles não interfere na realização do outro.

5. Sobre a união de eventos A e B, responda:

a) Como calcular a probabilidade da união dos eventos A e B de um mesmo espaço amostral? 5. a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

b) Em qual situação tem-se $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$? 5. b) Quando os dois eventos são mutuamente exclusivos.

Questões de vestibulares e Enem

6. (IFPE) Numa urna, foram colocados cinco cartões numerados de 1 a 5. Serão sorteados, sem reposição, dois cartões. Qual é a probabilidade dos números presentes nos cartões sorteados serem consecutivos? 6. Alternativa **b**.

a) 30% **b)** 20% **c)** 40% **d)** 10% **e)** 50%

7. (Unesp) Para identificação do câncer de próstata utiliza-se, além do exame digital, o exame de sangue PSA (antígeno prostático específico), que é um procedimento básico para início do rastreamento. No entanto, o PSA é um biomarcador imperfeito, pois pode levar a falsos diagnósticos e excesso de tratamento cirúrgico.

Um grupo de pesquisadores obteve, para uma determinada população, que a probabilidade de um resultado do exame PSA ser verdadeiro, ou seja, indicar positivo para quem tem a doença ou negativo para quem não tem a doença, é de 60%. Ao analisar o resultado de dois testes desse grupo, a probabilidade de que pelo menos um seja falso é de 7. Alternativa **a**.

a) 64% **b)** 16% **c)** 40% **d)** 48% **e)** 24%

8. (Unicamp-SP) Uma escola com 960 alunos decidiu renovar seu mobiliário. Para decidir quantas cadeiras de canhotos será necessário comprar, fez-se um levantamento do número de alunos canhotos em cada turma. A tabela a seguir indica, na segunda linha, o número de turmas com o total de canhotos indicado na primeira linha.

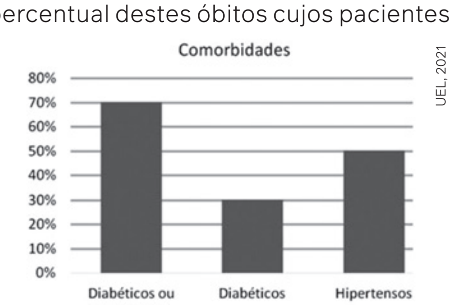
Número total de alunos canhotos	0	1	2	3	4	5
Número de turmas	1	2	5	12	8	2

a) Qual a probabilidade de que uma turma escolhida ao acaso tenha pelo menos 3 alunos canhotos? 8. a) $\frac{11}{15}$

b) Qual a probabilidade de que um aluno escolhido ao acaso na escola seja canhoto? 8. b) $\frac{3}{32}$

9. (UEL-PR) Leia o texto e analise o gráfico a seguir.

Foi realizado um estudo para compreender as características de pacientes que morreram de COVID-19. Os dados foram coletados a partir de 150 óbitos ocorridos dentro das fronteiras de Wuhan na China entre os dias 21 e 30 de janeiro de 2020 decorrentes do Novo Coronavírus. A partir destes registros foi elaborado o gráfico a seguir, que exibe o percentual destes óbitos cujos pacientes sofriam de determinada comorbidade.



Com base no texto e no gráfico, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a probabilidade de se tomar, ao acaso, dentre os pacientes hipertensos deste estudo, um paciente diabético. 9. Alternativa **b**.

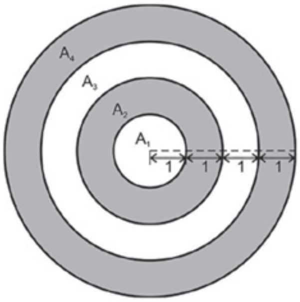
a) 10%
b) 20%
c) 25%
d) 30%
e) 50%

10. (FMJ-SP) No ensino médio de uma escola, estão matriculados 53 alunos no primeiro ano, 37 alunos no segundo ano e 30 alunos no terceiro ano. Todos esses alunos formarão duplas entre si, de maneira que em cada dupla não haja alunos do mesmo ano. Uma dessas duplas será escolhida ao acaso e a probabilidade da dupla escolhida ter um aluno do primeiro ano e um aluno do segundo ano é 10. Alternativa **c**.

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{1}{3}$

11. (Epcar-MG) Testes realizados em um jogo de arco e flecha provaram que a probabilidade de acerto em uma das quatros áreas A_1, A_2, A_3 ou A_4 de um alvo como o da figura a seguir é a razão entre a área da região e o quadrado da distância entre o jogador e o alvo, nessa ordem.

Sabe-se que A_1 é a área de um círculo de raio 1 m e A_2, A_3 e A_4 são áreas de coroas circulares concêntricas com A_1, com as medidas indicadas na figura a seguir, em metros. 11. Alternativa **c**.



EPCAR, 2021

A probabilidade de um jogador que está a 16 m de distância do alvo acertar a área

a) A_3 é a metade da probabilidade de acertar a área A_4.
b) A_2 é o dobro da probabilidade de acertar a área A_1.
c) A_4 é sete vezes a probabilidade de acertar a área A_1.
d) A_3 é o triplo da probabilidade de acertar a área A_2.

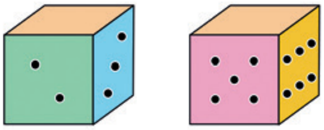
12. (UEA-AM) Em uma urna há 5 bolas vermelhas e as demais bolas são amarelas, de modo que, ao retirar-se aleatoriamente uma bola dessa urna, a probabilidade de ela ser amarela é $\frac{2}{3}$. O número total de bolas que há nessa urna é 12. Alternativa **b**.

a) 10 b) 15 c) 21 d) 12 e) 18

13. (Unesp) Ana somou dois números distintos sorteados ao acaso do conjunto {8, 9, 10}. Beto multiplicou dois números distintos sorteados ao acaso do conjunto {3, 5, 6}. A probabilidade de que o resultado obtido na conta de Ana tenha sido maior ou igual ao obtido na conta de Beto é igual a: 13. Alternativa **e**.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{5}{9}$

14. (Famerp-SP) A face correspondente ao número 1 de um dado comum de seis faces foi apagada. O mesmo ocorreu com a face correspondente ao número 4 de outro dado comum de seis faces. 14. Alternativa **e**.


FAMERP, 2024

Lançando-se ao acaso esses dois dados juntos, a probabilidade de a soma dos números obtidos ser igual a 7 é de

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{12}$ e) $\frac{1}{9}$

15. (Unicamp-SP) João e Maria estão passeando pela floresta. Para não se perderem no caminho, levaram consigo uma sacola com 100 pedrinhas, sendo 60 pedrinhas brancas e 40 pedrinhas pretas. A cada 5 passos eles retiram aleatoriamente uma pedrinha da sacola e jogam-na no chão para marcar o caminho. 15. Alternativa **b**.

Quando eles pararam para fazer um lanche, notaram que já tinham sido jogadas 35 pedrinhas brancas e 25 pedrinhas pretas. Qual a probabilidade de as próximas duas pedrinhas jogadas serem brancas?

a) $\frac{7}{13}$ b) $\frac{5}{13}$ c) $\frac{11}{52}$ d) $\frac{7}{52}$

16. (Uerj) Para fazer o sorteio de um livro, quatro amigos colocaram três bolas brancas e duas pretas em uma caixa. Decidiram que o primeiro a retirar uma bola preta ficará com o livro. Na ordem alfabética de seus nomes, cada um retira uma bola, ao acaso, sem devolvê-la à caixa. A probabilidade de o terceiro amigo retirar a primeira bola preta e ficar com o livro é igual a: 16. Alternativa **b**.

a) 10% **b)** 20% **c)** 30% **d)** 40%

17. (Unifor-CE) Como parte do trabalho de conclusão de curso, um aluno do curso de Comunicação Social entrevistou 100 pessoas no *campus* onde estuda. As pessoas foram perguntadas se usavam a rede social A, a rede social B ou nenhuma delas. As respostas colhidas foram dispostas na seguinte tabela. 17. Alternativa **e**.

	Total de pessoas
Usa a rede social A	87
Usa a rede social B	73
Nenhuma delas	12

A porcentagem das pessoas entrevistadas que usam ambas as redes sociais A e B é de

a) 25% **c)** 57% **e)** 72%

b) 43% **d)** 65%

18. (Obmep) Em um teatro, cinco garotos e cinco garotas escolheram aleatoriamente seus lugares em uma fila com exatamente 10 cadeiras. Dado que as cinco garotas estão em 5 cadeiras adjacentes, qual é a probabilidade de que os cinco garotos também estejam em 5 cadeiras adjacentes? 18. Alternativa **c**.

OBMEP, 2023

a) 1 **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{2}{5}$ **e)** $\frac{1}{2}$

19. (Unesp) Em uma sala de aula com meninos e meninas, ninguém ambidestro, um quarto dos meninos são canhotos e as meninas canhotas são um quarto do total de estudantes canhotos da sala. O número de meninos destros na sala é igual a três décimos do total de estudantes da sala. Sorteando-se ao acaso um estudante dessa sala, a probabilidade de que seja uma aluna canhota é igual a: 19. Alternativa **b**.

a) $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{1}{30}$ **c)** $\frac{1}{15}$ **d)** $\frac{1}{10}$ **e)** $\frac{2}{15}$

20. (FMJ-SP) Adriana é uma das 12 alunas de um curso de especialização. Três alunas desse curso serão sorteadas para ganhar um livro. A probabilidade de Adriana ser uma das sorteadas é de 20. Alternativa **c**.

a) 10%. **b)** 20%. **c)** 25%. **d)** 15%. **e)** 30%.

21. (UFRGS) Antônia e Francisca fazem parte de um grupo de dez médicas que atuam no cuidado de pacientes com COVID-19, em um hospital de Porto Alegre. Um outro hospital no Rio Grande do Sul está convidando um quarteto de médicas do grupo, do qual Antônia e Francisca fazem parte, para organizar um evento científico sobre a COVID-19.

A probabilidade de Antônia e Francisca fazerem parte desse quarteto convidado é 21. Alternativa **d**.

a) $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{2}{5}$ **c)** $\frac{3}{14}$ **d)** $\frac{2}{15}$ **e)** $\frac{1}{35}$

22. (FGV-SP) Em um trecho retilíneo de uma rua há 14 vagas, lado a lado, demarcadas para o estacionamento de carros. Os carros entram e saem aleatoriamente dessas vagas e em um dado momento havia 9 carros estacionados. A probabilidade, nesse momento, de não haver vagas vazias lado a lado é de 22. Alternativa **e**.

a) $\frac{1}{24}$ **b)** $\frac{5}{24}$ **c)** $\frac{3}{40}$ **d)** $\frac{9}{125}$ **e)** $\frac{18}{143}$

23. (Famerp-SP) Um grupo de 50 pessoas foi questionado sobre a prática regular de exercícios aeróbicos e anaeróbicos. Os resultados da pesquisa estão indicados na tabela. 23. Alternativa **a**.

Exercício praticado regularmente	Total de pessoas
Aeróbico	37
Anaeróbico	29
Nenhum	6

Sorteando-se ao acaso uma dessas pessoas, a probabilidade de que ela pratique regularmente ambas as formas de exercícios avaliadas no estudo é de

a) 44%. **b)** 2%. **c)** 60%. **d)** 22%. **e)** 10%.

24. (Mack-SP) Numa marcenaria, duas tupias T1 e T2 produzem juntas 5 000 peças em um dia. A tupia T1 produz 2 000 peças, das quais 2% são defeituosas. A tupia T2 produz as 3 000 peças restantes, das quais 3% são defeituosas. Da produção total diária, uma peça é escolhida ao acaso. Verificou-se que ela é defeituosa. A probabilidade de que essa peça escolhida tenha sido produzida pela tupia T1 é 24. Alternativa **c**.

a) $\frac{9}{13}$ **b)** $\frac{3}{13}$ **c)** $\frac{4}{13}$ **d)** $\frac{2}{13}$ **e)** $\frac{1}{13}$

25. (Enem) Em um determinado ano, os computadores da receita federal de um país identificaram como inconsistentes 20% das declarações de imposto de renda que lhe foram encaminhadas. Uma declaração é classificada como inconsistente quando apresenta algum tipo de erro ou conflito nas informações prestadas. Essas declarações consideradas inconsistentes foram analisadas pelos auditores, que constataram que 25% delas eram fraudulentas. Constatou-se ainda que, dentre as declarações que não apresentaram inconsistências, 6,25% eram fraudulentas.

Qual é a probabilidade de, nesse ano, a declaração de um contribuinte ser considerada inconsistente, dado que ela era fraudulenta? 25. Alternativa **e**.

a) 0,0500
b) 0,1000
c) 0,1125
d) 0,3125
e) 0,5000

26. (Enem) Para ganhar um prêmio, uma pessoa deverá retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas pretas de uma mesma urna. Inicialmente, as quantidades e cores das bolas são como descritas a seguir. 26. Alternativa **e**.

- Urna A – Possui três bolas brancas, duas bolas pretas e uma bola verde.
- Urna B – Possui seis bolas brancas, três bolas pretas e uma bola verde.
- Urna C – Possui duas bolas pretas e duas bolas verdes.
- Urna D – Possui três bolas brancas e três bolas pretas.

A pessoa deve escolher uma entre as cinco opções apresentadas.

- Opção 1: Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A.
- Opção 2: Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna B.
- Opção 3: Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna A; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A.
- Opção 4: Passar, aleatoriamente, uma bola da urna D para a urna C; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna C.
- Opção 5: Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna D; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna D.

Com o objetivo de obter a maior probabilidade possível de ganhar o prêmio, a pessoa deve escolher a opção:

a) 1. **b)** 2. **c)** 3. **d)** 4. **e)** 5.

27. (Enem) Um rapaz estuda em uma escola que fica longe de sua casa, e por isso precisa utilizar o transporte público. Como é muito observador, todos os dias ele anota a hora exata (sem considerar os segundos) em que o ônibus passa pelo ponto de espera. Também notou que nunca consegue chegar ao ponto de ônibus antes de 6h15min da manhã. Analisando os dados coletados durante o mês de fevereiro, o qual teve 21 dias letivos, ele concluiu que 6h21min foi o que mais se repetiu, e que a mediana do conjunto de dados é 6h22min.

A probabilidade de que, em algum dos dias letivos de fevereiro, esse rapaz tenha apanhado o ônibus antes de 6h21min da manhã é, no máximo: 27. Alternativa **d**.

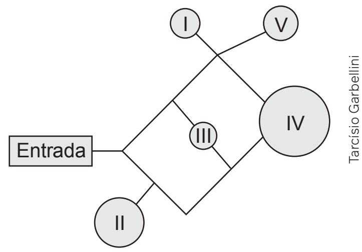
a) $\frac{4}{21}$. **b)** $\frac{5}{21}$. **c)** $\frac{6}{21}$. **d)** $\frac{7}{21}$. **e)** $\frac{8}{21}$.

28. (Enem) O gerente do setor de recursos humanos de uma empresa está organizando uma avaliação em que uma das etapas é um jogo de perguntas e respostas. Para essa etapa, ele classificou as perguntas, pelo nível de dificuldade, em fácil, médio e difícil, e escreveu cada pergunta em cartões para colocação em uma urna. Contudo, após depositar vinte perguntas de diferentes níveis na urna, ele observou que 25% delas eram de nível fácil. Querendo que as perguntas de nível fácil sejam a maioria, o gerente decidiu acrescentar mais perguntas de nível fácil à urna, de modo que a probabilidade de o primeiro participante retirar, aleatoriamente, uma pergunta de nível fácil seja de 75%. 28. Alternativa **d**.

Com essas informações, a quantidade de perguntas de nível fácil que o gerente deve acrescentar à urna é igual a:

a) 10. **b)** 15. **c)** 35. **d)** 40. **e)** 45.

29. (Enem) Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, dentre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV. 29. Alternativa **c**.



Suponha que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna. Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar é igual a:

a) $\frac{1}{96}$ **b)** $\frac{1}{64}$ **c)** $\frac{5}{24}$ **d)** $\frac{1}{4}$ **e)** $\frac{5}{12}$

30. (Enem) Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, em vez de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos. 30. Alternativa **d**.

A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é:

a) 23,7%. **b)** 30,0%. **c)** 44,1%. **d)** 65,7%. **e)** 90,0%.

31. (Enem) Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida. Os organizadores, então, decidiram fazer um exame *antidoping*. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:

Modo I: sortear três atletas dentre todos os participantes; 31. Alternativa **e**.

Modo II: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo III: sortear primeiro três equipes e então sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que $P(\text{I})$, $P(\text{II})$ e $P(\text{III})$ sejam as probabilidades de o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso de o sorteio ser feito pelo modo I, II ou III.

Comparando-se essas probabilidades, obtém-se:

a) $P(\text{I}) < P(\text{II}) < P(\text{III})$.
b) $P(\text{II}) < P(\text{I}) < P(\text{III})$.
c) $P(\text{I}) < P(\text{II}) = P(\text{III})$.
d) $P(\text{I}) = P(\text{II}) < P(\text{III})$.
e) $P(\text{I}) = P(\text{II}) = P(\text{III})$.

32. (Enem) O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20. 32. Alternativa **b**.

A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é:

a) 0,02048. **b)** 0,08192. **c)** 0,24000. **d)** 0,40960. **e)** 0,49152.

33. (Enem) Um funcionário de uma loja de computadores misturou, por descuido, três computadores defeituosos com sete computadores perfeitos que estavam no estoque. Uma pequena empresa fez a compra de cinco computadores nessa loja, escolhendo-os aleatoriamente dentre os dez que estavam no estoque.

Qual é a probabilidade de essa empresa ter levado, em sua compra, todos os três computadores defeituosos? 33. Alternativa **b**.

a) $\frac{1}{72}$ **b)** $\frac{1}{12}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{3}{10}$ **e)** $\frac{3}{7}$

34. (Enem) Visando atrair mais clientes, o gerente de uma loja anunciou uma promoção em que cada cliente que realizar uma compra pode ganhar um *voucher* para ser usado em sua próxima compra. Para ganhar seu *voucher*, o cliente precisa retirar, ao acaso, uma bolinha de dentro de cada uma das duas urnas A e B disponibilizadas pelo gerente, nas quais há apenas bolinhas pretas e brancas.

Atualmente, a probabilidade de se escolher, ao acaso, uma bolinha preta na urna A é igual a 20% e a probabilidade de se escolher uma bolinha preta na urna B é 25%. Ganha o *voucher* o cliente que retirar duas bolinhas pretas, uma de cada urna. Com o passar dos dias, o gerente percebeu que, para a promoção ser viável aos negócios, era preciso alterar a probabilidade de acerto do cliente sem alterar a regra da promoção. Para isso, resolveu alterar a quantidade de bolinhas brancas da urna B de forma que a probabilidade de um cliente ganhar o *voucher* passasse a ser menor ou igual a 1%. Sabe-se que a urna B tem 4 bolinhas pretas e que, em ambas as urnas, todas as bolinhas têm a mesma probabilidade de serem retiradas.

Qual é o número mínimo de bolinhas brancas que o gerente deve adicionar à urna B? 34. Alternativa **c**.

a) 20 **b)** 60 **c)** 64 **d)** 68 **e)** 80

35. (Enem) Em um colégio público, a admissão no primeiro ano se dá por sorteio. Neste ano há 55 candidatos, cujas inscrições são numeradas de 10 a 55. O sorteio de cada número de inscrição será realizado em etapas, utilizando-se duas urnas. Da primeira urna será sorteada uma bola, dentre bolas numeradas de 0 a 9, que representará o algarismo das unidades do número de inscrição a ser sorteado e, em seguida, da segunda urna, será sorteada uma bola para representar o algarismo das dezenas desse número. Depois do primeiro sorteio, e antes de se sortear o algarismo das dezenas, as bolas que estarão presentes na segunda urna serão apenas aquelas cujos números formam, com o algarismo já sorteado, um número de 01 a 55.

A probabilidade de os candidatos de inscrição número 50 e 02 serem sorteados são, respectivamente,

35. Alternativa **a**.

a) $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{60}$ **b)** $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{50}$ **c)** $\frac{1}{50}$ e $\frac{1}{10}$ **d)** $\frac{1}{55}$ e $\frac{1}{54}$ **e)** $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{100}$

36. (Enem) Ao realizar o cadastro em um aplicativo de investimentos, foi solicitado ao usuário que criasse uma senha, sendo permitido o uso somente dos seguintes caracteres:

- Algarismos de 0 a 9;
- 26 letras minúsculas do alfabeto;
- 26 letras maiúsculas do alfabeto;
- 6 caracteres especiais !, @, #, $, *, &.

Três tipos de estruturas para senha foram apresentados ao usuário:

– **Tipo I**: formada por quaisquer quatro caracteres distintos, escolhidos dentre os permitidos;

– **Tipo II**: formada por cinco caracteres distintos, iniciando por três letras, seguidas por um algarismo e, ao final, um caractere especial;

– **Tipo III**: formada por seis caracteres distintos, iniciando por duas letras, seguidas por dois algarismos e, ao final, dois caracteres especiais.

Considere p_1, p_2 e p_3 as probabilidades de se descobrirem ao acaso, na primeira tentativa, as senhas dos tipos I, II e III, respectivamente.

Nessas condições, o tipo de senha que apresenta a menor probabilidade de ser descoberta ao acaso, na primeira tentativa, é o 36. Alternativa **a**.

a) tipo I, pois $p_1 < p_2 < p_3$.
b) tipo I, pois tem menor quantidade de caracteres.
c) tipo II, pois tem maior quantidade de letras.
d) tipo III, pois $p_3 < p_2 < p_1$.
e) tipo III, pois tem maior quantidade de caracteres.

Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão em relação aos assuntos e objetivos trabalhados ao longo do presente capítulo.

Objetivos de aprendizagem	Sim	É necessário retomar
Identifico no cotidiano situações de uso de probabilidades.		
Reconheço diferentes tipos de espaço amostral (discretos ou não).		
Calculo a probabilidade condicional de dois eventos simultâneos.		
Identifico e descrevo o espaço amostral em diferentes experimentos aleatórios.		
Elaboro e resolvo situações relacionadas ao cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios.		
Reconheço eventos independentes em situações relacionadas a eventos equiprováveis consecutivos.		
Diferencio eventos dependentes de eventos independentes em experimentos aleatórios.		
Calculo a quantidade de elementos do evento e do espaço amostral utilizando contagem das possibilidades relacionadas à análise combinatória.		

Feiras livres estão entre os locais mais tradicionais para a compra de legumes, verduras e frutas. Pedras de Fogo (PB), 2024.

Neste capítulo, você vai:

- compreender o conceito de juros simples e sua utilização;
- calcular o montante de um capital aplicado na modalidade de juros simples após determinado período de aplicação;
- interpretar o crescimento do montante de um capital aplicado a juros simples como crescimento linear;
- compreender o conceito de juros compostos e sua utilização;
- diferenciar aplicações em juros simples de aplicações em juros compostos;
- calcular o montante de um capital aplicado na modalidade de juros compostos após determinado período de aplicação;
- interpretar o crescimento do montante de um capital aplicado a juros compostos como crescimento exponencial.

Pães assando em forno em uma padaria.

Ernesto Reghran/Pulsar Imagens

Caçambas de resíduos comum e reciclável, este utilizado na separação do lixo para coleta seletiva. São Roque (SP), 2022.

Marco Antonio Sá/Pulsar Imagens

Alf Ribeiro/Pulsar Imagens

CAPÍTULO

6

Matemática Financeira

Quando falamos em Educação Financeira podemos pensar que se refere apenas a poupar para um futuro distante e incerto. Entretanto, o que se propõe com a Educação Financeira é, além de pensar no futuro, saber utilizar no presente, com responsabilidade, o dinheiro que é fruto de um trabalho. Ser consciente quanto ao consumo é um dos grandes recados. Neste capítulo, você vai trabalhar com juros simples e juros compostos, desenvolvendo habilidades que o ajudarão a tomar as melhores decisões ao fazer uma compra ou aplicar uma quantia.

1. **Ao fazer uma compra a prazo, você consegue calcular quanto de juros vai pagar em relação ao preço à vista? Como você age em relação a isso?** 1. Resposta pessoal.

2. **Quais cuidados você considera que deve tomar para ser um consumidor consciente?** 2. Resposta pessoal.

1 A Matemática e a Educação Financeira

A imagem a seguir ilustra as atividades de uma trabalhadora no chamado mercado financeiro, que abriga diversos tipos de profissionais com ocupações voltadas à análise de resultados envolvendo diferentes transações do setor, como venda de ações, ativos financeiros, investimentos etc. Entre elas, está a análise das bolsas de valores do mundo inteiro. Uma mudança na economia em um pequeno país pode gerar alterações no cenário da economia mundial.

Andrey_Popov/Shutterstock.com

O trabalho com análise de dados e resultados financeiros faz parte da rotina dos departamentos financeiros de diversas empresas e governos.

As questões financeiras acabam interferindo na vida das pessoas. Qualquer cidadão comum que fica atento às questões salariais, aos custos domésticos, ao poder aquisitivo de seu dinheiro, antes de tomar suas decisões sobre como movimentá-lo, de certa maneira está compreendendo aspectos da economia, está praticando a chamada Educação Financeira. Um dos exemplos de tomadas de decisões ocorre toda vez que fazemos uma compra, não interessando o modelo de compra.

Gorodenkoff/Shutterstock.com

Compras *on-line*. Os centros de distribuição de grandes empresas de vendas pela internet são fundamentais para a entrega rápida de produtos, o que popularizou a modalidade.

Rubens Chaves/Pulsar Imagens

Rua Senhor dos Passos, na região do complexo de comércio popular conhecido como Saara, um dos maiores centros de compras da América Latina. Rio de Janeiro (RJ), 2021.

Para pensar e discutir

1. O que você entende por Educação Financeira? Qual é a necessidade dela na vida das pessoas? 1. Resposta pessoal.

2. Quais cuidados você deve ter ao fazer qualquer compra, seja ela presencial ou *on-line*? 2. Resposta pessoal.

Vamos ver outros aspectos a respeito das preocupações que devemos ter!

Ao ouvirmos falar em **crise econômica**, normalmente associamos esse termo à bolsa de valores, à oscilação do câmbio, aos caminhos políticos das nações e a outras tantas incertezas que “balançam” o setor e interferem diretamente na vida econômica das pessoas. A posição de um país em relação aos problemas ambientais ou à migração de povos para países mais desenvolvidos são decisões políticas que impactam não apenas a economia mundial, mas a vida do cidadão comum. É por essas e outras razões que precisamos cada vez mais discutir e entender a economia.

Um exemplo bem atual de como tudo está interligado foi a pandemia causada pela covid-19, que assolou o sistema de saúde mundial causando milhares de mortes e aprofundando crises econômicas em países com a economia pouco estruturada. Situações desse tipo são mais um motivo para desenvolvermos um olhar global sobre o que está a nossa volta.


Lordn/iStockphoto.com

A medicina é uma atividade econômica dedicada à prestação de serviços.

Se a ideia é conhecer melhor a economia, precisamos valorizá-la a partir do contexto familiar. Em casa, podemos analisar o que consumimos, verificar o que é realmente necessário, entender como as despesas são pagas, o modo como a saúde econômica da família é gerenciada, entre outros fatores.

Reflita sobre os problemas diários que estão intimamente relacionados à economia. O noticiário aborda diversos indicadores sociais, como o desemprego, a alta do preço dos combustíveis e dos bens de consumo. Além disso, trata da desigualdade social e da má distribuição de renda.

Todos esses exemplos são índices que apontam o trajeto econômico que percorremos rotineiramente, que inclui diferentes percentuais de aumento e queda de preços, além de oscilações no mercado financeiro.


Jim Bowie/Shutterstock.com

É importante usar a água de forma consciente.


Adriano Kirihara/Pulsar Imagens

Ponto de ônibus na praça dos Três Poderes. Brasília (DF), 2024.


iara venanzi/Getty Images

Café com leite e pão na chapa.

Desde o momento em que você acorda até a hora de dormir, você participa de diversas ações econômicas. Por exemplo, ao escovar os dentes, tomar banho e tomar café da manhã, você consome água, pasta de dente, café, leite e pão. Ao ir para a escola ou para o trabalho, você paga a passagem do ônibus ou usa o combustível do carro. Durante o trajeto, pode usar o *smartphone* para enviar e receber mensagens, tudo isso em um aparelho que talvez ainda esteja pagando. Além disso, pode aproveitar o intervalo para ler um jornal ou parte de um livro, ambos produtos que precisam ser comprados para que a leitura seja realizada.

Se focarmos o olhar em um trabalhador de qualquer profissão, nos deparamos com essas e outras questões voltadas ao consumo, além da atividade de produção. Não importa se a pessoa é engenheira, médica, motorista, professora ou exerce outra função. Os profissionais desempenham atividades econômicas produzindo bens e serviços, recebem salários e geram rendimentos para os donos das empresas, hospitais e tantos outros setores. Ao receber o salário, o trabalhador gasta com bens de consumo necessários à sobrevivência, destina parte para adquirir outros bens e, quando sobra, faz aplicações em instituições financeiras. Essas instituições, por sua vez, financiam obras ou emprestam dinheiro às empresas para que possam continuar exercendo suas atividades. Isso faz a roda econômica girar, pois parte dos juros pagos pelos empresários nesses financiamentos vai para as instituições financeiras e parte vai para remunerar aquele que aplicou uma porção de seu salário nessa mesma instituição. Com o lucro obtido, o ciclo econômico continua.

Esperamos que com essa reflexão sobre as atividades econômicas, talvez bem simplificada, você passe a conhecer melhor alguns aspectos da economia, conscientize-se de que faz parte dela e use esse conhecimento de forma crítica.

Para pensar e discutir

1. Em qual atividade diária você pode diminuir seu consumo? Justifique. 1. Resposta pessoal.

2. O que você sugere para melhorar a questão econômica de nosso país? Compartilhe com os colegas. 2. Resposta pessoal.

3. O que o esquema anterior representa? Explique cada uma das imagens. 3. Resposta pessoal.

Nesta unidade, abordaremos tópicos relacionados à economia. Nosso interesse maior está relacionado à Matemática Comercial e à Matemática Financeira. O conhecimento sobre porcentagens, variação percentual, aumento, desconto e juros simples e compostos nos possibilita analisar aspectos econômicos de nosso dia a dia, o que contribui para tomarmos decisões conscientes a respeito de como movimentar nosso dinheiro – tudo isso é a Educação Financeira.

Matemática Comercial

Em nosso cotidiano temos relação direta com o dinheiro: no supermercado, na farmácia, no transporte, nos pagamentos de contas de energia e água, nas transações financeiras com o banco em que temos conta, na organização do orçamento mensal quando observamos o que recebemos no mês e quais gastos temos no planejamento das despesas para uma viagem de final de ano, na compra de um computador novo para o trabalho, nas despesas emergenciais do conserto do carro, na compra de um livro etc. A todas essas questões relacionadas ao dinheiro vamos chamar de **Matemática Comercial**.

João Alvarez/Fotoarena

O pagamento com cédulas...

Hispanolistic/iStockphoto.com

... está cedendo espaço para outras formas de pagamento.

Fará parte do nosso estudo da Matemática Comercial o entendimento de porcentagem, a análise de situações de descontos e acréscimos e ainda o que chamamos de variação percentual.

Iremos abordar, por meio de exemplos, alguns índices econômicos que, de certa maneira, regem a vida econômica do país. Além disso, você também poderá observar algumas informações a respeito de Educação Financeira.

Todo esse estudo visa principalmente inserir você no que acontece nas situações financeiras do dia a dia das pessoas. Para isso, também será preciso compreender um pouco a economia de seu município, de seu estado e, de modo geral, do Brasil.

Observe o questionamento a seguir.

Para pensar e discutir

1. Avalie se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa:
Se a passagem do ônibus que tomamos todos os dias para ir à escola ou para trabalhar subiu de R$ 4,20 para R$ 4,80, houve um aumento de mais de 10%. 1. Verdadeira.

Pensando um pouco mais além, por exemplo, analise as informações a seguir, fornecidas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em cujo *site* (https://www.ibge.gov.br/; acesso em: 17 set. 2024.) você pode encontrar esses e muitos outros dados.

- O PIB do Brasil em 2023 foi de 10,9 trilhões de reais.
- O PIB do Brasil em 2022 foi de 9,9 trilhões de reais.

O Produto Interno Bruno (PIB) é um indicador econômico determinado pela soma dos valores monetários de todos os bens e serviços produzidos em uma região em determinado período. Agora, pense na questão:

Qual foi a variação percentual do PIB do Brasil de 2022 para 2023? Aproximadamente 10%.

Ainda nesta unidade retomaremos essa situação, quando fizermos o cálculo envolvendo variação percentual.

Problemas de porcentagem

João Prudente/Pulsar Imagens

Prédio do Ministério da Fazenda na Esplanada dos Ministérios, Brasília (DF), 2015.

A tabela a seguir foi elaborada tendo como fonte o Ministério da Fazenda, e é válida a partir de fevereiro de 2024. Observe que ela é composta de três colunas. A primeira é formada por faixas de valores salariais (ou outros ganhos) recebidos em um mês; a segunda, pelas alíquotas (em porcentagem) de desconto e a terceira coluna, pelas parcelas a deduzir em reais.

Imposto de renda

Base de cálculo (R$)	Alíquota (%)	Dedução do IR (R$)
Até R$ 2.259,20	zero	zero
De R$ 2.259,21 até R$ 2.826,65	7,5%	R$ 169,44
De 2.826,66 até R$ 3.751,05	15%	R$ 381,44
De R$ 3.751,06 até R$ 4.664,68	22,5%	R$ 662,77
Acima de R$ 4.664,68	27,5%	R$ 896,00

Fonte: BRASIL. Ministério da Fazenda. Receita Federal. *Tributação de 2024*. Brasília, DF: Ministério da Fazenda, 4 maio 2023. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/tabelas/2024. Acesso em: 17 set. 2024.

Assim, imagine que uma pessoa receba em determinado mês o valor de R$ 3.000,00. Observe como calcular o Imposto de Renda que essa pessoa deverá pagar.

1. Calculamos o percentual correspondente conforme a faixa em que se encontra o salário:

15% de R$ 3.000,00 = R$ 450,00

2. Desse valor obtido, deduzimos (subtraímos) o valor indicado na terceira coluna:

R$ 450,00 – R$ 381,44 = R$ 68,56

3. O valor obtido corresponderá ao imposto a ser pago:

Imposto a pagar = R$ 68,56.

Conforme os dados dessa tabela, responda às questões a seguir utilizando uma calculadora.

Para pensar e discutir

1. Qual será o valor de imposto a ser pago se a pessoa receber a quantia de R$ 5.000,00 em um mês? 1. R$ 479,00

2. E se a pessoa receber a quantia de R$ 10.000,00? 2. R$ 1.854,00

3. Duplicando-se o salário, duplica-se também o imposto a pagar? Justifique. 3. Não. Resposta pessoal.

O cálculo que envolve porcentagem é utilizado cotidianamente pelas pessoas em momentos diversos, como você já deve ter observado. Ao longo do Ensino Fundamental, esse estudo aparece em várias situações. Vamos retomar e ampliar esse conhecimento.

Observe inicialmente as diferentes formas de escrever 15%.

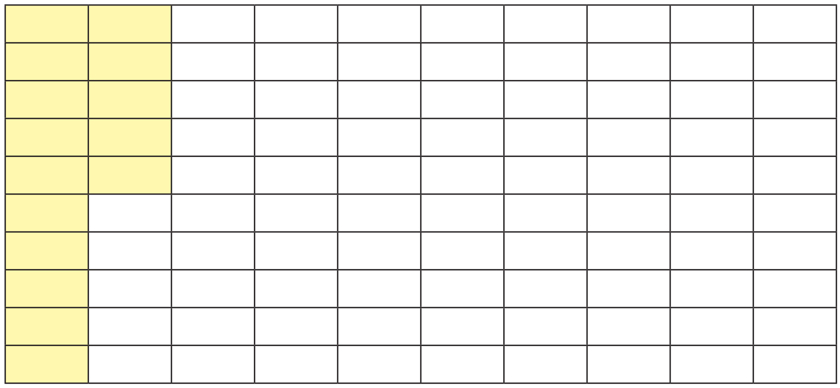
$$15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15$$

0,15 → forma decimal

$\frac{15}{100}$ → forma fracionária

15% → porcentagem

Assim, quando falamos 15% de um valor, isso pode ser interpretado como “15 em cada 100 desse valor”. Como evidencia a ilustração a seguir, 15% significa que são considerados 15 a cada 100.



Analise a seguir algumas situações que envolvem o cálculo com porcentagem.

Atividades resolvidas

1. Na tabela seguinte estão indicados os salários de duas profissionais em dois anos consecutivos, bem como os aumentos recebidos. Qual delas recebeu maior aumento, percentualmente?

Salários das profissionais em 2023 e 2024

	2023	**2024**	**Aumento recebido**
Joana	R$ 2.000,00	R$ 2.400,00	R$ 400,00
Paula	R$ 3.000,00	R$ 3.480,00	R$ 480,00

Fonte: Dados fornecidos pela empresa de Joana e Paula.

- O aumento de Paula em reais foi de R$ 480,00, enquanto o aumento de Joana foi de R$ 400,00. Podemos dizer que Paula teve em reais o maior aumento, porém percentualmente (em valores relativos) Joana recebeu o maior aumento. Observe:
- Cálculo da razão entre o aumento recebido e o salário em 2023:

Joana: $\frac{400}{2\,000} = \frac{20}{100} = 0,20 = 20\%$

Paula: $\frac{480}{3\,000} = \frac{16}{100} = 0,16 = 16\%$

Assim, Joana teve o maior aumento relativo.

2. Nesta semana, constatou-se que 420 pessoas estavam inscritas no Departamento Estadual de Trânsito (Detran) de certo município para o exame necessário para a obtenção da Carteira Nacional de Habilitação (CNH). Sabe-se que normalmente a taxa de aprovação é em torno de 65%. Aproximadamente quantas dessas pessoas, segundo a taxa, serão aprovadas?

- A taxa 65% significa que 65 pessoas em cada 100 serão aprovadas. Sendo x o valor procurado, temos a seguinte proporção:

$$\frac{65}{100} = \frac{x}{420}$$

$$100 \cdot x = 65 \cdot 420 \Rightarrow x = 273$$

- Calculando diretamente 65% de 420:

$$65\% \text{ de } 420 = \frac{65}{100} \cdot 420 = 0,65 \cdot 420 = 273$$

Portanto, espera-se que, mantendo-se a taxa de aprovação, 273 pessoas sejam aprovadas.

Para pensar e discutir

1. Como você calcularia 65% de 420 utilizando a tecla % de uma calculadora simples? Descreva os passos.

2. Sem utilizar a tecla %, como você calcularia 65% de 420? Descreva os passos.

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.

3. Comentamos no início do capítulo que, se a passagem de ônibus sobe de R$ 4,20 para R$ 4,80, precisamos determinar o percentual de aumento da passagem.

R$ 4,20 → R$ 4,80
Aumento de R$ 0,60

- Dizemos que aumentou R$ 0,60 em R$ 4,20. Assim, o aumento ocorreu sobre o valor R$ 4,20 (o todo, isto é, 100%):

Percentual	Valor
100%	R$ 4,20
x%	R$ 0,60

- Para saber qual foi o percentual de aumento, podemos fazer a seguinte proporção:

$$\frac{100}{x} = \frac{4{,}20}{0{,}60}$$

$$4{,}20x = 100 \cdot 0{,}60$$

$$x = \frac{100 \cdot 0{,}60}{4{,}20}$$

$$x = 100 \cdot \left(\frac{0{,}60}{4{,}20}\right)$$

Observe a última igualdade: podemos dizer que basta dividir 0,60 por 4,20 e multiplicar o resultado por 100. A resposta indicará percentualmente de quanto foi o aumento, isto é, aproximadamente 14,3%.

Para pensar e discutir

1. E se na situação anterior você simplesmente dividisse R$ 0,60 (o aumento) por R$ 4,20, qual número decimal você iria obter? 1. Aproximadamente 0,143.

2. Como fica esse número decimal escrito na forma fracionária com numerador e denominador inteiros? E na forma percentual? 2. $\frac{143}{1\,000}$; 14,3%

As pessoas que trabalham no comércio lidam diariamente com situações que envolvem a variação percentual. Utilizam a calculadora como ferramenta indispensável, sendo a tecla com o símbolo de porcentagem a mais empregada.

E como fazemos para utilizar essa tecla na calculadora?

Billion Photos/Shutterstock.com

Tecla de porcentagem.

Essa pergunta pode ser feita por alguém que está iniciando o trabalho no comércio.

Diante disso, vamos elaborar um algoritmo que possibilite, passo a passo, a utilização dessa função na calculadora.

4. Elaborar um algoritmo que calcule o valor após um acréscimo de 7% sobre R$ 1.500,00 em uma compra, com o uso da calculadora. Esse algoritmo deverá utilizar a tecla de porcentagem.

- O algoritmo representa as instruções de como proceder nesse cálculo. Enumeramos a seguir essas etapas:

1. Digite o valor: [1] [5] [0] [0]
2. Aperte: [×]
3. Digite: [7]
4. Aperte: [%]
5. Aperte: [+]
6. Aperte: [=]

No visor da calculadora deverá aparecer o valor 1 605, isto é, o valor após o acréscimo de 7%.

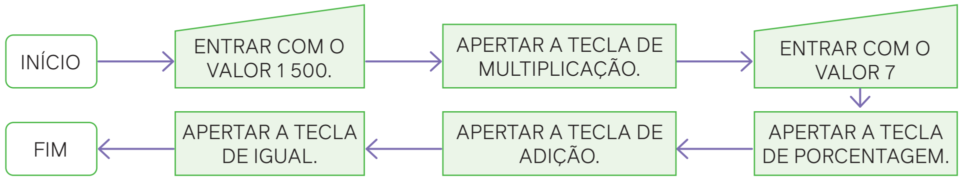
O algoritmo apresentado acima dá certo para uma calculadora com o modelo parecido ao da imagem acima. Porém nem todas as calculadoras, ao utilizar esse procedimento, darão o resultado desejado.

Caso, por exemplo, você resolva utilizar o algoritmo descrito na calculadora do *smartphone* ou na calculadora-padrão de um computador, ele não irá funcionar.

Valentin Valkov/Shutterstock.com

Exemplos de calculadoras de um *smartphone* (à esquerda) e de um computador (à direita).

Observe, por meio de um fluxograma, essas mesmas etapas para o cálculo anterior.



5. Assim como podemos obter o valor após o acréscimo de 7% sobre R$ 1.500,00, vamos também obter o valor após um desconto de 7%.

- Apresentamos a seguir o algoritmo correspondente:

1. Digite o valor: [1] [5] [0] [0]
2. Aperte: [×]
3. Digite: [7]
4. Aperte: [%]
5. Aperte: [–]
6. Aperte: [=]

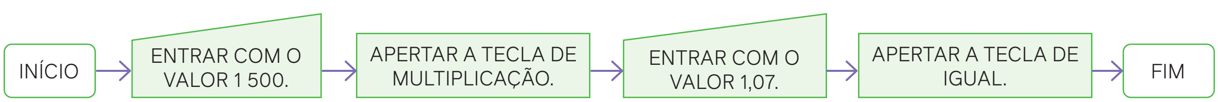
Também aqui você poderia obter esse algoritmo para a calculadora do *smartphone* ou a calculadora-padrão do computador. Procure descobrir como efetuar esses mesmos cálculos com a utilização dessas calculadoras.

Observe ainda que, sem a tecla porcentagem, seria muito mais simples o procedimento para calcular tanto o novo valor com o acréscimo de 7% quanto o valor com o desconto de 7%:

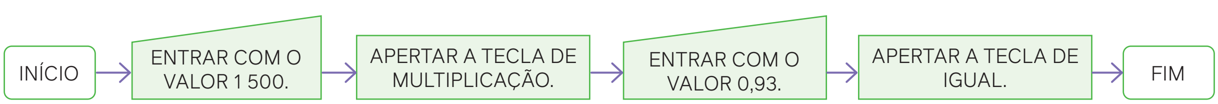
- **multiplicar um valor por 1,07** é o mesmo que calcular 107% desse valor, isto é, 100% com o acréscimo de 7%;
- **multiplicar um valor por 0,93** é o mesmo que calcular 93% desse valor, isto é, 100% com o desconto de 7%.

Utilizando fluxogramas:

- Como na calculadora, procedemos para obter o valor com o **acréscimo de 7%**:



- Como na calculadora, procedemos para obter o valor com o **desconto de 7%**:



Atividades

1. Observe a tabela, que apresenta os valores dos salários mínimos praticados no Brasil ao longo de alguns anos.

Ano	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Salário mínimo (em R$)	998,00	1.045,00	1.100,00	1.212,00	1.320,00	1.412,00

Fonte: IPEADATA. *Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada*, [s. *l*.], 18 mar. 2024. Disponível em: http://www.ipeadata.gov.br/ExibeSerie.aspx?serid=1739471028. Acesso em: 17 set. 2024.

a) Entre dois anos consecutivos, qual período teve o maior aumento do salário mínimo em reais? Qual é esse valor? 1. a) De 2021 para 2022; R$ 112,00.

b) Entre dois anos consecutivos, qual período teve o maior aumento relativo? Qual é esse percentual?
1. b) De 2021 para 2022; aproximadamente 10,2%.

2. Calcule as seguintes razões com quatro casas decimais utilizando uma calculadora. Em seguida, expresse essas razões na forma de porcentagem.

a) $\frac{4}{5}$ 2. a) 80% **b)** $\frac{5}{8}$ 2. b) 62,5% **c)** $\frac{3}{20}$ 2. c) 15% **d)** $\frac{125}{100}$ 2. d) 125% **e)** $\frac{16}{5}$ 2. e) 320% **f)** $\frac{4}{3}$ 2. f) 133,3%

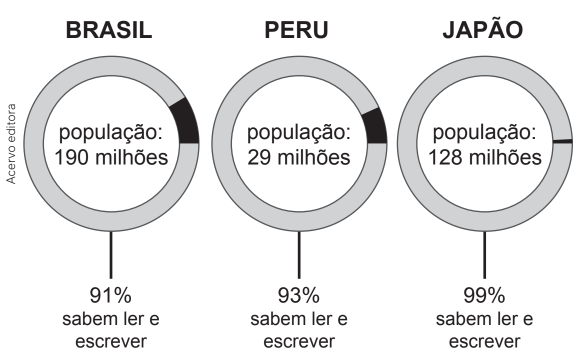
3. Pedro tinha que calcular 17% de R$ 2.500,00. Observe o procedimento dele: calculou mentalmente 1% dividindo R$ 2.500,00 por 100: $\frac{2\,500}{100} = 25$, multiplicou o resultado por 17, isto é $17 \cdot 25 = 425$.

Utilizando o mesmo procedimento de Pedro, calcule as seguintes porcentagens:

a) 32% de 4 500 3. a) 1 440 **b)** 18% de 600 3. b) 108 **c)** 25% de 1 000 3. c) 250 **d)** 8% de 2 500 3. d) 200

4. Pesquise a atual tabela do Imposto de Renda para recebimentos mensais. Em seguida, calcule o imposto de renda a ser pago por uma pessoa que recebe:
   a) R$ 3.500,00; 4. A resposta dependerá do ano que a atividade for realizada.
   b) R$ 1.800,00;
   c) R$ 9.000,00.
5. Responda:
   a) Multiplicar determinado valor por 0,70 é o mesmo que calcular qual porcentagem desse valor? 5. a) 70%
   b) Multiplicar determinado valor por 1,12 é o mesmo que calcular qual porcentagem desse valor? 5. b) 112%
6. Em um país fictício, o Imposto de Renda (IR) é descontado dos salários mensalmente da seguinte forma.
   - Salário de até F$ 1.000,00 – O IR é igual a zero.
   - Salário maior que F$ 1.000,00 e menor ou igual a F$ 3.000,00 – O IR é igual a 10% do salário.
   - Salário maior que F$ 3.000,00 – O IR é igual a 20% do salário.

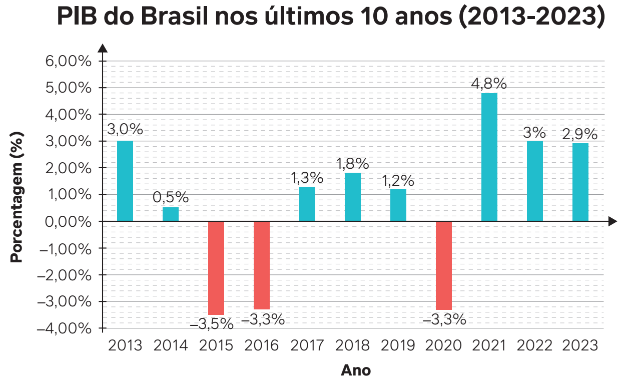
   Calcule o imposto de renda de quem ganha nesse país:
   a) F$ 990,00; 6. a) Isento (zero).
   b) F$ 2.900,00; 6. b) F$ 290,00
   c) F$ 3.400,00. 6. c) F$ 680,00
7. (UFCE) Manuel compra 100 caixas de laranjas por R$ 2.000,00. Havendo um aumento de 25% no preço de cada caixa, quantas caixas ele poderá comprar com a mesma quantia? 7. 80
8. Analise as afirmativas classificando-as em verdadeiro ou falso.
   a) 12% de R$ 400,00 correspondem a R$ 4,80. 8. a) F
   b) Obtém-se 40% de uma quantia multiplicando-a por 0,4. 8. b) V
   c) Três pessoas correspondem a 6% de um grupo de 50 pessoas. 8. c) V
   d) $\frac{2}{5} = 4\%$ 8. d) F
   e) Um preço X que sofre um desconto de 20% passa a ser $0{,}8 \cdot X$. 8. e) V
9. (UFG-GO) Analise os gráficos a seguir.



SUPERINTERESSANTE, São Paulo, ed. 314, jan. 2013, p. 66. (Adaptado).

De acordo com os gráficos apresentados, o número de pessoas que: 9. Alternativa **a**.
   a) sabem ler e escrever no Brasil é maior que no Japão.
   b) sabem ler e escrever no Peru é maior que no Brasil.
   c) não sabem ler e escrever no Japão é maior que no Peru.
   d) não sabem ler e escrever no Japão é maior que no Brasil.
   e) não sabem ler e escrever no Peru é maior que no Brasil.
10. (Unicamp-SP) Para repor o teor de sódio no corpo humano, o indivíduo deve ingerir aproximadamente 500 mg de sódio por dia. Considere que determinado refrigerante de 350 mL contém 35 mg de sódio. Ingerindo-se 1.500 mL desse refrigerante em um dia, qual é a porcentagem de sódio consumida em relação às necessidades diárias? 10. Alternativa **d**.
   a) 45% b) 60% c) 15% d) 30%
11. (Uerj) Um trem transportava, em um de seus vagões, um número inicial n de passageiros. Ao parar em uma estação, 20% desses passageiros desembarcaram. Em seguida, entraram nesse vagão 20% da quantidade de passageiros que nele permaneceu após o desembarque. Dessa forma, o número final de passageiros no vagão corresponde a 120. Determine o valor de n. 11. 125
12. As informações a seguir foram extraídas da Agência IBGE – Notícias.

PIB do Brasil nos últimos 10 anos (2013-2023)



Fonte: BELANDI, C. Com alta recorde da Agropecuária, PIB fecha 2023 em 2,9%*Agência IBGE de Notícias*, [Rio de Janeiro], 1 mar. 2024. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/39306-com-alta-recorde-da-agropecuaria-pib-fecha-2023-em-2-9. Acesso em: 28 ago. 2024.

Analise os dados e faça o que se pede.
   a) Explique o significado de PIB. 12. a) Produto Interno Bruto.
   b) Escreva uma frase que resuma as informações a respeito do PIB brasileiro no período mencionado. 12. b) Resposta pessoal.
13. Elabore um algoritmo para que uma pessoa, com uma calculadora simples, porém com a tecla % quebrada, possa calcular:
   a) 32% de 400 reais; 13. a) Resposta pessoal.
   b) 112% de 400 reais. 13. b) Resposta pessoal.

Para explorar

Esta é uma atividade para ser feita em grupo.

1. Pesquisem os significados dos seguintes índices: IGPM, INPC e IPCA. Para cada um deles descrevam a finalidade de sua utilização. 1. Resposta pessoal.
2. Apresentem, em porcentagem, esses três índices relativos ao último mês. 2. Resposta pessoal.
3. Elaborem uma tabela em planilha eletrônica contendo esses três índices acumulados, mês a mês, do último ano. 3. Resposta pessoal.
4. Em seguida, individualmente, cada um de vocês deve escrever um texto com base na comparação desses três índices acumulados, fazendo observações sobre suas finalidades. 4. Resposta pessoal.

Problemas de aumentos e descontos

O comércio de modo geral reflete a situação da economia de um país. Algumas vezes, devido ao baixo movimento do comércio, podemos ter momentos de recessão, ocasiões em que encontramos lojas vazias, como na imagem a seguir. Isso ocorre pelo baixo poder de compra dos consumidores.


Ernesto Reghran/Pulsar Imagens

Os centros comerciais refletem o *status* econômico do país. Na imagem, é possível observar o corredor vazio de um *shopping center*. Cornélio Procópio (PR), 2024.

Nesses momentos, é comum encontrarmos campanhas publicitárias acenando para bons descontos, feitas para atrair o consumidor.

Existem outros momentos de euforia no comércio por conta das datas comemorativas: Dia das Mães, Dia das Crianças, Páscoa, Natal etc. Nessas datas, também encontramos bons descontos.


bnetto/Shutterstock.com

Ovo de Páscoa.


Sarsmis/iStockphoto.com

Presentes de Natal.

Mas há um cuidado a ser tomado por parte de todos os consumidores. Algumas vezes, os descontos são ilusórios, pois conforme essas datas se aproximam os valores são aumentados em relação aos preços praticados. Nas datas especiais, o que se vê é um desconto sobre o valor recém-aumentado.

Nesse sentido, é fundamental que você compreenda alguns aspectos dessa Matemática Comercial, observando os descontos e acréscimos, por exemplo, de uma compra, e sabendo calculá-los.

Vamos exemplificar!

Utilizaremos algumas situações a seguir para conduzir procedimentos de cálculo envolvendo aumentos e descontos, algumas vezes aumentos e descontos sucessivos. Analise cada uma das situações e, caso tenha alguma maneira diferente de resolvê-las, apresente-a aos demais colegas.

Atividades resolvidas

6. Adriane comprou um computador pelo preço de R$ 2.800,00. Uma semana depois observou que, se tivesse esperado um pouco mais, conseguiria comprar o mesmo computador por um preço menor, pois a loja anunciou um desconto de 7% sobre R$ 2.800,00. Qual é o valor do computador com esse desconto?

- Uma maneira de calcular é usar a proporção para descobrir inicialmente o valor do desconto:

Percentual	Valor em reais
100	2 800
7	x

Conforme proporção:

$$\frac{100}{7} = \frac{2\,800}{x}$$

$$100 \cdot x = 7 \cdot 2\,800$$

$$x = \frac{19\,600}{100} \Rightarrow x = 196$$

- Fazendo a diferença, podemos obter o valor do computador com o desconto de 7%:

$$2\,800 - 196 = 2\,604$$

Portanto, o computador custa R$ 2.604,00 com o desconto.

Para pensar e discutir

1. Se o desconto é de 7%, qual percentual corresponde ao valor após o desconto em relação ao valor inicial?
1. 93%

2. Por qual número decimal devemos multiplicar 2 800 para obtermos o novo valor após o desconto de 7%?
2. 0,93

7. Uma bicicleta estava anunciada pelo valor de R$ 1.800,00, mas o lojista aumentou esse valor em 15%. Uma semana depois, o lojista resolveu dar um desconto de 10% sobre o último preço.

Mauro Salgado

a) Qual é o valor da bicicleta após o aumento de 15%?

b) E qual é o valor da bicicleta após o desconto de 10%?

c) Comparando o valor final da bicicleta com o valor inicial, houve aumento ou desconto? Qual foi o percentual?

- Item **a**. Como o aumento é de 15%, o novo valor passará a ser 115% (100% + 15%) do valor anterior. Assim, para atualizar o valor (valor já com o aumento), basta multiplicá-lo por 1,15, isto é:

$$115\% \text{ de } 1\,800 = \left(\frac{100}{100} + \frac{15}{100}\right) \cdot 1\,800$$

$$115\% \text{ de } 1\,800 = \left(\frac{115}{100}\right) \cdot 1\,800$$

$$115\% \text{ de } 1\,800 = 1{,}15 \cdot 1800 = 2\,070$$

- Item **b**. Como o desconto é de 10%, o novo valor passará a ser 90% (100% – 10%) do valor anterior. Assim, para atualizar o valor (valor já com o desconto), basta multiplicá-lo por 0,90, isto é:

$$90\% \text{ de } 2\,070 = \left(\frac{100}{100} - \frac{10}{100}\right) \cdot 2\,070$$

$$90\% \text{ de } 2\,070 = \left(\frac{90}{100}\right) \cdot 2\,070$$

$$90\% \text{ de } 2\,070 = 0{,}90 \cdot 2\,070 = 1\,863$$

- Item **c**. Apontamos aqui duas maneiras diferentes de determinar o que aconteceu percentualmente após o aumento e o desconto:

  1ª maneira: dividimos o valor final pelo valor inicial

$$\frac{1\,863}{1\,800} = 1,035$$

$$\frac{1\,863}{1\,800} = 1 + 0,035 \Rightarrow \text{Aumento de } 3,5\%$$

  2ª maneira: multiplicamos 1,15 por 0,90 (aumento de 15% seguido de um desconto de 10%)

$$1,15 \cdot 0,90 = 1,035$$

$$1,15 \cdot 0,90 = 1 + 0,035 \Rightarrow \text{aumento de } 3,5\%$$

  Portanto, após um aumento de 15% e um desconto de 10% o valor da bicicleta teve um aumento de 3,5%.

Para pensar e discutir

1. Na resolução, escrevemos 1 + 0,035: percentualmente o que significam os números 1 e 0,035? 1. 100% e 3,5%
2. Se na situação anterior fosse inicialmente dado um desconto de 10% e, sobre o novo valor, fosse dado um aumento de 15%, alteraria o valor final da bicicleta? 2. Não.

8. Ana comprou um carro usado por R$ 25.000,00 e, após 1 ano de uso, anunciou a venda com um desconto de 10%. Entretanto, passado algum tempo sem conseguir vender, anunciou um novo desconto de 5% sobre o último valor. Por quanto Ana está vendendo seu carro?

Reinaldo Vignati

R$ 25.000,00 ⟶ desconto de 10% ⟶ desconto de 5%

- Cálculo do valor do carro após um desconto de 10% (o carro valerá 90% do valor):

$$90\% \text{ de } 25\,000,00 = 0,90 \cdot 25\,000,00$$

$$90\% \text{ de } 25\,000,00 = 22\,500,00 \Rightarrow \text{R\$ } 22.500,00$$

- Cálculo do novo valor após um desconto de 5% (o carro valerá 95% do valor anterior):

$$95\% \text{ de } 22\,500,00 = 0,95 \cdot 22\,500,00$$

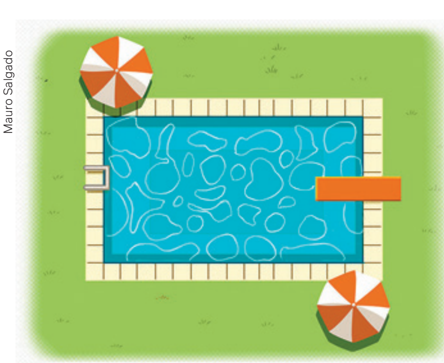
$$95\% \text{ de } 22\,500,00 = 21\,375,00 \Rightarrow \text{R\$ } 21.375,00$$

Para pensar e discutir

1. Dois descontos sucessivos de 10% e de 5% correspondem a um único desconto de 15%? 1. Não.
2. Qual será o valor do carro de Ana após um desconto de 15% em relação ao valor R$ 25.000,00? 2. R$ 21.250,00
3. Dois descontos sucessivos de 10% e de 5% correspondem a um só desconto de quanto em porcentagem? Explique. 3. 14,5%; resposta pessoal.

9. A imagem a seguir representa o croqui inicial de uma piscina que deverá ser construída no terreno de uma casa. A piscina terá 8 m de comprimento por 4 m de largura.

Mauro Salgado



Antes de construir, o proprietário decidiu ampliar em 3 m o comprimento e em 1 m a largura. Qual será o aumento percentual da área da piscina em relação ao projeto inicial?

- Uma maneira é calcularmos a área inicial, a área final e verificarmos quanto de área aumentará:

Área inicial:
$A_i = (8 \text{ m}) \cdot (4 \text{ m}) = 32 \text{ m}^2$

Área final:
$A_f = (8 \text{ m} + 3 \text{ m}) \cdot (4 \text{ m} + 1 \text{ m}) = (11 \text{ m}) \cdot (5 \text{ m}) = 55 \text{ m}^2$

Aumento na área:
$A_f - A_i = 55 \text{ m}^2 - 32 \text{ m}^2 = 23 \text{ m}^2$

- Para saber quanto percentualmente será o aumento, calculamos o que a área aumentada de 23 m² representa em relação a área inicial de 32 m²:

$$\frac{23 \text{ m}^2}{32 \text{ m}^2} = \frac{23}{32} = 0,71875 \cong 0,72 = 72\%$$

Portanto, haverá um aumento de aproximadamente 72% na área da piscina.

Para pensar e discutir

1. Qual é o percentual de aumento no comprimento da piscina? 1. 37,5%
2. E na largura da piscina? 2. 25%
3. Com base nesses percentuais, como você poderá calcular o aumento percentual na área da piscina?
3. Resposta pessoal.

No exemplo da piscina tivemos de fazer um cálculo para determinar o percentual de aumento da área da piscina. Na Matemática Comercial, esse percentual calculado é conhecido como **variação percentual**.

Se uma grandeza tem o valor inicial V_i (em uma data inicial) e o valor final V_f (em uma data futura), chamamos de **variação percentual *p*** dessa grandeza o seguinte quociente:

$$p = \frac{V_f - V_i}{V_i}$$

Observações:

1. p é a variação percentual dessa grandeza no período considerado, expressa na forma decimal.
2. Se $p > 0$, dizemos que p representa a taxa percentual de crescimento (ou acréscimo) da grandeza.
3. Se $p < 0$, dizemos que p representa a taxa percentual de decrescimento (ou decréscimo) da grandeza.

Retomando a situação apresentada no exemplo anterior, podemos calcular a variação percentual da área da piscina com o aumento das medidas de comprimento e largura:

$$p = \frac{V_f - V_i}{V_i}$$

$$p = \frac{55 - 32}{32} = \frac{23}{32} = 0,71875 \cong 0,72 = 72\%$$

10. Vamos retomar a questão apresentada no início do capítulo sobre o PIB brasileiro:

O PIB do Brasil em 2023 foi de 10,9 trilhões de reais.

O PIB do Brasil em 2022 foi de 9,9 trilhões de reais.

Qual foi a variação percentual do PIB do Brasil de 2022 para 2023?

- Considerando o PIB de 2022 como valor inicial e o PIB de 2023 como valor final, temos a variação percentual p do PIB nesse período dada por:

$$p = \frac{V_{2023} - V_{2022}}{V_{2022}}$$

$$p = \frac{10,9 \text{ trilhões } - 9,9 \text{ trilhões}}{9,9 \text{ trilhões}} = \frac{10,9 - 9,9}{9,9} = \frac{1}{9,9} \cong 0,10 = 10\%$$

Houve um aumento de 10% aproximadamente no PIB do Brasil no período de 2022 para 2023.

Atividades

14. Responda ao que se pede.

a) Quando multiplicamos uma grandeza x por $(1 + 0{,}07)$, essa grandeza está sendo aumentada em quanto por cento? 14. a) 7%

b) Quando multiplicamos uma grandeza x por $(1 - 0{,}07)$, essa grandeza está sendo diminuída em quanto por cento? 14. b) 7%

c) Se i indica um percentual, qual é o significado de multiplicar uma grandeza x por $(1 + i)$? E por $(1 - i)$?
14. c) Um aumento e uma diminuição em *i* por cento, respectivamente.

15. Em uma livraria foi feito o lançamento de um livro de Educação Financeira. Observe o cartaz colocado na vitrine e responda: Qual desconto percentual está anunciado nessa promoção? 15. 32%

Mauro Salgado

16. Um vendedor de carros informou ao seu cliente que aquele tipo de carro zero que ele estava comprando por R$ 69.000,00 chega a desvalorizar aproximadamente 15% após o primeiro ano de uso. Assim, qual será o valor desse carro após um ano de uso? 16. R$ 58.650,00

17. Em uma promoção do tipo "pague 3 e leve 4", qual desconto é oferecido sobre cada unidade do produto vendida? 17. 25%

18. Utilize uma calculadora para responder aos itens a seguir.

a) Dois aumentos consecutivos de 5% e de 2% sobre determinado valor é o mesmo que um aumento de quanto por cento? 18. a) 7,1%

b) Dois descontos consecutivos de 5% e de 2% sobre determinado valor é o mesmo que um desconto de quanto por cento? 18. b) 6,9%

19. Calcule e escreva na forma decimal em função de V:

a) Quanto vale 20% de 40% de determinado valor V? 19. a) $0{,}08V$

b) Quanto vale 15% de 30% de determinado valor V? 19. b) $0{,}045V$

20. O lucro de uma empresa no ano de 2023 foi de R$ 560.000,00. Responda:

a) Qual será o lucro dessa empresa no ano de 2024 se houver um crescimento de 4% em relação a 2023?
20. a) R$ 582.400,00

b) Qual será o lucro dessa empresa no ano de 2024 se houver um decrescimento de 4% ao lucro de 2023?
20. b) R$ 537.600,00

21. Os dois lucros da atividade anterior podem ser obtidos com o uso de calculadora utilizando em cada caso apenas uma multiplicação. Explique. 21. Resposta pessoal.

22. Luana comprou no início de 2022 um carro pelo valor de R$ 52.000,00. No início de 2023 esse carro sofreu uma desvalorização de 9% em relação ao valor de 2022 e no início de 2024 outra desvalorização de 5% em relação ao início de 2023. Então:

a) Qual era o valor do carro no início de 2024? 22. a) R$ 44.954,00

b) Do início de 2022 ao início de 2024, qual foi o percentual de desvalorização do carro? 22. b) 13,55%

23. (Uespi) Maria comprou uma blusa e uma saia em uma promoção. Ao término da promoção, o preço da blusa aumentou 30%, e o da saia, 20%. Se comprasse as duas peças pelo novo preço, pagaria no total 24% a mais. Quanto mais caro foi o preço da saia em relação ao preço da blusa? 23. Alternativa **e**.

a) 42% **b)** 44% **c)** 46% **d)** 48% **e)** 50%

24. (Ufal) Dois eletrodomésticos foram comprados por um total de R$ 3.500,00. Se um desconto de 10% fosse dado no preço do primeiro eletrodoméstico e um desconto de 8% fosse dado no preço do segundo, o preço total dos eletrodomésticos seria de R$ 3.170,00. Quanto se pagou pelo primeiro eletrodoméstico? 24. Alternativa **b**.

a) R$ 2.400,00 **b)** R$ 2.500,00 **c)** R$ 2.600,00 **d)** R$ 2.650,00 **e)** R$ 2.700,00

25. (IFCE) João gastava mensalmente 10% do seu salário com o plano de saúde da família. Um aumento de 15% no preço desse serviço proporcionou um acréscimo de R$ 120,00 em suas despesas mensais. 25. Alternativa **e**.
O salário de João, em reais, é:

a) 12 500. **b)** 10 850. **c)** 10 000. **d)** 8 250. **e)** 8 000.

26. Esta é uma atividade para você fazer em dupla com um colega. 26. Resposta pessoal.

- Pesquisem em *sites* de busca o PIB do seu estado e o PIB do Brasil nos anos 2013 e 2023.
- Calculem a variação percentual do PIB do estado e a variação percentual do PIB do Brasil nesse período.
- Elaborem um gráfico ou uma tabela com o auxílio de planilhas eletrônicas contendo os dados da pesquisa.
- Escrevam um pequeno texto analisando o PIB do estado nesse período e depois comparando com o PIB do Brasil no mesmo período.

27. (Vunesp) Se a taxa de inflação de janeiro é de 6% e a de fevereiro é de 5%, então a taxa de inflação no bimestre janeiro/fevereiro é de: 27. Alternativa **d**.

a) 11%.
b) 11,1%.
c) 11,2%.
d) 11,3%.
e) 11,4%.

28. Elabore uma situação similar à questão anterior alterando o percentual. Apresente a situação para que um colega a resolva. 28. Resposta pessoal.

29. (Integrado-PR) Qual é o valor correto para 30% de 50% de 40%? 29. Alternativa **a**.

a) 6%
b) 60%
c) 0,6%
d) 0,06%
e) 600%

30. (UFMS) Num período de três semanas, as ações de determinada empresa tiveram duas altas sucessivas, de 10% e 8%, mas, devido a notícias negativas veiculadas pela mídia, registrou-se uma queda de suas cotações em 50%. Em relação aos seus valores iniciais, tais ações sofreram uma diminuição igual a: 30. Alternativa **c**.

a) 59,4%
b) 50,0%
c) 40,6%
d) 32,0%
e) 28,8%

31. (CMR-RJ) Um comerciante adquiriu um fogão, ao custo de R$ 840,00, para revender em sua loja. Ele quer vender o fogão por um preço de modo que possa oferecer 20% de desconto ao cliente, sobre o valor anunciado na loja, e, ainda assim, obter um lucro de 20% sobre o preço de custo. Então o valor anunciado na loja deverá ser

a) R$ 880,00
b) R$ 1.008,40
c) R$ 1.176,00
d) R$ 1.209,60
e) R$ 1.260,00

31. Alternativa **e**.

32. (Enem) Um professor tem uma despesa mensal de 10% do seu salário com transporte e 30% com alimentação. No próximo mês, os valores desses gastos sofrerão aumentos de 10% e 20%, respectivamente, mas o seu salário não terá reajuste. Com esses aumentos, suas despesas com transporte e alimentação aumentarão em R$ 252,00. O salário mensal desse professor é de 32. Alternativa **d**.

a) R$ 840,00
b) R$ 1.680,00
c) R$ 2.100,00
d) R$ 3.600,00
e) R$ 5.200,00

33. (Enem) No rótulo de uma lata com 350 mL de refrigerante, é possível descobrir que o valor energético é de 85 kcal (quilocalorias) a cada 200 mL de refrigerante. Por recomendação de um nutricionista, um paciente que consumia em sua dieta 2 800 kcal por dia mudou o hábito de consumir o conteúdo de 2 latas desse refrigerante por dia para consumir 2 latas de suco, cujo rótulo indicava um valor energético de 25 kcal por lata.
Em relação à sua dieta original, o consumo energético diário do paciente diminuiu, em porcentagem, o valor mais próximo de 33. Alternativa **d**.

a) 2,1
b) 4,2
c) 4,4
d) 8,8
e) 10,6

34. (Fuvest-SP) Um comerciante adotou como forma de pagamento uma máquina de cartões, cuja operadora cobra uma taxa de 6% em cada venda. Para continuar recebendo exatamente o mesmo valor por cada produto, ele resolveu aplicar um reajuste nos preços de todos os produtos da loja. Se P era o valor de uma mercadoria antes da adoção da máquina, o novo valor V deve ser calculado por: 34. Alternativa **d**.

a) $V = P + 0,06$
b) $V = 0,94 \cdot 1,06 \cdot P$
c) $V = 1,06 \cdot P$
d) $V = \dfrac{P}{0,94}$
e) $V = 0,94 \cdot P$

35. (Unifor-CE) O proprietário de uma clínica médica resolveu fazer uma reforma durante um final de semana para não ter que desmarcar as consultas agendadas de seus clientes. No sábado, os empregados da empresa contratada, trabalhando 8 horas, conseguem completar 40% do serviço. Para terminar o serviço no domingo, trabalhando o mesmo número de horas, a equipe deve ser aumentada em 35. Alternativa **d**.

a) 20%
b) 30%
c) 40%
d) 50%
e) 60%

Análise e contexto

Educação Financeira para jovens

Ao iniciar este capítulo, falamos brevemente sobre uma necessidade cada vez maior de levarmos em conta as questões voltadas à **Educação Financeira**. Nesse sentido, propomos inicialmente a leitura do texto a seguir, que sugerimos ser feita em duplas.

Conheça a importância da educação financeira para jovens

No Brasil, a educação financeira ainda é um assunto pouco debatido, tanto no âmbito das escolas quanto no próprio contexto familiar. Entretanto, muito embora uma discussão aberta a respeito do tema ainda não seja tão comum, esse é um assunto extremamente importante.

Você deve estar se perguntando: “mas, afinal, o que é educação financeira e por que ela é tão importante?”.

Educação financeira é todo o processo que envolve o desenvolvimento de uma compreensão a respeito da relação mantida com o dinheiro. Ou seja, trata-se do domínio e do conhecimento acerca do dinheiro e da melhor postura a ser adotada quando o assunto é a gestão econômica pessoal.

A má educação financeira costuma se refletir na dificuldade de controle do dinheiro, no excesso de dívidas e no consumo exagerado e desnecessário. Ninguém deseja isso nem para si e muito menos para os próprios filhos, não é mesmo?

Por isso, educar os jovens desde cedo é de extrema importância para melhorar as suas perspectivas, possibilitando um futuro mais confortável e seguro. Confira a seguir os principais benefícios da educação financeira para os jovens:

Prepara o jovem para o futuro

Investir em educação financeira permite vislumbrar um cenário além do presente, construindo um conhecimento que será útil para toda a vida adulta. Dessa forma, o conhecimento ajuda a preparar o jovem para o seu futuro, entendendo qual deve ser a sua relação com o dinheiro e quais serão as melhores formas de se planejar para usá-lo de maneira inteligente e promissora.

Assim como toda educação, o conhecimento adquirido será empregado durante toda a vida adulta.

Fortalece a capacidade de autoconhecimento

Outro benefício da educação financeira para os jovens é que ela permite o fortalecimento da capacidade de autoconhecimento. Ao lidar com dinheiro o jovem começa a compreender quais são os seus hábitos de consumo e de que forma eles refletem em suas finanças e até mesmo em sua vida pessoal.

Dessa forma, ele tem maiores condições de se planejar e de estipular estratégias que possam ajudá-lo a evitar problemas financeiros, levando em consideração as suas necessidades e suas características individuais.

Desenvolve a autonomia

Os jovens que têm acesso à educação financeira apresentam maior autonomia para lidar com o seu dinheiro. Isso significa que eles têm condições maiores de “se virar” quando o assunto é planejamento, consumo e investimentos.

A autonomia é extremamente importante na formação de indivíduos responsáveis e independentes.

Estimula a Responsabilidade Social

Essencialmente, a responsabilidade social está vinculada à formação de comportamentos, ações e posturas que promovam o bem-estar de um conjunto de pessoas.

Ainda, a orientação financeira está diretamente relacionada à responsabilidade social, uma vez que a gestão econômica é um fator que afeta diretamente o bem-estar de grupos sociais.

Nesse sentido, o estímulo à educação também é um estímulo ao desenvolvimento da responsabilidade social.

A educação financeira pode ser estimulada em diversas frentes, e hoje existem diversos canais que podem ajudar no desenvolvimento de comportamentos sustentáveis por parte dos jovens.

Além disso, a tecnologia é uma grande aliada do assunto, já que hoje é possível contar com diversos aplicativos de controle financeiro que surgiram com o escopo de facilitar a vida das pessoas e auxiliar na gestão financeira pessoal e familiar.

Foi possível entender como a educação financeira é importante para o futuro dos jovens, não é mesmo? É importante para eles ter um controle e uma boa relação com o dinheiro, a fim de garantir uma vida mais confortável e segura no futuro.

CONHEÇA a importância da [...]. *In*: A ESCOLHA CERTA. [*S. l.*: *s. n.*], 25 jun. 2018. Disponível em: http://www.aescolhacerta.com.br/conheca-a-importancia-da-educacao-financeira-para-jovens/. Acesso em: 20 set. 2024.

1. Após a leitura do artigo, escreva um texto relatando um exemplo de sua vida cotidiana que represente:
- uma situação de má educação financeira; Respostas pessoais.
- uma situação de boa educação financeira.

2 Matemática Financeira

A compra de uma casa, a aquisição de um aparelho celular, a venda de um terreno, a decisão de fazer um financiamento em uma instituição financeira, o planejamento das finanças ao longo do tempo e o pagamento de multa pelo atraso na quitação da conta de energia são alguns exemplos de situações relacionadas ao estudo de Matemática Financeira.

Considere, por exemplo, que você irá comprar um aparelho de TV que está anunciado pelo valor de R$ 4.000,00, mas em duas condições, como mostra a imagem a seguir.

Reinaldo Vignati

Acervo editora

OPÇÃO 1

À VISTA: DESCONTO DE 10%
SOBRE O VALOR ANUNCIADO

OPÇÃO 2

EM 2 × IGUAIS SEM DESCONTO
E SEM ACRÉSCIMO NO PREÇO
ANUNCIADO:
ENTRADA + PARCELA EM 30 DIAS

Para pensar e discutir

1. Qual opção você escolheria? 1. A opção 1 é mais vantajosa.

2. Escolhendo a opção 2, você pagaria juros de quanto por cento? 2. 25% ao mês

A situação apresentada exige uma tomada de decisão que leva em conta aspectos relacionados ao conhecimento sobre juros. Voltaremos a ela ainda nesta unidade.

Juros simples

Ao solicitar um empréstimo em uma instituição financeira, você deverá ter em mente que, além da quantia emprestada, deverá pagar outra, denominada juros. Esse termo é bem conhecido e, além da situação de empréstimo, existem outras bem corriqueiras em que é empregado. Veja a seguir.

FJZEA/Shutterstock.com

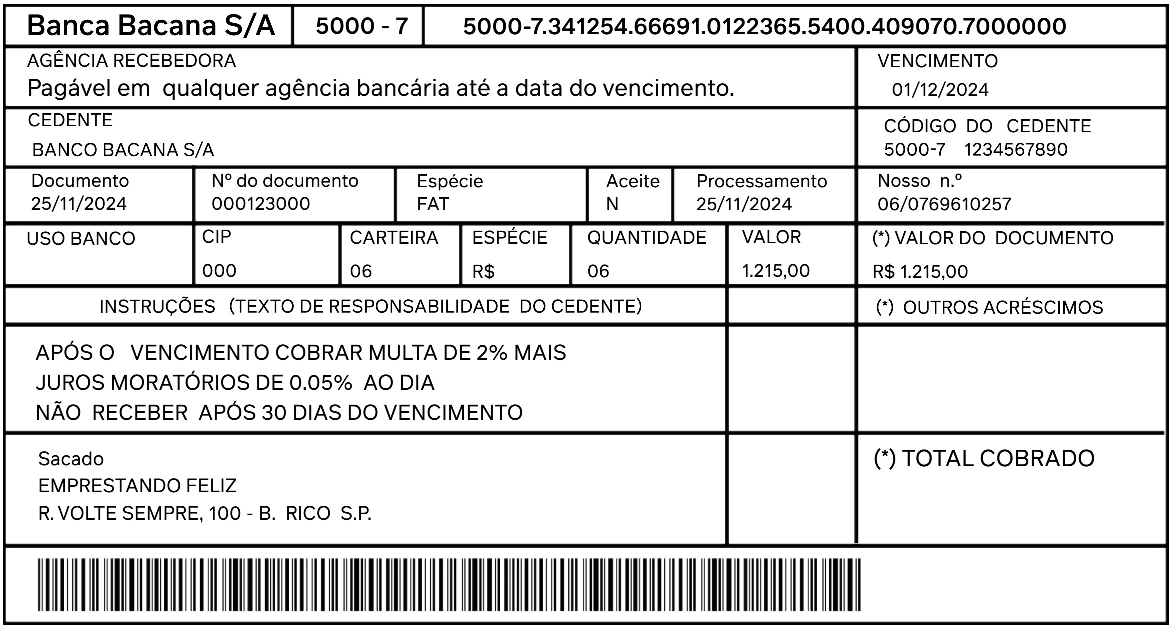
Ao optar por soluções financeiras como o empréstimo, é necessário checar os juros envolvidos e o valor final a ser pago considerando taxas e encargos adicionados.

- Se você pagar uma conta de energia elétrica fora do prazo de vencimento, além do valor cobrado inicialmente, são acrescidos multa e juros pelo pagamento em atraso.
- Se você deixar uma quantia aplicada durante certo período em um banco, seu saldo aumentará em uma quantia que nada mais é do que os juros.
- Se você está com saldo negativo no banco durante certo período, a instituição financeira cobrará juros, pois “emprestou” dinheiro a você.

Observe, como exemplo, um boleto fictício de cobrança. Identifique as seguintes informações neste boleto:

- data de vencimento;
- valor do documento;
- instruções sobre pagamentos após o vencimento.

Mauro Salgado



Banca Bacana S/A | 5000 - 7 | 5000-7.341254.66691.0122365.5400.409070.7000000

AGÊNCIA RECEBEDORA
Pagável em qualquer agência bancária até a data do vencimento.

VENCIMENTO
01/12/2024

CEDENTE
BANCO BACANA S/A

CÓDIGO DO CEDENTE
5000-7 1234567890

Documento	Nº do documento	Espécie	Aceite	Processamento	Nosso n.º
25/11/2024	000123000	FAT	N	25/11/2024	06/0769610257

USO BANCO	CIP	CARTEIRA	ESPÉCIE	QUANTIDADE	VALOR	(*) VALOR DO DOCUMENTO
	000	06	R$	06	1.215,00	R$ 1.215,00

INSTRUÇÕES (TEXTO DE RESPONSABILIDADE DO CEDENTE)

(*) OUTROS ACRÉSCIMOS

APÓS O VENCIMENTO COBRAR MULTA DE 2% MAIS
JUROS MORATÓRIOS DE 0.05% AO DIA
NÃO RECEBER APÓS 30 DIAS DO VENCIMENTO

Sacado
EMPRESTANDO FELIZ
R. VOLTE SEMPRE, 100 - B. RICO S.P.

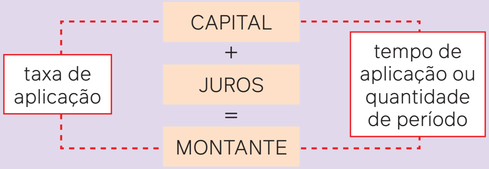
(*) TOTAL COBRADO

Para pensar e discutir

1. Qual é o valor a ser pago pelo sacado se ele pagar em 02/12/2024? Quais serão os valores da multa e dos juros? 1. R$ 1.239,91; R$ 24,30; R$ 0,61
2. E se ele pagar com 28 dias de atraso, qual será o valor da multa, dos juros pelo atraso e o total a pagar? 2. R$ 24,30; R$ 17,01; R$ 1.256,31

Aqui abordaremos o cálculo de juros simples e, logo a seguir, de juros compostos. Nos dois casos utilizaremos algumas denominações da Matemática Financeira com as quais você precisa se familiarizar.

$C \rightarrow$ **Capital**: é o valor inicial de um empréstimo, de uma dívida ou de um investimento.
$i \rightarrow$ **Taxa de juros**: é a taxa expressa em forma percentual por período. Exemplos: 5% a.a. (5% ao ano); 3% a.m. (3% ao mês).
$J \rightarrow$ **Juros**: são os valores obtidos quando aplicamos a taxa sobre o capital no período considerado.
$n \rightarrow$ **Tempo**: quantidade de períodos em que o capital é aplicado.
$M \rightarrow$ **Montante**: é o valor correspondente ao capital acrescido dos juros auferidos: $M = C + J$.



Observações:

1. Na modalidade de juros simples, o percentual é calculado apenas sobre o **valor inicial**, isto é, sobre o capital inicial.
2. A taxa e a quantidade de períodos de aplicação devem ser expressos na mesma unidade de tempo, ou seja, se o tempo for expresso em anos, a taxa deverá ser em % ao ano (% a.a.); se o tempo for expresso em meses, a taxa deverá ser % ao mês (% a.m.) etc.

Analise, a seguir, duas situações relacionadas a juros simples.

Atividades resolvidas

11. Considere que você emprestou R$ 10.000,00 de um amigo a uma taxa fixa de 1% na modalidade juros simples, isto é, a cada mês será cobrado 1% sobre o valor de R$ 10.000,00. Esse empréstimo será totalmente pago ao final de 5 meses. Obtenha, mês a mês, os montantes correspondentes.

- No quadro, vamos observar, mês a mês, os juros e os montantes correspondentes, considerando que não houve nenhum pagamento ao longo do período.

Período	Cálculo dos juros	Juros	Montante
1º mês	$0{,}01 \cdot 10\,000{,}00$	R$ 100,00	R$ 10.100,00
2º mês	$0{,}01 \cdot 10\,000{,}00$	R$ 100,00	R$ 10.200,00
3º mês	$0{,}01 \cdot 10\,000{,}00$	R$ 100,00	R$ 10.300,00
4º mês	$0{,}01 \cdot 10\,000{,}00$	R$ 100,00	R$ 10.400,00
5º mês	$0{,}01 \cdot 10\,000{,}00$	R$ 100,00	R$ 10.500,00

No quadro, $0{,}01 \cdot 10\,000$ corresponde a 1% de R$ 10.000,00, isto é, R$ 100,00.

Para pensar e discutir

1. Os juros foram calculados, mês a mês, sobre qual valor? 1. R$ 10.000,00

2. Como se dá o crescimento do montante mês a mês? 2. R$ 100,00 (1% de R$ 10.000,00)

12. Um capital de R$ 8.000,00, aplicado a uma taxa de juros simples de 7% ao ano, resultou em um montante de R$ 13.040,00 ao final de alguns anos. Determine a quantidade de anos que esse capital ficou aplicado.

- Cálculo dos juros correspondentes:

$$M = C + J$$
$$13\,040 = 8\,000 + J \Rightarrow J = 5\,040$$

- Cálculo dos juros por ano:

$$0{,}07 \cdot 8\,000 = 560$$

- Quantidade de períodos de aplicação (anos de aplicação):

$$n \cdot 560 = 5\,040$$
$$n = \frac{5\,040}{560} \Rightarrow n = 9$$

Portanto, a aplicação foi feita por 9 anos.

Agora, vamos generalizar esse tipo de situação envolvendo o cálculo do montante de uma aplicação na modalidade de juros simples.

Consideremos um **capital *C***, aplicado a **juros simples** à **taxa de *i*** por período (*i* expresso na forma decimal), durante ***n* períodos**. Vamos calcular o montante correspondente.

- Cálculo dos juros ao longo dos períodos:

1 período: $J_1 = i \cdot C$
2 períodos: $J_2 = (i \cdot C) \cdot 2 = 2iC$
3 períodos: $J_3 = (i \cdot C) \cdot 3 = 3iC$
4 períodos: $J_4 = (i \cdot C) \cdot 4 = 4iC$
...
n períodos: $J = (i \cdot C) \cdot n = niC$

Cálculo do montante ao final de n períodos:

$$M_n = C + J_n$$
$$M_n = C + niC \Rightarrow M_n = C \cdot (1 + ni)$$

O montante M gerado por um capital C que foi aplicado na modalidade de juros simples durante n períodos a uma taxa fixa i é dado por

$$\boldsymbol{M_n = C \cdot (1 + n \cdot i)},$$

em que i e n são expressos na mesma unidade de tempo.

Para pensar e discutir

1. Na modalidade juros simples, qual é o resultado de $\frac{J}{n}$, sendo J os juros e n o número de períodos de aplicação? 1. Valor correspondente aos juros do 1º período.

2. Triplicando a quantidade de períodos de aplicação em juros simples, o que ocorre com os juros? 2. Triplica.

13. Um capital foi aplicado a 2% ao mês (a.m.) a juros simples. Calcule o tempo necessário para que essa aplicação gere um montante igual ao dobro do capital investido.

- Considerando a relação matemática anterior e fazendo $M = 2C$, temos:

$$M = C \cdot (1 + n \cdot i)$$
$$\downarrow i = 0{,}02$$
$$2 \cdot C = C \cdot (1 + n \cdot 0{,}02)$$
$$2 = 1 + n \cdot 0{,}02$$
$$1 = 0{,}02 \cdot n$$
$$\frac{1}{0{,}02} = n$$
$$\frac{100}{2} = n \Rightarrow n = 50$$

Portanto, o tempo é de 50 meses, isto é, 4 anos e 2 meses.

14. Uma dívida de R$ 130.000,00 foi paga 5 meses após ter sido contraída na modalidade de juros simples. Considerando que os juros pagos foram de R$ 7.800,00, qual foi a taxa mensal de juros?

- Aqui podemos utilizar apenas a relação matemática que fornece os juros:

$$J = C \cdot i \cdot n$$
$$7\,800 = 130\,000 \cdot i \cdot 5$$
$$\frac{7\,800}{650\,000} = i \Rightarrow i = 0{,}012 = 1{,}2\%$$

Portanto, a taxa foi de 1,2% ao mês.

Juros simples, progressão aritmética e função afim

Agora, vamos analisar uma situação de empréstimo a juros simples.

Um empréstimo no valor de R$ 20.000,00 foi feito entre duas pessoas, na modalidade de juros simples, a uma taxa fixa mensal de 1,5%. Vamos obter duas relações matemáticas: juros em função do número n de meses de empréstimo; montante em função do número n de meses de empréstimo.

Utilizando a relação matemática para o cálculo de juros simples J em função do número de meses n, temos:

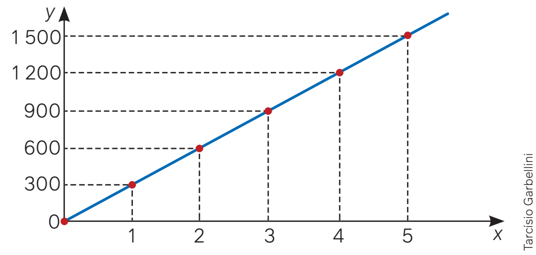
$$J = n \cdot i \cdot C$$
$$J = n \cdot 0{,}015 \cdot 20\,000$$
$$\underbrace{J = 300n}$$

→ Juros em função do número de meses de empréstimo.

Observe que $J = f(n) = 300n$ é uma função, sendo n um número natural que indica o número de meses. Assim, atribuindo valores a n, podemos calcular os juros correspondentes:

n	$J = f(n) = 300n$
0	$J = f(0) = 300 \cdot 0 = 0$
1	$J = f(1) = 300 \cdot 1 = 300$
2	$J = f(2) = 300 \cdot 2 = 600$
3	$J = f(3) = 300 \cdot 3 = 900$
4	$J = f(4) = 300 \cdot 4 = 1\,200$
5	$J = f(5) = 300 \cdot 5 = 1\,500$

Ao representar esses valores em um plano cartesiano, observamos que os pontos correspondentes estão alinhados, pois estamos diante de uma função conhecida como **função linear**. Note que, como n é natural, o gráfico é constituído de pontos isolados.



Toda função da forma $\boldsymbol{y = f(x) = ax}$, com a diferente de zero, é dita **função linear**. Se o domínio dessa função é real, o gráfico é uma reta que passa pela origem. Uma função linear é um caso particular de uma **função afim** da forma:

$$\boldsymbol{y = f(x) = ax + b}$$

Para pensar e discutir

1. Qual é a taxa de crescimento da função afim correspondente na situação apresentada? 1. 300

2. As grandezas J e n representadas no gráfico são diretamente proporcionais. Qual é a constante de proporcionalidade? 2. 300

Ao retomarmos a situação anterior, e analisarmos mês a mês a evolução do **montante**, observamos que eles formam um padrão.

Vamos obter o montante M em função do número de meses n:

$$M = C + J$$
$$\underbrace{M = 20\,000 + 300n}_{\text{montante em função do número de meses de empréstimo}}$$

Observe que $M = f(n) = 20\,000 + 300n$ é uma função afim, sendo n um número natural que indica o número de meses. Assim, atribuindo valores a n, podemos calcular os montantes correspondentes:

n	$M = f(n) = 20\,000 + 300n$
0	$M = f(0) = 20\,000 + 300 \cdot 0 = 20\,000$
1	$M = f(1) = 20\,000 + 300 \cdot 1 = 20\,300$
2	$M = f(2) = 20\,000 + 300 \cdot 2 = 20\,600$
3	$M = f(3) = 20\,000 + 300 \cdot 3 = 20\,900$
4	$M = f(4) = 20\,000 + 300 \cdot 4 = 21\,200$
5	$M = f(5) = 20\,000 + 300 \cdot 5 = 21\,500$

Como os montantes aumentam de 300 reais em 300 reais, eles formam uma sequência denominada **progressão aritmética**.

Progressão aritmética é uma sequência de termos em que cada um, a partir do segundo, é o anterior adicionado a uma constante. A constante é a razão da progressão aritmética.

Observações:

1. A sequência formada pelos juros é uma progressão aritmética de razão correspondente ao juro simples cobrado mês a mês, ou seja, $i \cdot C$.

2. A sequência formada pelos montantes (M_1, M_2, M_3, ..., M_n) também é uma progressão aritmética de razão também igual ao juro cobrado mês a mês, isto é, $i \cdot C$.

Para explorar

Junte-se a dois colegas para resolver as atividades a seguir.

Parte 1

Analisem o quadro da página anterior para os valores dos montantes M em função do número de meses n representado por $M = 20\,000 + 300n$ e façam o que se pede a seguir.

1. Em uma folha de papel, representem o plano cartesiano e nele esbocem o gráfico de M em função de n. 1. Resposta no Manual do Professor.

2. Com base no quadro e no gráfico, elaborem um texto explicando como os montantes variam em função do número de meses. Comentem a taxa de crescimento da função e analisem se as grandezas montante e número de meses são diretamente proporcionais. 2. Resposta pessoal.

Parte 2

Simulem dois empréstimos de um mesmo valor. Um desses empréstimos foi tomado de uma pessoa *A* com uma taxa mensal fixa de juros simples de 1,2% durante 10 meses. O segundo empréstimo foi tomado de uma pessoa *B* com taxa fixa mensal de juros simples de 1,1% durante 12 meses. Diante disso, façam o que se pede.

1. Elaborem uma tabela com o auxílio de planilha eletrônica exibindo, mês a mês, os juros e os montantes correspondentes de cada um dos empréstimos. 1. Resposta no Manual do Professor.

2. Apresentem essa planilha impressa para outro grupo conferir, enquanto conferem a elaborada por ele. 2. Resposta pessoal.

3. Respondam: Qual dos dois empréstimos você tomaria tendo apenas como base o fato de que deseja pagar a menor quantia total de juros? 3. Resposta pessoal.

4. Elaborem um pequeno texto comentando como calcular o montante de uma aplicação a juros simples e como se dá o crescimento desse montante mês a mês. 4. Resposta pessoal.

Atividades

36. Marcos emprestou R$ 32.000,00 ao seu irmão. Ao final de 1 ano, descobriu que a rentabilidade anual foi de 4,6%. Calcule:

a) os juros que ele recebeu; 36. a) R$ 1.472,00

b) o montante após 1 ano. 36. b) R$ 33.472,00

37. Laura aplicou R$ 24.000,00 em determinado fundo de investimento e recebeu, 1 ano depois, o montante de R$ 26.500,00. Qual foi a taxa anual de juros recebida? 37. 10,42%

38. Um investidor comprou um terreno em um bairro residencial. Após 4 anos, vendeu esse terreno pelo dobro do valor da compra. Qual foi a taxa percentual de valorização desse terreno nesse período? 38. 100%

39. Um capital *C* aplicado a juros simples e à taxa de 8% ao ano irá triplicar em quanto tempo? 39. 25 anos

40. Em quantos meses determinado capital aplicado à taxa de 0,8% ao mês na modalidade de juros simples irá duplicar? 40. 125 meses

41. Considere que a quantia de R$ 8.000,00 seja aplicada à taxa de 10% ao ano na modalidade juros simples.

a) Escreva a lei de formação da função $J = f(n)$, juros em função do número n de anos. 41. a) $J = f(n) = 800n$

b) Esboce, no plano cartesiano, o comportamento gráfico dessa função. 41. b) Resposta no Manual do Professor.

c) Escreva a lei de formação da função $M = f(n)$, montante em função do número n de anos. 41. c) $M = f(n) = 8\,000 + 800n$

d) Esboce, no plano cartesiano, o comportamento gráfico dessa função. 41. d) Resposta no Manual do Professor.

42. (UFT-TO) Uma pessoa vai a uma loja comprar um aparelho celular e encontra o aparelho que deseja adquirir com duas opções de compra: à vista com 10% de desconto; ou em duas parcelas iguais e sem desconto, sendo a primeira parcela no ato da compra e a outra um mês após.

Com base nos dados de oferta deste aparelho celular, pode-se afirmar que a loja trabalha com uma taxa mensal de juros de: 42. Alternativa **e**.

a) 0%. **b)** 1%. **c)** 5%. **d)** 10%. **e)** 25%.

43. (FGV-RJ) Sandra fez uma aplicação financeira, comprando um título público que lhe proporcionou, após um ano, um montante de R$ 10.000,00. A taxa de juros da aplicação foi de 10% ao ano. Podemos concluir que o juro auferido na aplicação foi: 43. Alternativa **d**.

a) R$ 1.000,00.
b) R$ 1.009,09.
c) R$ 900,00.
d) R$ 909,09.
e) R$ 800,00.

44. (Fuvest) Há um ano, Bruno comprou uma casa por R$ 50.000,00. Para isso, tomou emprestados R$ 10.000,00 de Edson e R$ 10.000,00 de Carlos, prometendo devolver-lhes o dinheiro, após um ano, acrescido de 5% e de 4% de juros, respectivamente. A casa valorizou 3% durante este período de um ano. Sabendo-se que Bruno vendeu a casa hoje e pagou o combinado a Edson e Carlos, o seu lucro foi de: 44. Alternativa **c**.

a) R$ 400,00.
b) R$ 500,00.
c) R$ 600,00.
d) R$ 700,00.
e) R$ 800,00.

45. (PUC-RJ) Um imóvel em São Paulo foi comprado por x reais, valorizou 10% e foi vendido por R$ 495.000,00. Um imóvel em Porto Alegre foi comprado por y reais, desvalorizou 10% e também foi vendido por R$ 495.000,00. Os valores de x e y são: 45. Alternativa **b**.

a) $x = 445\,500$ e $y = 544\,500$.
b) $x = 450\,000$ e $y = 550\,000$.
c) $x = 450\,000$ e $y = 540\,000$.
d) $x = 445\,500$ e $y = 550\,000$.
e) $x = 450\,000$ e $y = 544\,500$.

46. (UFPE) Para comprar um carro, que tem preço à vista de R$ 20.000,00, Júnior optou por um plano de pagamento que consiste de uma entrada no valor de R$ 2.000,00, e o restante, depois de aplicados juros simples de 10% ao ano durante 3 anos, divididos em 36 parcelas iguais. Qual o valor da parcela? 46. Alternativa **e**.

a) R$ 610,00
b) R$ 620,00
c) R$ 630,00
d) R$ 640,00
e) R$ 650,00

47. (UFCE) José emprestou R$ 500,00 a João por 5 meses, no sistema de juros simples, a uma taxa de juros fixa e mensal. Se no final dos 5 meses José recebeu um total de R$ 600,00, então a taxa fixa mensal aplicada foi de: 47. Alternativa **d**.

a) 0,2%.
b) 0,4%.
c) 2%.
d) 4%.
e) 6%.

48. Elabore uma situação de empréstimo utilizando como referência a questão anterior, mas com dados diferentes. Resolva a situação e, depois, peça a um colega que a resolva. A ideia é confrontar os resultados e discutir procedimentos de resolução. 48. Resposta pessoal.

49. (UEA-AM) Uma pessoa fez uma compra no valor de R$ 1.500,00 e pagou-a em uma só vez, 3 meses depois. Sobre esse valor foi cobrada, mensalmente, uma taxa de juros simples, de modo que, após esses 3 meses, o valor pago foi R$ 1.527,00. A taxa mensal de juros simples cobrada foi 49. Alternativa **e**.

a) 0,7%
b) 0,4%
c) 0,8%
d) 0,5%
e) 0,6%

50. (Unisc) Um comércio do interior cobra de seus clientes, quando pagam em atraso, juros simples de 1% ao mês. Nessa condição, qual foi o tempo de atraso de uma prestação de R$ 1.250,00 se esta foi quitada com R$ 1.350,00? 50. Alternativa **b**.

a) 9 meses
b) 8 meses
c) 10 meses
d) 9,5 meses
e) 10,33 meses

51. (UFPR) Alexandre pegou dois empréstimos com seus familiares, totalizando R$ 20.000,00. Ele combinou pagar juros simples de 8% ao ano em um dos empréstimos e de 5% ao ano no outro. Após um ano nada foi pago, e por isso sua dívida aumentou de R$ 20.000,00 para R$ 21.405,00. Quanto foi tomado emprestado de cada familiar? 51. Alternativa **c**.

a) R$ 2.600,00 e R$ 17.400,00
b) R$ 4.000,00 e R$ 16.000,00
c) R$ 6.500,00 e R$ 13.500,00
d) R$ 7.700,00 e R$ 12.300,00
e) R$ 8.200,00 e R$ 11.800,00

52. (IFCE) Certo capital foi aplicado a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considerando o mês comercial (30 dias), o montante será o triplo do valor inicial ao final de 52. Alternativa **d**.

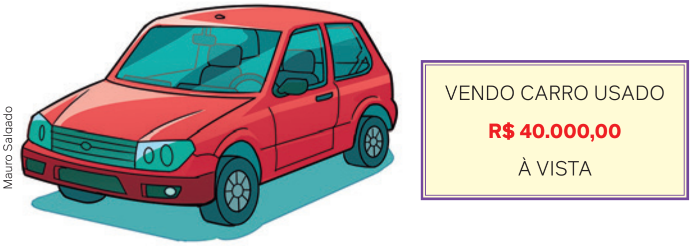
a) 4 anos, 4 meses e 20 dias
b) 5 anos, 10 meses e 10 dias
c) 4 anos, 5 meses e 5 dias
d) 5 anos, 6 meses e 20 dias
e) 3 anos, 10 meses e 5 dias

53. (UPE) Diante da crise que o país atravessa, uma financeira oferece empréstimos a servidores públicos cobrando apenas juro simples. Se uma pessoa retirar R$ 8.000,00 nessa financeira, à taxa de juro de 16% ao ano, quanto tempo levará para pagar um montante de R$ 8.320,00? 53. Alternativa **b**.

a) 2 meses
b) 3 meses
c) 4 meses
d) 5 meses
e) 6 meses

Juros compostos

Lorena precisa comprar um veículo para usar em seu novo trabalho. Depois de pesquisar bastante, resolveu comprar o carro de seu vizinho por R$ 40.000,00 à vista.



Mauro Salgado

Como não tinha toda essa quantia, foi ao banco e conseguiu um financiamento desse valor para ser pago com uma taxa de 1% ao mês. Combinou com o gerente que, caso não pagasse, seriam cobrados juros sobre juros, ou seja, juros compostos.

O gerente alertou Lorena de que uma dívida a juros compostos aumenta acentuadamente. Para exemplificar, mostrou, em uma planilha eletrônica, como seria o montante da dívida caso ela não pagasse nos primeiros 5 meses. Veja a seguir.

PLANILHA ELETRÔNICA

ARQUIVO FORMATAR LAYOUT INSERIR FÓRMULAS DADOS FERRAMENTAS COMPLEMENTOS AJUDA

	A	B	C	D	E	F
1	**Período**	**Cálculo dos juros**	**Juros**	**Montante**		
2	1º mês	0,01 · R$ 40.000,00	R$ 400,00	R$ 40.400,00		
3	2º mês	0,01 · R$ 40.400,00	R$ 404,00	R$ 40.804,00		
4	3º mês	0,01 · R$ 40.804,00	R$ 408,04	R$ 41.212,04		
⋮	4º mês	0,01 · R$ 41.212,04	R$ 412,12	R$ 41.624,16		
12	5º mês	0,01 · R$ 41.624,16	R$ 416,24	R$ 42.040,40		
13						

Planilha 1

Para pensar e discutir

1. Como é possível obter o montante de R$ 40.400,00 na planilha eletrônica? 1. Multiplicando 40 000 por 1,01.
2. De mês a mês, o crescimento do montante em reais é o mesmo? 2. Não.
3. A taxa de 1% é calculada sempre sobre o mesmo valor? Explique. 3. Não; resposta pessoal.
4. Qual seria a dívida de Lorena no final do 5º mês se o empréstimo fosse também 1% ao mês, mas na modalidade juros simples? 4. R$ 42.000,00

Ao emprestar R$ 40.000,00 a 1% ao mês na modalidade de juros compostos, os juros gerados a cada mês são incorporados ao capital para o cálculo dos juros do mês seguinte. É por isso que dizemos que o crescimento do montante ocorre segundo um regime de capitalização composta.

Agora, vamos obter uma relação matemática para o cálculo do montante.

Considere que um capital C seja aplicado na modalidade de **juros compostos** a uma taxa fixa i por período (expressa na forma decimal) durante n períodos. Vamos calcular os montantes ao longo de n períodos considerando que o período seja compatível com a unidade de tempo da taxa.

1º período: $M_1 = C + i \cdot C \Rightarrow M_1 = C \cdot (1 + i)$

2º período: $M_2 = C \cdot (1 + i) + i \cdot C \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \Rightarrow M_2 = C \cdot (1 + i)^2$

3º período: $M_3 = C \cdot (1 + i)^2 + i \cdot C \cdot (1 + i)^2 = C \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) \Rightarrow M_3 = C \cdot (1 + i)^3$

4º período: $M_4 = C \cdot (1 + i)^3 + i \cdot C \cdot (1 + i)^3 = C \cdot (1 + i)^3 \cdot (1 + i) \Rightarrow M_4 = C \cdot (1 + i)^4$

...

Observando a sequência formada pelos montantes, ao final de n períodos o montante correspondente será dado por: $M_n = C \cdot (1 + i)^n$.

O montante M_n gerado por um capital C aplicado a uma taxa fixa i durante n períodos e na modalidade de **juros compostos** pode ser calculado por

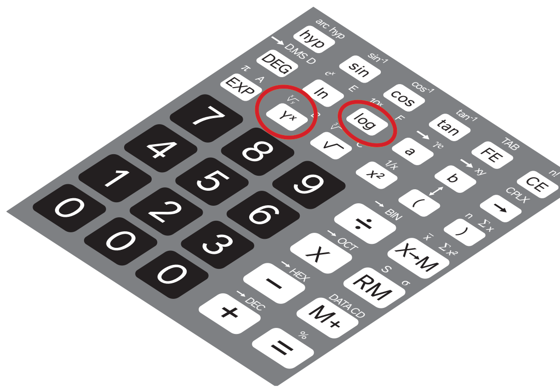
$$M_n = C \cdot (1 + i)^n,$$

em que i e n são expressos na mesma unidade de tempo.

Observações:

1. O regime de juros compostos é utilizado na maioria das situações que envolvem aplicações financeiras e nas chamadas transações comerciais.
2. Apenas ao final do primeiro período de aplicação, os montantes – tanto na modalidade juros simples quanto juros compostos – a uma mesma taxa são iguais.

Você verá que, na resolução de situações envolvendo juros compostos, há a necessidade de utilização de conceitos importantes como o de potenciação, radiciação e também de logaritmos. Nesse caso, o emprego de calculadoras científicas será necessário, conforme teclas destacadas na ilustração.



Reinaldo Vignati

Analise as situações resolvidas a seguir e, caso queira, utilize uma calculadora científica para verificar os cálculos apresentados.

Atividades resolvidas

15. Qual é o montante correspondente a 6 meses de aplicação da quantia de R$ 50.000,00 na modalidade juros compostos a uma taxa fixa de 0,5% ao mês?

- Escrevendo 0,5% na forma decimal, temos 0,005. Substituindo na fórmula obtida anteriormente, temos:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$
$$M_6 = 50\,000 \cdot (1 + 0{,}005)^6$$
$$M_6 = 50\,000 \cdot 1{,}005^6$$

- Para calcular $1{,}005^6$ com o auxílio de uma calculadora simples, fazemos:

$$1{,}005^6 = 1{,}005 \cdot 1{,}005 \cdot 1{,}005 \cdot 1{,}005 \cdot 1{,}005 \cdot 1{,}005$$
$$1{,}005^6 \cong 1{,}0303775$$

- Voltando, temos:

$$M_6 \cong 50\,000 \cdot 1{,}0303775$$
$$M_6 \cong 51\,518{,}88$$

Portanto, o montante após 6 meses de aplicação é de R$ 51.518,88.

Para pensar e discutir

1. O cálculo desse montante em uma calculadora simples pode ser feito digitando 1,005, apertando a tecla da multiplicação (×) e, em seguida, a tecla "=" 5 vezes. Concorda? Verifique. 1. Resposta pessoal.
2. Explique como você calcularia utilizando uma calculadora científica. 2. Resposta pessoal.

16. Um capital de R$ 5.000,00, aplicado durante 4 anos na modalidade juros compostos, produz um montante de R$ 6.553,98. Calcule a taxa anual dessa aplicação.

- Utilizando a relação para o cálculo do montante, precisamos calcular a taxa i:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$
$$6\,553{,}98 = 5\,000 \cdot (1 + i)^4$$
$$\frac{6\,553{,}98}{5\,000} = (1 + i)^4$$
$$1{,}310796 = (1 + i)^4$$
$$\sqrt[4]{1{,}310796} = 1 + i$$
$$1{,}07 \cong 1 + i \Rightarrow i \cong 0{,}07 \Rightarrow i \cong 7\%$$

A taxa é de aproximadamente 7% ao ano.

Para pensar e discutir

1. Em uma calculadora que possui a tecla $\sqrt{\ }$ (raiz quadrada), como você calcularia $\sqrt[4]{1,310796}$? 1. Resposta pessoal.
2. E como obteria esse valor na calculadora científica? 2. Resposta pessoal.

No estudo de juros simples, você resolveu a seguinte atividade: "Em quantos meses determinado capital aplicado à taxa de 0,8% ao mês na modalidade de juros simples irá duplicar?". Agora, apresentamos a mesma situação na atividade a seguir, porém, na modalidade juros compostos.

17. Em quanto tempo certa quantia irá duplicar ao ser aplicada a juros compostos a uma taxa fixa de 0,8% ao mês?

- Utilizando a relação matemática para o cálculo do montante, temos:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$
$$\downarrow M_n = 2 \cdot C$$
$$2 \cdot C = C \cdot (1 + 0{,}008)^n$$
$$2 = 1{,}008^n$$

- Essa equação exponencial é resolvida com a utilização de logaritmos, conforme estudado no Volume 2 desta coleção. Na igualdade acima, aplicamos logaritmo na base dez aos dois membros e utilizamos as propriedades operatórias de logaritmos:

$$\log 2 = \log 1{,}008^n$$
$$\log 2 = n \cdot \log 1{,}008$$
$$\downarrow \text{calculadora científica}$$
$$0{,}30103 \cong n \cdot 0{,}00346$$
$$\frac{0{,}30103}{0{,}00346} \cong n \Rightarrow n \cong 87$$

O valor de n (número de meses) que satisfaz essa equação é 87, ou seja, o capital duplicará em 87 meses.

Observação:

A utilização de planilhas eletrônicas e de calculadoras científicas (essas calculadoras podem ser encontradas em *smartphones*, junto à calculadora simples, ao colocar o aparelho na posição horizontal) para a resolução de situações diversas envolvendo Matemática Financeira é fundamental. O *software* de planilha eletrônica tem diversas funções, como as financeiras. Essa categoria apresenta um conjunto de automatizações para a realização de operações matemáticas úteis em Matemática Financeira, entre elas o cálculo de juros e o cálculo de rendimento de aplicações, além de outras funções similares às encontradas em calculadoras científicas. Vale a pena você conhecer de forma autônoma essas funções.

Para explorar

Reúna-se com três colegas e, juntos, comparem juros simples e juros compostos utilizando uma planilha eletrônica.

Considerem um empréstimo de R$ 50.000,00 a uma taxa fixa mensal de juros de 2% ao mês e que não haja qualquer pagamento até o final dos 10 primeiros meses após o empréstimo.

1. Com o auxílio de planilha eletrônica, elaborem uma tabela exibindo, mês a mês, os juros e os montantes correspondentes considerando as duas modalidades: juros simples e juros compostos. 1. Resposta pessoal.
2. Apresentem essa planilha impressa aos demais grupos para conferir os valores mês a mês. 2. Resposta pessoal.
3. Escrevam um texto com suas conclusões sobre as duas modalidades de regime de capitalização.

3. Resposta pessoal.

Atividades

54. Um capital de R$ 20.000,00 foi aplicado a uma taxa de 10% ao ano na modalidade juros compostos.

a) Qual é o montante dessa aplicação após 4 anos? 54. a) R$ 29.282,00

b) Qual é o rendimento dessa aplicação após 4 anos? 54. b) R$ 9.282,00

c) O rendimento obtido representa qual percentual de ganho em relação ao capital aplicado? 54. c) 46,41%

55. Ao comprar um terreno em determinada região da cidade, Ana estava fazendo um investimento, pois havia uma tendência de valorização de 14% ao ano. Se Ana pagou R$ 100.000,00 pelo terreno, obtenha:

a) o valor do terreno, segundo a tendência de valorização, em 5 anos; 55. a) R$ 192.541,46

b) o percentual de valorização dele, segundo a tendência, nesses 5 anos. 55. b) 92,54%

56. Uma aplicação financeira rende uma taxa fixa de 1,2% a.m. em regime de juros compostos. Se você aplicou a quantia de R$ 1.500,00 e retirou a quantia disponível ao final de 10 meses:

a) qual foi a quantia retirada? 56. a) R$ 1.690,04

b) qual foi o percentual de aumento do capital investido? 56. b) Aproximadamente 12,67%.

57. De acordo com as informações a seguir, elabore duas situações. 57. Respostas pessoais.

Situação 1: estipule um valor a ser aplicado em caderneta de poupança durante 1 ano considerando uma taxa fixa (pesquise o rendimento do último mês em caderneta de poupança para saber qual é a taxa). A aplicação é no regime de juros compostos.

Situação 2: o mesmo valor da situação anterior aplicado em algum fundo de investimento a uma taxa fixa (também pesquise o rendimento do último mês desse fundo de aplicação para saber qual é a taxa). A aplicação também é no regime de juros compostos.

Agora, escreva um pequeno texto comparando as duas aplicações e apresente-o aos colegas. Enfatize qual das situações é mais vantajosa para um investidor.

58. Uma dívida foi contraída no regime de juros compostos e aumentou de R$ 5.000,00 para R$ 5.306,04 em 3 meses. Admitindo a taxa de juros mensal fixa da dívida, e utilizando uma calculadora, faça o que se pede a seguir.

a) Determine o valor da taxa mensal. 58. a) 2% ao mês

b) Determine o montante da dívida em 1 ano, caso ela não seja paga. 58. b) R$ 6.341,21

c) Qual é o percentual de aumento dessa dívida em 12 meses? 58. c) Aproximadamente 27%.

59. Luciana é gerente financeira de uma empresa e precisa pedir um empréstimo bancário de R$ 400.000,00. Ela está analisando as duas propostas a seguir.

Banco A: oferece taxa fixa de juros compostos de 3% ao mês e prazo de 16 meses para a quitação do empréstimo em parcela única.

Banco B: oferece taxa fixa de juros compostos de 4% ao mês e prazo de 12 meses para a quitação do empréstimo em parcela única.

Desconsiderando a inflação nos períodos acima, informe de que banco Luciana deverá contrair o empréstimo, sabendo que a decisão dela depende apenas da menor quantia paga em juros. 59. Banco B.

60. Uma pessoa deixou de pagar a fatura do cartão de crédito cujo valor é corrigido a juros compostos. Em 3 meses, o valor devido aumentou em 33,1%. Calcule a taxa de juros mensais cobrada. 60. 10%

61. Esta é uma atividade de pesquisa individual. Converse com alguém de sua família ou vizinhança e verifique qual é a taxa de juros mensal cobrada no cartão de crédito. Com essa taxa, simule uma fatura no valor de R$ 5.000,00 paga somente 3 meses após o vencimento. 61. Resposta pessoal.

62. Junte-se a um colega para resolver o problema a seguir. 62. Opção B.

Bruna tem uma casa para alugar ou vender. O valor de venda da casa é de R$ 750.000,00 à vista e o aluguel que ela consegue mensalmente é de R$ 4.500,00. Analise as opções de Bruna.

A. Vender a casa e aplicar o valor total na caderneta de poupança que rende 0,5% ao mês.

B. Alugar a casa e, com o dinheiro do aluguel, aplicar todo mês o valor recebido em caderneta de poupança que rende 0,5% ao mês.

No final de 1 ano, considerando que ela não faça nenhum outro depósito além dos valores recebidos (pela venda ou pelo aluguel) nem qualquer retirada, qual opção renderá um saldo maior para Bruna?

63. (UFPE) Se uma pessoa toma emprestado a quantia de R$ 3.000,00 a juros compostos de 3% ao mês, pelo prazo de 8 meses, qual o montante a ser devolvido? Dado: use a aproximação $1{,}03^8 \cong 1{,}27$

a) R$ 3.802,00 63. Alternativa **e**.

b) R$ 3.804,00

c) R$ 3.806,00

d) R$ 3.808,00

e) R$ 3.810,00

64. (UFSC) Com a venda de seus imóveis, o Sr. José resolveu fazer um investimento. Ao conversar com o gerente de seu banco, foi informado de que determinado investimento renderia 100% a cada cinco anos em regime de capitalização composta. Nessas condições, após quantos anos de aplicação o montante obtido será igual a 16 vezes o valor investido? 64. 20 anos

65. (Unisinos-RS) Suponha que um certo equipamento que custa R$ 80.000,00 desvalorize 10% ao ano nos 6 primeiros anos de uso. Qual será o valor, em reais, deste equipamento após 3 anos de uso?

a) 57 320 65. Alternativa **b**.

b) 58 320

c) 58 420

d) 59 220

e) 64 800

66. (FGV-SP) Gabriel e Júlia investiram dinheiro em criptomoedas durante dois anos e tiveram sorte: os rendimentos forma muito bons. Gabriel investiu R$ 1.000,00 em uma criptomoeda nova, que rendeu 80% no primeiro ano e 25% no ano seguinte. Júlia também investiu R$ 1.000,00, em uma criptomoeda mais estável, que manteve taxas de rendimento constantes nestes dois anos. Ao final desse período, Gabriel e Júlia estavam exatamente com o mesmo dinheiro. A taxa de rendimento anual da criptomoeda escolhida pela Júlia foi de 66. Alternativa **c**.

a) 40% **b)** 45% **c)** 50% **d)** 55% **e)** 52%

67. (EAM) Um vídeo game é vendido à vista por R$ 2.000,00 ou a prazo com R$ 400,00 de entrada e mais uma parcela de R$ 1.800,00 quatro meses após a compra. Assinale a opção que apresenta a taxa mensal de juros compostos do financiamento. Considere apenas 3 casas decimais e sem arredondamento. 67. Alternativa **b**.

a) 2,3% **b)** 2,9% **c)** 3,3% **d)** 4,0% **e)** 4,4%

68. (FGV-SP) Estima-se que em cada um dos próximos 5 anos o PIB de um país cresça 5%. Qual deverá ser a taxa de crescimento *x* constante, em cada um dos 5 anos seguintes, para que o PIB dobre daqui a 10 anos, em relação ao deste ano?

Use a tabela:

m	0	1/2	1/3	1/4	1/5
2^m	1,00	1,41	1,256	1,19	1,15

68. Alternativa **c**.

a) 8,7% aproximadamente
b) 10,4% aproximadamente
c) 9,5% aproximadamente
d) 9,1% aproximadamente
e) 9,9% aproximadamente

Situações e contextos envolvendo juros compostos

Embora nosso estudo aqui se refira a tópicos de Matemática Financeira, existem algumas informações importantes que ampliam as aplicações relacionadas a juros compostos. Entre elas, vamos analisar juros compostos com taxas variáveis, juros compostos e taxas equivalentes e, ainda, a relação entre funções e juros compostos.

Em áreas como Economia, Administração e Mercado Financeiro, o conhecimento de cálculos envolvendo juros compostos faz parte do cotidiano dos profissionais que nelas atuam. Nosso estudo, porém, se limita a abordar aspectos relevantes para seu conhecimento básico envolvendo situações de empréstimos e financiamentos. Caso queira, poderá ampliar tais conhecimentos a partir do que verá na sequência. Utilize uma calculadora, se necessário.

udorn1976/iStockphoto.com

Representação do crescimento econômico por meio de investimentos.

Nos tópicos que apresentamos a seguir, procure analisar e discutir as situações, conferir os procedimentos utilizados nesses cálculos e até elaborar outras situações similares.

Para pensar e discutir

1. Aumentos sucessivos de 2%, 3%, 1% e 1,5% correspondem a um único aumento de quantos por cento? Justifique. 1. 7,7%; resposta pessoal.
2. Você investiu R$ 10.000,00 em um fundo de ações que rendeu 0,7% no primeiro mês e 1,2% no segundo mês. Qual foi o percentual desse rendimento no final dos dois meses? 2. Aproximadamente 1,91%.

Juros compostos, progressão geométrica e função exponencial

Vamos retomar as expressões que fornecem os montantes ao longo de *n* períodos.

1º período:

$M_1 = C + i \cdot C \Rightarrow M_1 = C \cdot (1 + i)$

2º período:

$M_2 = C \cdot (1 + i) + i \cdot C \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \Rightarrow M_2 = C \cdot (1 + i)^2$

3º período:

$M_3 = C \cdot (1 + i)^2 + i \cdot C \cdot (1 + i)^2 = C \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) \Rightarrow M_3 = C \cdot (1 + i)^3$

4º período:

$M_4 = C \cdot (1 + i)^3 + i \cdot C \cdot (1 + i)^3 = C \cdot (1 + i)^3 \cdot (1 + i) \Rightarrow M_4 = C \cdot (1 + i)^4$

...

A sequência formada pelos montantes nada mais é do que uma **progressão geométrica** (estudada no Volume 2 desta coleção) de **razão** igual a $(1 + i)$. Sendo assim, poderíamos aplicar a fórmula do termo geral da progressão geométrica para obtermos a relação matemática do montante após n períodos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow \text{fórmula do termo geral}$$
$$\Big\downarrow \; q = 1 + i \text{ e } a_1 = M_1$$
$$M_n = M_1 \cdot (1 + i)^{n-1}$$
$$\Big\downarrow \; M_1 = C \cdot (1 + i)$$
$$M_n = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)^{n-1}$$
$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$

Neste capítulo, observamos que, na modalidade **juros simples**, tanto os juros quanto os montantes podem ser descritos por meio de uma **função afim**. Agora, vamos examinar o que ocorre quando a aplicação é no regime de juros compostos. Para isso, consideremos a situação a seguir.

Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado à taxa de 0,8% ao mês no regime de juros compostos. Vamos obter o montante ao final de n meses.

Utilizando a fórmula do montante para juros compostos, temos:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$
$$M_n = 1\,000 \cdot (1 + 0{,}008)^n$$
$$\underbrace{M_n = 1\,000 \cdot 1{,}008^n}_{\text{montante em função do número de meses}}$$

Como temos o montante em função da quantidade de meses de aplicação, $M = f(n)$, podemos atribuir valores a n para obter os montantes correspondentes. Arredondando na casa dos centavos, temos os seguintes valores:

n	$M = f(n) = 1\,000 \cdot 1{,}008^n$
1	$M = f(1) = 1\,000 \cdot 1{,}008^1 = 1\,008{,}00$
2	$M = f(2) = 1\,000 \cdot 1{,}008^2 = 1\,016{,}06$
3	$M = f(3) = 1\,000 \cdot 1{,}008^3 = 1\,024{,}19$
4	$M = f(4) = 1\,000 \cdot 1{,}008^4 = 1\,032{,}39$
5	$M = f(5) = 1\,000 \cdot 1{,}008^5 = 1\,040{,}65$
6	$M = f(6) = 1\,000 \cdot 1{,}008^6 = 1\,048{,}97$

Observações:

1. Os montantes formam uma progressão geométrica de razão 1,008.

2. O crescimento do montante, mês a mês, não é constante, isto é, o crescimento dele **não é linear**, como ocorreu na aplicação do regime de juros simples. Como a variável n se apresenta no exponente, dizemos que o montante em função do tempo é descrito por meio de uma **função exponencial**, ou seja, uma função em que a variável independente está no expoente.

Para explorar

Junte-se a um colega e, com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica, façam o que se pede.

1. Em um plano cartesiano, elaborem o gráfico da função exponencial $M = f(n) = 1.000 \cdot 1{,}008^n$ da aplicação no regime de juros compostos vista anteriormente. 1. Resposta no Manual do Professor.

2. Obtenham a função $M = f(n)$ correspondente à mesma aplicação de R$ 1.000,00 a uma taxa fixa mensal de 0,8% no regime de juros simples. Depois, façam, no plano cartesiano, o gráfico correspondente. 2. Resposta no Manual do Professor.

3. Escrevam um texto contendo suas conclusões sobre as duas modalidades de regime de capitalização conforme os dois gráficos. 3. Resposta pessoal.

Juros compostos e taxas equivalentes

Em uma aplicação financeira, a taxa e o período de aplicação devem estar na mesma unidade de tempo.

Exemplos:

- Um capital aplicado durante 15 meses a uma taxa de 2% ao mês:

$$i = 2\% \text{ a.m.}$$
$$n = 12 \text{ meses}$$

Vídeo
Cartão de crédito


Brian A Jackson/ Shutterstock.com

- Um capital aplicado durante 3 anos a uma taxa de 5% ao ano:

$$i = 5\% \text{ a.a.}$$
$$n = 3 \text{ anos}$$

E quando o período e a taxa não estiverem na mesma unidade de tempo?

Nesses casos, é necessário conhecer o procedimento para obter a taxa equivalente na mesma unidade do período de aplicação.

Nas atividades seguintes, mostramos como proceder para obter taxas equivalentes.

Atividades resolvidas

18. Um investimento a juros compostos rende 2% a.m. (ao mês). Qual é a taxa anual correspondente?

- Calculamos o montante do capital C investido a uma taxa mensal de 2% a.m. no período de 1 ano, porém, utilizamos 12 para a quantidade do período (referente a 12 meses):

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$
$$M_{12} = C \cdot (1 + 0{,}02)^{12}$$
$$M_{12} = C \cdot 1{,}02^{12}$$
$$M_{12} \cong C \cdot 1{,}2682$$

- Como o capital está sendo multiplicado por 1,2682, ele aumentou, em 1 ano, 26,82%.

  Logo, temos a equivalência de taxas:

  2% a.m. equivalem a 26,82% a.a.

- Outra maneira de chegar a esse resultado é considerar que i_a e i_m representam as taxas anual e mensal, respectivamente. Aplicando a fórmula do cálculo do montante, temos:

$$M_1 = C \cdot (1 + i_a)^1$$
$$M_{12} = C \cdot (1 + i_m)^{12} = C \cdot (1 + 0{,}02)^{12}$$
$$\Big\downarrow \text{ igualamos os montantes.}$$
$$C \cdot (1 + i_a)^1 = C \cdot (1 + 0{,}02)^{12}$$
$$1 + i_a = (1 + 0{,}02)^{12}$$
$$1 + i_a = 1{,}02^{12}$$
$$1 + i_a \cong 1{,}2682$$
$$i_a \cong 0{,}2682 \Rightarrow i_a \cong 26{,}82\%$$

Para pensar e discutir

1. A taxa fixa de 12% a.a. é equivalente à taxa fixa de 1% a.m. no regime de juros compostos? 1. Não.
2. Qual é a taxa anual equivalente em uma aplicação de juros compostos à taxa mensal fixa de 1%? Explique como você obteve o resultado. 2. Aproximadamente 12,68%; resposta pessoal.

19. Uma multa de 0,1% ao dia equivale a uma multa de x% ao mês. Determine x considerando o mês com 30 dias.

- Igualamos os "montantes" nos dois casos, sendo i_m a taxa mensal e i_d a taxa diária.

$$C \cdot (1 + i_m)^1 = C \cdot (1 + i_d)^{30}$$
$$1 + i_m = (1 + i_d)^{30}$$
$$1 + i_m = (1 + 0{,}001)^{30}$$
$$1 + i_m = 1{,}001^{30}$$
$$\Big\downarrow \text{ calculadora científica}$$
$$1 + i_m \cong 1{,}0304 \Rightarrow i_m \cong 0{,}0304 \Rightarrow i_m \cong 3{,}04\%$$

Portanto, temos que o valor de x é 3,04, ou seja, 3,04%.

Atividades

69. A tabela a seguir contém a inflação no Brasil, ano a ano, de 2020 a 2023.

Inflação no Brasil				
Ano	2020	2021	2022	2023
Taxa de inflação	4,52	10,06	5,79	4,62

Fonte: BRASIL. Banco Central do Brasil. *Histórico das metas para a inflação*. Brasília, DF: BCB, 2024. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/historicometas. Acesso em: 18 set. 2024.

Nesses 4 anos, qual é a taxa de inflação acumulada? Explique como você calculou. 69. 27,32%; resposta pessoal

70. Faça uma pesquisa do Índice de Preços ao Consumidor (IPC), que mede a inflação no Brasil em relação aos últimos 6 meses. Elabore uma tabela e escreva a taxa percentual correspondente à inflação acumulada no último semestre. 70. Resposta pessoal.

71. (UFRN) Maria pretende comprar um computador cujo preço é R$ 900,00. O vendedor da loja ofereceu dois planos de pagamento: parcelar o valor em quatro parcelas iguais de R$ 225,00, sem entrada, ou pagar à vista, com 5% de desconto. Sabendo que o preço do computador será o mesmo no decorrer dos próximos quatro meses e que dispõe de R$ 855,00, ela analisou as seguintes possibilidades de compra:

Opção 1	Comprar à vista, com desconto.
Opção 2	Colocar o dinheiro em uma aplicação que rende 1% de juros compostos ao mês e comprar, no final dos quatro meses, por R$ 900,00.
Opção 3	Colocar o dinheiro em uma aplicação que rende 1% de juros compostos ao mês e comprar a prazo, retirando todo mês o valor da prestação.
Opção 4	Colocar o dinheiro em uma aplicação que rende 2% de juros compostos ao mês e comprar, três meses depois, pelos R$ 900,00.

Entre as opções analisadas por Maria, a que oferece maior vantagem financeira no momento é a: 71. Alternativa **c**.

a) opção 2. **b)** opção 1. **c)** opção 4. **d)** opção 3.

72. Uma taxa anual de 8% a juros compostos corresponde a uma taxa fixa mensal de quantos por cento? Utilize calculadora. 72. 0,643%

73. Uma taxa semestral de 5% a juros compostos corresponde a uma taxa fixa mensal de quantos por cento? Utilize calculadora. 73. 0,816%

74. Calcule o montante resultante de uma aplicação financeira de R$ 45.000,00 na modalidade juros compostos ao longo de 12 meses sendo que, nos 6 primeiros meses, a taxa mensal era fixa de 1% e, nos 6 últimos meses, a taxa mensal era fixa de 2%. Utilize calculadora. 74. Aproximadamente R$ 53.795,00.

75. (Enem) Considere que uma pessoa decida investir determinada quantia e que sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês Investimento B: 36% ao ano Investimento C: 18% ao semestre

n	$1{,}03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades.

Para escolher o investimento com maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá: 75. Alternativa **c**.

a) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.

b) escolher qualquer um dos investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.

c) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.

d) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.

e) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

76. (UEG-GO) Um cliente retira em um banco o valor de R$ 2.000,00 para serem pagos após seis meses. Considerando o regime de capitalização composta e uma taxa de juros de 69% a.a. (ao ano), o valor a ser pago é de

a) R$ 3.380,00
b) R$ 2.960,00
c) R$ 2.690,00
d) R$ 2.230,00
e) R$ 2.600,00

76. Alternativa **e**.

77. (UERJ) Os clientes de um banco podem realizar apenas duas operações financeiras:

- Fazer investimentos que rendem juros compostos a uma taxa mensal de 1%; ou
- Pegar empréstimos com juros compostos a uma taxa mensal de 5%.

O banco usa o dinheiro dos investimentos para conceder os empréstimos, obtendo lucro nessas transações.
Considere que um cliente X investiu R$ 1.000,00 e que o banco emprestou esse valor a um cliente Y.
Após 12 meses, o cliente X recebeu o montante pela aplicação nesse período e Y quitou o empréstimo.
Admitindo $(1{,}01)^{12} \cong 1{,}13$ e $(1{,}05)^{12} \cong 1{,}80$, o lucro, em reais, obtido pelo banco com essas duas operações financeira sé igual a: 77. Alternativa **c**.

a) 470
b) 520
c) 670
d) 820

78. (Unifor-CE) O dono de um antiquário restaurou uma de suas obras e estimou que o valor da peça *t* anos após a restauração é $v(t) = 2\,500 \cdot (1{,}03)^t$, onde $0 \leq t \leq 3$. A expressão que corresponde ao valor da peça m meses após a restauração, onde $0 \leq m \leq 36$,

a) $v(m) = 2\,500 \cdot (1{,}03)^{m/36}$
b) $v(m) = 2\,500 \cdot (1{,}03)^{m/3}$
c) $v(m) = 2\,500 \cdot (1{,}03/36)^{3m}$
d) $v(m) = 2\,500 \cdot (1{,}03)^{12m}$
e) $v(m) = 2\,500 \cdot (1{,}03)^{m/12}$

78. Alternativa **e**.

79. (Famerp-SP) O PIB de um país cresceu 4% ao ano no período de 2000 a 2010. Considerando $26^{10} = b$ e $25^{10} = c$, o valor do PIB desse país em 2010 era igual ao de 2000 multiplicado por 79. Alternativa **b**.

a) $4^{\frac{b}{c}}$
b) $\frac{b}{c}$
c) $\sqrt[10]{b \cdot c}$
d) $\sqrt[4]{b \cdot c}$
e) $\frac{c}{b}$

Financiamentos

O que é mais vantajoso: comprar à vista ou comprar a prazo?

Essa é uma questão quase sempre feita quando estamos diante de uma compra. É evidente que, muitas vezes, não temos capital suficiente para adquirir determinado item à vista. Porém, devemos ter consciência dos juros que serão pagos em parcelamentos.

Vamos retomar uma situação apresentada quando iniciamos o tópico Matemática Financeira para observar que, algumas vezes, mesmo que façamos uma compra com uma entrada e uma parcela para o mês seguinte, podemos estar pagando juros muito altos.

Considere, por exemplo, que você irá comprar um aparelho de TV e, na loja escolhida para essa compra, ele está anunciado pelo valor de R$ 4.000,00, mas em duas condições, como mostra a imagem a seguir.

Reinaldo Vignati

OPÇÃO 1

À VISTA: DESCONTO DE 10% SOBRE O VALOR ANUNCIADO

OPÇÃO 2

EM 2 × IGUAIS SEM DESCONTO E SEM ACRÉSCIMO NO PREÇO ANUNCIADO:
ENTRADA + PARCELA EM 30 DIAS

Acervo editora

- **Opção 1** – cálculo do valor à vista com desconto de 10%:

$$V = 0{,}90 \cdot 4\,000$$
$$V = 3\,600 \Rightarrow \text{R\$ } 3.600{,}00$$

- **Opção 2** – deve pagar R$ 2.000,00 de entrada e R$ 2.000,00 após um mês.

Note que, nessa opção, você pagará R$ 2.000,00 à vista. Assim, o saldo após a entrada (pagamento parcial à vista) é de R$ 1.600,00 (o que falta para R$ 3.600,00).

Dívida no momento da compra: R$ 1.600,00 Pagamento 1 mês após a compra: R$ 2.000,00

Nessa opção, você deve pagar R$ 400,00 de juros em R$ 1.600,00. Cálculo da variação percentual:

$$p = \frac{2\,000 - 1\,600}{1\,600}$$

$$p = \frac{400}{1\,600} = 0{,}25 = 25\%$$

Portanto, na segunda opção, pagam-se juros de 25% sobre o valor do saldo de R$ 1.600,00 ao efetuar uma entrada de R$ 2.000,00.

Para pensar e discutir 1. Resposta pessoal. 2. Resposta pessoal. 3. Resposta pessoal.

1. Qual é o percentual de juros cobrado no atraso de 1 mês na conta de energia elétrica de sua casa? Pesquise.

2. Qual é o percentual de juros cobrado pelos bancos em 1 mês de saldo negativo no cheque especial? Pesquise.

3. Qual é o percentual de juros cobrado pelos bancos em 1 mês de atraso no pagamento do cartão de crédito? Pesquise.

Agora, vamos analisar duas situações envolvendo compras a prazo.

Atividades resolvidas

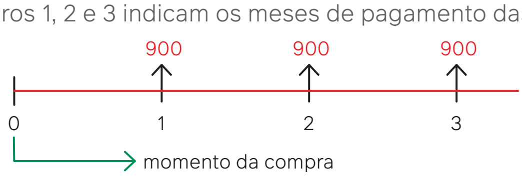
20. Cálculo do valor à vista com base em uma compra a prazo.

Aline comprou um *notebook* para fazer seus trabalhos em casa. Como não tinha dinheiro suficiente para comprar à vista, negociou com a loja para pagar em 3 parcelas mensais iguais, sem entrada, no valor de R$ 900,00 cada. Observe a oferta na imagem.

Mauro Salgado

O vendedor informou que os juros compostos que estavam sendo financiados na compra eram de 4% ao mês. Qual é o preço equivalente ao valor à vista desse computador?

- No esquema a seguir, os números 1, 2 e 3 indicam os meses de pagamento das parcelas de R$ 900,00.



Acervo editora

- **1º mês:** R$ 900,00 representam o valor da 1ª parcela com juros de 4%, isto é, representam o montante de um valor V_1 depois de 1 mês a juros compostos. Cálculo de V_1:

$$M_n = C \cdot (1 + i_a)^n$$

$$900 = V_1 \cdot (1 + 0{,}04)^1$$

$$900 = V_1 \cdot 1{,}04^1 \Rightarrow V_1 = \frac{900}{1{,}04^1}$$

- **2º mês**: R$ 900,00 representam o valor da 2ª parcela com juros de 4%, isto é, representam o montante de um valor V_2 depois de 2 meses a juros compostos. Cálculo de V_2:

$$M_n = C \cdot (1 + i_a)^n$$

$$900 = V_2 \cdot (1 + 0{,}04)^2$$

$$900 = V_2 \cdot 1{,}04^2 \Rightarrow V_2 = \frac{900}{1{,}04^2}$$

- **3º mês**: R$ 900,00 representam o valor da 3ª parcela com juros de 4%, isto é, representam o montante de um valor V_3 depois de 3 meses a juros compostos. Cálculo de V_3:

$$M_n = C \cdot (1 + i_a)^n$$

$$900 = V_3 \cdot (1 + 0{,}04)^3$$

$$900 = V_3 \cdot 1{,}04^3 \Rightarrow V_3 = \frac{900}{1{,}04^3}$$

- O valor à vista, dentro das condições apresentadas, é dado por V:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$
$$V = \frac{900}{1,04^1} + \frac{900}{1,04^2} + \frac{900}{1,04^3}$$
$$V \cong 865,38 + 832,10 + 800,10$$
$$V \cong 2\,497,5$$

Portanto, o valor equivalente ao valor à vista desse computador é de R$ 2.497,58.

Para pensar e discutir

1. Como, do valor V_1, podemos obter o valor da 1ª parcela de R$ 900,00? 1. Dividindo 900 por $1,04^1$.

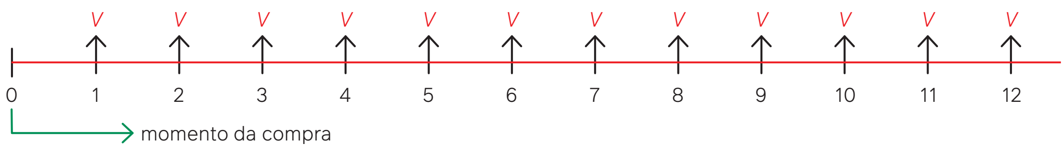
2. Como, do valor V_2, podemos obter o valor da 2ª parcela de R$ 900,00? 2. Dividindo 900 por $1,04^2$.

3. Como, do valor V_3, podemos obter o valor da 3ª a parcela de R$ 900,00? 3. Dividindo 900 por $1,04^3$.

21. Cálculo do valor das parcelas com base no valor à vista.
Carlos foi comprar um automóvel usado. Ao chegar à loja, observou que o preço à vista seria igual a R$ 25.000,00. O vendedor ofereceu outra possibilidade: sem entrada, em 12 parcelas mensais e iguais, com juros de 2% ao mês. Qual é o valor de cada uma das 12 parcelas, lembrando que elas devem ser iguais?

Vladimiroquai/ iStockphoto.com

- No esquema, os números 1, 2, 3, ... e 12 indicam os meses de pagamento das parcelas V_1, V_2, V_3, ..., e V_{12}, sendo que V será o valor de cada uma dessas parcelas.



Acervo editora

- **1º mês**: V corresponde ao montante do valor V_1 após 1 mês a juros compostos de 2% a.m.:

$$V = V_1 \cdot (1 + 0,02)^1$$
$$V = V_1 \cdot 1,02^1 \Rightarrow V_1 = \frac{V}{1,02^1}$$

- **2º mês**: V corresponde ao montante do valor V_2 após 2 meses a juros compostos de 2% a.m.:

$$V = V_2 \cdot (1 + 0,02)^2$$
$$V = V_2 \cdot 1,02^2 \Rightarrow V_2 = \frac{V}{1,02^2}$$

- **3º mês**: V corresponde ao montante do valor V_3 após 3 meses a juros compostos de 2% a.m.:

$$V = V_3 \cdot (1 + 0,02)^3$$
$$V = V_3 \cdot 1,02^3 \Rightarrow V_3 = \frac{V}{1,02^3}$$

E assim sucessivamente, até a última parcela.

- **12º mês**: V corresponde ao montante do valor V_{12} após 12 meses a juros compostos de 2% a.m.:

$$V_{12} = (1 + 0,02)^{12}$$
$$V = V_{12} \cdot 1,02^{12} \Rightarrow V_{12} = \frac{V}{1,02^{12}}$$

- Como sabemos do valor à vista, podemos calcular o V das parcelas iguais:

$$V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_{12} = 25\,000$$
$$\frac{V}{1,02^1} + \frac{V}{1,02^2} + \frac{V}{1,02^3} + (\ldots) + \frac{V}{1,02^{12}} = 25\,000$$
$$V \cdot \left(\frac{1}{1,02^1} + \frac{1}{1,02^2} + \frac{1}{1,02^3} + \ldots + \frac{1}{1,02^{12}}\right) = 25\,000$$

- Com o auxílio de uma calculadora, obtendo cada um dos 12 valores que estão entre parênteses na expressão anterior e adicionando esses valores, obtemos:

$$V \cdot 10,578 = 25\,000$$
$$V = \frac{25\,000}{10,578} \Rightarrow V \cong 2\,363,40$$

Portanto, serão 12 parcelas iguais no valor de R$ 2.363,40.

Para explorar

Reúna-se com três colegas e, juntos, façam o que se pede a seguir.

1. Observem o procedimento utilizado nas atividades resolvidas anteriormente e determinem o preço à vista de um computador que foi vendido em 5 parcelas iguais de R$ 650,00 com juros de 3% ao mês. 1. R$ 2.976,82

2. Determinem o valor de cada parcela de um automóvel que Carlos comprou (vejam a **atividade resolvida 21**) considerando o mesmo valor à vista (R$ 25.000,00), mas financiado a juros compostos de 1,5% ao mês em 24 parcelas iguais. Sugestão: Para esta atividade, utilizem planilha eletrônica. Ao final, comparem os resultados obtidos com aqueles que os outros grupos obtiveram. 2. Resposta no Manual do Professor.

Atividades

80. Calcule o valor à vista de um produto vendido em 4 parcelas de R$ 500,00 com juros de 7% a.m. Considere a 1ª parcela à vista no momento da compra (1 + 3). Use uma calculadora para a resolução. 80. R$ 1.812,16

81. Reúna-se com um colega e, com base na situação anterior, elaborem, juntos, outra situação alterando os dados numéricos. Resolvam-na e apresentem-na à outra dupla para que ela também a resolva. Usem uma calculadora. 81. Resposta pessoal.

82. Calcule o valor à vista de um produto vendido em 4 parcelas de R$ 500,00 com juros de 7% a.m. considerando que a 1ª parcela será paga apenas daqui a um mês (0 + 4). Use uma calculadora. 82. R$ 1.693,61

83. Reúna-se com um colega e, com base na situação anterior, elaborem, juntos, outra situação alterando os dados numéricos. Utilizem os dados desenvolvidos na **atividade 82**, porém, considerem que a 1ª parcela será paga apenas daqui a um mês. 83. Resposta pessoal.

84. (Enem) Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R$ 202,00. O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R$ 204,02. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado.

O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de: 84. Alternativa **b**.

a) R$ 398,02.
b) R$ 400,00.
c) R$ 401,94.
d) R$ 404,00.
e) R$ 406,02.

85. (Enem) Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: pagar à vista, por R$ 55.000,00.
- Opção 2: pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30.000,00 e mais uma prestação de R$ 26.000,00 para dali a 6 meses.
- Opção 3: pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20.000,00, mais uma prestação de R$ 20.000,00 para dali a 6 meses e outra de R$ 18.000,00 para dali a 12 meses da data de compra.
- Opção 4: pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 15.000,00 e o restante em 1 ano da data de compra, pagando R$ 39.000,00.
- Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60.000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor), em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção: 85. Alternativa **d**.

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

86. (FGV-SP) Um aparelho de TV é vendido por R$ 1.000,00 em dois pagamentos iguais, sem acréscimo, sendo o 1º pagamento como entrada e o 2º um mês após a compra. Se o pagamento for feito à vista, há um desconto de 4% sobre o preço de R$ 1.000,00. A taxa mensal de juros simples do financiamento é, aproximadamente, igual a: 86. Alternativa **a**.

a) 8,7%.
b) 7,7%.
c) 6,7%.
d) 5,7%.
e) 4,7%.

Atividades finais

1. Com relação à multiplicação e porcentagens, responda ao que se pede.
   a) Multiplicar um número por 0,012 significa calcular qual percentual desse número? 1. a) 1,2%
   b) Multiplicar um número por 1,012 significa calcular qual percentual desse número? 1. b) 101,2%
2. Sobre aumentos e descontos, responda aos itens a seguir.
   a) Dois aumentos consecutivos de 2% e de 6% correspondem a um só aumento de qual percentual? 2. a) 8,12%
   b) Dois descontos consecutivos de 2% e de 6% correspondem a um só desconto de qual percentual? 2. b) 7,88%
3. A respeito de variação percentual, responda ao que se pede.
   a) Se determinado valor aumentou de R$ 10,00 para R$ 12,00, qual foi a variação percentual? 3. a) 20%
   b) Se determinado valor diminuiu de R$ 12,00 para R$ 10,00, qual foi a variação percentual? 3. b) Aproximadamente 16,67%.
4. A respeito de juros simples e juros compostos, responda aos itens a seguir.
   a) O que é montante em relação a um capital e aos juros correspondentes? 4. a) Soma do capital com os juros.
   b) Qual é o regime de juros em que os juros sempre são calculados sobre um valor fixo? 4. b) Juros simples.
   c) Qual é o regime de juros em que, duplicando-se o período, duplicam-se também os juros? 4. c) Juros simples.
5. Sobre o cálculo de montantes nas modalidades juros simples e juros compostos, responda ao que se pede.
   a) Qual é a fórmula que permite calcular o montante no regime de juros simples? 5. a) $M = C \cdot (1 + in)$
   b) Qual a fórmula que permite calcular o montante no regime de juros compostos? 5. b) $M = C \cdot (1 + i)^n$
   c) Como ocorre o crescimento dos montantes nos juros simples e nos juros compostos? 5. c) Nos juros simples, o crescimento é linear; nos juros compostos, é exponencial.

Questões de vestibulares e Enem

6. (Unesp) Em um dia de aula, faltaram 3 alunas e 2 alunos porque os cinco estavam gripados. Dos alunos e alunas que foram à aula, 2 meninos e 1 menina também estavam gripados. Dentre os meninos presentes à aula, a porcentagem dos que estavam gripados era 8% e, dentre as meninas, a porcentagem das que estavam gripadas era 5%. Nos dias em que a turma estava completa, a porcentagem de meninos nessa turma é de: 6. Alternativa **c**.
   a) 52%. b) 50%. c) 54%. d) 56%. e) 46%.
7. (Udesc) Cláudio e João, após jogarem 25 partidas de xadrez, apresentavam o placar de 14 vitórias de Cláudio contra 10 vitórias de João. João decidiu melhorar seu desempenho e seu objetivo é ganhar todas as próximas partidas até que sua taxa percentual de vitórias aumente em pelo menos 12%. O número mínimo de vitórias consecutivas para que o objetivo de João seja alcançado é igual a: 7. Alternativa **e**.
   a) 10. b) 6. c) 8. d) 9. e) 7.
8. (Uego) A capacidade de um tanque é de 1 000 L e está cheio de água. Ao abrir o tampão, o volume de água decresce 20% por minuto. Depois de 5 minutos, o volume será de aproximadamente: 8. Alternativa **b**.
   a) 258 L. b) 327 L. c) 376 L. d) 431 L. e) 512 L.
9. (IFPE) Segundo o IBGE, o número de desempregados no Brasil foi de 12 milhões de pessoas no terceiro trimestre de 2018. Isso representa queda de 4% em relação ao trimestre anterior. 9. Alternativa **d**.
   Com base no texto, o número de desempregados no segundo trimestre de 2018 foi igual a:
   a) 6,13 milhões de pessoas.
   b) 13,23 milhões de pessoas.
   c) 11,52 milhões de pessoas.
   d) 12,5 milhões de pessoas.
   e) 16,8 milhões de pessoas.
10. (IFSC) O Produto Interno Bruto (PIB) é uma representação da soma dos valores monetários de todos os bens e serviços produzidos em determinada região em determinado espaço de tempo. O Balinsky (país fictício) tinha em 2016 um PIB que, em comparação com o PIB de 2015, cresceu 2%. Já em 2017 o PIB de Balinsky diminuiu 5% em relação a 2016. A previsão para 2018 é de um crescimento de 3% em relação a 2017. Dessa forma, se a previsão para 2018 se confirmar, podemos afirmar que a variação do PIB de Balinsky do período de 2015 a 2018 foi:
    Assinale a alternativa CORRETA. 10. Alternativa **a**.
    a) Um decrescimento de aproximadamente 0,2%.
    b) Não cresceu nem diminuiu.
    c) Um aumento de aproximadamente 1,8%.
    d) Um decrescimento de mais de 2%.
    e) Um acréscimo de menos de 1%.

11. (Unicamp-SP) Os preços que aparecem no cardápio de um restaurante já incluem um acréscimo de 10% referente ao total de impostos. Na conta, o valor a ser pago contém o acréscimo de 10% relativo aos serviços (gorjeta). Se o valor total da conta for p reais, o cliente estará desembolsando pelo custo original da refeição, em reais, a quantia de: 11. Alternativa **b**.

a) $p/1{,}20$.

b) $p/1{,}21$.

c) $p \times 0{,}80$.

d) $p \times 0{,}81$.

12. (Uerj) De acordo com a projeção apresentada na tabela, no período de 2011 a 2020, o país com maior aumento percentual na produção de petróleo seria o Iraque.

PROJEÇÃO PARA 2020 DOS MAIORES PRODUTORES DE PETRÓLEO (em milhões de barris/dia)

	2011	2020
Arábia Saudita	12,3	13,2
E.U.A.	8,1	11,6
Rússia	10,2	10,6
Iraque	2,5	7,6
Canadá	3,3	5,5
Brasil	2,0	4,5
China	4,1	4,5
Irã	3,8	3,4
Kuwait	3,0	3,4

Tarcísio Garbellini

Adaptado de fernandonogueiradacosta.wordpress.com.

O segundo país com maior aumento percentual seria: 12. Alternativa **b**.

a) EUA.

b) Brasil.

c) Canadá.

d) Arábia Saudita.

13. (IFCE) Certo capital foi aplicado a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considerando o mês comercial (30 dias), o montante será o triplo do valor inicial no final de: 13. Alternativa **d**.

a) 4 anos, 4 meses e 20 dias.

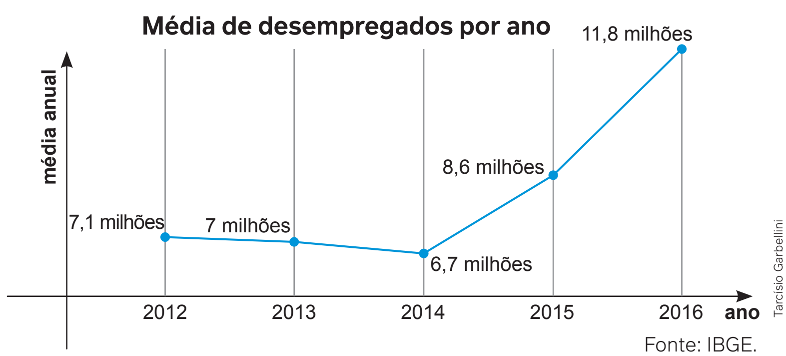
b) 5 anos, 10 meses e 10 dias.

c) 4 anos, 5 meses e 5 dias.

d) 5 anos, 6 meses e 20 dias.

e) 3 anos, 10 meses e 5 dias.

14. (Uerj) A partir do gráfico, o aumento da média anual de desempregados de 2014 para 2016 está mais próximo do seguinte percentual: 14. Alternativa **b**.



Fonte: IBGE.

a) 68%.

b) 76%.

c) 80%.

d) 84%.

15. (UFU-MG) Um comerciante está negociando o valor V da venda à vista de uma mercadoria que foi adquirida com seu fornecedor um mês antes por R$ 1.000,00 com 4 meses de prazo para pagamento (sem pagar juros). Sabe-se que o comerciante aplica esse valor V à taxa de 2% de juros (compostos) ao mês para viabilizar o pagamento futuro da mercadoria. Para que a atualização do valor associado à venda dessa mercadoria forneça, na data do pagamento do fornecedor, um lucro líquido de R$ 200,00, a venda à vista deve ser de:
Observação: use a aproximação 1,0612 para $(1{,}02)^3$, e, ao expressar um valor monetário, faça o arredondamento na segunda casa decimal, considerando unidades inteiras de centavos. 15. Alternativa **b**.

a) R$ 942,33. **b)** R$ 1.130,80. **c)** R$ 1.232,89. **d)** R$ 1.108,62.

16. (ESPM) Um fabricante de bebidas pretende envasar 582 litros de refrigerante em garrafas de 330 mL. Admitindo-se uma perda de 15% por garrafa durante o processo, a quantidade de garrafas que ele poderá envasar é de, aproximadamente: 16. Alternativa **a**.

a) 1 500 **c)** 1 400 **e)** 1 800
b) 1 700 **d)** 1 300

17. (Unicamp-SP) Um recipiente de 30 litros contém uma solução de 14 partes de álcool e 1 parte de água. Quantos litros de água devem ser adicionados para que se tenha uma solução com 70% de álcool? 17. Alternativa **b**.

a) 8 litros **c)** 12 litros
b) 10 litros **d)** 14 litros

18. (UFPR) O manual de instruções de uma balança de precisão informa que o erro cometido na aferição de objetos de até 500 g é de no máximo 0,5%. Se um objeto de 70 g for colocado nessa balança, o valor registrado por ela será de no máximo: 18. Alternativa **b**.

a) 70,035 g **c)** 73,500 g **e)** 75,500 g
b) 70,350 g **d)** 75,000 g

19. (Famerp-SP) Para fazer uma receita culinária são utilizados apenas os ingredientes A e B. Cada 100 g do ingrediente A custa R$ 4,00 e cada 100 g do ingrediente B custa R$ 8,00. Usando a proporção correta dos ingredientes, um cozinheiro utilizou um total de 1 kg de ingredientes para fazer essa receita, ao custo de R$ 56,00. A porcentagem do ingrediente B nessa receita é de 19. Alternativa **c**.

a) 45% **c)** 40% **e)** 66%
b) 32% **d)** 50%

20. (FGV-SP) A tabela indica as vendas de veículos, por categoria, de uma concessionária nos três primeiros meses de um ano, com a omissão de apenas dois valores, indicados por x e y.

	Flex	Diesel	Gasolina	Total
Janeiro	104	31	35	170
Fevereiro	x	0	5	y
Março	8	1	6	15
Total	123	32	46	201

Considerando as três categorias de veículos, a porcentagem de veículos Flex vendidos em fevereiro foi de 20. Alternativa **a**.

a) 68,75% **c)** 56,25% **e)** 37,50%
b) 62,50% **d)** 43,75%

21. (Uece) A empresa Agromil, atuante no segmento do agronegócio, produz, atualmente, x toneladas de grãos. A área administrativa da empresa, objetivando o incremento anual da produção, estabeleceu as seguintes metas para o próximo quinquênio.

I. Incremento de 15% na produção final do primeiro ano de adoção das medidas.
II. Incremento de 12% em relação ao ano anterior, ao final do segundo ano.
III. Incremento de 10% em relação ao ano anterior, ao final do terceiro ano.
IV. Incremento de 8% em relação ao ano anterior, ao final do quarto ano.
V. Incremento de 5% em relação ao ano anterior, ao final do quinto ano.

Ao final do período de cinco anos, no caso do pleno alcance dos resultados estabelecidos no planejamento, o incremento percentual obtido em relação a produção inicial terá sido, aproximadamente, de 21. Alternativa **d**.

a) 57% **b)** 50% **c)** 53% **d)** 60%

22. (Uerj) Uma instituição financeira oferece os seguintes tipos de aplicação a seus clientes:

- Alfa – rendimentos com juros simples, a uma taxa de 12% ao ano, durante 5 anos;
- Beta – rendimento com juros compostos, a uma taxa de 10% ao ano, durante 2 anos.

Considere que um cliente fez uma aplicação Alfa no valor de R$ 2.000,00. Após 5 anos, esse cliente fez uma aplicação Beta, durante dois anos, com o montante y obtido na aplicação Alfa acrescido de x reais. Sabe-se que os juros obtidos pela aplicação Beta foram iguais a R$ 1.050,00.
Calcule o valor de x, em reais, que foi acrescentado ao montante y. 22. R$ 1.800,00

23. (Uerj) Em uma revendedora, uma motocicleta custa à vista R$ 10.404,00. Esse valor também pode ser pago a prazo, sem juros em duas parcelas de R$ 5.202,00, sendo a primeira um mês após a compra e a segunda dois meses após a compra. Um comprador tem o valor de R$ 10.404,00 em uma aplicação que rende juros de 2% ao mês. Ele decide manter esse valor aplicado e, ao final do primeiro mês, retira apenas R$ 5.202,00 para pagar a primeira parcela. Um mês depois retira R$ 5.202,00 e faz o pagamento da segunda parcela. Isso equivale a ter um desconto no ato da compra. Esse desconto, em percentual, está mais próximo de: 23. Alternativa **a**.

a) 3,0% **b)** 3,5% **c)** 4,0% **d)** 4,5%

24. (Albert Einstein-SP) Um produto foi comprado em 2 parcelas, a primeira à vista e a segunda após 3 meses, de maneira que, sobre o saldo devedor, incidiram juros simples de 2% ao mês. Se o valor das 2 parcelas foi o mesmo, em relação ao preço do produto à vista, cada parcela corresponde à 24. Alternativa **b**.

a) $\frac{51}{101}$ **b)** $\frac{53}{103}$ **c)** $\frac{55}{105}$ **d)** $\frac{57}{107}$

25. (FGV-SP) Certo capital foi aplicado em regime de juros compostos. Nos quatro primeiros meses, a taxa foi de 1% ao mês e, nos quatro meses seguintes, a taxa foi de 2% ao mês. Sabendo-se que, após os oito meses de aplicação, o montante resgatado foi de R$ 65.536,00 então o capital aplicado, em reais, foi aproximadamente igual a
Dado: $65\,536 = 2^{16}$ 25. Alternativa **e**.

a) $3{,}66^8$. **b)** $3{,}72^8$. **c)** $3{,}78^8$. **d)** $3{,}88^8$. **e)** $3{,}96^8$.

26. (IFSC) Segundo dados do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), o rendimento médio mensal das famílias catarinenses é R$ 1.368,00.
Considerando-se que uma família pegou um empréstimo no valor de 30% de sua renda média mensal e vai pagar este empréstimo a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, quanto essa família pegou emprestado e qual o valor que a família irá pagar (montante final) se saldar essa dívida em 2 meses? 26. Alternativa **e**.

a) Pegou emprestado R$ 407,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 423,86.

b) Pegou emprestado R$ 410,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 425,94.

c) Pegou emprestado R$ 409,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 424,90.

d) Pegou emprestado R$ 409,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 425,94.

e) Pegou emprestado R$ 410,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 426,98.

27. (Enem) Uma pessoa, que perdeu um objeto pessoal quando visitou uma cidade, pretende divulgar nos meios de comunicação informações a respeito da perda desse objeto e de seu contato para eventual devolução. No entanto, ela lembra que, de acordo com o Art. 1.234 do Código Civil, poderá ter que pagar pelas despesas do transporte desse objeto até sua cidade e poderá ter que recompensar a pessoa que lhe restituir o objeto em, pelo menos, 5% do valor do objeto.
Ela sabe que o custo com o transporte será de um quinto do valor atual do objeto e, como ela tem muito interesse em reavê-lo, pretende ofertar o maior percentual possível de recompensa, desde que o gasto total com as despesas não ultrapasse o valor atual do objeto. Nessas condições, o percentual sobre o valor do objeto, dado como recompensa, que ela deverá ofertar é igual a: 27. Alternativa **e**.

a) 20%. **b)** 25%. **c)** 40%. **d)** 60%. **e)** 80%.

28. (Enem) Deseja-se comprar determinado produto e, após uma pesquisa de preços, o produto foi encontrado em 5 lojas diferentes, a preços variados.

- Loja 1: 20% de desconto, que equivale a R$ 720,00, mais R$ 70,00 de frete;
- Loja 2: 20% de desconto, que equivale a R$ 740,00, mais R$ 50,00 de frete;
- Loja 3: 20% de desconto, que equivale a R$ 760,00, mais R$ 80,00 de frete;
- Loja 4: 15% de desconto, que equivale a R$ 710,00, mais R$ 10,00 de frete;
- Loja 5: 15% de desconto, que equivale a R$ 690,00, sem custo de frete.

O produto foi comprado na loja que apresentou o menor preço total. O produto foi adquirido na loja:

a) 1. **b)** 2. **c)** 3. **d)** 4. **e)** 5. 28. Alternativa **a**.

29. (Enem) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros, no ano 2000, era de R$ 1.250,00. Já o Censo 2010 mostrou que, em 2010, esse valor teve um aumento de 7,2% em relação a 2000. Esse mesmo instituto projeta que, em 2020, o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros poderá ser 10% maior do que foi em 2010.

IBGE. Censo 2010. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 13 ago. 2012 (adaptado).

Supondo que as projeções do IBGE se realizem, o rendimento médio mensal dos brasileiros em 2020 será de:

a) R$ 1.340,00. **b)** R$ 1.349,00. **c)** R$ 1.375,00. **d)** R$ 1.465,00. **e)** R$ 1.474,00.

29. Alternativa **e**.

30. (Enem) A conta de telefone de uma loja foi, nesse mês, de R$ 200,00. O valor da assinatura mensal, já incluso na conta, é de R$ 40,00, o qual dá direito a realizar uma quantidade ilimitada de ligações locais para telefones fixos. As ligações para celulares são tarifadas separadamente. Nessa loja, são feitas somente ligações locais, tanto para telefones fixos quanto para celulares. Para reduzir os custos, o gerente planeja, para o próximo mês, uma conta de telefone com valor de R$ 80,00.

Para que esse planejamento se cumpra, a redução percentual com gastos em ligações para celulares nessa loja deverá ser de: 30. Alternativa **e**.

a) 25%. **b)** 40%. **c)** 50%. **d)** 60%. **e)** 75%.

31. (Enem) Uma empresa divide o balanço anual de vendas de seus produtos em duas partes, calculando o número de vendas dos produtos ao final de cada semestre do ano. Após o balanço do primeiro semestre, foram realizadas ações de *marketing* para os cinco produtos menos vendidos da empresa. A tabela mostra a evolução das vendas desses produtos, do primeiro para o segundo semestre.

Produto	Número de unidades vendidas no primeiro semestre	Número de unidades vendidas no segundo semestre
I	350	600
II	1 000	1 100
III	4 000	4 000
IV	850	1 200
V	2 000	2 600

O sucesso de uma ação de *marketing* de um produto é medido pelo aumento percentual do número de unidades vendidas desse produto, do primeiro para o segundo semestre. A ação de *marketing* mais bem-sucedida foi para o produto: 31. Alternativa **a**.

a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

32. (Enem) Para construir uma piscina, cuja área total da superfície interna é igual a 40 m^2, uma construtora apresentou o seguinte orçamento:

- R$ 10.000,00 pela elaboração do projeto;
- R$ 40.000,00 pelos custos fixos;
- R$ 2.500,00 por metro quadrado para construção da área interna da piscina.

Após a apresentação do orçamento, essa empresa decidiu reduzir o valor de elaboração do projeto em 50%, mas recalculou o valor do metro quadrado para a construção da área interna da piscina, concluindo haver a necessidade de aumentá-lo em 25%. Além disso, a construtora pretende dar um desconto nos custos fixos, de maneira que o novo valor do orçamento seja reduzido em 10% em relação ao total inicial.

O percentual de desconto que a construtora deverá conceder nos custos fixos é de: 32. Alternativa **d**.

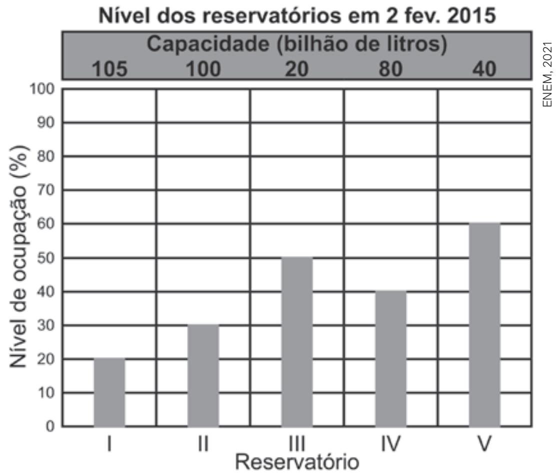
a) 23,3%. **b)** 25,0%. **c)** 50,0%. **d)** 87,5%. **e)** 100,0%.

33. (Enem) Para realizar um voo entre duas cidades que distam 2 000 km uma da outra, uma companhia aérea utilizava um modelo de aeronave A, capaz de transportar até 200 passageiros. Quando uma dessas aeronaves está lotada de passageiros, o consumo de combustível é de 0,02 litro por quilômetro e por passageiro. Essa companhia resolveu trocar o modelo de aeronave A pelo modelo de aeronave B, que é capaz de transportar 10% de passageiros a mais do que o modelo A, mas consumindo 10% menos combustível por quilômetro e por passageiro.

A quantidade de combustível consumida pelo modelo de aeronave B, em relação à do modelo de aeronave A, em voo lotado entre as duas cidades, é 33. Alternativa **b**.

a) 10% menor **b)** 1% menor **c)** igual **d)** 1% maior **e)** 11% maior

34. (Enem) O gráfico apresenta o nível de ocupação dos cinco reservatórios de água que abasteciam uma cidade em 2 fevereiro de 2015.



Nessa data, o reservatório com o maior volume de água era o 34. Alternativa **d**.

a) I **b)** II **c)** III **d)** IV **e)** V

35. (Enem) Uma pessoa comprou uma caixa com 25 bombons por 5 reais. Resolveu revendê-los de forma avulsa a um preço único. Não resistindo à tentação, durante a venda comeu cinco bombons. Obteve, mesmo assim, com a venda dos bombons restantes, um lucro de 20% sobre o valor pago pela caixa. 35. Alternativa **c**.

Qual foi o valor, em real, de venda de cada bombom?

a) 0,20 **b)** 0,24 **c)** 0,30 **d)** 0,35 **e)** 0,40

36. (Enem) No ano em que uma empresa lançou seu novo modelo de celular no mercado brasileiro, investiu 45 milhões de reais no primeiro semestre em cada uma das cinco regiões do país, colocando à venda 30 mil aparelhos por região. No primeiro semestre, todos os aparelhos colocados à venda foram vendidos, gerando um lucro total de 30 milhões de reais. No segundo semestre, a empresa decidiu que faria o mesmo investimento e colocou à venda as mesmas quantidades de aparelhos por região. Por causa da demanda observada, a empresa considerou que todos os aparelhos desse modelo que fossem ofertados sejam vendidos e, além disso, planeja obter um lucro total 10% maior do segundo semestre do que o que obteve no primeiro.

Para que essa empresa alcance o lucro planejado, qual deve ser o valor de venda, em real, de um aparelho celular desse modelo, no segundo semestre desse ano? 36. Alternativa **b**.

a) R$ 1.650,00 **b)** R$ 1.720,00 **c)** R$ 1.870,00 **d)** R$ 2.500,00 **e)** R$ 2.600,00

Autoavaliação

Faça uma autoavaliação de como foi sua compreensão com relação aos assuntos e objetivos trabalhados ao longo do presente capítulo.

Objetivos de aprendizagem	Sim	É necessário retomar
Compreendo o conceito de juros simples e sua utilização.		
Calculo o montante de um capital aplicado na modalidade de juros simples após determinado período de aplicação.		
Interpreto o crescimento do montante de um capital aplicado a juros simples como crescimento linear.		
Compreendo o conceito de juros compostos e sua utilização.		
Diferencio aplicações em juros simples de aplicações em juros compostos.		
Calculo o montante de um capital aplicado na modalidade de juros compostos após determinado período de aplicação.		
Interpreto o crescimento do montante de um capital aplicado a juros compostos como crescimento exponencial.		

Projeto 1

Limites de crescimento populacional

Para que serve esse projeto?

Saber dimensionar o tamanho do impacto socioambiental causado pelas suas ações é uma habilidade essencial para tornar-se um cidadão empático, consciente e preocupado com o futuro. Para isso, esse projeto propõe uma forma de estimar grandezas relacionadas ao processo de reduzir, reutilizar ou reciclar embalagens do tipo longa vida.

Jeremy Walker/Stone RF/Getty Images

Jovem seleciona e organiza produtos recicláveis.

Questão disparadora

- Como podemos medir as consequências de nossa omissão se não praticarmos o consumo consciente?

Contexto

O consumo sustentável é baseado em três pilares na chamada política dos **5 Rs**: **Repensar** – como o consumo é realizado no dia a dia; **Recusar** – o consumo de recursos que não podem ser reutilizados e/ou recilados; **Reduzir** – o consumo ao minimo necessário; **Reutilizar** – os produtos consumidos, procurando novas finalidades em que eles possam ser utilizados; **Reciclar** – tudo que, ao ser descartado, possa ser reaproveitado como matéria-prima para fabricação de outro objeto.

O instituto Akatu, uma ONG que atua há 16 anos pelo consumo consciente, oferece orientações importantes sobre como aplicar essas práticas no dia a dia. Para entender melhor como colocar essas ações em prática, leia o texto "Conheça as 6 perguntas do consumo consciente que ajudam a diminuir impactos negativos no meio ambiente" (disponível em: https://bit.ly/4gzAltp; acesso em: 12 jul. 2024).

Para compreender a importância dessas atitudes, esse projeto propõe que você saiba o que são e como são feitas as embalagens longa vida e estime quantas delas são consumidas em sua região.

Desenvolvimento

O nome “longa vida” foi dado às embalagens cartonadas usadas para transportar e conservar alimentos líquidos, como o leite, por conseguir manter a validade do produto por mais tempo sem necessidade de refrigeração. Essa certamente é uma vantagem em relação a outras embalagens. Nesse projeto, em grupo, vocês irão investigar alguns aspectos desse tipo de embalagem, conforme indicações a seguir.

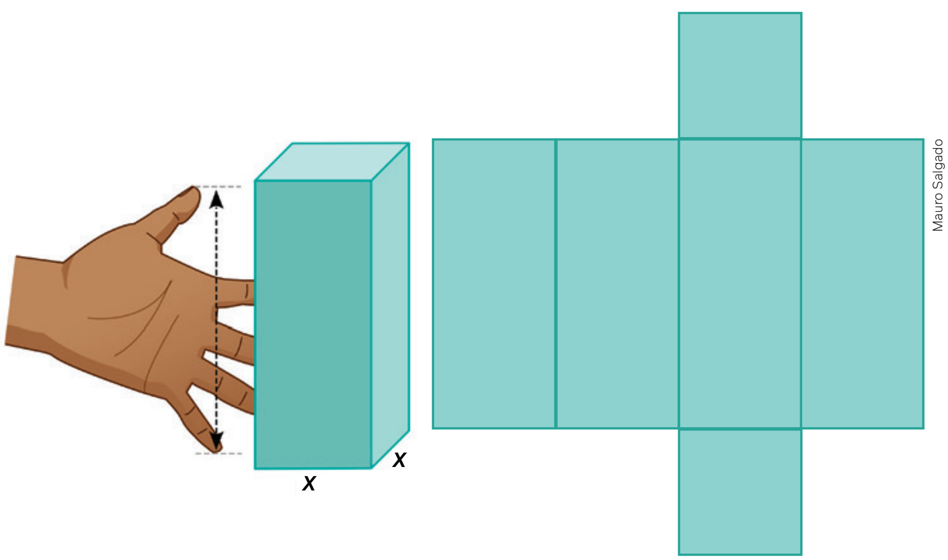
1. Quais vantagens a embalagem longa vida tem para os fabricantes de leite em relação a outras e por que ela foi tão difundida?
2. Quais são as principais diferenças entre os impactos no meio ambiente causados pela fabricação dessas embalagens em relação a outras embalagens de leite?
3. Quantas embalagens desse tipo são consumidas mensalmente em sua região?
4. Quais são as alternativas para reduzir, reutilizar ou reciclar essas embalagens?

Produto final

O projeto criado por cada grupo deve gerar uma campanha com propostas de consumo consciente de embalagens cartonadas.

Para encaminhá-lo, pesquisem sobre a história do surgimento dessa embalagem: o que motivou sua criação, como seu uso se difundiu, quais são os impactos positivos e negativos que gerou etc. Depois, façam o processo de estimativa a seguir.

1. Considerem que uma caixa de leite de 1 litro tem a forma de um paralelepípedo de base quadrada com aproximadamente um palmo de altura e, para fins de estimativa, considerem que a planificação da caixa de leite seja a planificação mais simples de um paralelepípedo, como ilustrado na imagem.



2. Desprezando a espessura do material e considerando que o volume interno da caixa (correspondente à capacidade de 1 litro) é dado pelo produto das três dimensões, estimem o valor da medida x e o valor da área dessa planificação.
3. Pesquisem como e onde é feita a reciclagem dessas embalagens em sua região. Verifiquem quantas embalagens desse tipo são recebidas, em média, por mês.
4. Assistam ao vídeo *A clever way to estimate enormous numbers* (Um jeito inteligente de estimar grandes números) (disponível em: https://ed.ted.com/lessons/michael-mitchell-a-clever-way-to-estimate-enormous-numbers; acesso em: 12 jul. 2024) e apliquem a técnica do Problema de Fermi apresentada para estimar:
   - a ordem de grandeza da quantidade de caixas de leite consumidas por mês em sua cidade ou região;
   - a ordem de grandeza da quantidade de caixas de leite enviadas para a reciclagem por mês;
   - a ordem de grandeza da área que seria ocupada pela planificação de todas as caixas de leite consumidas em sua cidade ou região e a área ocupada por aquelas que iriam para a reciclagem.
5. Pesquisem propostas de redução e reutilização dessas embalagens e elaborem uma campanha informativa de incentivo ao consumo sustentável de embalagens longa vida utilizando as estimativas feitas pelo grupo.

Apresentação

O produto final será uma campanha de incentivo ao consumo consciente de embalagens cartonadas, além de um relatório de conclusão. A campanha deve conter:

- um apelo visual comparando as áreas estimadas, convidando as pessoas a refletir sobre a importância de reciclar esse tipo de material;
- informações sobre como essa reciclagem pode ser feita, por exemplo, cuidados com o descarte da embalagem, postos de coleta etc;
- sugestões de possibilidades para reutilizar essas embalagens, diminuindo o descarte ou reduzindo seu consumo.

Relatório conclusivo

O relatório de conclusão deve conter:

- as estratégias utilizadas para a estimativa das áreas apresentadas na campanha;
- uma resposta à questão disparadora: "Como podemos medir as consequências de nossa omissão se não praticarmos o consumo consciente?";
- uma reflexão final do grupo indicando como o projeto contribuiu para o entendimento acerca dos temas deste volume, incluindo quais tópicos do conteúdo foram necessários para executá-lo.

Sugestões de fontes

Sites

- **Consumo consciente**. Disponível em: https://www.akatu.org.br/. Acesso em: 12 jul. 2024.
- **Ecosciente – Portal da educação ambiental**. Disponível em: https://sites.unicentro.br/wp/educacaoambiental/. Acesso em: 12 jul. 2024.
- **Embalagens longa vida**. Disponível em: https://cempre.org.br/embalagens-longa-vida/. Acesso em: 12 jul. 2024.
- **O Paradoxo de Fermi: onde é que estão as outras Terras?** Disponível em: https://gizmodo.uol.com.br/paradoxo-fermi/. Acesso em: 12 jul. 2024.

Artigo em PDF

- **Problemas de Fermi nas aulas de Física: estratégias para resolução de problemas de estimativa**. Disponível em: http://www1.fisica.org.br/mnpef/problemas-de-fermi-nas-aulas-de-f%C3%ADsica-estrat%C3%A9gias-para-resolu%C3%A7%C3%A3o-de-problemas-de-estimativas. Acesso em: 12 jul. 2024.

Projeto 2
Reutilizando água

Para que serve esse projeto?

A Geometria Espacial pode parecer bastante distante da realidade quando estudamos apenas figuras ideais: esferas, cubos, pirâmides, paralelepípedos, cones, cilindros, sólidos platônicos etc. Entretanto, cada uma dessas figuras, de acordo com suas características, serve de modelo para objetos reais com funções cotidianas diversas.

Esse projeto utiliza o estudo de escoamento de águas pluviais como base para desenvolver o senso geométrico em vários níveis: na escolha dos melhores sólidos geométricos para resolver um problema, no cálculo de áreas e volumes e na representação bidimensional desses objetos.

Willowpix/iStockphoto.com

Água da chuva escoa de um telhado. Estados Unidos, julho de 2018.

Questão disparadora

- Como a Geometria Espacial pode ser utilizada para compreender e resolver problemas sociais e cotidianos?

Contexto

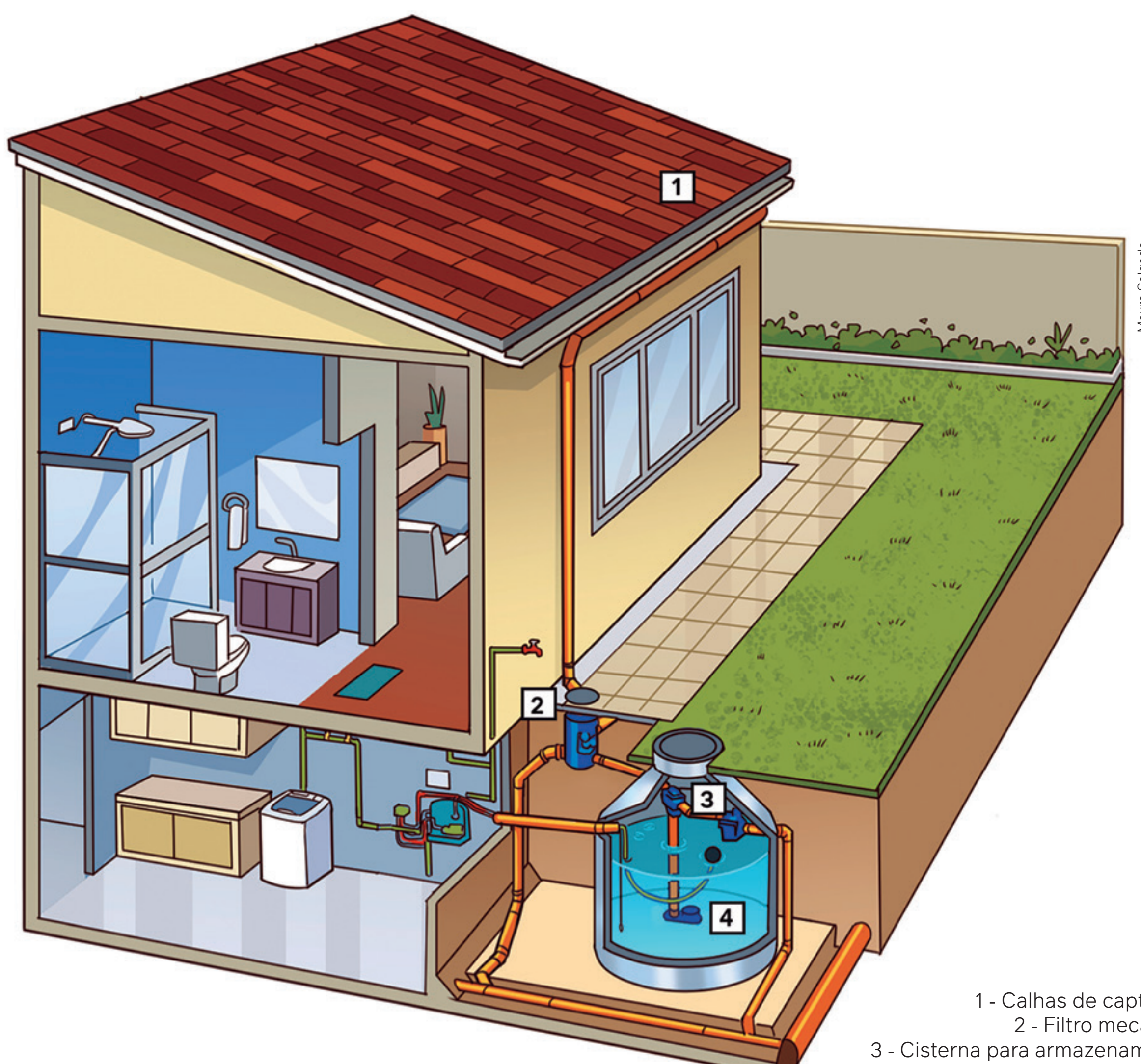
25% da população mundial não tem acesso a água potável, alerta ONU

Embora mais de dois bilhões de pessoas tenham obtido acesso à água potável nas últimas duas décadas, um quarto da população mundial ainda está sendo deixado para trás, alerta um novo relatório da ONU.

25% da população mundial não tem acesso a água potável, alerta ONU. *Nações Unidas Brasil*, Brasília, DF, 26 out. 2022. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/204766-25-da-popula%C3%A7%C3%A3o-mundial-n%C3%A3o-tem-acesso-%C3%A1gua-pot%C3%A1vel-alerta-onu. Acesso em: 12 jul. 2024.

Em nosso planeta, a água doce é um recurso natural abundante e renovável, porém, apenas uma porcentagem muito pequena desse recurso é potável e acessível aos seres humanos. Durante todo o século XX, além do aumento populacional, dados das Nações Unidas mostram que o consumo mundial de água *per capita* também aumentou, o que faz com que esse recurso esteja cada vez mais escasso.

Além da redução no consumo, uma das melhores formas de aumentar o nível de aproveitamento dos recursos hídricos é captar água da chuva para usos que não envolvam ingestão, como lavar o chão, dar descarga etc. Assim, é cada vez mais comum o uso de cisternas em construções residenciais que armazenam e redistribuem a chuva que cai no telhado, como ilustra a imagem.



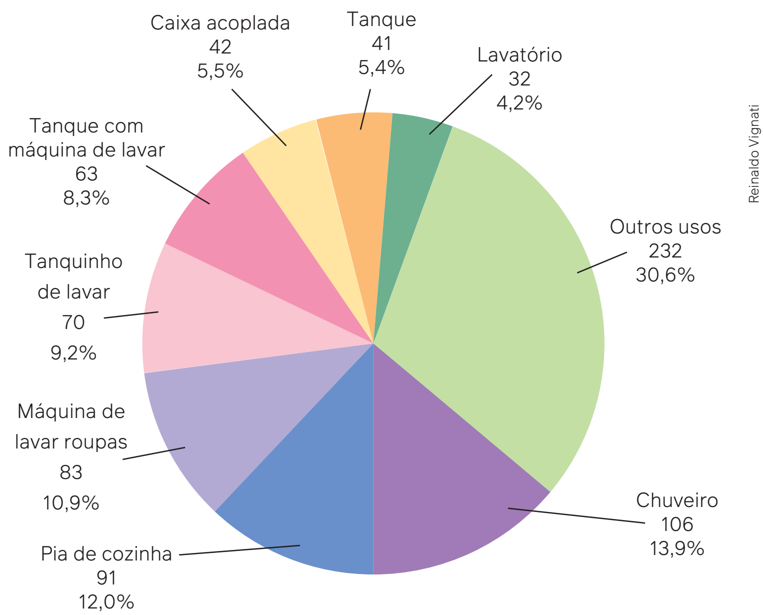
1 - Calhas de captação.
2 - Filtro mecânico.
3 - Cisterna para armazenamento.
4 - Bomba para direcionamento.

Desenvolvimento

Para esse projeto, você e seu grupo irão planejar uma cisterna e calcular a redução no consumo de água que essa ação pode gerar. Veja o procedimento a seguir.

1. Escolham a residência que servirá de base para o projeto da cisterna. Vocês podem escolher a casa de um membro do grupo ou uma fictícia, de preferência em uma região com altos índices pluviométricos. Busquem informações para conhecer os índices de incidência de chuvas das cidades e consultem a NBR 10844 – Norma Brasileira da ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas) para a construção de calhas de coleta e direcionamento da chuva em telhados.
2. Façam uma estimativa do volume de chuva, em milímetros por metro quadrado, que cai na região escolhida nos meses em que há maior incidência pluviométrica. Esse dado será necessário para determinar o tamanho da cisterna.
3. Determinem as medidas do terreno e da área construída da casa onde a cisterna será implantada. Esses dados são necessários para que seja possível calcular quantos litros de água serão recolhidos pela calha e direcionados para a cisterna em um dia de chuva.
4. Verifiquem qual é o consumo médio diário de água na casa. Utilizando o gráfico, observem quantos desses litros podem ser provenientes de água de chuva sem oferecer riscos à saúde dos moradores.

Percentual de participação dos pontos de utilização no consumo diário médio



Média de todas as residências (volume L/dia; participação %).

Fonte: BARRETO, D. Perfil do consumo residencial e usos finais da água. *Ambiente Construído*, Porto Alegre, v. 8, n. 2, p. 23-40, abr./jun. 2008. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/ambienteconstruido/article/download/5358/3280. Acesso em: 12 jul. 2024.

5. Sabendo quantos litros diários de água de chuva essa residência pode utilizar e considerando a quantidade média de precipitação sobre essa casa por mês, determinem a capacidade da cisterna, de modo que haja espaço suficiente para armazenar a chuva que cai em um mês mantendo o uso diário de água da família.
6. Determinem as medidas da cisterna, escolham o formato e definam todas as dimensões de modo que ela tenha a capacidade calculada anteriormente. Desenhem um corte lateral da cisterna e indiquem todas as medidas nesse esquema.

Produto final

Com base nos dados coletados e no procedimento usado para o desenvolvimento desse projeto, o produto final do trabalho será o desenho da cisterna, com as medidas especificadas, e um relatório de dados contendo a quantidade de litros de água economizada por mês após a implementação. Além disso, apresentem a estimativa do impacto anual no uso da água considerando que todas as residências do município reduzam o consumo na mesma proporção que a casa do projeto.

Apresentação

A apresentação, que pode ser um documento impresso ou virtual, deve conter todos os elementos indicados no produto final.

Relatório conclusivo

O relatório de conclusão deve estar organizado de acordo com as seguintes partes:

- informações dos dados e fontes pesquisados;
- cálculos realizados;
- reflexão do grupo sobre a importância do uso consciente da água, incluindo as consequências decorrentes do mau uso desse recurso. Essa reflexão deve destacar os temas do livro que foram utilizados no projeto e como eles contribuíram para a aprendizagem acerca do uso consciente dos recursos hídricos. Também deve oferecer uma resposta à questão disparadora: “Como a Geometria Espacial pode ser utilizada para compreender e resolver problemas sociais e cotidianos?”.

Sugestões de fontes

Sites

- **Escassez de água: motivações, impactos e como evitar**. Disponível em: https://bit.ly/3XVVruZ. Acesso em: 12 jul. 2024.
- **Moradores economizam até 16% com sistema de captação de água de chuva criado pela CDHU**. Disponível em: https://bit.ly/4gmfB8D. Acesso em: 12 jul. 2024.

Artigo em PDF

- **Perfil do consumo residencial e usos finais da água**. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/ambienteconstruido/article/view/5358. Acesso em: 12 jul. 2024.

Projeto 3

Previsão de resultados

Para que serve esse projeto?

A Matemática é comumente vista como uma ciência de “certo e errado”. Entretanto, a Estatística é uma ciência de riscos e incertezas. Entender como a Estatística funciona é essencial para que possamos utilizar resultados de experimentos de forma consciente e responsável.

Alicia Llop/Moment/Getty Images

Um dado não viciado tem as mesmas chances para cada um dos resultados.

Para aprofundar o assunto, esse projeto propõe um experimento que deve auxiliar você a compreender a relação entre modelos estatísticos e situações reais.

Questão disparadora

- Como um experimento estatístico pode nos dar informações sobre a situação que ele representa?

Contexto

A Estatística tem duas funções principais: coletar e analisar dados para, em seguida, fazer um estudo probabilístico a fim de entender o que eles podem nos dizer sobre a população estudada. Chamamos as fases de coleta, organização e análise dos dados de Estatística Descritiva. A **probabilidade**, por sua vez, é o estudo das formas de relacionar e interpretar esses dados, calculando a chance de ocorrência de um evento em determinadas condições. Quando utilizamos essa interpretação para fazer afirmações e generalizações, estamos utilizando a Estatística Inferencial.

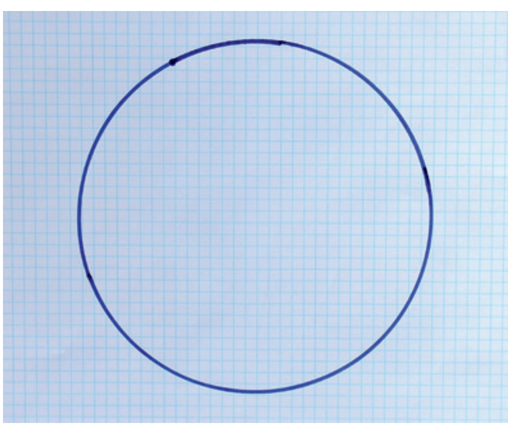
Desenvolvimento

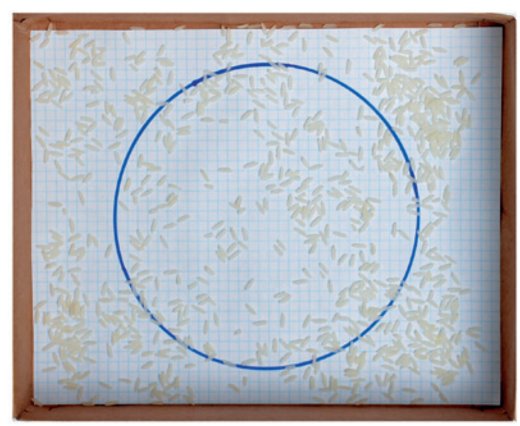
Esse projeto propõe a realização de um experimento que utiliza a probabilidade e a inferência estatística para estimar a área de uma região.

Para realizar o experimento, você e seu grupo precisarão de uma folha de papel quadriculado, um punhado de grãos (arroz, por exemplo), uma régua, uma máquina fotográfica (pode ser o celular), um editor de imagens (opcional) e uma planilha eletrônica.

1. Desenhem um círculo na folha quadriculada, como ilustrado na primeira imagem abaixo. Observem que o círculo deve ocupar uma região visivelmente maior que a metade da folha, pois, se ele for muito pequeno, dificultará o trabalho posterior.
2. Joguem um punhado de grãos sobre a folha com o círculo desenhado. Vocês podem colocar a folha dentro de uma caixa para minimizar o espalhamento dos grãos. Fotografem o resultado buscando uma visão superior da cena, como no exemplo da segunda imagem abaixo.

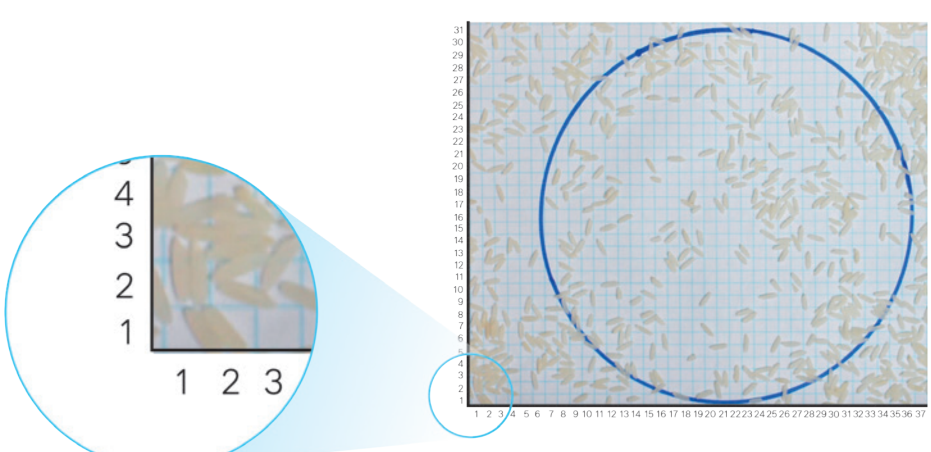
Fernando Favoretto/Criar Imagem





Fernando Favoretto/Criar Imagem

3. Contem quantos grãos caíram sobre a folha na área externa ao círculo e quantos caíram na área interna ao círculo.
   Para facilitar a contagem, vocês podem utilizar um programa de edição de imagens. Utilizando o editor, recortem a foto e numerem as linhas e colunas da folha quadriculada para fazer a contagem por quadrantes. Nesse caso, considerem como "área externa ao círculo" apenas a região da folha que aparece na imagem recortada.



Fernando Favoretto/Criar Imagem

4. Calculem a proporção entre a quantidade de grãos que caíram dentro do círculo e a quantidade total de grãos que caíram sobre a folha. Caso tenham recortado a imagem digitalmente, considerem apenas os grãos que aparecem no recorte.
Na figura apresentada no exemplo, a proporção entre a quantidade de grãos dentro do círculo e a quantidade total de grãos que aparecem no recorte é de 52%.
5. Determinem a área do círculo medindo o raio com uma régua e utilizando a fórmula da área do círculo. Determinem, também, a área da folha. Caso tenham recortado a imagem digitalmente, considerem apenas os grãos que aparecem no recorte. Vocês podem, também, estimar a área da folha e do círculo contando de forma aproximada a quantidade de quadrados que estão na folha e a quantidade de quadrados que estão dentro da circunferência.
Na figura apresentada no exemplo, cada quadrado do papel quadriculado tem 0,5 cm de lado, o raio do círculo tem aproximadamente 7 cm, o recorte da folha que aparece na imagem tem aproximadamente 32 × 37 quadrados, sua área mede aproximadamente 296 cm^2 e a área do círculo mede aproximadamente 154 cm^2.
6. Determinem qual é a probabilidade de um grão lançado aleatoriamente sobre a folha cair dentro do círculo.
Na figura apresentada no exemplo, considerando que o espaço amostral é a área que aparece no recorte da foto e que o evento “A” é a área do círculo, temos $n(S) = 296$; $n(A) = 154$ e $P(A) = \frac{154}{296} = 52{,}03\%$.

Ao final do experimento, discutam por que a razão entre a área do círculo e a área da folha é numericamente tão próxima da razão entre o número de grãos que caíram dentro do círculo e os grãos que caíram na folha. Para aprofundar a discussão, reflitam sobre o que aconteceria se o experimento fosse realizado apenas com 10 grãos.

Produto final

Seu grupo deve criar um relatório do experimento, descrevendo passo a passo como foi realizado. A descrição deve conter um glossário explicando os conceitos listados a seguir e associando cada um deles a algum elemento do experimento: evento aleatório; probabilidade de ocorrência de um evento; população.

Além de relatar o experimento, o grupo deve elaborar um texto conclusivo que utilize o resultado da experiência para responder às questões a seguir.

1. Como podemos utilizar apenas grãos de arroz (ou qualquer outro gerador de pontos aleatório) para descobrir a medida da área de um bairro que está representado em um mapa e que tem limites muito irregulares?
2. Qual é a relação entre o tamanho de uma amostra e a confiabilidade dos resultados probabilísticos obtidos?

Apresentação

Para apresentar seu produto, você pode construir um cartaz, um documento ilustrado, um conjunto de *slides*, um vídeo ou um seminário. A apresentação precisa abranger não só o experimento como também os conceitos trabalhados no projeto e as conclusões feitas a partir das discussões propostas.

Espera-se que o grupo consiga explicar o que aprendeu com o experimento e como essa aprendizagem pode ser útil em outros contextos.

Relatório conclusivo

O relatório de conclusão deve estar organizado da seguinte maneira:

- relatório do experimento acompanhado de imagens e descrições sobre as etapas;
- glossário dos termos estatísticos que podem ser observados no experimento;
- relatório de conclusão do experimento respondendo às questões propostas;
- com base nas conclusões do grupo, o relatório deve apresentar uma resposta à questão disparadora: “Como um experimento estatístico pode nos dar informações sobre a situação que ele representa?”;
- o relatório também deve conter uma explicação sobre como o estudo da Estatística Descritiva pode auxiliar na produção de um bom conjunto de dados, e como a Probabilidade pode auxiliar na avaliação desses dados para a produção de inferências estatísticas. Incluam, na argumentação, quais cuidados devem ser tomados para não incorrer em erros baseados em dados estatísticos.

Sugestões de fontes

Sites

- **Calculadora de tamanho de amostra e margem de erro**. Disponível em: http://www.trujillo.com.br/calculadora.htm. Acesso em: 12 jul. 2024.
- **Calculadora de tamanho de amostra**. Disponível em: https://pt.surveymonkey.com/mp/sample-size-calculator/. Acesso em: 12 jul. 2024.

Artigos em PDF

- **Método de Monte Carlo**. Disponível em: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/19632/19632_4.PDF. Acesso em: 12 jul. 2024.
- **População e amostra**. Disponível em: http://sisne.org/Disciplinas/Grad/ProbEstat2/aula1.pdf. Acesso em: 7 jun. 2024.

Vídeo

- *Estimando el valor de PI mediante el método Monte Carlos com GeoGebra* (Estimando o valor de Pi utilizando o método de Monte Carlo com GeoGebra), ([2016], ca. 26 min). Disponível em: https://www.geogebra.org/m/cF7RwK3H. Acesso em: 12 jul. 2024.

Gabarito

Capítulo 1

Página 12

Para pensar e discutir

1. Retângulos e hexágonos.

Página 14

Para pensar e discutir

1. Comprimento, largura e altura.

Páginas 16-18

Atividades

1.
   a) $A_{T1} = 2ab + 2ac + 2bc$
   b) $A_{T2} = k^2 \cdot (2ab + 2ac + 2bc)$
   c) $A_{T2} = k^2 \cdot A_{T1}$
   d) $0 < k^2 < 1$

2.
   a) 400 cm^2
   b) 2 500 porta-lápis

3. Aproximadamente 213 cm^2.

4.
   a) 19
   b) 2 peças de medidas: 140,5 cm × 30 cm; 12 peças de medidas: 30 cm × 35 cm; 2 peças de medidas: 30 cm × 147,5 cm; 3 peças de medidas: 30 cm × 135,5 cm
   c) 4,2075 m^2
   d) 2,5 cm

5.
   a) 9 984 cm^2; menor
   b) 199 680 cm^2

6.
   a) 1 264 cm^2
   b) 5 056 cm^2

7.
   a) 520 m^2
   b) 360 m^2

8. d 9. d 10. a

Página 19

Para pensar e discutir

1. 4 2. 3 3. 12 4. 24

Página 21

Para pensar e discutir

1. 2; $r = 2$ 2. 4; $r = 4$ 3. 3; $r = 3$

Página 23

Para pensar e discutir

2. Será multiplicado por 8.

Página 24

Análise e contexto

1. $x \cdot \sqrt[3]{2}$ cm

Páginas 25-26

Atividades

11.
   a) $0 < k < 1$
   b) $\frac{ka}{a} = k$
   c) k^2
   d) k^3

12.
   a) 1 dm^3; 1 000 cm^3
   b) Sim.

14. Aproximadamente 9,361 m^3.

15. 67 624 L

16. Não.

17. 4,8 L

Página 27

Para pensar e discutir

2. As três pilhas têm o mesmo volume.
3. As três áreas são iguais.

Página 28

Para pensar e discutir

1. Lado da base e altura do prisma.

Página 29

Para pensar e discutir

1. 30 cm^3
2. 33 333

Páginas 30-31

Atividades

19.
   a) 4,8 L b) Duplicaria.

21.
   a) Aproximadamente 415,2 cm^3.
   b) Duplicaria.
   c) É multiplicado por 4.

23.
   b) 4 500 cm^3

24. 6 750 L

25. 7 776 cm^3

Página 33

Para pensar e discutir

1. À altura e ao perímetro das circunferências das bases do cilindro.

Página 34

Para pensar e discutir

1. $6a^2$ 3. $24\pi a^2$ cm^2
2. Não se altera.

Páginas 36-37

Atividades

26.
   a) Aproximadamente 628 cm^2.
   b) Aproximadamente 785 cm^2.

28. Aproximadamente 14 130 cm^2.

30.
   a) 2 b) Não.

31. Aproximadamente 703,36 cm^2.

32. Aproximadamente 0,5652 m^2.

33. Aproximadamente 20 096 mm^2.

Página 38

Para pensar e discutir

1. Altura: a cm; raio: $3a$ cm.
2. Sim.

Página 39

Para pensar e discutir

2. O bloco de metal.

Páginas 40-41

Para pensar e discutir

2. 20 cm^3

Atividades

34. Um quarto da medida da altura da lata antiga.

35.
   a) Aproximadamente 1,017 L ou 1 017 mL.
   b) 117 mL

36. 4

37.

a) Aproximadamente 41,85 kg.

38. Aproximadamente 385 200 kg.

39. a **40.** d **41.** d **42.** e

Páginas 42-49

Atividades finais

1.

a) Retângulos.

b) No cubo, todas as faces são quadrados.

2.

a) $6a^2$ b) a^3

3.

a) abc

b) $2ab + 2bc + 2ac$

4.

a) 6; retângulo

b) $A_{\text{lateral}} + 2A_{\text{base}}$

5.

a) O volume.

b) Quando sua altura é igual ao dobro do raio da base; $6\pi r^2$.

Questões de vestibulares e Enem

6. 48 cm^3	**17.** a	**28.** d
7. a	**18.** d	**29.** c
8. a	**19.** e	**30.** a
9. c	**20.** c	**31.** b
10. d	**21.** e	**32.** c
11. c	**22.** d	**33.** b
12. a	**23.** b	**34.** c
13. c	**24.** d	**35.** a
14. e	**25.** c	**36.** c
15. d	**26.** c	**37.** c
16. b	**27.** b	**38.** c

Capítulo 2

Página 52

Para pensar e discutir

1. Medida da aresta da base e medida do apótema da pirâmide.

2. Medida das arestas da base.

3. É aquela que possui uma base poligonal regular, e a projeção ortogonal do vértice V sobre o plano da base coincide com o centro da base.

Página 54

Para pensar e discutir

1. Calcular a área de um triângulo da face lateral e multiplicar pelo número de triângulos que correspondem às faces laterais; as medidas do lado do polígono da base e da altura de um triângulo que compõem a face lateral.

2. O apótema.

3. Área da superfície lateral + área da base.

Páginas 56-57

Para pensar e discutir

1. A área lateral do enfeite é 4 vezes a medida de área de suas faces.

2. Maior; $31\,966\text{ cm}^3$.

Atividades

1.

b) 10 cm d) 576 cm^2

c) 320 cm^2

2.

a) Aproximadamente 390 cm^2.

b) Aproximadamente 13 cm.

3.

a) 0,5 d) 0,5 g) 0,25

b) 0,5 e) 0,25

c) 0,5 f) 0,25

4. A medida do lado do polígono da base e a medida do apótema da pirâmide (corresponde à altura do triângulo da face).

5.

a) Aproximadamente 32,48 m.

b) Aproximadamente $28{,}8\text{ m}^2$.

8. a **9.** a **10.** e **11.** b

Página 58

Para pensar e discutir

1. Sim. **2.** Sim. **3.** Sim.

Página 59

Para pensar e discutir

2. Aproximadamente 6%.

Páginas 60-61

Atividades

12.

a) 8 000 L b) 6 670 L

13.

a) Duplica. b) 12 cm^2

14. $\frac{V}{3}$

15.

a) $\frac{1}{3}$ b) 144 L

16.

a) 6 vezes b) 180 L

17.

a) 1,6 b) $1{,}6^2$ c) $1{,}6^3$

18.

a) 144 cm^3

b) Quadruplica.

19.

a) Aproximadamente 287 m^2.

b) Aproximadamente 561 m^3.

20.

a) $A = 6x^2(\sqrt{3} + 1)$

b) $V = \frac{3x^3}{2}$

Página 62

Para pensar e discutir

1. Raio da base e a altura do cone.

Para pensar e discutir

1. A área total da superfície.

Página 63

Para pensar e discutir

1. A geratriz do cone.

2. O comprimento da circunferência da base.

Página 65

Para pensar e discutir

1. Altura: 5 cm; raio: 8 cm.

2. Maior.

Páginas 66-68

Atividades

21.

a) $A_L = \frac{\pi \ell^2}{4}$

b) $A_T = \frac{3\pi \ell^2}{4}$

c) $75\pi\text{ cm}^2$

22.

a) Quadruplica.

b) Aumenta para $\sqrt{h^2 + 4r^2}$.

23.

a) $r = 7$ cm; $g = 10$ cm; $h = \sqrt{51}$ cm

b) 70π cm²

c) 119π cm²

24.

a) $8\sqrt{2}$ cm

b) 16π cm²

25. b

26. e

27.

a) 12 cm

b) 108π cm²

28. 16π cm²

29. c

30. b

31. d

32. e

Página 70

Para pensar e discutir

1. Aumentam.
2. Diminuem.
3. Ficam mais próximas.
4. Ficam mais próximas.

Para pensar e discutir

1. Sim.
2. Dois cones de mesma base.

Páginas 71-72

Atividades

33.

b) 96π cm³

34. $\frac{1}{3}\pi x^2h$ e $2{,}5^3 \cdot \frac{1}{3}\pi x^2h$; razão: $2{,}5^3$

36.

a) Aproximadamente 81 cm².

b) Aproximadamente 65,4 mL.

37.

a) Aproximadamente 53 doces.

b) 1 900 litros

38. 111π cm³

39. $x = 2$ m

40. a

Página 73

Para pensar e discutir

1. Para o cálculo do volume, basta fazer a diferença entre os volumes do cone maior (ou pirâmide maior) e do cone menor (ou pirâmide menor). Para a determinação do volume do cone menor (ou pirâmide menor), utiliza-se a proporção entre os volumes e o cubo da razão de semelhança apresentada anteriormente.
2. O cálculo da área lateral de um tronco de cone (ou tronco de pirâmide) é análogo ao cálculo de volume: basta fazer a diferença entre as áreas laterais do cone maior (ou pirâmide maior) e do cone menor (ou pirâmide menor).

Página 75

Atividades

41.

a) $H = 10$ cm e $h = 4$ cm

b) 333 cm³ e 21 cm³

c) 312 cm³

42.

a) Aproximadamente 14,4 cm.

b) Aproximadamente 79,2 cm.

c) 5 642 cm³

d) 2 552 cm³ = 2 552 mL

43. a

44. 22 dm³

45. a

46. b

47. c

Página 79

Para pensar e discutir

1. $R^2 = r^2 + d^2$
2. $A = \pi(R^2 - d^2)$
3. $x = d$
4. Coroa circular; $A = \pi(R^2 - d^2)$.

Para explorar

1. As duas seções serão círculos de raio R com a mesma área πR^2.
2. Sim.
3. Volume é igual ao volume do cilindro menos os volumes dos dois cones.

Página 79

Análise e contexto

1. Aproximadamente o dobro.

Página 81

Para pensar e discutir

1. $r = \sqrt[3]{A^3 + B^3 + C^3}$

Páginas 82-84

Para pensar e discutir

1. 180°
2. Duplica.
3. 270°; $\frac{1}{24}$

Atividades

48.

a) Aumenta 33,1%.

b) É multiplicado por 8.

c) Sim.

49.

a) A esfera de revolução tem o mesmo diâmetro que a moeda: 27 mm.

b) Aproximadamente 10 300 mm³.

50. $r = \frac{R}{2}$

51.

a) $R = r\sqrt[3]{n}$

b) $n = 10^6$

52.

a) $r = 2$ cm

b) $v = \frac{32\pi}{3}$ cm³

53. $\frac{4}{3}$ cm

54. Os dois têm a mesma capacidade.

55. a

56. a

57. c

58. 3 cm

59. e

Página 85

Para pensar e discutir

1. Círculo.
2. Raio da esfera.

Página 86

Para pensar e discutir

1. 36π m²; 45π m³
2. A área é multiplicada por 4 e o volume é multiplicado por 8.

Páginas 88-97

Atividades

60.

a) $h = 2r$

b) São iguais.

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{3}$

61.

a) Aproximadamente 141 cm².

b) Aproximadamente 1 520 cm².

c) Aproximadamente 1 520 cm².

62. 200π mm²

63.
a) As três têm a mesma capacidade.
b) Na embalagem esférica.

64.
a) Aproximadamente 5 652 m^2.
b) Aproximadamente 383 m^2.

65. b
66. a
67. 36π cm^3
68. d
69. e
70. d
71. b

Atividades finais

1.
a) Triângulo isósceles.
b) A medida do apótema.

2. O volume do prisma é o triplo do volume da pirâmide.

3. O volume do cilindro é o triplo do volume do cone.

4.
a) Setor circular.
b) $A_L = \pi rg$
c) $A_T = \pi rg + \pi r^2$

5.
a) 125
b) 25
c) 25

6.
a) 3
b) 9
c) 9

7.
a) $\frac{4}{3}\pi r^3$
b) $4\pi r^2$
c) Qualquer círculo contendo o diâmetro da esfera.

Questões de vestibulares e Enem

8.
a) 9 vértices e 16 arestas
b) 2 000 cm^3

9. c
10. b
11. d
12. d
13. c
14. c

15.
a) Aproximadamente 148,8 m.
b) Aproximadamente 44 044,8 m^3.

16. d
17. e
18. e
19. a
20. d
21. e
22. a
23. c
24. d
25. a
26. d
27. a
28. d
29. d
30. c
31. d
32. a
33. a
34. d
35. c
36. c
37. e
38. b
39. e

Capítulo 3

Página 100

Para pensar e discutir

1. Resolver uma equação com uma incógnita é obter o valor dessa incógnita que torna verdadeira a sentença representada pela equação. Resolver um sistema consiste em determinar todas as incógnitas que tornam verdadeiras todas as sentenças correspondentes às equações que compõem o sistema.

3. Sim.

Página 101

Para pensar e discutir

1. A equação I apresenta um termo com o produto de duas incógnitas; a equação II apresenta uma incógnita elevada ao cubo; a equação III apresenta uma incógnita elevada ao expoente $\frac{1}{2}$.

2. Sim; não.

Página 102

Para pensar e discutir

1. 12 cédulas de 10 reais

2. Uma solução: 4 cédulas de 5 reais e 6 cédulas de 10 reais.

3. Uma solução: 2 cédulas de 50 reais, 6 cédulas de 5 reais e 5 cédulas de 10 reais.

Para pensar e discutir

1. Não.
2. Sim.

Página 103

Para pensar e discutir

1. Uma reta.

2. O ponto de encontro das duas retas.

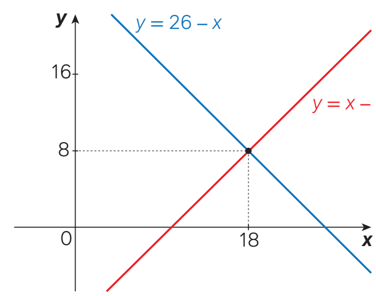
3. Podem ser concorrentes, paralelas ou coincidentes.

Páginas 104-105

Para explorar

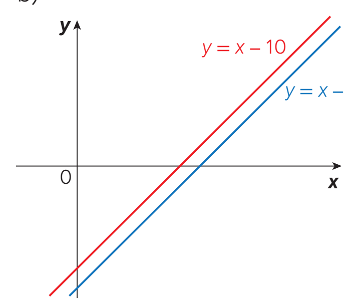
1.
a) (18, 8)
b) Não tem solução.
c) Infinitas soluções.

2.
a)



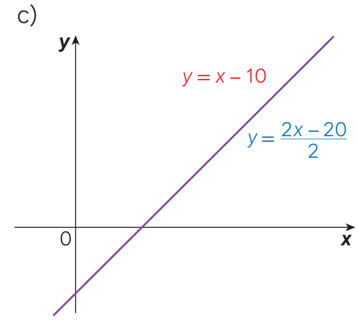
Tarcísio Garbellini

b)



Tarcísio Garbellini

c)



Tarcísio Garbellini

Atividades

1.
a) (4, 2)
b) Não admite solução.
c) Admite infinitas soluções.

2.
a) Não, o sistema do item **b** não tem solução.
b) Sim, o sistema do item **c** tem infinitas soluções.

3.
a) –1
b) –3

c) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) (–1, –3)

4.

a) $S = \{(0, 0)\}$

b) Sim.

c) Infinitas.

5.

a) Sim.

b) 1

7.

a) $50x + 20y + 10z = 100$

b) Da cédula de 50 reais.

c) Primeira possibilidade: 1 cédula de 50 reais; 1 cédula de 20 reais; 3 cédulas de 10 reais. Segunda possibilidade: 1 cédula de 50 reais; 2 cédulas de 20 reais; 1 cédula de 10 reais.

8.

a) $\begin{cases} 50x + 20y + 10z = 100 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$

b) (1, 2, 1)

10. Ambas as soluções são (2, 3).

12.

a) $\begin{cases} 2x + 2y = 16{,}80 \\ 3x + 4y = 30{,}40 \end{cases}$

b) Suco: R$ 3,20; sanduíche: R$ 5,20.

13.

a) $S = \left\{\frac{17}{2}, 1, 4\right\}$

14. $k = -7$

15. e

16. b

17. b

Página 106

Para pensar e discutir

1. Sim.

2. Nenhum; 3.

Página 107

Para pensar e discutir

1. (19, 7, 2)

2. (15, 5, 0)

3. $y = 5 + a$ e $x = 15 + 2a$

4. $S = \{(15 + 2a, 5 + a, a)\}$

Página 109

Para pensar e discutir

2. $\begin{cases} x + y = 140 \\ -y + z = 22 \\ +2z = 90 \end{cases}$

Para pensar e discutir

2. (10, 35, 20, 30)

Para explorar

1. III

2. II

3. Existem três possibilidades: admitir solução; admitir infinitas soluções; não admitir solução.

Páginas 110-111

Atividades

18.

a) $S = \left\{\left(\frac{20}{7}, -\frac{25}{7}\right)\right\}$

b) $S = \left\{\left(\frac{93}{5}, \frac{32}{5}\right)\right\}$

c) $S = \{(x, x - 10)\}$

d) $S = \{\} = \varnothing$

22. $S = \{(x, 2x, 2x)\}$

23.

a) $S = \{(-5k, k, 2k)\}$

b) $S = \{(-10, 2, 4)\}$

c) Sim.

24. a

25. e

26. b

27. d

28. b

29. e

30. 6

31. d

32. c

Página 113

Análise e contexto

2. $I_1 = \frac{570}{131}A$, $I_2 = \frac{590}{131}A$ e $I_3 = \frac{-20}{131}A$

Páginas 114-117

Atividades finais

1. 1

2. Sim.

3. Sistemas que têm o mesmo conjunto-solução.

4.

a) Uma solução.

b) Infinitas soluções.

c) Nenhuma solução.

5. Infinitas.

7.

a) O conjunto-solução é vazio.

b) Infinitas.

c) O conjunto-solução é unitário.

Questões de vestibulares e Enem

8. a

9. d

10. c

11. b

12. 1 porção de pão, 3 porções de fruta e 2 porções de iogurte

13. a

14. a

15. c

16. d

17. c

18. a

19. b

20. c

21. a

22. a

23. b

24. d

25. c

Capítulo 4

Página 119

Abertura de capítulo

1. 24

Página 120

Para pensar e discutir

1. 60

2. 6

3. 24

4. 3

5. 1 611

Página 123

Para pensar e discutir

1. Representa o conjunto vazio; esse conjunto não tem elementos.

2. $n(A) = 20$; $n(B) = 14$; $n(A \cup B) = 20$; $n(A \cap B) = 14$

3. Quando B é subconjunto de A.

Páginas 124-125

Para pensar e discutir

2. Estudantes que cursam somente Inglês: 20 – 6; as duas disciplinas: 6; somente Espanhol: 12 – 6; não cursam nem Inglês e nem Espanhol: 10.

Para pensar e discutir

2. 12

Atividades

1.

a) 401

b) 100

c) 40

d) 201

e) 200

3.

a) 138

b) 102

c) 124

d) 88

e) 226

4. 10

5.

a) 12

b) 78

c) 36

6.

a) 900

b) 300

c) 180

d) 128

8.

a) 9

b) 11

9.

a) 50

b) 50

c) 11

d) 20

10. e
11. a
12. a
13. c
14. c

Página 126

Para pensar e discutir

1. 3
2. 2
3. 8
4. 4

Páginas 128-130

Atividades

15. 15

16. 16

17.
a) 900
b) 648
c) 450
d) 328
e) 450
f) 320

19.
a) 10^8
b) 10^4

20. 1 024
21. e
22. d
23. c
24. d
25. b
26. c
27. e
28. a
29. b

Página 131

Para pensar e discutir

1. 3 628 800, 362 880 e 2, respectivamente.

2. No visor da calculadora aparece a mensagem ERRO.

Página 132

Atividades

30.
a) 1 e 2
b) 7; 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6

31.
a) F b) F c) V d) F

32. 150

33.
a) 8!
b) 14!
c) $(k + 1)!$

34.
a) 336 b) 210 c) 2 730

35.
a) $n^2 - n$
b) $n^2 - 3n + 2$
c) $\frac{1}{n^2 + n}$

36. $E = n + 3$

37.
a) $x = 120$
b) $x = 9$

Página 134

Para pensar e discutir

1. 2 **2.** 6 **3.** 24 **4.** 120

Página 136

Para pensar e discutir

1. 48 **2.** 36

Páginas 137-139

Para pensar e discutir

1. 576 **2.** 72

Atividades

38. 24

39.
a) 3 628 800
b) 80 640

41. 10 368 000

42.
a) 654 321
b) 123 456
c) 120
d) 120
e) 279
f) 304

43.
a) 17 280
b) 103 680

44.
a) 1 440
b) 720
c) 720
d) 120

45. $P_3 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 = 103\,680$

46. a
47. c
48. d
49. c
50. e
51. b
52. b
53. c
54. a
55. e

Página 140

Para pensar e discutir

1. 24

2. Aquelas em que são trocadas apenas as posições entre **c** e **C**.

3. $\frac{P_4}{P_2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$

Para pensar e discutir

1. $P_5 = 5! = 120 \Rightarrow 120$ anagramas possíveis

2. $P_3 = 3! = 6$

3. $P_2 = 2! = 2$

Páginas 142-144

Atividades

56. 20

57.
a) AASS, ASSA, SSAA, SASA, ASAS, SAAS.

58. São 10 anagramas: AAARR, AARRA, ARRAA, RRAAA, RARAA, RAARA, RAAAR, ARARA, ARAAR, AARAR.

59. 30

61.
b) 15

63. d
64. 1 680
65. e
66. c
67. c
68. d
69. d

Página 145

Para pensar e discutir

1. 11
2. 10
3. 55 440

Página 146

Para pensar e discutir

2. $A_{11,\,5} = \frac{11!}{(11 - 5)!}$

Página 147

Para pensar e discutir

1. $n!$

Páginas 148-150

Atividades

70.
a) $A_{9,\,5}$
b) $5 \cdot A_{9,\,5}$
c) $25 \cdot A_{8,\,4}$

71.
a) 90
b) 336

72.
a) $n = 6$
b) $n = 5$

73.
a) 210
b) Sim

74.
a) Sim
b) Sim

75.
a) 132
b) $12 \cdot 11 = 132$
c) $A_{12,\,2} = \frac{12!}{(12 - 2)!} = 132$

77.
a) 720 b) 504 c) 216

78. e

79. $A_{26,\,4} = 358\,800$

80. d
81. b
82. a
83. d
84. a
85. c

86. b **87.** e

Página 151

Para explorar

1. 175 760 000

2.

a) Letra, letra, letra, número, letra, número, número.

b) 456 976 000

Página 152

Para pensar e discutir

1. 6 **2.** 3 **3.** Não.

Para pensar e discutir

1. 9 **2.** 90 **3.** Não.

Página 154

Para pensar e discutir

1. São iguais. **3.** 56

Para pensar e discutir

2. 64

Páginas 156-157

Atividades

88.

a) {2}, {3}, {5}, {7}, {11}, {13}

b) {2, 3}, {2, 5}, {2, 7}, {2, 11}, {2, 13}, {3, 5}, {3, 7}, {3, 11}, {3, 13}, {5, 7}, {5, 11}, {5, 13}, {7, 11}, {7, 13}, {11, 13}

c) 20 d) 15

89. $C_{11,\,5} = 462$

91.

a) 190

b) 171

c) 19

92.

a) 10 b) 5 c) 1

93.

a) 50 063 860

b) 7

c) 28

94.

b) 175

95. 15 **99.** e **103.** e

96. d **100.** b **104.** b

97. e **101.** d **105.** d

98. d **102.** c **106.** c

107. c **108.** b

Página 158

Para pensar e discutir

1. $C_{n,\,0}, C_{n,\,1}, C_{n,\,2}, \ldots, C_{n,\,n-2}, C_{n,\,n-1}, C_{n,\,n}$, em que n é a linha correspondente

2. São sempre uma potência inteira de 2.

3. Termos extremos ou equidistantes dos extremos têm o mesmo valor.

Página 161

Para explorar

1.

a) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36

b) É a terceira diagonal.

2.

a) $x^2 - 2xa + a^2$

b) $x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$

c) $x^4 - 4x^3a + 6x^2a^2 - 4xa^3 + a^4$

3.

a) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

b) $y^3 + 6y^2 + 12y + 8$

c) $252 + 144\sqrt{3}$

Atividades

109.

a) 2ª b) 9ª c) 1ª

110.

a) 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1

b) 1 024

111. $(x + 1)^4$

112.

a) $x = 2$ ou $x = 9$

b) $x = 4$ ou $x = 6$

c) $x = 14$ ou $x = 6$

d) $x = 1$ ou $x = 4$

113. 10^{15}

114. $n = 8$

115. b

Páginas 163-167

Atividades finais

1.

a) 1 140 minutos

b) 86 400 segundos

2. 10 maneiras

3. 1 024

4. 154

5.

a) Apenas para $n = 0$ e para $n = 1$.

b) Para qualquer valor de n natural maior ou igual a 2.

6.

a) Permutar é trocar.

b) 60

7.

a) No arranjo, a ordem dos elementos no agrupamento importa; já na combinação, a ordem não altera o agrupamento.

b) 20

c) 120

Questões de vestibulares e Enem

8. e **18.** b **28.** c

9. c **19.** e **29.** d

10. b **20.** e **30.** e

11. b **21.** c **31.** c

12. b **22.** c **32.** e

13. d **23.** e **33.** e

14. d **24.** c **34.** c

15. a **25.** c **35.** b

16. b **26.** c **36.** b

17. d **27.** b

Capítulo 5

Página 170

Para pensar e discutir

1. H ou I.

2. Não é possível saber.

3. Não; nos tubos centrais.

Página 172

Para pensar e discutir

1. Os dois têm a mesma chance.

2. 1 possibilidade; 7 possibilidades

Para explorar

1. Sim. **3.** No segundo.

2. Sim. **4.** n; $n - 1$; $n - 2$.

Página 173

Para pensar e discutir

1. Não. **2.** 75 **3.** Sim.

Página 175

Para pensar e discutir

1. Por todos os conjuntos de 6 elementos que podem ocorrer.
3. 50 063 860

Página 176

Para pensar e discutir

1. 7
2. 2 ou 12

Páginas 177-179

Atividades

2.
   a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   b) $A = \{4, 5, 6\}$
   c) $B = \{2, 3, 5\}$
   d) $C = \{1, 4\}$
   e) $D = \{\ \}$
   f) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3.
   a) A e B.
   b) D.
   c) E.
5.
   a) 37
   b) $n(A) = 13$
   c) $n(B) = 8$
   d) $n(C) = 3$
6. Mais provável A; menos provável C.
7.
   a) 720
   b) 1
8. A.
9.
   a) 32
   b) 1
10.
   a) 13
   b) 9
   c) 4
11. $n(A) = 3$; $n(B) = 4$
12.
   a) 420
   b) 42
13.
   a) 52
   b) 48

Página 181

Para pensar e discutir

1. Erre.
2. Sim.
3. O número de maneiras de escolher 2 de 12 meias; 66.
4. O conjunto formado pelos pares de meias; 6.

Página 182

Para pensar e discutir

1. 75%
2. 25%

Página 184

Para pensar e discutir

1. $\frac{2}{120}$

Página 185

Para pensar e discutir

1. Não.
2. $P(1) = \frac{1}{21}, P(2) = \frac{2}{21}, P(3) = \frac{3}{21}, P(4) = \frac{4}{21}, P(5) = \frac{5}{21}$ e $P(6) = \frac{6}{21}$

Páginas 186-187

Atividades

15. Mais provável: C; menos provável: A.
16.
   a) $\frac{4}{8}$
   b) $\frac{2}{8}$
17. $P = \frac{1}{1\,000}$
18.
   a) $P = \frac{1}{C_{n,\,2}}$
   b) $P = 1 - \frac{1}{C_{n,\,2}}$
19.
   a) $\frac{1}{6}$
   b) $\frac{1}{9}$
   c) $\frac{2}{9}$
20. $P(7) = \frac{2}{15}$
21. $P(\text{azul}) = 0{,}64$, $P(\text{vermelho}) = 0{,}32$, $P(\text{amarelo}) = 0{,}04$
22. b
23. $\frac{6}{13}$
24.
   a) As duas têm a mesma probabilidade.
   b) $\frac{1}{50\,063\,860}$

Página 188

Para explorar

3. 6 dezenas: $P = \frac{C_{6,\,6}}{C_{60,\,6}}$;
   7 dezenas: $P = \frac{C_{7,\,6}}{C_{60,\,6}}$; ...; $\frac{C_{15,\,6}}{C_{60,\,6}}$

Para pensar e discutir

1. 1; 0; $\frac{2}{6}$ e $\frac{4}{6}$
2. A é certo; B é impossível.
3. 1; os eventos são complementares
4. De 0 a 1; de 0% a 100%.

Página 190

Para pensar e discutir

1. Todos têm cabelo preto.
2. Ninguém está com tênis vermelho.
3. A probabilidade será representada por um número maior ou igual a zero e menor que 1.
4. 70%

Página 191

Atividades

25.
   a) $P = \frac{2}{35}$
   b) $P = \frac{33}{35}$
26.
   a) 55%
   b) $\frac{4}{5}$
29.
   a) $\frac{2}{6}$
   b) $\frac{4}{6}$
   c) Sim.
30.
   a) $P = \frac{C_{90,\,6}}{C_{100,\,6}}$
   b) $P = \frac{C_{10,\,6}}{C_{100,\,6}}$
   c) $P = \frac{C_{10,\,6}}{C_{100,\,6}}$
   d) $P = \frac{C_{90,\,6}}{C_{100,\,6}}$
   e) $P = 1 - \frac{C_{10,\,6}}{C_{100,\,6}}$
   f) $P = 1 - \frac{C_{90,\,6}}{C_{100,\,6}}$
31.
   a) 100%
   b) 0%
   c) 0%
   d) 100%
32.
   a) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12
   b) Não.
   c) $\frac{6}{36}$
   d) $\frac{30}{36}$
   e) $\frac{18}{36}$
   f) $\frac{18}{36}$

Página 192

Análise e contexto

1. Sim; não é possível saber.

Página 193

Para pensar e discutir

1. 13; $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 3, 9, 15\}$

2. 3; $A \cap B = \{6, 12, 18\}$

3. 7; $\Omega - A \cup B = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

4. $\frac{13}{20}$

5. Não.

Páginas 195-196

Para pensar e discutir

2. Aproximadamente 33%.

3. $P = \frac{C_{8,\,4}}{C_{10,\,4}}$

Atividades

33. Quando os eventos *A* e *B* forem mutuamente exclusivos.

34.

a) $\frac{9}{15}$

b) Não.

36. Sim. **39.** e **41.** $\frac{3}{5}$

38. 67 **40.** d **42.** e

Página 197

Para pensar e discutir

1. $\frac{30}{125}$ **2.** $\frac{95}{125}$

Página 199

Para explorar

1. $\frac{7}{15}$

Página 200

Atividades

43. $\frac{1}{(n-1)}$ **44.** $\frac{30}{38}$ **45.** $\frac{9}{13}$

46.

a) $\frac{9}{64}$

b) $\frac{25}{64}$

c) $\frac{15}{64}$

d) $\frac{15}{64}$

47.

a) $\frac{6}{56}$

b) $\frac{20}{56}$

c) $\frac{15}{56}$

d) $\frac{15}{56}$

48.

a) $\frac{35}{50}$

b) $\frac{85}{150}$

49. e

51. a

Página 202

Para pensar e discutir

1. 2 de 3 possibilidades

2. A probabilidade de o jogador 2 vencer é de 25% e a do jogador 1 é de 75%.

Para pensar e discutir

1. Situação 2.

2. Não.

3. Sim.

Páginas 205-206

Para pensar e discutir

1. $\frac{1}{5}$

2. $\frac{1}{5}$

3. $\frac{1}{8}$

Atividades

52.

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{1\,024}$

c) $\frac{1\,023}{1\,024}$

d) $\frac{9}{1\,024}$

53. $P(A) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{3}{10}$ e $P(C) = \frac{1}{10}$

55. 50%

56. c

57.

a) 25% b) 12,5%

58. a

59.

a) 2%

b) Aproximadamente 52,6%.

60. c

61. d

62. c

Página 209

Para pensar e discutir

1. Pela utilização do remédio em muitas pessoas que são portadoras da doença.

2. A escolha da 1ª pessoa não altera percentualmente a escolha da 2ª pessoa.

Páginas 210-212

Atividades

63. I. F II. V III.V

65. a **67.** d

66. c **68.** e

69.

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{3}{4}$

70. d

71. e

72. a

73. a

74. a

75. e

Página 213

Para pensar e discutir

2. Nas posições centrais.

3. A mediana *x*.

Página 214

Para pensar e discutir

1. 1,5625%, 9,375%, 23,4375%, 31,25%, 23,4375%, 9,375%, 1,5625%.

2. Sim.

Páginas 216-221

Atividades finais

1. $\frac{1}{2}$

2.

a) Aquele que depende exclusivamente do acaso.

b) O conjunto formado por todos os resultados possíveis.

c) O conjunto formado por todos os resultados favoráveis.

d) Evento impossível de ocorrer.

e) Evento certo.

3. 97,2%

4.
   a) Quando a interseção é vazia.
   b) Quando a realização de um deles não interfere na realização do outro.

5.
   a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   b) Quando os dois eventos são mutuamente exclusivos.

Questões de vestibulares e Enem

6. b
7. a
8.
   a) $\frac{11}{15}$
   b) $\frac{3}{32}$

9. b
10. c
11. c
12. b
13. e
14. e
15. b
16. b
17. e
18. c
19. b
20. c
21. d
22. e
23. a
24. c
25. e
26. e
27. d
28. d
29. c
30. d
31. e
32. b
33. b
34. c
35. a
36. a

Capítulo 6

Página 227

Para pensar e discutir

1. Verdadeira.

Página 228

Para pensar e discutir

1. R$ 479,00
2. R$ 1.854,00
3. Não.

Página 230

Para pensar e discutir

1. Aproximadamente 0,143.
2. $\frac{143}{1\,000}$; 14,3%

Páginas 231-232

Atividades

1.
   a) De 2021 para 2022; R$ 112,00.
   b) De 2021 para 2022; aproximadamente 10,2%.

2.
   a) 80%
   b) 62,5%
   c) 15%
   d) 125%
   e) 320%
   f) 133,3%

3.
   a) 1 440
   b) 108
   c) 250
   d) 200

5.
   a) 70%
   b) 112%

6.
   a) Isento (zero).
   b) F$ 290,00
   c) F$ 680,00

7. 80

8.
   a) F
   b) V
   c) V
   d) F
   e) V

9. a
10. d
11. 125
12.
   a) Produto Interno Bruto.

Página 234

Para pensar e discutir

1. 93%
2. 0,93.

Página 235

Para pensar e discutir

1. 100% e 3,5%
2. Não.

Para pensar e discutir

1. Não.
2. R$ 21.250,00
3. 14,5%

Página 236

Para pensar e discutir

1. 37,5%.
2. 25%.

Páginas 237-238

Atividades

14.
a) 7%.
b) 7%.
c) Um aumento e uma diminuição em *i* por cento, respectivamente.

15. 32%

16. R$ 58.650,00

17. 25%

18.
a) 7,1%
b) 6,9%

19.
a) 0,08V
b) 0,045V

20.
a) R$ 582.400,00
b) R$ 537.600,00

22.
a) R$ 44.954,00
b) 13,55%

23. e
24. b
25. e
27. d
29. a
30. c
31. e
32. d
33. d
34. d
35. d

Página 240

Para pensar e discutir

1. A opção 1 é mais vantajosa.
2. 25% ao mês

Página 241

Para pensar e discutir

1. R$ 1.239,91; R$ 24,30; R$ 0,61
2. R$ 24,30; R$ 17,01;R$ 1.256,31

Página 242

Para pensar e discutir

1. R$ 10.000,00
2. R$ 100,00

Página 243

Para pensar e discutir

1. Valor correspondente aos juros do 1º período.
2. Triplica.

Página 244

Para pensar e discutir

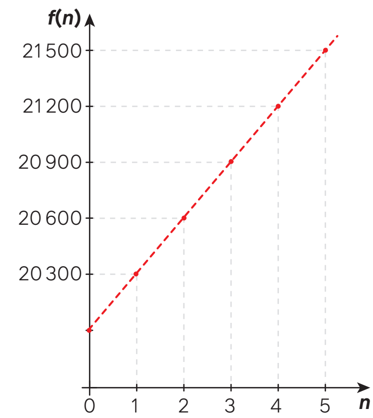
1. 300
2. 300

Páginas 245-246

Para explorar

Parte 1

1.



Acervo editora

Parte 2

1. Empréstimo da pessoa A:

	A	B	C	D	E
1	PERÍODO	CAPITAL	TAXA	JUROS	MONTANTE
2	1º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.024,00
3	2º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.048,00
4	3º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.072,00
5	4º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.096,00
6	5º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.120,00
7	6º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.144,00
8	7º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.168,00
9	8º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.192,00
10	9º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.216,00
11	10º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.240,00

Acervo editora

Empréstimo da pessoa B:

	A	B	C	D	E
1	PERÍODO	CAPITAL	TAXA	JUROS	MONTANTE
2	1º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.022,00
3	2º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.044,00
4	3º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.066,00
5	4º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.088,00
6	5º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.110,00
7	6º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.132,00
8	7º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.154,00
9	8º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.176,00
10	9º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.198,00
11	10º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.220,00
12	11º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.242,00
13	12º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.264,00

Acervo editora

Atividades

36.
a) R$ 1.472,00
b) R$ 33.472,00

37. 10,42%

38. 100%

39. 25 anos

40. 125 meses

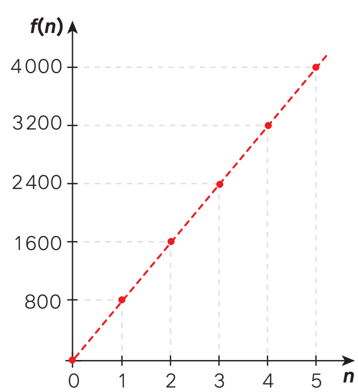
41.

a) $J = f(n) = 800n$

b)

	A	B
1	n	$J = f(n) = 800n$
2	0	$J = f(0) = 800 \cdot 0 = 0$
3	1	$J = f(1) = 800 \cdot 1 = 800$
4	2	$J = f(2) = 800 \cdot 2 = 1600$
5	3	$J = f(3) = 800 \cdot 3 = 2400$
6	4	$J = f(4) = 800 \cdot 4 = 3200$
7	5	$J = f(5) = 800 \cdot 5 = 4000$

Acervo editora



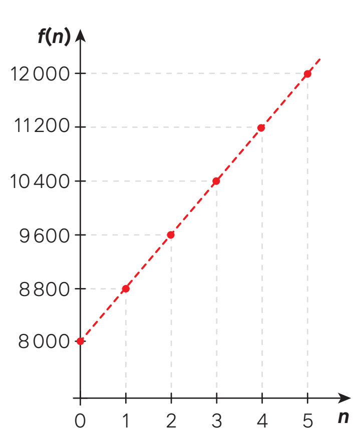
Acervo editora

c) $M = f(n) = 8\,000 + 800n$

d)

	A	B
1	n	$M = f(n) = 8000 + 800n$
2	0	$M = f(0) = 8000 + 800 \cdot 0 = 8000$
3	1	$M = f(1) = 8000 + 800 \cdot 1 = 8800$
4	2	$M = f(2) = 8000 + 800 \cdot 2 = 9600$
5	3	$M = f(3) = 8000 + 800 \cdot 3 = 10400$
6	4	$M = f(4) = 8000 + 800 \cdot 4 = 11200$
7	5	$M = f(5) = 8000 + 800 \cdot 5 = 12000$

Acervo editora



Acervo editora

42. e

43. d

44. c

45. b

46. e

47. d

49. e

50. b

51. c

52. d

53. b

Página 247

Para pensar e discutir

1. Multiplicando 40 000 por 1,01.
2. Não.
3. Não.
4. R$ 42.000,00

Páginas 249-251

Atividades

54.

a) R$ 29.282,00
b) R$ 9.282,00
c) 46,41%

55.

a) R$ 192.541,46
b) 92,54%

56.

a) R$ 1.690,04
b) Aproximadamente 12,67%.

58.

a) 2% ao mês.
b) R$ 6.341,21
c) Aproximadamente 27%.

59. Banco B.

60. 10%

62. Opção B.

63. e

64. 20 anos

65. b

66. c

67. b

68. c

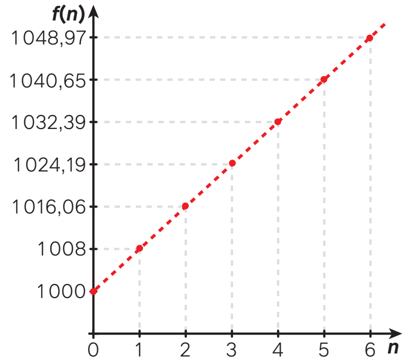
Para pensar e discutir

1. 7,7%
2. Aproximadamente 1,91%.

Página 252

Para explorar

1.

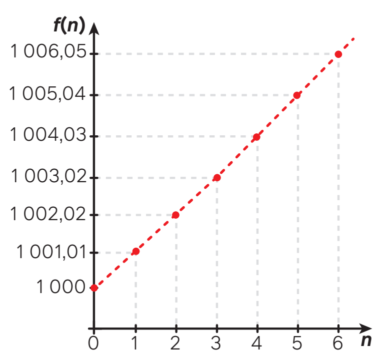


Acervo editora

2.

	A	B
1	*n*	*M* = *f*(*n*) = 1 000 = 1,008 · *n*
2	0	1 000,00
3	1	1 001,01
4	2	1 002,02
5	3	1 003,02
6	4	1 004,03
7	5	1 005,04
8	6	1 006,05

Acervo editora



Acervo editora

Página 253

Para pensar e discutir

1. Não.

2. Aproximadamente 12,68%

Páginas 254-255

Atividades

69. 27,32%

71. c

72. 0,643%

73. 0,816%

74. Aproximadamente R$ 53.795,00.

75. c

76. e

77. c

78. e

79. b

Página 257

Para pensar e discutir

1. Dividindo 900 por $1{,}04^1$.

2. Dividindo 900 por $1{,}04^2$.

3. Dividindo 900 por $1{,}04^3$.

Página 258

Para explorar

1. R$ 2.976,82

2. 24 parcelas iguais de R$ 1.248,10.

Atividades

80. R$ 1.812,16

82. R$ 1.693,61

84. b

85. d

86. a

Páginas 259-264

Atividades finais

1.

a) 1,2%

b) 101,2%

2.

a) 8,12%

b) 7,88%

3.

a) 20%

b) Aproximadamente 16,67%.

4.

a) Soma do capital com os juros.

b) Juros simples.

c) Juros simples.

5.

a) $M = C \cdot (1 + in)$

b) $M = C \cdot (1 + i)^n$

c) Nos juros simples, o crescimento é linear; nos juros compostos, é exponencial.

Questões de vestibulares e Enem

6. c

7. e

8. b

9. d

10. a

11. b

12. b

13. d

14. b

15. b

16. a

17. b

18. b

19. c

20. a

21. d

22. R$ 1.800,00

23. a

24. b

25. e

26. e

27. e

28. a

29. e

30. e

31. a

32. d

33. b

34. d

35. c

36. b

Referências

ANDERSON, L.; EVES, H. *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

O livro traz diversos fatos e acontecimentos da história da Matemática que podem ser usados para a introdução de assuntos em sala de aula ou para o enriquecimento de uma atividade ou aula.

BONAVENTURA Francesco Cavalieri. *E-cálculo (USP)*, São Paulo, SP [20--]. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/cavaliere.htm. Acesso em: 12 jul. 2024.

O *link* traz uma breve biografia de Bonaventura Francesco Cavalieri, matemático nascido na Itália em 1598, que foi discípulo de Galileo.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Parecer nº 3, de 8 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, observadas as alterações introduzidas na LDB pela Lei nº 13.415/2017. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, p. 49, 21 nov. 2018.

Nesse documento, que substitui o modelo único de currículo do Ensino Médio por uma nova organização flexível e diversificada, encontram-se detalhadas todas as orientações para a implementação do Novo Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018.

A BNCC é o documento que determina as competências, habilidades e aprendizagens essenciais que todas as crianças, adolescentes e jovens brasileiros devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

CARVALHO, P. C. P. *Introdução à Geometria Espacial*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

Nesse livro, a Geometria é tratada de forma axiomática, e a introdução de cada conceito é acompanhada de exemplos de construções no espaço.

CONHEÇA a importância da [...]. *A escolha certa*, [s. *l.*], 25 jun. 2018. Disponível em: http://www.aescolhacerta.com.br/conheca-a-importancia-da-educacao-financeira-para-jovens/. Acesso em: 12 jul. 2024.

O texto tem como argumento central a importância da Educação Financeira como fator de mudança de realidade, planejamento, autoconhecimento e desenvolvimento da autonomia. Nele também é abordada a responsabilidade social associada ao amadurecimento desse conhecimento.

GERBASI, A. R. V. *As maravilhosas utilidades da Geometria*: da Pré-História à Era Espacial. Paraná: PUCPRess, 2020.

Nessa obra, o autor apresenta a Geometria à luz de fenômenos da natureza e de realizações humanas, de forma a provocar o interesse e a curiosidade do leitor. Cada capítulo é dedicado a um tema, por exemplo: História e desenvolvimento da Geometria; Geometria grega; Os três problemas da Antiguidade, entre outros.

HARDY, G. H.; WRIGHT, E. M. *An introduction to the theory of numbers*. 5. ed. Oxford: Clarendon-Press, 1992.

O livro apresenta uma introdução à Teoria dos números.

HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática*: influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos. Porto Alegre: Globo, 1958.

O livro apresenta a história da Matemática e a relaciona com as realizações históricas, culturais e sociais da humanidade.

KASNER, E.; NEWMAN, J. *Matemática e imaginação*. Tradução de Jorge Fortes. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1968.

Nesse livro, os autores apresentam os fundamentos da Matemática de forma bem-humorada e acessível. Com precisão e uma linguagem leve, eles se valem de diagramas e ilustrações para apresentar ao leitor as relações matemáticas que se consolidaram nessa ciência ao longo dos séculos.

LAUNAY, M. *A fascinante história da Matemática*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.

Nessa obra, o autor apresenta uma linha do tempo da Matemática focando na relação sociedade-conhecimento. O livro aborda as alterações ocorridas com o passar do tempo e a nossa necessidade de obter um conhecimento mais ligado ao útil do que ao abstrato.

LIMA, E. L. *et al. A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1998. v. 2.

A primeira parte dessa obra aborda progressões aritméticas e geométricas com aplicações na Matemática Financeira, análise combinatória e probabilidade.

LIVIO, M. *Deus é matemático?* Rio de Janeiro: Record, 2010.

Nesse livro, o autor apresenta suas ideias a respeito da inexplicável eficiência da Matemática em formular as leis da natureza e faz uma relação curiosa entre a mente humana e o mundo científico.

MARTINS, E. Quem foi Ada Lovelace? *In*: PARANÁ. Secretaria da Educação. Curitiba: SEED-PR, 17 jan. 2019. Disponível em: http://www.filosofia.seed.pr.gov.br/modules/noticias/article.php?storyid=703&tit=Quem-foi-Ada-Lovelace. Acesso em: 12 jul. 2024.

Esse texto lança um olhar sobre as mulheres na ciência e como, muitas vezes, por mero estereótipo, elas são afastadas de uma área na qual foram muito importantes e pioneiras.

MLODINOW, L. *A janela de Euclides*. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

Um relato sobre a história da Geometria de forma clara e divertida mostra como ela faz parte de nosso cotidiano e influencia as mais diversas áreas, como arte e música.

PRUDÊNCIO, A. A Grande Pirâmide de Quéops: o projeto de construção de uma das Sete Maravilhas do Mundo. *In*: EESC-USP. São Paulo, 13 abr. 2010. Disponível em: https://doceru.com/doc/xc080c5. Acesso em: 16 jul. 2024.

Estudo sobre a Pirâmide de Quéops com curiosidades relacionadas à construção de uma das maravilhas do Mundo Antigo que ainda resiste ao tempo.

QUILOMBOLAS terão casas novas. *Folha de Campo Largo*, Campo Largo, 20 out. 2009. Disponível em: https://folhadecampolargo.com.br/noticia/910/quilombolas-terao-casas-novas. Acesso em: 12 jul. 2024.

O texto faz referência às condições atuais das habitações da comunidade quilombola “Palmital dos Pretos”, no município de Campo Largo, a poucos quilômetros de Curitiba, capital do estado do Paraná. Também explica como os moradores receberão casas novas.

SINGH, S. *O último teorema de Fermat*. Rio de Janeiro: Record, 1998.

O livro conta a história de um dos casos mais conhecidos da Matemática: um teorema que durante 358 anos não foi demonstrado. Matemáticos dedicaram suas carreiras a isso até que, em 1993, a prova foi apresentada à comunidade científica pelo professor Andrew Wiles, da Universidade de Princeton, nos Estados Unidos. O texto faz uma reflexão sobre a construção da Matemática e de seus teoremas, comparando-a com o desenvolvimento das teorias científicas.

RUFATO, S. A. C. *Sistemas Lineares, aplicações e uma sequência didática*. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2013, p. 39-41. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-19032014-102209/publico/SoniaRufato_revisada.pdf. Acesso em: 12 jul. 2024.

Nessa dissertação, a autora defende a importância do estudo de sistemas lineares no Ensino Médio, por meio de aplicações inseridas no cotidiano dos estudantes, e apresenta uma série de atividades envolvendo essas aplicações.

TOMEI, C. *Euclides*: a conquista do espaço. São Paulo: Odysseus, 2003.

Euclides contribuiu amplamente para o desenvolvimento de diversas áreas do conhecimento nos últimos dois mil anos. Considerado o fundador da área da Geometria que leva seu nome, ao enunciar postulados ele estruturou um modo matemático de pensar, que passou a moldar como desenvolvemos e entendemos essa área do conhecimento. É uma reflexão sobre um dos matemáticos mais importantes da história.

Referências complementares

BBC MUNDO. O mistério do objeto mais esférico já encontrado no Universo. *BBC News Brasil*, [São Paulo], 18 nov. 2016. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/internacional-38024514. Acesso em: 12 jul. 2024.

A reportagem desmistifica a ideia de que os corpos celestes são esféricos e traz informações sobre a esfericidade desses corpos.

ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Visando acabar com o mito de que a Matemática é acessível apenas aos gênios, a autora apresenta uma visão crítica de como sua história vem sendo contada. Ao abordar o desenvolvimento dos sistemas matemáticos ao longo dos tempos, são apresentadas diferentes soluções para problemas semelhantes.

Sites

ASTOLFI, L. B. G. Gravidez na adolescência. *Instituto Claro*, São Paulo, 25 out. 2019. Disponível em: https://www.institutoclaro.org.br/educacao/para-ensinar/planos-de-aula/gravidez-na-adolescencia/. Acesso em: 18 jun. 2024.

Sugestão de aula que ajuda o(a) professor(a) a abordar a importância do planejamento familiar com os estudantes.

CONHEÇA a importância da [...]. *A escolha certa*, [*s. l.*], 25 jun. 2018. Disponível em: http://www.aescolhacerta.com.br/conheca-a-importancia-da-educacao-financeira-para-jovens/. Acesso em: 12 jul. 2024.

O texto tem como argumento central a importância da Educação Financeira como fator de mudança de realidade, planejamento, autoconhecimento e desenvolvimento da autonomia. Nele fala-se ainda sobre a responsabilidade social associada ao amadurecimento desse conhecimento.

FLEITAS, C. Máquina de Galton virtual. *GeoGebra*, [*s. l.*], c2024. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/zfnMZw7T. Acesso em: 18 jun. 2024.

Nesse *link* encontra-se a explicação sobre o funcionamento da máquina de Galton virtual.

MARTINS, J. P. Qual o meio de transporte mais seguro? *Brasília Encontro*, Brasília, DF, 7 jan. 2015. Disponível em: http://sites.correioweb.com.br/app/noticia/encontro/atualidades/2015/01/07/interna_atualidades,1959/qual-o-meio-de-transporte-mais-seguro.shtml. Acesso em: 18 jun. 2024.

Nesse *site* são apresentadas diversas comparações entre as chances de morrer de acidente aéreo e outras formas de morrer, inclusive por acidente com outros meios de transporte.

PIB DO BRASIL: histórico e evolução em gráficos. *Gazeta do Povo*, Curitiba, 29 abr. 2019. Disponível em: https://infograficos.gazetadopovo.com.br/economia/pib-do-brasil/. Acesso em: 12 jul. 2024.

Publicação que apresenta o crescimento anual do Produto Interno Bruto brasileiro na série histórica do IBGE desde 1962 até 2021.

INTERAÇÃO

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

MATEMÁTICA APRENDENDO E RESOLVENDO PROBLEMAS

ADILSON LONGEN

- Doutor em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Mestre em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Professor do Ensino Médio

LUCIANA TENUTA DE FREITAS (COORD.)

- Mestre em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-Minas)
- Bacharel e licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
- Assessora pedagógica da Educação Básica, com atuação na formação de professores

1ª edição
São Paulo, 2024

Editora do Brasil

"Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada"

VOLUME 3

ENSINO MÉDIO – 3º ANO
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – MATEMÁTICA

CARA PROFESSORA, CARO PROFESSOR

Para que as aprendizagens escolares capacitem os jovens a atuar, com competência e responsabilidade, na sociedade em que vivem, é importante que se apropriem da Matemática como uma das diversas formas de leitura da realidade e a utilizem como ferramenta que os auxilie a intervir, de forma consciente e responsável, nessa realidade.

Com esse objetivo, apresentamos a você esta obra, que tem o estudante como centro do processo de aprendizagem, em uma proposta interativa e aberta de ensino de Matemática. Os diversos tipos de atividade propiciam aos estudantes a discussão de ideias, o desenvolvimento de hipóteses, a argumentação, a elaboração de problemas, o desenvolvimento de projetos, entre outros, enquanto desenvolvem tanto as competências gerais como as específicas de Matemática. Dessa forma, a sala de aula passa a ser um espaço vivo, no qual as ideias matemáticas são discutidas, confrontadas, validadas ou refutadas o tempo todo.

Cabe a você ser o(a) organizador(a)/mediador(a) desse processo estimulando as discussões, promovendo debates, orientando as reformulações, valorizando as produções e o posicionamento dos estudantes, ao mesmo tempo que contribui para o desenvolvimento integral deles.

Este Manual foi elaborado visando orientá-lo nesse processo. Esperamos que você possa aproveitar nossas sugestões de forma criativa, desenvolvendo e ampliando o trabalho de acordo com suas possibilidades e com a realidade em que está inserido(a).

Os autores

SUMÁRIO

A etapa do Ensino Médio na BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) está estruturada com base em dez competências gerais que devem ser desenvolvidas pelos estudantes desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

Competências gerais

Competências gerais

1 **Conhecimento**
Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2 **Pensamento científico, crítico e criativo**
Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3 **Repertório cultural**
Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4 **Comunicação**
Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5 **Cultura digital**
Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6 **Trabalho e projeto de vida**
Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7 **Argumentação**
Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8 **Autoconhecimento e autocuidado**
Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9 **Empatia e colaboração**
Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10 **Responsabilidade e cidadania**
Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 9. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

As quatro áreas de conhecimento estabelecidas para o Ensino Médio estão definidas por meio de competências específicas que se articulam às competências gerais. No caso da área de Matemática e suas Tecnologias são cinco competências específicas, e cada uma delas se desdobra em um conjunto de habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo dos três anos do Ensino Médio.

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 531. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

Distribuídas nessas cinco competências específicas encontram-se 43 habilidades sem uma ordem preestabelecida, porque, diferentemente do Ensino Fundamental, seus códigos não indicam uma progressão ano a ano, o que favorece a flexibilidade dos currículos e das propostas pedagógicas das escolas.

O desenvolvimento de competências e habilidades

Por meio do trabalho proposto nesta coleção, organizada em 3 volumes, pretendemos que os estudantes desenvolvam todas as competências gerais e específicas, além das habilidades de Matemática e suas Tecnologias, previstas na BNCC.

As competências gerais dizem respeito à formação integral dos estudantes e estão relacionadas tanto a seu desenvolvimento cognitivo quanto ao socioemocional.

Nesta obra, as competências gerais são desenvolvidas por meio dos diversos tipos de atividades propostos. A **competência geral 2**, por exemplo, que se refere ao exercício da curiosidade intelectual por meio da investigação, da análise crítica, da imaginação e da criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas, é mobilizada em vários momentos, uma vez que a resolução de problemas e a investigação matemática, que serão detalhadas a seguir, estarão presentes ao longo de todo o trabalho.

Ao resolver as atividades em grupos ou em duplas discutindo ideias, argumentando com base em fatos e informações confiáveis e confrontando diferentes pontos de vista, os estudantes mobilizam a **competência geral 7**. Nesse processo desenvolvem também a **competência geral 4**, ao usar diferentes formas de linguagem para se expressar. As atividades em grupos, por terem a capacidade de gerar conflitos, são uma oportunidade para o exercício democrático e a criação de consensos. Esse exercício favorece a construção de diálogos e o desenvolvimento de atitudes e valores como empatia, respeito e cooperação que são pressupostos da **competência geral 9**. Na parte específica deste manual estão apontadas e exemplificadas as competências gerais trabalhadas em cada volume, capítulo por capítulo.

Já as habilidades se relacionam ao “saber fazer”. Elas são associadas a verbos como identificar, planejar, analisar, investigar, interpretar, construir, entre outros. Essas habilidades, associadas aos demais conhecimentos que se aprendem ao desenvolvê-las, como as próprias competências especificas da área de Matemática e as competências gerais, formam o conjunto daquilo que se espera do estudante e de seu desenvolvimento ao final do Ensino Médio.

De modo resumido, as habilidades que integram a **competência específica 1** estão relacionadas aos contextos externos à Matemática. Na **competência específica 2** estão as habilidades que se relacionam ao contexto social. A **competência específica 3** envolve habilidades que se referem à resolução de problemas e à modelagem matemática, e na **competência específica 4** estão agrupadas aquelas que dizem respeito a diferentes representações para um mesmo objeto matemático. E, por fim, na **competência específica 5** encontram-se as habilidades que envolvem um tratamento mais formal da Matemática. Assim agrupadas, habilidades que se referem a um mesmo conteúdo podem ser associadas a diferentes competências específicas. Esse é o caso, por exemplo, do estudo das probabilidades, que está ligado às competências específicas 1, 3 e 5 por meio das habilidades **EM13MAT106**, **EM13MAT311**, **EM13MAT312** e **EM13MAT511**.

Na parte específica deste manual estão indicadas as habilidades de Matemática trabalhadas em cada capítulo, com os respectivos exemplos.

Além disso, as possibilidades de trabalho interdisciplinar que ocorrem ao longo dos capítulos, nas mais diversas seções, e também na parte **Conexões e Projetos** que se encontra ao final de cada volume, contribuem para o desenvolvimento de competências de outras áreas de conhecimento, em especial da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Pressupostos teórico-metodológicos

A Matemática tem diferentes aplicações na vida das pessoas e estabelece relações com diversas áreas. É papel da escola mostrar essas relações, que podem ou não ser evidentes. Além disso, o trabalho com a Matemática deve levar os jovens a compreender a origem histórica de alguns conceitos, verificar suas aplicações nas diferentes expressões da área de Linguagens, nas Ciências Humanas e Sociais e, em especial, nas Ciências da Natureza, no campo da Biologia, da Física e da Química; enfim, perceber que a Matemática marca sua presença na vida das pessoas.

Constatar essa presença, fazer bom uso dela e aprender Matemática de maneira reflexiva, investigativa e valorizando os conhecimentos prévios é um caminho que auxilia o estudante tanto dentro quanto fora da escola.

O letramento matemático

De acordo com o que propõe a BNCC, o desenvolvimento das habilidades e competências no Ensino Médio está articulado às “aprendizagens essenciais estabelecidas para o Ensino Fundamental” devendo consolidá-las, ampliá-las e aprofundá-las.

Para tanto devemos observar que:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição) (Brasil, 2018, p. 266).

E ainda que:

> A área de Matemática, no **Ensino Fundamental**, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No **Ensino Médio**, na área de **Matemática e suas Tecnologias**, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (Brasil, 2018, p. 471).

Visando dar continuidade à proposta de desenvolvimento do letramento matemático do Ensino Fundamental, é essencial promover no Ensino Médio a consolidação, o aprofundamento e a ampliação do trabalho com as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, com foco na formulação e resolução de problemas em contextos variados, fazendo uso das ferramentas matemáticas e dos conhecimentos adquiridos previamente.

O documento afirma também que:

> Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior (Brasil, 2018, p. 528).

Assim, fica evidente o fato de que saber matemática não se resume ao estudo isolado de conteúdos específicos ou aos procedimentos de cálculo, mas está ligado principalmente ao desenvolvimento do letramento matemático. Isso significa ser capaz de usar a matemática para argumentar claramente sobre determinada situação, para defender seus pontos de vista, para escolher o modelo matemático mais adequado que resolve um problema, ter autonomia para raciocinar sobre caminhos a serem escolhidos, priorizar questões a serem resolvidas, comunicar e ler com propriedade as informações que lhe são apresentadas. A matemática tecnicista, que perdurou na escola por muito tempo, hoje dá lugar à valorização do pensamento matemático e do raciocínio sobre os fatos, sejam eles relacionados ao cotidiano do estudante ou a descobertas que ampliarão seu repertório.

Ao se apresentar dessa forma, a BNCC estimula você, professor, e os estudantes a buscar maneiras diferentes de ensinar e aprender Matemática, promovendo o protagonismo, a troca de ideias e o compartilhamento de estratégias, além da autonomia dos estudantes para avançar em suas aprendizagens escolhendo estratégias próprias de resolução dos problemas que encontrarem.

Sob essa perspectiva, os objetivos que fundamentam a proposta didático-pedagógica desta coleção, a seguir explicitada, visam ao letramento matemático e ao desenvolvimento da autonomia e do protagonismo dos estudantes por meio da resolução de problemas e da investigação matemática.

A resolução de problemas e a investigação matemática

Resolver problemas é uma prática diária, cotidiana e envolve os mais diversos tipos de situação. Assim como Sternberg (2001), partimos do pressuposto de que problema é toda situação inédita que leva o estudante a pensar e utilizar ferramentas mentais conhecidas por ele para se chegar a uma solução.

Para resolver um problema é necessário levantar hipóteses, discutir possibilidades, criar estratégias com base em conhecimentos prévios identificados visando atingir novos objetivos. Por mais simples que se configure, todo problema desafia quem o enfrenta, fomentando o gosto pela descoberta de formas para resolvê-lo. Ao sentir-se desafiado, o estudante desprende um esforço cognitivo que lhe possibilita ir além. Junto do trabalho de resolução de problemas, a investigação matemática estimula a busca por soluções criativas, inovadoras ou não, para situações que façam parte do cotidiano dos estudantes, dentro ou fora da escola.

Quando analisamos o trabalho em sala de aula sob o viés da resolução de problemas, entendemos que o desenvolvimento do pensamento matemático sempre parte de um problema e este é o meio pelo qual a Matemática será apreendida. Ao longo do processo histórico de constituição dos conceitos e conhecimentos matemáticos, o avanço dos estudos e as descobertas foram ocasionados pela necessidade de solucionar problemas nos mais variados contextos. Para resolvê-los, o processo de investigação ganhou força e se configurou como um caminho importante para se chegar a conclusões sobre temas matemáticos. George Polya (1978) resume assim as etapas de resolução de um problema:

- Compreender o problema.
- Destacar informações e dados importantes do enunciado para sua resolução.
- Elaborar um plano.
- Executar o plano
- Conferir resultados e estabelecer nova estratégia, se necessário, até chegar a uma solução aceitável.

Ao longo desta obra, além do trabalho fundamentado na resolução de problemas, várias atividades tiveram como base a proposta da investigação matemática, em que os estudantes buscam a solução para situações que podem envolver um ou mais problemas. No trabalho com investigação matemática, o caminho a ser percorrido é mais importante do que a meta final. Nesse sentido, cabe a você acompanhar o estudante ao longo de todo o processo.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira:

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2005, p. 23).

O seu papel, professor, tanto no campo da resolução de problemas quanto nas investigações matemáticas é saber dosar e fazer as perguntas certas nos momentos certos, sem dar respostas, criando um movimento de construção do espírito investigativo, com a intenção de levar os estudantes a alcançar conquistas maiores pelos próprios meios, promovendo, assim, a autonomia e a busca pelo aprendizado.

Os processos de investigação matemática estão estreitamente relacionados ao desenvolvimento da **competência específica 5** da área de Matemática e suas tecnologias proposta na BNCC para o Ensino Médio:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 531).

A proposta desta obra é recriada a todo momento, de acordo com os caminhos traçados por você e pelo próprio estudante, por isso é essencial que a criação de processos investigativos aconteça de maneira eficiente, visando manter a atenção e a curiosidade do estudante de forma efetiva, de acordo com o que você propõe e pelas descobertas próprias e da turma.

Diante do que foi exposto anteriormente cabe a você, professor, com base na realidade de sua turma e das possibilidades apresentadas nas atividades propostas em cada capítulo desta obra, elaborar seu planejamento alinhado ao Projeto Político Pedagógico da escola e ao currículo estadual, visando uma formação matemática consistente, que possibilite aos jovens usar com propriedade seus conhecimentos matemáticos pela vida afora.

O papel do erro

Os estudantes devem desenvolver o hábito de encarar suas dificuldades e entender que os erros são parte integrante do processo de aprendizagem. O próprio processo de investigação matemática favorece essa percepção: nele o estudante constrói, reconstrói, avalia e reavalia a situação quantas vezes for necessário. Ao explicar os próprios erros, os jovens se sentem desafiados a rever o percurso adotado, o que se torna mais uma oportunidade de aprendizagem.

Além disso, somente com a prática o estudante aprende a lidar naturalmente com o erro, com a confiança de que é possível explorar as ideias matemáticas de diferentes formas, por diferentes caminhos, partilhando com seus pares e discutindo estratégias de resolução para os problemas propostos. Para isso, é preciso que ele se sinta à vontade para dialogar com você e com os colegas a respeito das ideias matemáticas que forem surgindo, sabendo apresentar suas contribuições com argumentos cada vez mais consistentes, além de saber ouvir e mudar de ideia quando for o caso.

Essas oportunidades estarão presentes ao longo de toda a coleção por meio de questões para serem discutidas em duplas ou em pequenos grupos, além do desenvolvimento de projetos.

O trabalho em grupo

Na perspectiva da resolução de problemas e da investigação matemática que orientam o trabalho desta coleção, a realização das atividades em duplas ou em pequenos grupos é fundamental. Esse tipo de atividade exige uma organização da turma que difere do modelo enfileirado, em que o professor é o protagonista de todo o processo.

Em seu livro *Planejando o trabalho em grupo*, Cohen e Lotan (2017) defendem que, quando você, professor, propõe uma atividade em grupo e permite que os estudantes se esforcem sozinhos, inclusive cometendo erros, delega autoridade a eles e essa autoridade é a primeira característica-chave do trabalho em grupo.

A construção de um ambiente propício a esse tipo de trabalho, inclusive em relação à forma de constituição dos grupos, pode ocorrer com diálogo sobre os combinados que envolvem a relação entre professor e estudante e entre os próprios estudantes. Além do estímulo a serem autônomos na tomada de decisões, é seu papel fazer com que a turma coloque em jogo as decisões tomadas, vivenciando-as.

De acordo com as autoras, a segunda característica-chave do trabalho em grupo é que gere aprendizagens colaborativas e que a construção dos conhecimentos e soluções para os problemas sejam realizados coletivamente, e isso vai depender de que a atividade seja pensada/planejada com essa intenção.

A terceira característica-chave está relacionada, portanto, à natureza das atividades propostas.

> Se o professor quer que os alunos se comuniquem de maneira autônoma e produtiva, eles vão precisar ter algo a respeito do que irão conversar. Se o professor quer que os alunos se engajem em conversas substantivas e de alta qualidade, a atividade precisa estabelecer problemas complexos ou dilemas, ter diferentes soluções possíveis e contar com a criatividade (Cohen; Lotan, 2017, p. 2-3).

Nessa perspectiva, trabalhando em duplas ou em pequenos grupos por meio de atividades diversificadas, que envolvem discussões com os colegas, o estudante tem a oportunidade de levantar hipóteses, argumentar, defender suas ideias, mudar de opinião ao ouvir a argumentação do colega e, assim, desenvolver a empatia e o respeito pelo outro, o que contribui para sua formação humana. Esse exercício de respeito às opiniões dos outros, da valorização das diversas ideias apresentadas, com reflexão constante sobre o que o outro pensa, sem pré-julgamentos, desenvolve a escuta ativa e as **competências gerais 4**, **7** e **9** da BNCC relacionadas ao uso de diferentes linguagens, à argumentação e ao exercício da empatia, do diálogo, da resolução de conflitos e da cooperação, respectivamente.

Ao estudante que desenvolve um trabalho em grupo é dada a oportunidade de reconhecer as próprias emoções frente a opiniões contrárias às suas, ao ser questionado por seu posicionamento. Conflitos de opiniões são constantes na vida em sociedade e o trabalho em grupo se configura como uma experiência única no ambiente escolar, observado sob essa perspectiva, e promove o desenvolvimento integral do estudante.

Quando professores e estudantes compreendem a potencialidade de aprendizagem do trabalho em grupo, e incorporam a cultura desse tipo de trabalho, os resultados se efetivam em um ambiente envolto em compreensão, soluções de conflitos, com orientações claras, perguntas pertinentes, bom convívio, respeito e com parceria entre todos os envolvidos no processo.

Uma sugestão para esse tipo de trabalho, inclusive envolvendo turmas com número grande de estudantes, é constituir grupos permanentes para determinado período, um mês por exemplo. Dessa forma, esse mesmo grupo se reúne sempre que forem propostas atividades coletivas. Entre as vantagens desse tipo de organização está a facilidade de você ficar mais próximo dos estudantes para observar suas necessidades e fazer intervenções em relação a conhecimentos, habilidades, atitudes e valores. Seu olhar para o grupo como um todo possibilita a observação mais aguçada de cada estudante.

Nesse tipo de organização envolvendo grupos permanentes, as possibilidades de intervenção que atendam às necessidades individuais dos estudantes também se intensificam. Por exemplo, enquanto todos os grupos desenvolvem determinada atividade, você pode pedir a um ou mais estudantes que tenham necessidades comuns de aprendizagem, que se reúnam com você ou com estudantes que não apresentaram a mesma dificuldade, para que haja um atendimento mais específico. A reorganização dos grupos periodicamente, inclusive com a participação dos estudantes para definir critérios de escolha dos integrantes dos novos grupos, é fundamental para que desenvolvam competências ligadas à incorporação de direitos e responsabilidades, ponderação sobre consequências, participação social e liderança, entre outros.

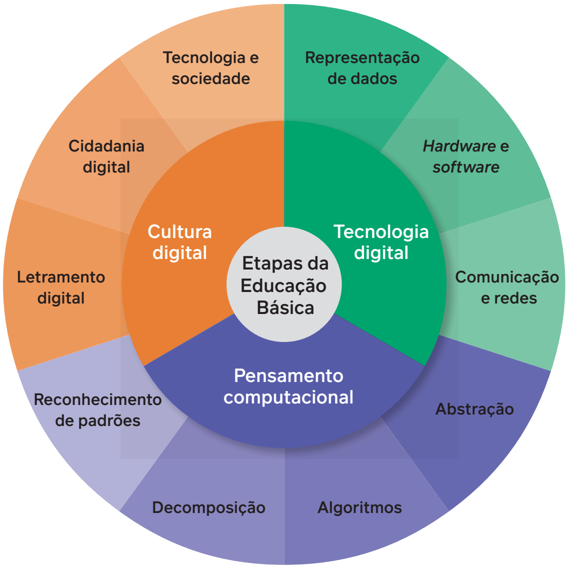
O trabalho em grupo, incorporado como cultura, transforma consideravelmente os indivíduos de maneira positiva porque proporciona verdadeiro desenvolvimento pessoal e coletivo. A escola tem a oportunidade de tornar esses momentos propícios para a construção de uma sociedade mais empática, de respeito entre todos, a partir do momento em que os estudantes conseguem fazer um paralelo entre suas práticas ao longo do processo de aprendizagem e as atividades cotidianas.

Nesse modelo de ensino, o professor torna-se coadjuvante nos processos de ensino e aprendizagem, permitindo aos estudantes o protagonismo de seu aprendizado.

O pensamento computacional

Diferentemente do que se possa imaginar, o pensamento computacional não está necessariamente associado à programação de computadores, ao uso de tecnologias ou à comunicação pela internet.

Veja no esquema a seguir o que se entende por cultura digital, tecnologia digital e pensamento computacional nas etapas da Educação Básica.



Acervo editora

O pensamento computacional se relaciona aos processos de pensamento utilizados para modelar problemas e resolvê-los de forma eficiente, determinando soluções genéricas para classes inteiras de problemas e pode ser decomposto em quatro etapas (Wing, 2021):

- decomposição – divisão de um problema em partes menores;
- reconhecimento de padrões – identificação de um ou mais padrões que geram o problema;
- abstração – seleção dos dados essenciais de um problema;
- algoritmo – estabelecimento de uma sequência ou ordem em que o problema será resolvido.

De acordo com a BNCC (Brasil, 2018, p. 474), o pensamento computacional "envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos".

Assim, o trabalho voltado para a autonomia do sujeito, por meio da investigação matemática e da resolução de problemas, conforme proposto nesta coleção, contém elementos essenciais para o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes.

Avaliação

Avaliar é uma ação cognitiva de que dispomos para tomar decisões e que nos orienta se estamos nos aproximando ou nos distanciando dos objetivos que queremos alcançar. A avaliação é um compromisso coletivo que a escola deve assumir para a garantia do direito à aprendizagem e à formação integral das juventudes.

Mudanças na concepção do ensino e da aprendizagem e na abordagem dos conteúdos implicam repensar as finalidades da avaliação, o que e como se avalia, em um trabalho cotidiano que pressupõe uma variedade de situações de aprendizagem, inclusive coletivas.

Quando se trabalha na perspectiva do desenvolvimento de competências e habilidades, o conceito de avaliação se amplia e deve levar em conta possibilidades de avaliar aprendizagens que vão além dos tópicos de conteúdo específico. Várias competências e habilidades de Matemática dizem respeito à investigação, à discussão de ideias, à capacidade de argumentação que demandam outros tipos de avaliação além das tradicionais **avaliações somativas**, que visam medir o desempenho dos estudantes em relação aos conteúdos, por meio do instrumento prova ou exame, ao final de um ciclo (bimestral, trimestral, semestral).

O compromisso com a formação integral dos estudantes e com o desenvolvimento de competências torna clara a superação das tradicionais **avaliações somativas** e **comparativas** (a referência é a comparação com base no desempenho dos outros estudantes) como norma escolar, para uma perspectiva da diversidade nas avaliações. Isso significa a adoção de modelos e instrumentos diversos de avaliação da aprendizagem que dê conta da complexidade e diversidade dos sujeitos e de como eles aprendem. A **avaliação ipsativa**, por exemplo, se refere ao estudante, que é comparado consigo mesmo, levando em conta aspectos como o esforço, o contexto em que o trabalho se desenvolve e os seus progressos.

Ao discutir a avaliação da aprendizagem, Andrade (2021) traduz diversas abordagens que a escola adota ou pode passar a adotar em suas práticas avaliativas de acordo com o foco, o propósito, a referência de comparação e os atores que protagonizam a ação de avaliar.

Abordagem	Foco	Propósito	Referência de comparação	Figura-chave
Avaliação **da** aprendizagem	Resultados somativos Metáfora: é como uma foto	Juízos sobre a posição, a promoção e as credenciais de cada estudante	Outros estudantes. Padrões ou expectativas de aprendizagem do currículo e de avaliações externas (ex.: SAEB, PISA)	Professor
Avaliação **para** aprendizagem	Processo de aprendizagem Metáfora: é como um filme	Informações para ajustes nas decisões, instruções didáticas e engajamento Devolutivas pedagógicas	Padrões ou expectativas de aprendizagem do currículo. Devolutivas do professor e entre pares	Professor, turma ou grupos de estudantes
Avaliação **como** aprendizagem		Automonitoramento, autocorreção e autoajuste	Objetivos pessoais e padrões do currículo	Estudante

Fonte: ANDRADE, J. P. *Aprendizagens visíveis*: experiências teórico-práticas em sala de aula. 1. ed. São Paulo: Panda Educação, 2021, p. 209.

A avaliação **da** aprendizagem, abordagem mais comum nas nossas escolas, está ligada à **avaliação somativa** e a critérios que se definem previamente, ou seja, as aprendizagens dos estudantes são analisadas em termos de critérios definidos.

A avaliação **para** aprendizagem nos diz muito sobre o modelo de **avaliação formativa**, que visa acompanhar o percurso de aprendizagem do estudante, gerando oportunidades de intervenção e retomadas durante a caminhada formativa. Esse tipo de avaliação propicia que tanto o professor como os estudantes possam identificar as necessidades de aprendizagem ao longo do processo e não só ao final dele.

Avaliação **como** aprendizagem dialoga com o que conhecemos por **autoavaliação**, que deve ser estimulada não somente do ponto de vista de o estudante reconhecer seus acertos e erros e "recalcular" a rota da aprendizagem, mas de tornar o próprio ato de avaliar objeto e objetivo de sua aprendizagem, contribuindo para o desenvolvimento de sua autonomia e confiança para vivenciar e enfrentar situações diversas dentro e fora da escola.

É importante ressaltar ainda a importância das **avaliações diagnósticas** que, independentemente dos tipos de instrumentos utilizados, devem auxiliá-lo na identificação do ponto de partida dos processos de ensino tendo como referência as aprendizagens ocorridas nos processos anteriores.

Para Frade, Val e Bregunci, esse tipo de avaliação:

> [...] é entendida também como a avaliação que ocorre ao longo dos processos de ensino e aprendizagem, visando a sua regulação. Ou seja, a avaliação diagnóstica pode ser entendida como aquela que verifica se o aluno aprendeu aquilo que lhe foi ensinado, a fim de identificar dificuldades de aprendizagem a serem superadas (Frade; Val; Bregunci, 2014, p. 39).

Ainda de acordo com as autoras, seja qual for a interpretação, a avaliação diagnóstica é parte de um percurso de aprendizagem cuja finalidade é delimitar pontos de partida e/ou de retomada para o ensino.

Cabe a você, professor, na elaboração do planejamento de uma etapa de trabalho, estabelecer momentos de avaliação prevendo, inclusive, um número de aulas para possíveis retomadas, de acordo com as necessidades de aprendizagem dos estudantes, evidenciadas nas avaliações.

Essas distintas abordagens podem e devem assumir um conjunto diverso de situações de aprendizagem e instrumentos de avaliação que sejam capazes de produzir evidências das aprendizagens que se espera que os estudantes construam.

Compartilhamos aqui alguns instrumentos e sua relação com as abordagens discutidas, condizentes com as características desta obra didática da área de conhecimento da Matemática, tanto de caráter formativo quanto de preparação para exames de larga escala.

- **Relatórios escritos**: contemplam o desenvolvimento descritivo, analítico e/ou explicativo de um processo criativo, investigativo e/ou de intervenção sociocultural. Ao longo dos capítulos de todos os volumes os estudantes produzem textos, nas mais diversas atividades, para comunicar ideias, fazer sínteses e expressar conclusões. Além disso, a última parte de cada volume desta obra, intitulada **Conexões & Projetos**, também contempla a produção de relatórios que expressam evidências das aprendizagens esperadas. Este tipo de relatório pode ser avaliado na perspectiva formativa, isto é, o docente acompanha sua produção ao longo do processo investigativo e apoia os estudantes na autorregulação das aprendizagens e no aprimoramento do relatório.
- **Observação informal** dos estudantes enquanto realizam a tarefa e apresentam suas conclusões à turma é parte cotidiana da avaliação formativa no processo de aprendizagem. Nesses momentos podem ser observados aspectos como o modo de mobilizar os conhecimentos matemáticos formais e informais, a maneira como entendem o processo investigativo e qual é o papel de cada estudante no desenvolvimento da atividade proposta. Cabe a você, quando oportuno, fazer perguntas e registros que evidenciem como os estudantes estão pensando, tornando os conhecimentos e as aprendizagens visíveis.
- **Apresentações orais**, nas quais os estudantes têm a oportunidade de apresentar a você e aos colegas os resultados de suas investigações. Esses momentos se constituem em oportunidade tanto para você avaliá-los quanto para o aprendizado dos estudantes, uma vez que possibilitam a eles desenvolverem processos de comunicação e de argumentação. As apresentações orais podem ser parte estratégica também em situações de aprendizagem que têm como objetivos avaliativos o levantamento de conhecimentos prévios dos estudantes (**avaliação diagnóstica**) que estão mobilizados na obra didática, sobretudo, na seção **Para pensar e discutir**. Além disso, na parte intitulada **Conexões e projetos**, os estudantes fazem a apresentação oral dos trabalhos desenvolvidos.
- **Painel de soluções** é uma estratégia metodológica ativa e colaborativa em que vários estudantes fazem registros, em um painel físico ou virtual, da resolução de problemas matemáticos. Essa estratégia possibilita que o professor avalie o raciocínio que utilizam na resolução dos problemas, avaliando não só o resultado final, mas o processo matemático que o estudante realiza para chegar em um resultado correto ou incorreto. O painel de soluções oportuniza também que os estudantes aprendam uns com os outros, autorregulando suas aprendizagens e ampliando seu repertório ao conhecer diversos caminhos e estratégias para chegar a um resultado correto ou confiável matematicamente.
- **Rubrica:** trata-se de um guia de avaliação baseado em critérios que consistem em uma gradação e descrições das características para cada ponto dessa gradação, ou seja, descreve graus de qualidade, proficiência ou compreensão ao longo de um *continuum*. Esse instrumento favorece a avaliação qualitativa do que foi realizado pelos estudantes, tornando palpável o que seria subjetivo. A rubrica é também um excelente instrumento de autoavaliação e coavaliação – quando grupos de estudantes avaliam o trabalho ou a apresentação oral de outros grupos de estudantes. Na produção de projetos pelos estudantes, mobilizada na parte **Conexões e projetos**, o instrumento rubrica é uma oportunidade significativa para a avaliação da aprendizagem dos e com os estudantes.

- **Prova em duplas:** nesse tipo de avaliação, o estudante tem oportunidade de discutir ideias, exercitar a argumentação, aprender a trabalhar de forma colaborativa e aprimorar as relações sociais. Para favorecer o desenvolvimento dessas habilidades, é fundamental que as questões propostas nesse tipo de prova propiciem o debate entre os estudantes.
- **Prova individual:** esse tipo de instrumento é um velho conhecido da Matemática, mas que pode assumir outro significado enquanto prática avaliativa, que favoreça a aprendizagem dos estudantes e a leitura avaliativa que o professor pode fazer dessas aprendizagens. Para isso, as questões devem ser planejadas e elaboradas com a intenção de levar o estudante a refletir e a estabelecer relações e não simplesmente repetir informações. O instrumento deve dar oportunidade para que o estudante explicite o seu raciocínio matemático e não apenas assinale as alternativas corretas. Após a realização da prova deve ser dada oportunidade para que os estudantes revejam os caminhos adotados para a resolução das questões, identifiquem os erros e acertos e pensem, com a mediação do professor, como poderiam propor outros caminhos para solucionar os problemas. O *feedback* individual para os estudantes que estejam com mais dificuldades é uma estratégia relevante a ser adotada após uma prova, pois fortalece a criação de vínculo e a autoconfiança do estudante.
- **Provas tipo teste:** de tempos em tempos podem ser aplicados testes como preparação para exames de vestibulares, Enem e avaliações de larga escala. Entretanto, é importante lembrar que não é o treinamento sistemático nesse tipo de prova que vai garantir o sucesso dos estudantes. Mais preparados estarão para se sair bem em qualquer tipo de prova aqueles que desenvolverem um pensamento matemático articulado e que souberem encontrar estratégias para resolver qualquer tipo de problema.

Para a utilização de qualquer um desses instrumentos, deve-se definir claramente os objetivos que orientam sua aplicação. Vasconcellos (2003) aponta questões fundamentais que servem de reflexão no planejamento de instrumentos de avaliação: Como os instrumentos são preparados? Como são aplicados? Como são analisados/corrigidos? Como os resultados são comunicados? E o mais importante, o que vai se fazer com os resultados?

As diferentes culturas juvenis

De acordo com Correa, Alves e Maia (2014) a expressão “culturas juvenis” se refere:

> [...] a todos os elementos que demarcam uma identidade própria desse grupo, por exemplo, a linguagem, as roupas e acessórios, os estilos musicais, os aparelhos tecnológicos, os espaços e modos de lazer e sociabilidade (Correa; Alves; Maia, 2014, p. 17-18).

As autoras defendem que:

> O uso de tais elementos dentro da escola para desenvolver o currículo pode e deve ser considerado, uma vez que pode aproximar a escola dos jovens, criando situações de diálogo entre a cultura escolar e as culturas juvenis (Correa; Alves; Maia, 2014, p. 18).

Quanto aos procedimentos para se trabalhar as culturas juvenis, as autoras reconhecem as práticas sociais com música, dança, grafite, esportes e tecnologias como importantes mediadores da construção de vivências das juventudes. Segundo elas,

> Uma *pedagogia da juventude* seria, assim, um conjunto de práticas educativas pensadas para jovens e com a participação dos jovens, considerando-se seus desejos, anseios, sonhos, projetos e necessidades presentes e futuras (Correa; Alves; Maia, 2014, p. 14).

Sendo assim, é importante que você esteja atento às características de sua turma, gostos, ambientes que frequentam, músicas que escutam, se constituem um grupo mais homogêneo ou mais heterogêneo, de modo que possa trazer as possibilidades de aprendizagem ligadas aos interesses desses jovens.

Além disso, esta coleção apresenta, na parte **Conexões e projetos**, várias oportunidades de se trabalhar, por meio de projetos, as competências gerais e específicas, além das habilidades ligadas às diversas unidades temáticas. Os projetos podem e devem ser adaptados, com a participação da turma, da forma que melhor atendam aos interesses dos jovens e às possibilidades apresentadas pela sua realidade.

No Observatório da Juventude da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), disponível em: https://observatoriodajuventude.ufmg.br/observatorio-da-juventude-2/, podem ser encontradas várias sugestões para o trabalho com as culturas juvenis.

A inclusão dos estudantes com deficiência

De acordo com Belisário (2005), quando se fala em inclusão, três aspectos precisam ser observados:

- **Formação continuada de professores**: oferecer programas de formação continuada para os professores, capacitando-os a lidar com as necessidades específicas dos alunos com deficiência. Isso inclui cursos e *workshops* sobre práticas pedagógicas inclusivas e estratégias de ensino adaptadas.
- **Adaptação do ambiente escolar**: adaptar a infraestrutura das escolas para torná-las acessíveis a todos os alunos. Isso envolve a construção de rampas, instalação de elevadores, sinalização tátil e auditiva e a criação de salas com recursos multifuncionais equipadas com materiais específicos para atender às necessidades dos alunos com deficiência.

- **Desenvolvimento de currículos flexíveis**: elaborar currículos flexíveis que permitam a personalização do ensino de acordo com as necessidades e habilidades de cada aluno. Isso inclui a adaptação de materiais didáticos, atividades diferenciadas e a avaliação contínua do progresso dos alunos.

Visando desenvolver currículos e práticas de ensino que sejam acessíveis para todos os estudantes, independentemente de suas habilidades, necessidades ou estilos de aprendizagem, o Desenho Universal para a Aprendizagem (DUA), baseia-se nos seguintes princípios:

- Fornecer várias formas de apresentar a informação para atender às diversas formas com que os estudantes percebem e compreendem os conteúdos que estão sendo trabalhados. Para isso, podem ser usados textos, áudios, vídeos, gráficos, infográficos, diagramas e outros recursos visuais.
- Oferecer diferentes maneiras para que os estudantes demonstrem o que sabem e o que aprenderam. Isso reconhece que os jovens têm preferências e habilidades variadas para expressar o que sabem. Para mostrar o que aprenderam sobre determinado assunto, eles podem produzir um texto, elaborar uma apresentação, gravar um *podcast* ou desenvolver um projeto artístico, por exemplo.
- Proporcionar várias maneiras de motivar e envolver os estudantes, considerando seus interesses, níveis de habilidade e preferências para manter seu envolvimento. Em uma aula de Matemática, por exemplo, o professor pode usar jogos, desafios de resolução de problemas e projetos práticos.

A organização da obra

O Manual do Professor

É formado por esta parte geral e uma parte específica, de acordo com cada volume.

Parte geral	Parte específica
Essa primeira parte consta do Manual do Professor em todos os volumes da coleção.	A parte específica de cada volume está assim distribuída: • Cronograma • Orientações específicas por capítulo

Orientações por capítulo	Conexões & projetos
• Objetivos • Justificativa • Competências gerais da BNCC • Competências específicas e habilidades de Matemática • Conexões com outras áreas de conhecimento • Temas Contemporâneos Transversais • Resoluções e comentários	• Competências gerais • Competências específicas • Habilidades • Orientações
Sugestões de leitura **Sugestão de atividades individuais e em grupos**	
Referências comentadas **Referências suplementares**	

Audiovisual
A coleção inclui 12 recursos audiovisuais por volume: 3 *podcasts*, 3 vídeos, 2 carrosséis de imagens, 3 infográficos clicáveis e 1 mapa clicável, fornecendo informações adicionais sobre cada recurso.

O Livro do Estudante

Veja a seguir a descrição detalhada de cada parte que integra o Livro do Estudante.

Esta coleção consta de três volumes sequenciais e a distribuição dos assuntos em cada volume teve como norte a presença de todas as cinco unidades temáticas – Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, Probabilidade e estatística.

Apresentamos a seguir o quadro de conteúdos dos três volumes.

Organização dos volumes

Volume 1			
Capítulo	**Tópicos e subtópicos**	**Unidades temáticas, competências e habilidades**	**Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**
1. Teoria dos conjuntos	**1. Noções de teoria dos conjuntos** • Conceitos iniciais • Subconjuntos • Operações entre conjuntos **2. Conjuntos numéricos** • Ampliações do campo numérico • Números reais	**Unidades temáticas:** • Números • Álgebra **Competências gerais**: 2, 4, 7, 9	• Diversidade cultural
2. Estatística e pensamento computacional	**1. Tabelas e gráficos estatísticos** • Análise e construção de tabelas e gráficos • Os índices socioeconômicos **2. Linguagem estatística** • Elementos em pesquisas estatísticas • Realizando uma pesquisa estatística **3. Pensamento computacional** • Algoritmos e fluxogramas • Introdução à programação	**Unidades temáticas:** • Números • Probabilidade e estatística **Competências gerais:** 1, 4, 5, 7, 9 **Competências específicas:** 1, 2, 3, 4 **Habilidades:** EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT202, EM13MAT315, EM13MAT405, EM13MAT406, EM13MAT407	• Ciência e tecnologia • Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras • Educação fiscal • Educação para os direitos humanos
3. Grandezas e medidas	**1. Grandezas e unidades fundamentais** • Unidades de medidas de grandeza • Notação científica e precisão nas medidas de grandezas **2. Grandezas direta e inversamente proporcionais** • Razão e proporção • Grandezas direta e inversamente proporcionais	**Unidade temática:** • Grandezas e medidas **Competências gerais:** 2, 4, 7, 9, 10 **Competências específicas:** 1, 2, 3 **Habilidades:** EM13MAT103, EM13MAT201, EM13MAT313, EM13MAT314, EM13MAT315	• Educação ambiental
4. Função afim	**1. A ideia de função** • Conceito de função • Função e teoria dos conjuntos • Representação de função no plano cartesiano **2. Função afim** • Conceito de função afim • Gráfico de uma função afim • Taxa de variação de uma função afim **3. Função afim e consequências** • Função linear e proporcionalidade **4. Funções e inequações** • Estudo dos sinais de uma função afim • Resolução de inequações do 1º grau	**Unidade temática:** • Álgebra **Competências gerais:** 2, 4, 5, 6, 9 **Competências específicas:** 1, 3, 4, 5 **Habilidades:** EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT401, EM13MAT404, EM13MAT501, EM13MAT510	• Educação Financeira
5. Função quadrática	**1. O estudo de equações do 2º grau** • Equações do 2º grau **2. Função quadrática** • Conceito e gráfico de função quadrática **3. Coordenadas do vértice da parábola** • Problemas de máximo ou de mínimo **4. Inequações do 2º grau** • Estudo dos sinais de uma função quadrática • Resoluções de inequações do 2º grau **5. Funções definidas por mais de uma sentença** • Lei de formação e gráficos	**Unidade temática:** • Álgebra **Competências gerais:** 2, 4, 5 **Competências específicas:** 3, 4, 5 **Habilidades:** EM13MAT302, EM13MAT402, EM13MAT404, EM13MAT405, EM13MAT502, EM13MAT503, EM13MAT506	• Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras • Educação para o consumo

Volume 1			
Capítulo	**Tópicos e subtópicos**	**Unidades temáticas, competências e habilidades**	**Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**
6. Geometria plana	**1. Conceitos de Geometria Plana** • Ângulos • Semelhanças **2. Polígonos e ângulos** • Soma das medidas dos ângulos internos e externos de um polígono • Os ângulos nos polígonos regulares **3. Medidas de superfícies** • Resolução de problemas de cálculo de áreas • Área do círculo	**Unidades temáticas:** • Geometria • Grandezas e medidas **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 **Competências específicas:** 2, 3, 5 **Habilidades:** EM13MAT201, EM13MAT307, EM13MAT308, EM13MAT505	• Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras • Educação para o trânsito • Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso

Volume 2			
Capítulo	**Tópicos e subtópicos**	**Unidades temáticas, competências e habilidades**	**Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**
1. Função exponencial e função logarítmica	**1. Potenciação** • Propriedades da potenciação **2. A função exponencial** • Conceito e gráfico de uma função exponencial • Resolução de equações e inequações exponenciais **3. Logaritmos** • Conceito de logaritmo • Propriedades dos logaritmos **4. A função logarítmica** • Conceito e gráfico de uma função logarítmica • Resolução de equações e inequações logarítmicas • O uso de logaritmos na resolução de problemas	**Unidades temáticas:** • Números • Álgebra **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10 **Competências específicas:** 1, 3, 4 **Habilidades:** EM13MAT101, EM13MAT304, EM13MAT305 EM13MAT313, EM13MAT403	• Saúde
2. Sequências numéricas	**1. Sequências numéricas** • Padrões numéricos e geométricos **2. Progressão aritmética** • Termo geral de uma progressão aritmética • Progressão aritmética e outras relações • Soma dos termos de uma progressão aritmética **3. Progressão geométrica** • Termo geral de uma progressão geométrica • Propriedades de uma progressão geométrica • Progressão geométrica e outras relações • Soma dos termos de uma progressão geométrica	**Unidade temática:** • Álgebra **Competências gerais:** 2, 3, 4, 5, 9 **Competências específicas:** 2, 4, 5 **Habilidades:** EM13MAT203, EM13MAT405, EM13MAT507, EM13MAT508	• Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
3. Estatística descritiva	**1. Medidas de tendência central** • Média aritmética • Moda • Mediana **2. Medidas de dispersão** • Amplitude total • Variância e desvio-padrão **3. Outra forma de análise de dados** • Utilizando quartis e o diagrama *boxplot*	**Unidade temática:** • Probabilidade e estatística **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 6, 7, 10 **Competências específicas:** 1, 2, 3, 4 **Habilidades:** EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT202, EM13MAT316, EM13MAT406, EM13MAT407	• Educação para o consumo

Volume 2			
Capítulo	**Tópicos e subtópicos**	**Unidades temáticas, competências e habilidades**	**Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**
4. Geometria das transformações e triângulos	**1. Geometria das transformações** • Transformações isométricas • Transformações homotéticas **2. Triângulos: relações trigonométricas** • Trigonometria no triângulo retângulo • Trigonometria em um triângulo qualquer	**Unidade temática:** • Geometria **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5 **Competências específicas:** 1, 3 **Habilidades:** EM13MAT105, EM13MAT308	
5. Funções trigonométricas	**1. Circunferência trigonométrica** • Arcos e ângulos • O plano cartesiano e a circunferência trigonométrica • Seno e cosseno na circunferência trigonométrica • A tangente na circunferência trigonométrica **2. As funções seno e cosseno** • Função seno • Função cosseno • O uso de funções trigonométricas na resolução de problemas	**Unidades temáticas:** • Álgebra • Geometria **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10 **Competência específica:** 3 **Habilidade:** EM13MAT306	• Direitos da criança e do adolescente
6. Os sólidos geométricos	**1. O método matemático** **2. Figuras geométricas espaciais** • Poliedros: relação de Euler **3. Relações métricas em sólidos geométricos** • Bloco retangular e cubo • Pirâmides regulares e cones • Esferas **4. Geometria dos mapas: projeções cartográficas** • Projeção cônica • Projeção cilíndrica • Projeção azimutal	**Unidades temáticas:** • Geometria • Grandezas e medidas **Competências gerais:** 1, 2, 3, 4, 5, 9 **Competência específica:** 5 **Habilidade:** EM13MAT509	

Volume 3			
Capítulo	**Tópicos e subtópicos**	**Unidades temáticas, competências e habilidades**	**Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**
1. Prismas e cilindros	**1. Prismas** • Área da superfície de um prisma • Área da superfície de um bloco retangular • Volume do bloco retangular **2. Cilindros** • Área dos cilindros • Volume do cilindro	**Unidades temáticas:** • Geometria • Grandezas e medidas **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 9, 10 **Competências específicas:** 2, 3, 5 **Habilidades:** EM13MAT201, EM13MAT309, EM13MAT504	• Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
2. Pirâmides, cones e esferas	**1. Pirâmides** • Área da superfície da pirâmide • Volume da pirâmide **2. Cones** • Área da superfície do cone • Volume do cone • Tronco de pirâmide e tronco de cone **3. Esfera** • Volume da esfera • Área da superfície esférica	**Unidades temáticas:** • Geometria • Grandezas e medidas **Competências gerais:** 1, 2, 3, 4, 6, 7 **Competências específicas:** 2, 3, 5 **Habilidades:** EM13MAT201, EM13MAT309, EM13MAT504	• Educação Ambiental
3. Sistemas lineares	**1. Sistemas de equações lineares** **2. Resolução de sistemas de equações lineares** • A forma escalonada	**Unidade temática:** • Álgebra **Competências gerais:** 2, 4, 9 **Competências específicas:** 3, 4 **Habilidades:** EM13MAT301, EM13MAT401	

Volume 3			
Capítulo	**Tópicos e subtópicos**	**Unidades temáticas, competências e habilidades**	**Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)**
4. Análise combinatória	**1. Princípios de contagem** • Problemas iniciais de contagem • Princípio multiplicativo **2. Permutações** • Permutações simples • Permutações com repetição **3. Formando agrupamentos** • Arranjo simples • Combinação simples **4. Triângulo de Pascal** • Propriedades dos números binominais	**Unidade temática:** • Números **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 9 **Competências específicas:** 3, 4 **Habilidades:** EM13MAT310, EM13MAT315, EM13MAT405	
5. Probabilidades	**1. Probabilidade** • Espaço amostral e evento • Probabilidade **2. Adição de probabilidades** • Probabilidade condicional **3. Multiplicação de probabilidades** **4. Probabilidade e estatística** • Obtenção de uma curva	**Unidade temática:** • Probabilidade e estatística **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9 **Competências específicas:** 1, 3, 5 **Habilidades:** EM13MAT106, EM13MAT311, EM13MAT312, EM13MAT511	• Saúde
6. Matemática Financeira	**1. A matemática e a Educação Financeira** • Matemática Comercial **2. Matemática Financeira** • Juros simples • Juros compostos • Financiamentos	**Unidades temáticas:** • Números • Álgebra **Competências gerais:** 2, 4, 5, 9 **Competências específicas:** 1, 2, 3, 4 **Habilidades** EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT203, EM13MAT302, EM13MAT303, EM13MAT315, EM13MAT405	• Educação Financeira • Educação para o consumo • Educação fiscal

Além dos seis capítulos, cada volume contém, ao final, uma parte importante intitulada **Conexões & Projetos**, constituída de três projetos por meio dos quais os estudantes colocam em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas em alguns capítulos daquele volume.

A organização dos capítulos

Os capítulos que compõem cada volume são constituídos por um percurso que envolve, para cada tópico apresentado, atividades resolvidas seguidas de problematizações que levam os estudantes, trabalhando em duplas ou em pequenos grupos, a discutir ideias, propor e validar hipóteses, além de apresentar argumentações consistentes para as afirmações que fazem. Da forma como estão propostas, essas atividades propiciam o desenvolvimento de processos como comunicação, investigação, construção de modelos e resolução de problemas.

Para favorecer esse trabalho, em todos os volumes da coleção, sempre que possível, três elementos estarão presentes: **Produção de textos**, **Algoritmos e fluxogramas** e **Recursos digitais**.

Esses elementos garantem a diversidade de atividades, o desenvolvimento de habilidades e a participação dos estudantes como sujeitos ativos no processo de ensino e aprendizagem.

Produção de textos

A **competência geral 7** da BNCC propõe que o estudante deve ser capaz de:

> Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta (Brasil, 2018, p. 9).

Visando desenvolver essa competência, que envolve a capacidade de argumentação, em todos os capítulos são propostas atividades em que os estudantes produzirão textos, tanto oralmente como por escrito, principalmete nas seções **Para pensar e discutir** e **Para explorar**. Por meio desses textos eles descrevem formas de pensar, elaboram hipóteses e problemas, apresentam argumentações, entre outros.

É importante destacar que em todas essas situações os estudantes devem apresentar argumentos que justifiquem as ideias apresentadas, seja oralmente ou por escrito. Cabe a você, professor promover discussões em grupos ou com toda a turma para que os argumentos possam ser debatidos e justificados, inclusive por meio de expressões e cálculos matemáticos, quando for o caso. Dessa forma, contribui-se para que desenvolvam a capacidade de argumentar com base em dados e informações confiáveis.

Sobre a elaboração de problemas, vale ressaltar que um dos pontos de destaque que evidenciam a autonomia no desenvolvimento do pensamento matemático é a elaboração de problemas sobre determinado conceito. Em várias oportunidades os estudantes elaboram problemas sobre determinado assunto, refletem sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou propõem diferentes soluções para um problema apresentado.

Saber elaborar uma situação-problema requer um esforço cognitivo maior do que uma simples resolução, além de necessitar de conhecimento mais profundo sobre o assunto tratado.

Nesse sentido, a BNCC propõe:

> Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada (Brasil, 2018, p. 536).

Algoritmos e fluxogramas

O trabalho com algoritmos e fluxogramas favorece o desenvolvimento do pensamento computacional e está presente na BNCC desde o 6º ano do Ensino Fundamental. Esse tipo de pensamento permite que, diante de um problema, o sujeito possa dividi-lo em partes, identificar padrões, imaginar uma solução que seja válida para diversos problemas e definir uma sequência de passos que os resolvam. Esses passos podem ser expressos por meio de um algoritmo, que, por sua vez, pode ser representado por um fluxograma.

A partir do Capítulo 2 do Volume 1, quando são retomados e aprofundados, os algoritmos e fluxogramas são trabalhados, sempre que possível, envolvendo os mais diversos assuntos, visando desenvolver as seguintes habilidades:

(**EM13MAT315**) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(**EM13MAT405**) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Recursos digitais

Em diversas atividades, em todos os volumes, os estudantes fazem uso de planilhas eletrônicas, *softwares* de geometria dinâmica ou calculadoras.

De acordo com a BNCC,

> [...] o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações (Brasil, 2018, p. 536).

A importância do uso desses recursos fica evidente porque dezessete habilidades, distribuídas nas cinco competências específicas de Matemática, se referem ao uso das tecnologias digitais para a etapa do Ensino Médio na BNCC.

Seções

Abertura de capítulo

Na abertura de todos os capítulos é apresentado um pequeno texto que relaciona o assunto que será tratado a algum aspecto da realidade ou a situações reais, oportunizando, inclusive, um trabalho interdisciplinar. Com base nesse texto são propostas duas questões para serem debatidas em duplas ou em pequenos grupos, cujo objetivo é mobilizar os conhecimentos anteriores e provocar a necessidade de aquisição de novas habilidades e/ou conteúdos conceituais, inclusive envolvendo outras áreas de conhecimento. Esse momento pode ser aproveitado também para a avaliação diagnóstica da turma.

As questões propostas podem ser trabalhadas na perspectiva da "sala de aula invertida" (Bacich; Moran, 2018), em que o estudante, de alguma forma, tem acesso prévio ao assunto que será tratado no capítulo. Essa é uma das metodologias ativas propostas como forma de colocar o estudante no centro do processo de aprendizagem. Com essa perspectiva, as questões podem ser propostas com antecedência, envolvendo inclusive algum tipo de pesquisa, de modo que ao iniciar o capítulo o estudante já tenha tido a oportunidade de pensar sobre o assunto que será abordado. A primeira aula daquele capítulo passa a ser, então, um momento de ricas discussões sobre o assunto, com a contribuição de cada estudante, podendo contar também com a contribuição de professores de outras áreas e até gerar projetos interdisciplinares sobre o tema tratado.

Para pensar e discutir

Esta seção aparece ao longo de todos os capítulos, permeando o texto, cujo objetivo é colocar o estudante como participante ativo do próprio processo de aprendizagem. É constituída por situações que o levam a pensar individualmente, seja durante a aula, seja durante a tarefa de casa, para serem posteriormente discutidas. As questões propostas podem envolver investigação de propriedades, elaboração de novos problemas, conclusões ou sínteses que podem ser apresentadas por meio de um texto argumentativo ou de resoluções matemáticas para justificar os argumentos apresentados na discussão, conforme o caso, o que propicia mais uma oportunidade para o desenvolvimento da capacidade de argumentação. As discussões podem ocorrer em duplas, em grupos ou com toda a turma, sob sua mediação. A ideia é incentivar os estudantes a pensar sobre as questões propostas e apresentar argumentos bem fundamentados. No momento das discussões, é importante que você garanta um ambiente de respeito e permita que novos questionamentos sejam feitos, promovendo o desenvolvimento de ideias matemáticas e corrigindo, quando necessário, os conceitos envolvidos.

Para explorar

Os estudantes resolvem as atividades propostas nesta seção sempre em duplas ou em pequenos grupos. Eles trocam ideias ao investigar regras, padrões e propriedades matemáticas e ao fazer análises críticas, criativas e propositivas envolvendo diversos tipos de situação. Em alguns desses momentos são utilizadas tecnologias diversas, como calculadora, planilha eletrônica ou *softwares* de geometria dinâmica. As atividades propostas nesta seção possibilitam também o desenvolvimento do processo de metacognição (Leite; Darsie, 2011), por meio do qual os estudantes têm a oportunidade de pensar sobre como aprendem, promovendo o autoconhecimento, a autonomia intelectual e o controle das próprias atividades cognitivas. Durante a realização das atividades cabe a você incentivar os alunos a se expressarem com clareza, comunicarem suas formas de pensar e apresentarem argumentos que justifiquem suas afirmações.

Atividades resolvidas

Esta seção é utilizada como referência, ao final de cada assunto, para resolver problemas relativos ao assunto tratado. Você pode propor aos estudantes que analisem cada situação e a respectiva resolução individualmente ou em duplas, para posterior discussão. Em alguns casos, é solicitado aos estudantes que completem algumas resoluções ou que reflitam sobre o que ocorreria se modificassem alguns dados, valorizando, assim, suas formas de pensar e a elaboração de estratégias. Pode-se solicitar também que elaborem novos problemas a partir dos que foram apresentados.

Atividades

As atividades propostas ao final de cada tópico, podem ser abertas ou fechadas e, em alguns casos, envolver investigações matemáticas, produção de textos ou elaboração de algoritmos e fluxogramas. Pode haver atividades para serem resolvidas em grupos ou em duplas, usando ou não algum tipo de tecnologia digital.

Análise e contexto

Esta seção aparece pelo menos uma vez em cada capítulo, após uma seção de atividades, ao longo dos três volumes. É constituída por textos do cotidiano, notícias, ensaios, divulgação científica, textos de conteúdos matemáticos ou de história da Matemática, que são sempre acompanhados de questões para reflexão e análise. Busca contribuir para desenvolver a capacidade de argumentação com base em dados confiáveis.

Infográfico

Esta seção aparece em alguns capítulos de cada volume. Apresenta, de forma atrativa e utilizando elementos visuais, assuntos relacionados ao capítulo. O infográfico é sempre acompanhado de questões para discussão.

Atividades finais

Relação de atividades que envolvem todo o assunto estudado no capítulo, incluindo questões que podem ser utilizadas como verificação de aprendizagem. Podem ser abertas ou não. Inclui questões de vestibulares e do Enem, destacadas com o subtítulo **Questões de vestibulares e Enem**. Podem ser propostas como tarefa de casa ou para serem resolvidas durante a aula. Você pode selecionar algumas atividades para serem resolvidas em duplas e discutidas coletivamente.

Ao final desta seção, os estudantes terão a oportunidade de avaliar todo o percurso e seu processo de aprendizagem por meio da **autoavaliação**, que retoma os objetivos que constam no início do capítulo. É importante que eles sejam incentivados a fazer uma reflexão antes de realizá-la. Você pode encaminhar o levantamento dos resultados e fazer, com a turma, um planejamento para retomada dos assuntos em que os estudantes não se sentem seguros.

Observação importante: nas diferentes seções, as atividades que solicitam justificativas ou explicações apresentam como resposta para o professor, no Livro do Estudante, apenas “Resposta pessoal”. Entretanto, na parte específica deste manual você encontrará orientações ou sugestões de resposta.

Conexões e projetos

A última parte do Livro do Estudante é constituída por uma seção denominada **Conexões e projetos**, formada por três projetos que visam levar os estudantes a colocar em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas ao longo dos capítulos. Por meio desses projetos, eles terão a oportunidade de desenvolver competências relacionadas a saberes e vivências da vida cotidiana usando diversos tipos de tecnologia e os conhecimentos matemáticos adquiridos.

Cada projeto apresenta possibilidades de trabalho interdisciplinar que pode ser desenvolvido juntamente com professores de outras áreas. Nesse caso, é importante que vocês façam a leitura prévia do projeto e o adaptem à sua realidade, não se esquecendo de verificar a coerência com o Projeto Politico Pedagógico da escola e com o currículo estadual.

É importante também que, dependendo da natureza das atividades propostas, seja garantida a segurança de todos os envolvidos (estudantes, professores e demais pessoas) no que diz respeito a eventuais riscos.

Para esse trabalho em conjunto é necessário desenvolver um cronograma de acordo com o número de aulas de cada componente curricular envolvido e com os temas que serão desenvolvidos/aprofundados por cada um, lembrando que existe a possibilidade de aprofundamento dos temas de acordo com a demanda de cada turma e a disponibilidade de tempo.

A escolha dos temas levou em conta a possibilidade de oferecer aos jovens a oportunidade de conhecer novas realidades, de se aprofundarem em temas relevantes para sua vida e, em alguns casos, fazer intervenções na comunidade.

Tendo em vista uma **escola que acolha as juventudes**, a proposta visa, de acordo com a BNCC (Brasil, 2018, p. 465):

- favorecer a atribuição de sentido às aprendizagens, por sua vinculação aos desafios da realidade e pela explicitação dos contextos de produção e circulação dos conhecimentos;
- garantir o protagonismo dos estudantes em sua aprendizagem e o desenvolvimento de suas capacidades de abstração, reflexão, interpretação, proposição e ação, essenciais à sua autonomia pessoal, profissional, intelectual e política;

- promover a aprendizagem colaborativa, desenvolvendo nos estudantes a capacidade de trabalharem em equipe e aprenderem com seus pares; e
- estimular atitudes cooperativas e propositivas para o enfrentamento dos desafios da comunidade, do mundo do trabalho e da sociedade em geral, alicerçadas no conhecimento e na inovação.

Essa parte da obra oferece, ainda, aos estudantes a oportunidade de (Brasil, 2018, p. 467):

- compreender e utilizar os conceitos e teorias que compõem a base do conhecimento científico-tecnológico, bem como os procedimentos metodológicos e suas lógicas;
- conscientizar-se quanto à necessidade de continuar aprendendo e aprimorando seus conhecimentos;
- apropriar-se das linguagens científicas e utilizá-las na comunicação e na disseminação desses conhecimentos; e
- apropriar-se das linguagens das tecnologias digitais e tornar-se fluentes em sua utilização.

Pensando na autonomia docente, os projetos são independentes e podem ser desenvolvidos por toda a turma, um de cada vez, de acordo com seu planejamento e o cronograma proposto por você. Outra opção é que cada grupo escolha um dos projetos para desenvolver ao longo de um período estabelecido por você. As opções são várias, analise previamente as propostas, entre nos endereços de *sites* indicados e, se necessário, faça adaptações que possam atender tanto à sua realidade como ao Projeto Político Pedagógico da escola e ao currículo estadual.

Cabe também a você escolher o melhor momento para dar início ao trabalho. Como o desenvolvimento de um projeto demanda tempo para que as várias etapas sejam cumpridas, sugerimos avaliar quando apresentar a proposta de trabalho e orientar os estudantes para que possam, inclusive, desenvolver seus projetos paralelamente ao desenvolvimento dos capítulos. Essa é mais uma oportunidade de investir na autonomia dos estudantes, uma vez que, caso necessário, podem acessar conteúdos de capítulos ainda não trabalhados, mas importantes para o desenvolvimento de seus projetos, o que potencializa seus processos de leitura e compreensão de textos, incluindo o texto matemático. Seu papel é fundamental para incentivá-los a se engajar nesse tipo de trabalho e atender às necessidades específicas de cada grupo.

Parte específica

Orientações específicas para este volume

Apresentamos a seguir uma sugestão de cronograma com três possibilidades de distribuição por capítulo: bimestral, trimestral ou semestral. Esse cronograma pode ser adaptado à sua realidade, de acordo com a programação e o calendário da escola.

Com base no cronograma, você pode elaborar seu planejamento para cada etapa de trabalho, incluindo momentos para a realização de avaliações formativas, que ocorrem ao longo do processo, seguidas de períodos para as possíveis retomadas com base nos resultados obtidos. É importante também analisar previamente as possibilidades de trabalho interdisciplinar, envolvendo professores de outras áreas de conhecimento, para que vocês possam, juntos, planejar as atividades que serão realizadas e incluídas nos planejamentos de ambos.

Cronograma

<table>
<tr><th>Capítulo</th><th>Bimestre</th><th>Trimestre</th><th>Semestre</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1º</td><td>1º</td><td>1º</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1º</td><td>1º</td><td>1º</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">2º</td><td>1º
Da pág. 98 até 105</td><td rowspan="2">1º</td></tr>
<tr><td>2º
Da pág. 106 até 117</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>2º
Da pág. 118 até 144</td><td rowspan="2">2º</td><td>1º
Da pág. 118 até 144</td></tr>
<tr><td>3º
Da pág. 145 até 167</td><td>2º
Da pág. 145 até 167</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>3º
Da pág. 168 até 200</td><td>2º
Da pág. 168 até 200</td><td>2º</td></tr>
<tr><td>4º
Da pág. 201 até 220</td><td>3º
Da pág. 201 até 220</td><td>2º</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4º</td><td>3º</td><td>2º</td></tr>
</table>

CAPÍTULO 1

Prismas e cilindros

Objetivos

- Compreender as relações matemáticas para o cálculo de áreas de superfícies de prisma e de cilindro.
- Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de áreas de superfícies de prisma e de cilindro.
- Compreender o procedimento para o cálculo do volume de blocos retangulares.
- Compreender o princípio de Cavalieri para o estabelecimento de procedimentos de cálculo de volume de prisma e de cilindro com base no volume de bloco retangular.
- Compreender as relações matemáticas para o cálculo de volumes de prisma e de cilindro.
- Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de volumes de prisma e de cilindro.
- Compreender o princípio de Cavalieri para o cálculo de volume de sólidos geométricos.

Justificativa

O cálculo de áreas totais e volumes de prismas e cilindros permite aos estudantes resolver e elaborar problemas relativos a esses sólidos geométricos em contextos variados, tanto os relacionados ao dia a dia como os que envolvem outras áreas do conhecimento.

Competências gerais da BNCC

Competência geral 1: Na página 24, na seção **Análise e contexto**, os estudantes leem um texto sobre o problema da duplicação de um cubo, que faz parte da história da Matemática. Em seguida, resolvem um problema com base nas ideias apresentadas no texto. São explorados outros textos que envolvem os conhecimentos historicamente construídos, como o das páginas 26 e 27 sobre o princípio de Cavalieri; e, na página 40, é apresentado um experimento usado por Arquimedes para calcular o volume de uma pedra. Dessa forma, os estudantes valorizam e utilizam os conhecimentos construídos através dos tempos para entender e explicar a realidade.

Competência geral 2: Na seção **Para pensar e discutir** da página 19, os estudantes refletem e analisam diferentes situações que os levam a concluir o que acontece com o volume de um bloco retangular quando uma de suas dimensões varia. Recorrem, assim, à investigação, à reflexão, à análise crítica, à imaginação e à criatividade para elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas.

Competências gerais 4, 5 e 9: Na seção **Para explorar** da página 35, os estudantes, reunidos em pequenos grupos, utilizam um *software* de geometria dinâmica para construir cilindros sob determinadas condições e investigar algumas propriedades, justificando-as. Como utilizam diferentes linguagens para se comunicar, como a verbal oral, a digital e a matemática, mobilizam a **competência 4**. Desenvolvem também a **competência 5**, pois utilizam a tecnologia digital para produzir conhecimentos e resolver problemas. Como trabalham em equipe, mobilizam a **competência 9** ao exercitarem o diálogo, a empatia e a cooperação, fazendo-se respeitar, respeitando e acolhendo a perspectiva do outro.

Competência geral 10: Na seção **Para explorar** da página 41 os estudantes utilizam as aprendizagens do capítulo para fazer uma proposta de moradia para pessoas que vivem em comunidades quilombolas, considerando as características dessa comunidade. Dessa forma, tomam decisões com base em princípios inclusivos, sustentáveis e solidários.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 2

EM13MAT201: Na seção **Para explorar** da página 41, os estudantes utilizam as aprendizagens do capítulo para fazer uma proposta de moradia para pessoas que vivem em comunidades quilombolas, considerando as características dessas comunidades.

Competência específica 3

EM13MAT309: Essa habilidade é desenvolvida ao longo de todo o capítulo, uma vez que os estudantes resolvem e elaboram problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas e cilindros em diversas situações, por exemplo, nas atividades que constam das páginas 16 a 18, 26, 36, 37, 40 e 41.

Competência específica 5

EM13MAT504: Essa habilidade é desenvolvida, por exemplo, na seção **Para pensar e discutir** da página 19, quando os estudantes discutem sobre o volume de um bloco retangular. Eles exploram também o princípio de Cavalieri para calcular o volume de um prisma, na seção **Para pensar e discutir** da página 27.

Temas Contemporâneos Transversais

O TCT **Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras** é mobilizado tanto no início como no fim do capítulo, quando são abordadas as formas de moradia das populações quilombolas.

Resoluções e comentários

Página 9

Abertura

1. Resposta possível: Isso ocorre porque essas formas são mais fáceis de empilhar e organizar nas prateleiras, o que otimiza o espaço e facilita o transporte e o armazenamento dos produtos.
2. Resposta possível: Provavelmente, seria dada preferência ao formato de prisma de base quadrada. Isso porque tais

embalagens seriam mais fáceis de empilhar e organizar nas prateleiras, aproveitando melhor o espaço.

Incentive a discussão sobre essas duas questões e aproveite este momento para avaliar, os conhecimentos prévios dos estudantes acerca dos sólidos geométricos, assunto já trabalhado no Ensino Fundamental. Ao longo deste capítulo, você pode fazer uma parceria com o professor de Arte e propor que os estudantes desenvolvam embalagens de diferentes formas geométricas com base em determinados critérios como capacidade, gasto de material, entre outros, de modo que possam utilizar os conceitos matemáticos que serão trabalhados no capítulo.

1. Prismas

Página 10

Para pensar e discutir

A intenção das **atividades 1**, **2** e **3** é encorajar os estudantes a olhar o entorno para, assim, conhecer um pouco mais a própria realidade, além de desenvolverem um olhar matematizado sobre o mundo. Incentive-os a identificar as formas geométricas e, se possível, fazer suas representações.As construções retratam parte da história das cidades e da formação delas. Procure, também, incentivá-los a ter esse olhar de curiosidade, comparando o novo com o antigo.

Página 12

Para pensar e discutir

1. A planificação do prisma é formada por 6 retângulos e 2 hexágonos.
2. Espera-se que os estudantes identifiquem que é necessário adicionar as áreas dos 6 retângulos com as áreas dos 2 hexágonos.

Página 14

Para pensar e discutir

1. Precisam ser obtidos: comprimento, largura e altura.
2. Espera-se que os estudantes obtenham a área total pela soma das áreas do teto, do piso e das quatro paredes. Verifique se eles calcularam apenas as áreas de três retângulos, pois 2 a 2 têm a mesma área.
3. As respostas vão depender das medidas da sala de aula, mas, como todos os estudantes devem fazer a atividade, podem confrontar os resultados posteriormente.

Página 15

Para explorar

É interessante preparar com antecedência essa atividade para que os estudantes tragam embalagens de formas diversas, mas com a ideia de prisma. Se forem muitos grupos, pode tomar muito tempo. Proceda com duas ou três trocas de embalagens entre os grupos.

Páginas 16-18

Atividades

Todas as atividades exigirão dos estudantes o conhecimento de como avaliar a superfície total de prismas retos, blocos retangulares e cubos. Os cálculos envolvendo as áreas desses sólidos precisam ser muito bem compreendidos para que possamos avançar, ainda nesta unidade, para o cálculo da área total de um cilindro reto, por exemplo. Assim, sugerimos que a maioria dessas atividades (à sua escolha) seja encaminhada para resolução em sala de aula.

1.

   a) $A_{T1} = 2ab + 2ac + 2bc$

   b) $A_{T2} = k^2(2ab + 2ac + 2bc)$

   c) $A_{T2} = k^2 \cdot A_{T1}$

   d) k^2 deve ser um número real positivo maior que zero e menor que 1. Após resolver a atividade, proponha aos estudantes uma atividade similar envolvendo valores numéricos para as medidas das arestas, de modo que atribuam significado à constante k e à constante k^2 da fórmula da área. Problematize também o caso $k = 1$ para que eles constatem o significado associado.

2.

   a) Cálculo da área da base:
   $A_b = 64$; 64 cm²
   Cálculo da área lateral (4 retângulos):
   $A_L = 4 \cdot (8 \cdot 10{,}5) = 336$; 336 cm²
   Cálculo da área revestida em couro sintético:
   $A = A_L + A_b$
   $A = 336 + 64 = 400$; 400 cm²
   Chame a atenção dos estudantes para a abertura da parte superior, na qual não haverá revestimento em couro.

   b) 100 m² = 1 000 000 cm²
   $\frac{1\,000\,000}{400} = 2\,500$; 2 500 porta-lápis

3. Cálculo da área da base:
   $A_b = 6 \cdot \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cong 10{,}38$; 10,38 cm²
   Cálculo da área lateral (6 retângulos):
   $A_L = 6 \cdot (16 \cdot 2) = 192$; 192 cm²
   Cálculo da área total:
   $A_T = A_L + 2A_b$
   $A_T \cong 192 + 2 \cdot 10{,}38 \cong 213$; 213 cm²

4.

   a) 19 peças

   b) 2 peças de 140,5 cm × 30 cm; 12 peças de 30 cm × 35 cm; 2 peças de 30 cm × 147,5 cm; 3 peças de 30 cm × 135,5 cm

   c) Seja M a quantidade de centímetros quadrados de madeira usados para fazer a estante.
   $M = 2 \cdot (140{,}5 \cdot 30) + 12 \cdot (30 \cdot 35) +$
   $+ 2 \cdot (30 \cdot 147{,}5) + 3 \cdot (30 \cdot 135{,}5)$
   $M = 42\,075$; 42 075 cm² = 4,2075 m²

   d) São quatro vãos horizontais de 35 cm. Eles ocupam 140 cm ao todo, no comprimento da estante.
   A medida superior tem 152,5 cm de comprimento, logo:
   $152{,}5 - 140 = 12{,}5$
   São 5 placas verticais, então:
   $\frac{12{,}5}{5} = 2{,}5$; 2,5 cm
   Nessa atividade, os estudantes devem considerar a forma geométrica de um paralelepípedo para chegar ao resultado final.

5.

   a) Sabemos que a aresta do cubo mede $a = 8$ cm.
   $A_T = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 8^2 = 384$; 384 cm²
   Há 26 letras no alfabeto.
   $26 \cdot 384 = 9\,984$; 9 984 cm²
   São necessários 9 984 cm² de material, que é um pouco menor que 1 m².

   b) Para 20 estudantes:
   $20 \cdot 9\,984 = 199\,680$; 199 680 cm²
   São necessários aproximadamente 20 m² de material emborrachado.

6.

a) $A = 20 \cdot 12 + 2 \cdot (20 \cdot 16) + 2 \cdot (12 \cdot 16)$

$A = 1\,264$; $1\,264\ cm^2$

b) $A = 40 \cdot 24 + 2 \cdot (40 \cdot 32) + 2 \cdot (24 \cdot 32)$

$A = 960 + 2\,560 + 1\,536$

$A = 5\,056$; $5\,056\ cm^2$

7.

a) $A = 2 \cdot (4 \cdot 46) + 2 \cdot (4 \cdot 22) - 6 \cdot 4$

$A = 368 + 176 - 24 = 520$; $520\ m^2$

Explique aos estudantes que, na parte de tijolos, eles devem descontar a área do portão.

b) Área das partes triangulares:

$A = 2 \cdot \dfrac{22 \cdot 4}{2} = 88$; $88\ m^2$

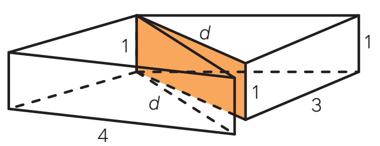
Área das partes retangulares:

$A = 2 \cdot (2 \cdot 22) + 2 \cdot (2 \cdot 46)$

$A = 88 + 184 = 272$; $272\ m^2$

Total da parte de madeira: $88 + 272 = 360$; $360\ m^2$

8.



FJF Vetorização

Área do paralelepípedo:

$A = 2 \cdot (4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 38$; $38\ cm^2$

Calculamos a medida da diagonal d pelo teorema de Pitágoras:

$d^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

$d = \sqrt{25} = 5$; 5 cm

Calculamos, então, a área dos dois prismas resultantes do corte:

$A = 38 + 2 \cdot (5 \cdot 1) = 48$; $48\ cm^2$

O percentual do aumento da área é dado pela razão:

$\dfrac{48 - 38}{38} = \dfrac{10}{38} \cong 0{,}26 = 26\%$

Alternativa **d**.

9. Para solucionar o problema, vamos separá-lo em quatro casos:

1º caso: cubos com nenhuma face pintada.

Há apenas 1 cubo em que não foi pintada nenhuma face, ou seja, as 6 faces estão na cor natural da madeira.

2º caso: cubos com apenas uma face pintada.

Há 6 cubos com apenas uma face pintada, ou seja, são $6 \cdot 5$ faces (30 faces) na cor natural da madeira.

3º caso: cubos com duas faces pintadas.

Há 12 cubos com duas faces pintadas, ou seja, são $12 \cdot 4$ faces (48 faces) na cor natural da madeira.

4º caso: cubos com três faces pintadas.

Há 8 cubos com três faces pintadas, ou seja, são $8 \cdot 3$ faces (24 faces) na cor natural da madeira.

$6 + 30 + 48 + 24 = 108$

Portanto, 108 faces estão na cor natural da madeira.

Alternativa **d**.

10. A base do prisma é um triângulo retângulo de catetos medindo 6 cm e 8 cm respectivamente. Assim, sua hipotenusa H vale:

$H^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

$H = 10$; 10 cm

Sabendo que a altura do prisma é de 12 cm, temos que a área da superfície do prisma é dada por:

$A_T = 2A_B + A_L$

$A_T = 2\left(\dfrac{6 \cdot 8}{2}\right) + 12 \cdot (6 + 8 + 10)$

$A_T = 48 + 288 = 336$; $336\ cm^2$

Alternativa **a**.

Página 19

Para pensar e discutir

1. 4 cubinhos
2. 3 cubinhos
3. 12 cubinhos

   Espera-se que os estudantes percebam que basta multiplicar o número de cubinhos ao longo da profundidade pelo número de cubinhos na largura.
4. 24 cubinhos. Uma explicação é dizer que em cada camada haverá 12 cubinhos e como são 2 camadas, serão necessários 24 cubinhos.

Página 21

Para pensar e discutir

1. O bloco da direita contém duas vezes o bloco da direita. E a razão entre os volumes é 2.
2. O bloco da direita contém quatro vezes o bloco da direita. E a razão entre os volumes é 4.
3. O bloco da direita contém três vezes o bloco da direita. E a razão entre os volumes é 3.

Página 23

Para pensar e discutir

1. Uma maneira é decompor 1728 em fatores primos, obtendo $2^6 \cdot 3^3$. A partir daí, podemos observar que a raiz cúbica é $2^2 \cdot 3 = 12$.
2. Sendo $2a$ a medida da aresta do novo cubo, temos:

   $V = 2a \cdot 2a \cdot 2a = 8a^3$

   Se duplicarmos a aresta de um cubo, seu volume é multiplicado por 8.

Página 24

Análise e contexto

1. Queremos que o volume do cubo, de aresta medindo y, seja $2V$. Então:

   $2V = y^3 \Rightarrow 2x^3 = y^3 \Rightarrow y = x \cdot \sqrt[3]{2}$

   A aresta do novo cubo deve medir $x \cdot \sqrt[3]{2}$ cm.
2. Incentive os estudantes a apresentar as estratégias utilizadas, discutindo-as com os colegas.

Páginas 25-26

Atividades

Aqui são propostas atividades para o cálculo do volume e da capacidade de blocos retangulares e de cubos. Embora, na **atividade 13**, tenhamos sugerido aos estudantes que se reunissem em duplas, entendemos que, nesse estágio, eles podem resolver todas as atividades individualmente, pois aqui eles estão sistematizando, por meio de situações, procedimentos de cálculo de volume introduzidos nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

11.

a) $0 < k < 1$. Comente que k representa a razão de proporcionalidade da semelhança entre os dois blocos.

b) $\dfrac{ka}{a} = k$

c) $\dfrac{2(k^2ab + k^2ac + k^2bc)}{2(ab + ac + bc)} = \dfrac{2k^2(ab + ac + bc)}{2(ab + ac + bc)} = k^2$

d) $\dfrac{ka \cdot kb \cdot kc}{a \cdot b \cdot c} = \dfrac{k^3 \cdot a \cdot b \cdot c}{a \cdot b \cdot c} = k^3$

É importante observar se os estudantes obtêm as respostas para os itens **b**, **c** e **d** fazendo os cálculos correspondentes.

Entretanto, é possível que já saibam, por exemplo, que a razão entre as áreas é o quadrado da razão entre os comprimentos, e que a razão entre os volumes é o cubo da razão entre os comprimentos.

12.

a) $1\ dm \cdot 1\ dm \cdot 1\ dm = 1\ dm^3$

$10\ cm \cdot 10\ cm \cdot 10\ cm = 1\,000\ cm^3$

b) Sim. A capacidade de 1 litro corresponde a um recipiente de $1\ dm^3$ ou $1\,000\ cm^3$.

13. As respostas vão depender das medidas das arestas elaboradas pelos estudantes. Explique a eles que dois cubos, quaisquer que sejam, são semelhantes.

14. Volume externo:

$V = 2{,}438 \cdot 12{,}192 \cdot 2{,}59$

$V \cong 76{,}985$; $76{,}985\ m^3$

Volume interno:

$V = 2{,}352 \cdot 12{,}03 \cdot 2{,}39$

$V \cong 67{,}624$; $67{,}624\ m^3$

Diferença entre os volumes:

$76{,}985 - 67{,}624 = 9{,}361$; $9{,}361\ m^3$

15. $1\ m^3 \rightarrow 1\,000\ L$

$67{,}624 \cdot 1\,000\ L = 67\,624\ L$

16. Volume da escada:

$V = (80 \cdot 50 \cdot 10) + (60 \cdot 50 \cdot 10) +$
$+ (40 \cdot 50 \cdot 10) + (20 \cdot 50 \cdot 10)$

$V = 100\,000$; $100\,000\ cm^3$

$100\,000\ cm^3 = 0{,}1\ m^3$

Não, pois o volume da escada corresponderá a $0{,}1\ m^3$.

17. Convertendo as medidas para dm.

Altura da água:

$2 - 0{,}8 = 1{,}2$; $1{,}2\ dm$

$V = 1{,}2 \cdot 4 \cdot 1 = 4{,}8$; $4{,}8\ dm^3 \rightarrow 4{,}8\ L$

O recipiente tem 4,8 litros de água.

18. Nessa atividade, a ideia é que os estudantes não apenas calculem volume e capacidade em situações diversas mas também pratiquem procedimentos de efetuar medidas (precisarão de fita métrica ou trena). O que se pede nesse momento não é a produção de um relatório ou texto; sugerimos aos estudantes apenas que comparem as medidas obtidas do ambiente que escolheram com as medidas de um ambiente escolhido por outro grupo de estudantes.

Página 27

Para pensar e discutir

1. Espera-se que os estudantes percebam que as pilhas têm a mesma quantidade de folhas e a mesma altura.

2. Nessa pergunta, é fundamental observar se os estudantes compreenderam o conceito de volume, porque, como as três pilhas são formadas pela mesma quantidade de folhas e essas folhas têm as mesmas medidas, então os volumes são iguais, pois ocupam o mesmo espaço.

3. As três áreas são iguais, são as áreas correspondentes às folhas.

Página 28

Para pensar e discutir

1. São necessárias a medida do lado da base e a medida da altura do prisma.

2. Aqui os estudantes deverão informar as fórmulas para o cálculo das áreas de um triângulo equilátero $\left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right)$, de um quadrado ($\ell^2$) e de um hexágono $\left(6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right)$.

Página 29

Para pensar e discutir

1. Divide-se por 1 000 para converter de mm^3 para cm^3.

$\frac{30\,169{,}50}{1\,000} = 30{,}1695 \cong 30$; $30\ cm^3$

2. Como $1\ m^3 = 10^6\ cm^3$, devemos dividir 10^6 por 30 para obtermos a quantidade aproximada de peças, isto é, aproximadamente 33 333 peças.

Comente com os estudantes que esse tipo de cálculo envolvendo peças pequenas é muito frequente em indústrias de parafusos, por exemplo.

Páginas 30-31

Atividades

Aqui há uma dificuldade esperada na resolução das atividades, pois os estudantes acabam relacionando volumes de prismas regulares, nos quais as bases serão polígonos regulares (quadrado, triângulo equilátero e hexágono). Por isso, sugerimos que a maioria dessas atividades, à sua escolha, seja conduzida em duplas, pois a troca de informações facilita a compreensão e a opção pelo melhor procedimento para a resolução.

No final, promova uma discussão ressaltando a importância de, em Geometria, sempre nos apoiarmos em desenhos dos sólidos para compreender melhor o que está sendo pedido.

19.

a) $4\,800\ cm^3 \rightarrow 4\,800\ mL = 4{,}8\ L$

Portanto, caberiam 4,8 litros.

b) O volume duplicaria, pois apenas a altura está sendo alterada.

20. Pelo princípio de Cavalieri, como têm a mesma altura e a mesma área da base, terão o mesmo volume. Aproveite para verificar se os estudantes diferenciam o prisma reto do prisma oblíquo. Você pode pedir-lhes que falem a respeito em uma atividade oral. Eles podem dizer que, no prisma reto, as arestas laterais são ortogonais às arestas das bases. Já no prisma oblíquo, as arestas laterais não são ortogonais às arestas das bases.

21.

a) $A_b = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

$A_b \cong 6 \cdot \frac{4^2 \cdot 1{,}73}{4} \cong 41{,}52$

$V \cong 41{,}52 \cdot 10$

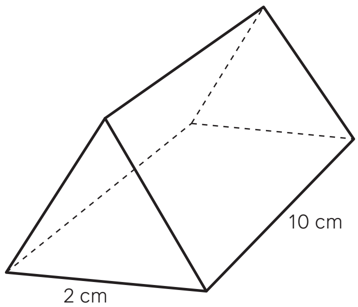
$V \cong 415{,}2$; $415{,}2\ cm^3$

b) O volume duplica, porque é a área da base multiplicada pela altura. Se a área da base não for alterada e a altura for duplicada, o volume é multiplicado por dois.

c) O volume é multiplicado por 4. Como a medida da altura não é alterada (e a medida da aresta é elevada ao quadrado no cálculo da área da base), duplicando-se essa medida, o volume é multiplicado por 4. Nos itens **b** e **c**, os estudantes podem calcular os volumes para chegar às mesmas conclusões. Assim como sugerimos na atividade anterior, peça a eles que relembrem como definir um prisma regular. Deixe-os comentar como compreendem e, depois, retome a formalização: consideramos prisma regular aquele que é reto e tem as faces das bases formadas por polígonos regulares.

22.

a) Resposta possível: Uma empresa produz um chocolate vendido em embalagem com formato de prisma triangular regular, como indicado na figura. Qual é o volume dessa embalagem?



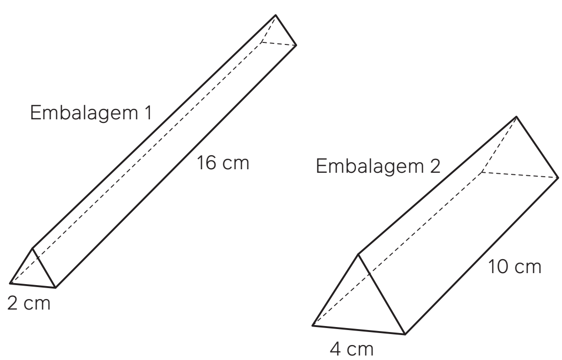
FJF Vetorização

$A_b = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = 2^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cong 1{,}73$

$A_b \cong 1{,}73$

$V \cong 1{,}73 \cdot 10 = 17{,}3$; $17{,}3\ cm^3$

b) Sugestão: A mesma empresa de chocolates fez um teste para saber, entre duas embalagens em formato de prisma triangular regular, qual comporta maior volume de chocolate. Observe as medidas indicadas em cada embalagem.



FJF Vetorização

Qual embalagem tem maior volume?

Embalagem 1:

$V = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot h \cong \frac{2^2 \cdot 1{,}73}{4} \cdot 16$

$V \cong 27{,}68$; $27{,}68\ cm^3$

Embalagem 2:

$V = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot h \cong \frac{4^2 \cdot 1{,}73}{4} \cdot 10$

$V \cong 69{,}2$; $69{,}2\ cm^3$

A embalagem 2 tem maior volume.

c) Neste momento da atividade, você pode passar pelas duplas e perguntar aos estudantes se concordam com os apontamentos das outras duplas; caso discordem, solicite que justifiquem o porquê.

23.

a) A área de um triângulo retângulo é a metade do produto das medidas de seus catetos.

b) $V = \frac{b \cdot c}{2} \cdot h = \frac{15 \cdot 20}{2} \cdot 30$

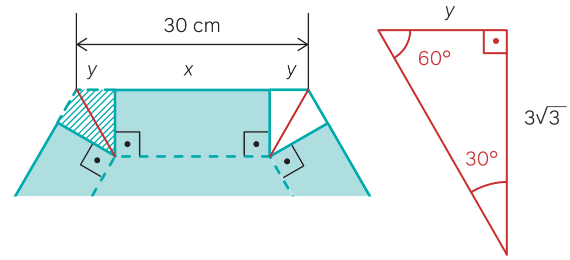
$V = 4\,500$; $4\,500\ cm^3$

24. $A_b = \frac{(1{,}20 + 0{,}60)}{2} \cdot 0{,}50$

$A_b = 0{,}45$

$V = 0{,}45 \cdot 15 = 6{,}75$; $6{,}75\ m^3 \rightarrow 6\,750\ L$

25.



FJF Vetorização

Apresentamos uma resolução; entretanto, os estudantes poderão resolver de outra forma, sem usar razões trigonométricas. Desafie-os a fazer isso.

$\text{tg } 30° = \frac{y}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3\sqrt{3} = y$

$y = 3$

Calculamos, então, a medida da aresta da base da caixa:

$2y + x = 30 \Rightarrow x = 30 - 2 \cdot 3$

$x = 24$

$V = 6 \cdot V = 6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot h \cdot h$

$V = 6 \cdot \frac{24^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$

$V = 7\,776$; $7\,776\ cm^3$

2. Cilindros

Página 32

Para pensar e discutir

1. Espera-se que os estudantes percebam que é necessário conhecer o custo do material utilizado por metro quadrado (por exemplo), por meio do cálculo da área total do recipiente para então poder avaliar o custo, a mão de obra para a produção, a energia gasta, entre outros valores.
2. Espera-se que os estudantes citem: altura do cilindro e área de sua base circular.
3. Com base no que os estudantes conhecem de prismas, espera-se que eles pensem em determinar a área da base do cilindro e a altura. Para a área da base do cilindro, precisam da medida do raio do círculo correspondente.

Página 33

Para pensar e discutir

1. As dimensões do retângulo são: o comprimento da circunferência das bases e a altura do cilindro.
2. A área total da superfície do cilindro pode ser obtida adicionando-se a área do retângulo com as áreas dos dois círculos que são as bases.

Página 34

Para pensar e discutir

1. A área é $6a^2$. Obtém-se multiplicando $2a$ por $3a$ (área do retângulo de lados medindo $2a$ por $3a$). A secção meridiana é obtida seccionando-se o cilindro reto por um plano perpendicular aos planos de suas bases por um de seus diâmetros.
2. Não se alteraria, pois também teríamos a área como sendo $6a^2$ (área do retângulo com lados medindo $2a$ por $3a$).
3. A área total seria $24\pi a^2$ cm² (cilindro de raio da base medindo $3a$ cm e altura medindo a cm).

Página 35

Infográfico clicável – Torre de Pisa

Apresente o infográfico "Torre de Pisa" para os estudantes. Esse recurso didático explora as propriedades geométricas da Torre de Pisa, como área e volume. O infográfico oferece uma análise detalhada da estrutura cilíndrica da torre, proporcionando uma visão prática da aplicação da geometria em uma das construções mais famosas do mundo.

Para explorar

Parte 1

Na **1ª parte**, a ideia é que os estudantes façam uma investigação sobre as formas cilíndricas e verifiquem a existência ou não de embalagens que tenham a forma de um cilíndrico equilátero ou aproximada. Proponha essa pesquisa em duplas. Talvez eles encontrem copos com essa forma.

Parte 2

1. Aqui, os estudantes devem utilizar recursos de um *software* de geometria dinâmica. Nas questões dos itens **2** e **3**, são esperadas respostas como as abaixo.
2. Fixando-se a medida do raio e variando a medida da altura, as medidas das áreas das superfícies laterais serão proporcionais às medidas das alturas.
3. Fixando-se a medida da altura e variando a medida do raio, as medidas das áreas das superfícies laterais não serão proporcionais às medidas dos raios. Serão proporcionais ao quadrado das medidas dos raios.

Páginas 36-37

Atividades

É esperado que os estudantes pensem em um cilindro circular reto a partir de um prisma reto, porém diferenciando que as bases são círculos. Essa é uma forma de internalizar como proceder tanto no cálculo que envolve áreas como no que envolve volumes, que vem logo a seguir. Estimule os estudantes a desenhar cilindros quando estiverem diante do cálculo envolvendo medidas de superfícies. Caso alguns tenham dificuldade de compreensão, solicite que procedam com a planificação de um cilindro (pode ser até em *software*).

26.

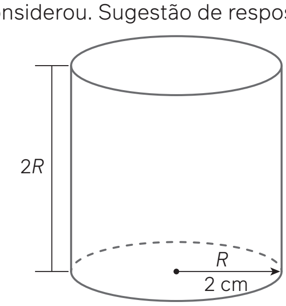
a) $A_L \cong 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 20$

$A_L \cong 628$; 628 cm²

b) $A_T \cong 628 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2$

$A_T \cong 785$; 785 cm²

27. As respostas dependem da medida do raio da base que cada estudante considerou. Sugestão de resposta:



FJF Vetorização

a) $A_b = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$; 4π cm²

b) $A_L = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4$

$A_L = 16\pi$; 16π cm²

c) $A_T = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot \pi \cdot 2^2$

$A_T = 24\pi$; 24π cm²

28. $A_T \cong 2 \cdot 3{,}14 \cdot 30 \cdot 45 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 30^2$

$A_T \cong 8\,478 + 5\,652$

$A_T \cong 14\,130$; 14 130 cm²

29. As respostas dependem da panela medida por cada estudante.

A proposta é que os estudantes investiguem e percebam que as formas das panelas não são exatamente cilíndricas. Entretanto, fazendo aproximações, podem obter as medidas solicitadas. Escolha alguns deles para apresentarem o resultado a toda a turma. Além disso, caso seja possível, instrua-os a fotografar a panela correspondente para mostrar na sala de aula.

a) Diâmetro: 40 cm

b) Altura: 25 cm

c) $A_T \cong 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 \cdot 25 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20^2$

$A_T \cong 5\,652$; 5 652 cm²

30.

a) $\dfrac{2\pi rh}{2\pi r\dfrac{h}{2}} = 2$

A razão é igual a 2.

b) Não. A razão entre as áreas totais será: $\dfrac{2(r+h)}{2r+h}$

31. Área da superfície do bolo: soma das áreas laterais dos dois cilindros são acrescentadas a área de uma base do cilindro menor e a área correspondente à diferença entre a base do cilindro maior e a do cilindro menor.

$A \cong 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 8 + 3{,}14 \cdot 2^2 +$
$+ 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8 \cdot 8 + (3{,}14 \cdot 8^2 - 3{,}14 \cdot 2^2)$

$A \cong 100{,}48 + 12{,}56 + 401{,}92 +$
$+ (200{,}96 - 12{,}56)$

$A \cong 514{,}96 + 188{,}4$

$A \cong 703{,}36$; 703,36 cm²

32. O cano tinha 6 m de comprimento e foi usado 1,5 m, assim, o pedaço desperdiçado tinha 4,5 m.

A bitola (diâmetro) é de 40 mm, ou seja, tem raio de 20 mm = 0,02 m. Então:

$A \cong 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}02 \cdot 4{,}5$

$A \cong 0{,}5652$; 0,5652 m²

33. A área a ser revestida consiste em: área lateral do cilindro interno, área lateral do cilindro externo e as áreas das duas coroas circulares.

$A \cong 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 \cdot 70 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 25 \cdot 70 +$
$+ 2 \cdot 3{,}14 \cdot (25^2 - 15^2)$

$A \cong 6\,594 + 10\,990 + 2\,512$

$A \cong 20\,096$; 20 096 mm²

20 096 mm² = 200,96 cm²

Para pensar e discutir

1. A ideia é que o estudante explique o procedimento: multiplicamos a área da base do prisma pela altura.
2. Intuitivamente, se considerarmos o polígono regular da base do prisma com o número de lados aumentando cada vez mais, nos aproximaremos de um cilindro.
3. É bem provável que alguns estudantes respondam: basta multiplicar a área da base do cilindro por sua altura.

Página 38

Mapa Clicável – Prismas e cilindros na arquitetura

Apresente o mapa interativo "Prismas e cilindros na arquitetura" para os estudantes. Esse recurso didático explora como elementos de geometria espacial, como prismas e cilindros, são aplicados em obras arquitetônicas icônicas ao redor do mundo. O mapa interativo permite aos estudantes que descubram detalhes sobre construções famosas, como o Partenon, o Pentágono, o Masp e a Câmara Municipal de Estocolmo, ressaltando a importância desses sólidos geométricos na arquitetura e no *design*.

Para pensar e discutir

1. A altura é a cm e o raio da base $3a$ cm.
2. Sim, o novo volume seria:

   $V = \pi \cdot (3a)^2 \cdot a = 9\pi a^3$; $9\pi a^3$ cm^3

Página 39

Para pensar e discutir

1. O estudante poderá calcular a massa desse corpo pelo produto da densidade pelo volume.
2. O material mais denso é o que afunda.

   Peça aos estudantes que pesquisem outros materiais e suas densidades. Um trabalho em conjunto com as disciplinas de Química e Física poderia ter o tema "Densidade" como ponto de partida.

Páginas 40-41

Para pensar e discutir

1. Espera-se que os estudantes percebam que a diferença equivale ao mesmo volume da pedra.
2. Segundo o princípio de Arquimedes, o volume do fluido deslocado equivale ao volume imerso do objeto, logo o volume da pedra que se encontra na proveta é igual à diferença entre o volume inicial e o volume final. Portanto, o volume da pedra é igual a 20 ml ou 20 cm^3.

Atividades

Você pode aproveitar a **atividade 40** para solicitar a participação dos professores de Física e de Química para esclarecer a utilização do conceito de densidade em diversas situações.

34. A lata original tem volume:

$V = \pi r^2 \cdot h$

A nova lata tem raio $R = 2r$ e altura H. Então:

$V = \pi R^2 \cdot H$

$V = \pi R^2 \cdot h = \pi(2r)^2 \cdot H$

$\pi r^2 \cdot h = 4\pi r^2 \cdot H$

$H = \dfrac{h}{4}$

A nova lata terá um quarto da medida da altura da lata anterior.

35.

a) $V \cong 3{,}14 \cdot (4{,}5)^2 \cdot 16$

$V \cong 1\,017$; $1\,017$ cm^3

$1\,017$ cm$^3 \rightarrow 1\,017$ mL $= 1{,}017$ L

b) $V \cong 1\,017 - 900 = 117$; 117 mL

36. $\dfrac{\pi(2r)^2 \cdot h}{\pi r^2 \cdot h} = \dfrac{4\pi r^2 \cdot h}{\pi r^2 \cdot h} = 4$

37.

a) $V \cong 3{,}14 \cdot 7^2 \cdot 20 \Rightarrow V \cong 3\,077{,}2$

$d = \dfrac{m}{V} \Rightarrow 13{,}6 = \dfrac{m}{3077{,}2}$

$m \cong 13{,}6 \cdot 3\,077{,}2 = 41\,850$

$41\,850$ g $= 41{,}85$ kg

b) A discussão em dupla possibilita a verificação da resolução da situação proposta, além de possíveis imprecisões no enunciado ou na resolução.

38. Cilindro de altura medindo 3 m:

$V \cong 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$; 36 m^3

$d = \dfrac{m}{V} \Rightarrow 8\,900 \cong \dfrac{m}{36}$

$m \cong 8\,900 \cdot 36 = 320\,400$; $320\,400$ kg

Cilindro de altura medindo 2 m:

$V \cong 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$; 24 m^3

$2\,700 = \dfrac{m}{24}$

$m \cong 2\,700 \cdot 24 = 64\,800$; $64\,800$ kg

A massa total do sólido, então, é aproximadamente:

$320\,400 + 64\,800 = 385\,200$;

$385\,200$ kg

39. Antes de mergulhar o objeto no cilindro, a altura da água era de h cm e, após o mergulho do objeto, a altura da água subiu 10 cm, ou seja, passou a ser $h + 10$ cm.

O volume de água no cilindro, antes de o objeto ser mergulhado, era:

$V_1 = \pi 10^2 \cdot h$

$V_1 = 100\pi h$; $100\pi h$ cm^3

O volume dentro do cilindro, após o objeto ser mergulhado, passou a ser:

$V_2 = \pi 10^2 \cdot (h + 10) = 100\pi \cdot (h + 10)$

$V_2 = 100\pi h + 1\,000\pi$;

$(100\pi h + 1\,000\pi)$ cm^3

A diferença entre esse volume e o volume inicial é o volume do objeto:

$(100\pi h + 1\,000\pi) - 100\pi h = 1\,000\pi$;

$1\,000\pi$ cm^3

Alternativa **a**.

40. Para acharmos o custo, temos de determinar o volume do cilindro e depois o volume com o revestimento.

$V = \pi r^2 \cdot h \cong 3{,}1 \cdot 1^2 \cdot 4$

$V \cong 12{,}4$; $12{,}4$ m^3

Após o cilindro ser envolvido por uma camada de 20 cm de concreto, o raio do novo cilindro passou a medir 1,2 m.

$V \cong 3{,}1 \cdot 1{,}2^2 \cdot 4$

$V \cong 17{,}856$; $17{,}856$ m^3

Assim, o volume da manilha é a diferença entre esses volumes:

$17{,}856 - 12{,}4 = 5{,}456$; $5{,}456$ m^3

Custo:

$5{,}456 \cdot 10 = 54{,}56$; 54,56 reais

Alternativa **d**.

41. Temos um cilindro tal que:

$r = 1{,}5$; 1,5 m

$h = 2 \cdot 1{,}5 = 3$; 3 m

$V \cong 3{,}14 \cdot 1{,}5^2 \cdot 3$

$V \cong 21{,}195$; $21{,}195$ m^3

$21{,}195 \cdot 1\,000 = 21\,195$; $21\,195$ L

Alternativa **d**.

42. Volume inicial do líquido no cilindro:

$V_i = \pi \cdot 4^2 \cdot h = 16\pi h$

Como o nível da água no cilindro subiu 3 cm, significa que a altura passou a ser $h + 3$. Então, o volume final do líquido no cilindro passou a ser:

$V_f = \pi \cdot 4^2 \cdot (h + 3)$

$V_f = 16\,\pi h + 48\pi$

O volume do objeto é a diferença entre o volume final e o volume inicial do líquido:

$V_{obj} = V_f - V_i$

$V_{obj} = 16\pi h + 48\pi - 16\pi h = 48\pi$

Considerando $\pi \cong 3{,}14$, obtemos:

$V_{obj} \cong 48 \cdot 3{,}14$

$V_{obj} \cong 151$; 151 cm^3

Alternativa **e**.

Para explorar

No início o capítulo, os estudantes observaram ilustrações que mostram casas cujas condições de habitação não são, muitas vezes, adequadas, principalmente em relação a saneamento, acesso à eletricidade e à internet etc. Queremos nesse momento que os estudantes se sensibilizem e apresentem ideias que possam melhorar a realidade das comunidades que estão ao redor deles. Incentive-os a usar os conhecimentos matemáticos que têm para resolver problemas reais.

Páginas 42-49

Atividades finais

Finalizamos o capítulo propondo outras atividades para verificação de aprendizagem. Cada vez mais, devemos incentivar os estudantes a desenvolver a autonomia. Assim, nas **atividades 1** a **5**, eles poderão não apenas responder às questões, mas também propor outras que possam ser utilizadas para resumir o que foi estudado. Quanto às demais atividades, peça que as façam individualmente e incentive aqueles com mais dúvidas a conversar com os colegas.

1.

a) As faces são retângulos.

b) No cubo, todas as faces são quadrados.
Podemos dizer que todo cubo é um bloco retangular, mas nem todo bloco retangular é um cubo.

2.

a) A expressão é $6a^2$, sendo a a medida da aresta do cubo.

b) A expressão é a^3, em que a é a medida da aresta do cubo.

3.

a) A expressão é abc, sendo a, b e c as medidas das arestas.

b) A expressão é $2ab + 2bc + 2ac$, em que a, b e c são medidas das arestas.

4.

a) São 6 faces em forma de retângulo.

b) A expressão é $A_L + 2A_b$, em que A_L representa a área lateral e A_b representa a área de uma de suas bases.

5.

a) A expressão que permite calcular o volume do cilindro.

b) Quando a altura é igual ao diâmetro da base (ou quando a seção meridiana é um quadrado). A área total de um cilindro equilátero de raio da base medindo r é:

$2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$

Questões de vestibulares e Enem

6. A base do prisma planificado é um triângulo equilátero. Como a altura do triângulo é $2\sqrt{3}$ obtemos:

$h = a\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2 = \dfrac{a}{2}$

$a = 4$; 4 cm

Área da base do prisma:

$A_b = \dfrac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$ cm^2

A aresta da base mede 4 cm e a altura do prisma mede $4\sqrt{3}$ cm.

O volume do prisma:

$V = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 48$; 48 cm^3

7. Volume da água na posição inicial:

$V = 6 \cdot 6 \cdot 10 = 360$; 360 cm^3

Volume da água na nova posição:

$V = 15 \cdot 6 \cdot h = 90h$

Como esses volumes são iguais, temos:

$90h = 360 \Rightarrow h = \dfrac{360}{90} = 4$; 4 cm

Alternativa **a**.

8. Volume máximo da piscina:

$V = 15 \cdot 6 \cdot 2 = 180$; 180 m^3

70% de 180: $\dfrac{70}{100} \cdot 180 = 126$; 126 m^3

126 m^3 → 126 000 L

Alternativa **a**.

9. Considerando que cada pote deve ter o mesmo volume de geleia, devemos dividir a quantidade total de geleia pelo número de potes:

$V = \dfrac{6}{25} = 0{,}24$; 24 L

24 L = 240 mL → 240 cm^3

Os potes têm o formato de paralelepípedo com base quadrada e serão enchidos até a altura h, que corresponde aos 240 cm^3 de geleia. Então:

$V = 5 \cdot 5 \cdot h$

$240 = 25 \cdot h$

$h = 9{,}6$; 9,6 cm

Alternativa **c**.

10. Esse sólido de revolução gera um cilindro grande com um cilindro pequeno vazio no meio.

Aplicando o teorema de Pitágoras, encontramos a altura do cilindro:

$5^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 16$

$h = 4$

Calculamos, então, o volume do sólido pela diferença dos volumes do cilindro maior e do menor:

$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 4 - \pi \cdot 2^2 \cdot 4$

$V = 100\pi - 16\pi = 84\pi$

Alternativa **d**.

11. Primeiro, calculamos o volume de suco na garrafa térmica:

$V \cong 3 \cdot 4^2 \cdot 13$

$V \cong 624$; 624 cm^3

O volume do copo:

$V \cong 3 \cdot 2^2 \cdot 7 = 84$; 84 cm^3

O volume de suco restante na garrafa é a diferença entre esses volumes.

$624 - 84 = 540$; 540 cm^3

Alternativa **c**.

12. A caixa terá a forma de um paralelepípedo, com dimensões:

altura: 5 cm;

largura: $30 - 5 - 5 = 20$;

comprimento: $40 - 5 - 5 = 30$.

Portanto, o volume da caixa é:

$V = 5 \cdot 20 \cdot 30$

$V = 3\,000$; 3 000 cm^3

$\dfrac{3\,000}{1\,000} = 3$; 3 L

Alternativa **a**.

13. Área total do cilindro:

$A_T = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$

$A_T = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 8\pi + 8\pi$

$A_T = 16\pi$; 16π m^2

Alternativa **c**.

14. $V = \pi \cdot 80^2 \cdot h = 6\,400\pi \cdot h$

Temos que 1 L equivale a 1 000 cm^3. Para cada 4 km, o volume do tanque diminui 1 litro. Dado que a velocidade do carro é de 50 km/h, em 1 hora ele percorre 50 km e consome:

$\dfrac{50}{4} = 12{,}5$; 12,5 L → 12 500 cm^3

Medida da altura h correspondente a 12 500 cm^3:

$12\,500 = 6\,400\pi \cdot h$

$h = \dfrac{12\,500}{6\,400 \cdot 3{,}14} = 0{,}62$; 0,62 cm/h

Alternativa **e**.

15. Volume do tanque:

$V \cong 3 \cdot 0{,}3^2 \cdot 1{,}5$

$V \cong 0{,}405$; 0,405 m^3

0,405 m^3 = 405 dm^3 → 405 L

Como o tanque está dividido em 5 partes:

$\frac{405}{5} = 81$; 81 L

Durante a viagem, o marcador desceu 3 partes, então foram gastos:

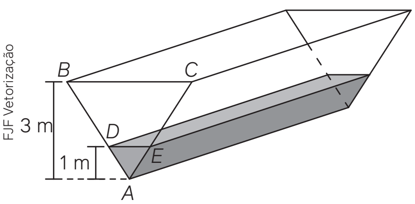
$3 \cdot 81 = 243$; 243 L

Como o caminhão faz 3 km/L, ele percorreu:

$3 \cdot 243 = 729$; 729 km

Alternativa **d**.

16.



FJF Vetorização

Sendo x e y as medidas, em metros, dos lados dos triângulos equiláteros ADE e ABC, respectivamente, que são as bases dos prismas, temos:

$\frac{x\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ m

$\frac{y\sqrt{3}}{2} = 3 \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$ m

Calculamos, então, as áreas dos triângulos ADE e ABC:

$$A_{ADE} = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$A_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m²

$$A_{ABC} = \frac{y^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A_{ABC} = \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$A_{ABC} = 3\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}$ m²

Calculamos, a seguir, o volume do tanque V_T, o volume da parte com água (V_A) e o volume da parte restante do tanque (V_R), lembrando que a medida da altura do tanque é $h = 6$ m:

$V_T = A_{ABC} \cdot h$

$V_T = 3\sqrt{3} \cdot 6$

$V_T = 18\sqrt{3}$; $18\sqrt{3}$ m³

$V_A = A_{ADE} \cdot h$

$V_A = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 6$

$V_A = 2\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$ m³

$V_R = V_T - V_A$

$V_R = 18\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

$V_R = 16\sqrt{3}$; $16\sqrt{3}$ m³

Agora falta encher $16\sqrt{3}$ m³ do tanque. O tempo necessário para isso é:

$\frac{16\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$ 5,3; 5,3 min = 5 min 20 s

Assim, $t = 20$.

Alternativa **b**.

17. A superfície lateral do cilindro de altura h e raio R forma um retângulo de perímetro P igual a 40 cm. Então:

$P = 2 \cdot (h + 2\pi R)$

$40 = 2 \cdot (h + 2\pi R)$

$20 = h + 2\pi R$

$h = 20 - 2\pi R$

Alternativa **a**.

18. O volume da peça (V_p) pode ser calculado pela diferença entre os volumes da peça maior (V_M) e da peça menor (V_m).

$$V_p \cong \left(6 \cdot \frac{L_M^2 \cdot 1{,}7}{4} \cdot h\right) + \left(6 \cdot \frac{L_m^2 \cdot 1{,}7}{4} \cdot h\right)$$

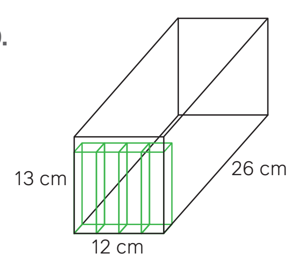
$$V_p \cong \left(6 \cdot \frac{8^2 \cdot 1{,}7}{4} \cdot 35\right) + \left(6 \cdot \frac{6^2 \cdot 1{,}7}{4} \cdot 35\right)$$

$V_p \cong 5\,712 - 3\,213$

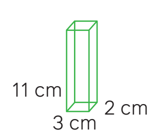
$V_p \cong 2\,499$; 2 499 cm³

Alternativa **d**.

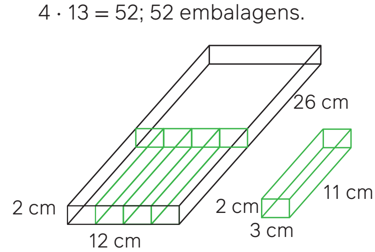
19.



Reinaldo Vignati

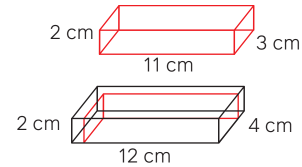


Podemos colocar em pé, ou seja, na posição 3 cm × 11 cm × 2 cm, $4 \cdot 13 = 52$; 52 embalagens.



Reinaldo Vignati

Assim, na caixa, resta um espaço de 12 cm × 2 cm × 26 cm. Nele, podemos colocar as embalagens na posição 3 cm × 2 cm × 11 cm, $4 \cdot 2 = 8$; 8 embalagens.



Reinaldo Vignati

Dimensões que resta na caixa:

12 cm × 2 cm × 4 cm

Dimensões da embalagem:

11 cm × 2 cm × 3 cm

Dentro da caixa cabem:

$52 + 8 + 1 = 61$; 61 embalagens

Alternativa **e**.

20. Seja α a aresta do cubo inicial. Seu volume é igual a α^3. Adicionando 1 metro a cada uma das arestas, o volume desse novo cubo é igual a $(\alpha + 1)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$. Dado que a diferença entre esses dois volumes é de 271 m³, temos:

$\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1 - \alpha^3 = 271$

$3\alpha^2 + 3\alpha - 270 = 0$

$\alpha^2 + \alpha - 90 = 0$

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90)}}{2 \cdot 1}$$

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2}$$

$$\alpha = \frac{-1 \pm 19}{2}$$

$\alpha = -10$ ou $\alpha = 9$

Como α tem que ser positivo, temos que α mede 9 m.

Alternativa **c**.

21. A caixa, de formato cúbico com arestas medindo 30 cm, possui 4 faces laterais cujo material custa R\$ 5,00 por metro quadrado e uma base cujo custo é de R\$ 6,00 por metro quadrado. Assim, sua área lateral A_L é de:

$A_L = 4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}36$; 0,36 m²

Como o cubo tem 4 faces laterais, temos que o custo de fabricação dela é de:

$0{,}36 \cdot 5 = 1{,}80$; R\$ 1,80

A base dessa caixa possui área de $0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$; 0,09 m². O custo para fabricação dessa base é de $0{,}09 \cdot 6 = 0{,}54$; R\$ 0,54.

O custo para produzir essa caixa é de $1{,}80 + 0{,}54 = 2{,}34$; R\$ 2,34.

Alternativa **e**.

22. Dado que o raio r deste cilindro é de 6 cm e que a seção meridional forma um retângulo de área A_R igual a 96 cm², cuja base é o diâmetro do cilindro e cuja altura é a altura h do cilindro. Então, temos que:

$A_R = 2r \cdot h \Rightarrow 96 = 2 \cdot 6 \cdot h \Rightarrow h = \frac{96}{12}$

$h = 8$; 8 cm

Alternativa **d**.

23. O volume da pedra corresponde ao volume do cilindro de raio 8 cm e altura igual a:

23,5 – 20 = 3,5; 3,5 cm

Assim, o volume V deste cilindro é de:

$V = \pi \cdot 8^2 \cdot 3,5$

$V = 224\pi$; 224π cm^3

Alternativa **b**.

24. Dado $\pi \cong 3$, temos que o volume do modelo 2 é aproximadamente:

$V \cong 3 \cdot 5^2 \cdot 11$

$V \cong 825$; 825 cm^3

Assim, o volume do modelo 1, que é de 1 728 cm^3, é aproximadamente o dobro do volume do modelo 2.

Alternativa **d**.

25. Um cilindro equilátero é um cilindro cuja altura é igual a duas vezes a medida do seu raio r, isto é, $h = 2r$. Assim, dado que seu volume é de 686 π cm^3, temos:

$V = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2r^3 \cdot \pi$

$686\pi = 2r^3 \cdot \pi \Rightarrow 343 = r^3$

$r = \sqrt[3]{343} \Rightarrow r = 7$; 7 cm

Assim, o cilindro possui raio 7 cm e altura 14 cm. Portanto, a sua área total de superfície é de:

$A_T = A_L + 2A_b$

$A_T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$

$A_T = 2 \cdot \pi \cdot 7 \cdot 14 + 2 \cdot \pi \cdot 7^2$

$A_T = 196\pi + 98\pi$

$A_T = 294\pi$; 294π cm^2

Alternativa **c**.

26. Um cilindro equilátero é um cilindro cuja altura é igual a duas vezes a medida do seu raio r, isto é, $h = 2r$. Assim, dado que sua área lateral é de 12,4 m^2, temos:

$12,4 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$12,4 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 2r$

Dado $\pi \cong 3,1$:

$12,4 \cong 2 \cdot 3,1 \cdot r \cdot 2r$

$r^2 \cong \frac{12,4}{12,4} = 1$; 1 m

As portas distam 2 cm das bases desse cilindro, a altura dessa porta retangular é de aproximadamente:

2 – 0,04 = 1,96; 1,96 m

Como a porta mantém uma distância de 2 cm da extremidade desse cilindro, a base da porta mede aproximadamente:

100 – 2 = 98; 98 cm = 0,98 m

Alternativa **c**.

27. Volume do vaso:

$V = 40 \cdot 35 \cdot 60$

$V = 84\,000$; 84 000 cm^3

Metade do vaso deve ser preenchido com água.

$\frac{84\,000}{2} = 42\,000$; 42 000 cm^3

Com as pedrinhas, a altura da água deve chegar a 10 cm do topo.

Altura da água:

60 – 10 = 50; 50 cm

Sendo assim, vamos calcular o volume total da água com as pedrinhas no vaso:

$V = 40 \cdot 35 \cdot 50$

$V = 70\,000$; 70 000 cm^3

E desses 70 000 cm^3, temos que 42 000 cm^3 correspondem à água; então, a pessoa comprou 28 000 cm^3 de pedrinhas.

O volume de cada pedrinha é 100 cm^3.

$\frac{28\,000}{100} = 280$; 280 pedrinhas

Alternativa **b**.

28. $V_C = \pi \cdot 2^2 \cdot 3,3 = 13,2\pi$

$V_{canos} = 4 \cdot \pi \cdot 0,05^2 \cdot 20 = 0,2\pi$

Considerando h a altura da água nos reservatórios após as colunas de água se igualarem, temos que a soma dos volumes de água nos reservatórios central e auxiliares é igual ao volume central V_C menos o volume de água nos canos V_{canos}:

$4\pi \cdot 1,5^2h + \pi \cdot 2^2h = 13,2\pi - 0,2\pi$

$9h\pi + 4h\pi = 13\pi$

$13h = 13 \Rightarrow h = 1$

O fluxo de água cessa quando as colunas de água atingem 1 m de altura.

Alternativa **d**.

29. O volume de madeira pode ser definido como o volume externo (total) subtraído do volume interno (em que não há madeira), restando apenas o volume da madeira (V_m). Como há uma espessura de 0,5 cm da madeira, de cada dimensão da caixa haverá uma distância de 0,5 entre o externo e o interno. Portanto, as dimensões internas são:

20 – 0,5 – 0,5 = 19; 19 cm

8 – 0,5 – 0,5 = 7; 7 cm

$V_m = V_{ext} - V_{int}$

$V_m = 20 \cdot 8 \cdot 20 - 19 \cdot 19 \cdot 7$

$V_m = 3\,200 - 2\,527$

$V_m = 673$; 673 cm^3

A caixa tem 673 cm^3 de madeira.

Alternativa **c**.

30. $h = 2$ m; $B = 6$ m; $C = 20$ m

Como a cada metro de altura h, a largura do topo tem 0,5 m a mais que a largura do fundo (b), então tendo 2 m de altura, a largura do fundo é $b = 6$ m $- 2 \cdot 0,5$ m $= 5$ m.

Calculamos a área da base e, depois, o volume do silo:

$A_b = \frac{(6 + 5) \cdot 2}{2} = 11$; 11 m^2

$V = 11 \cdot 20 = 220$; 220 m^2

1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3, então 220 m^3 correspondem a $\frac{220}{2} = 110$; 110 toneladas.

Alternativa **a**.

31. Para descobrir qual dos projetos é o que possui menor área de revestimento, devemos calcular a área lateral da piscina e a área do fundo. Assim, vamos calcular a área de cada projeto, considerando que eles têm as seguintes medidas de profundidade, largura e comprimento:

Projeto I: 1,8 m × 2,0 m × 25,0 m

A área do revestimento é:

$1,8 \cdot 2 \cdot 2 + 1,8 \cdot 25 \cdot 2 + 2 \cdot 25 =$

$= 7,2 + 90 + 50 = 147,2$; 147,2 m^2

Projeto II: 2,0 m × 5,0 m × 9,0 m

$2 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot 9 \cdot 2 + 9 \cdot 5 =$

$= 20 + 36 + 45 = 101$; 101 m^2

Projeto III: 1,0 m × 6,0 m × 15,0 m

$1 \cdot 6 \cdot 2 + 1 \cdot 15 \cdot 2 + 6 \cdot 15 =$

$= 12 + 30 + 90 = 132$; 132 m^2

Projeto IV: 1,5 m × 4,0 m × 15,0 m

$1,5 \cdot 4 \cdot 2 + 1,5 \cdot 15 \cdot 2 + 4 \cdot 15 =$

$= 12 + 45 + 60 = 117$; 117 m^2

Projeto V: 2,5 m × 3,0 m × 12,0 m

$2,5 \cdot 3 \cdot 2 + 2,5 \cdot 12 \cdot 2 + 3 \cdot 12 =$

$= 15 + 60 + 36 = 111$; 111 m^2

Assim, o projeto que possui a menor área de revestimento é o projeto II.

Alternativa **b**.

32. Para calcular o volume de concreto que será utilizado, basta calcularmos a área da laje e multiplicarmos pela espessura de 5 cm, ou 0,05 m.

$A = 8 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 5$

$A = 64 + 21 + 15$

$A = 100$; 100 cm²

Então:

$V = 100 \cdot 0{,}05$

$V = 5$; 5 m³

O mestre de obras precisará de 5 m³ de concreto. A melhor opção, então, é pedir o caminhão com capacidade máxima de 5 m³.

Alternativa **c**.

33. Sejam V_A e V_B os volumes dos cilindros A e B, respectivamente, em que o cilindro A tem altura h_A e raio R_A e o cilindro B tem altura h_B e raio R_B. Sabendo que a altura h_B corresponde a 25% da altura h_A e que os volumes são iguais, temos:

$V_A = V_B$

$\pi \cdot R_A^2 \cdot h_A = \pi \cdot R_B^2 \cdot h_B$

$\pi \cdot R_A^2 \cdot h_A = \pi \cdot {R_B}^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot h_A$

$R_A^2 = \frac{1}{4} \cdot R_B^2$

$\sqrt{R_A^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot R_B^2}$

$R_A = \frac{1}{2} \cdot R_B$

$R_B = 2R_A$

Alternativa **b**.

34. Inicialmente, vamos calcular o volume do copo cilíndrico de diâmetro 6 cm e altura igual a 15 cm:

$V_{copo} = \pi \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot 15$

$V_{copo} = \pi \cdot (3)^2 \cdot 15$

$V_{copo} = 135\pi$; 135π cm³

Utilizando a aproximação $\pi \cong 3$.

$V_{copo} \cong 135 \cdot 3 = 405$; 405 cm³

Agora, vamos calcular o volume das 2 rodelas cilíndricas de limão dentro do copo, que possuem 4 cm de diâmetro e 0,5 cm de espessura:

$V_{limão} = \pi \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^2 \cdot 0{,}5$

$V_{limão} = \pi \cdot 4 \cdot 0{,}5$

$V_{limão} = 2\pi$

$V_{limão} \cong 2 \cdot 3 = 6$; 6 cm³

O copo tem 2 rodelas de limão. Volume ocupado pelo limão:

$V \cong 2 \cdot 6 = 12$; 12 cm³

Finalmente, vamos calcular o volume dos 3 cubos de gelo, cujas arestas a medem 2 cm:

$V_{cubo} = 2^3$

$V_{cubo} = 8$; 8 cm³

Temos 3 cubos no copo. Volume ocupado pelo gelo:

$3 \cdot 8 = 24$; 24 cm³

Assim, o volume máximo de refrigerante que pode ser colocado em um copo com 2 rodelas de limão e 3 cubos de gelo é de:

$405 - 12 - 24 = 369$; 369 cm³

Alternativa **c**.

35. No reservatório cilíndrico de raio igual a 5 metros, a água está até a altura de 1,5 metros. Assim, o volume de água dentro dele é de:

$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 1{,}5$

$V = 37{,}5\pi$

Utilizando a aproximação $\pi \cong 3$ temos:

$V \cong 37{,}5 \cdot 3 = 112{,}5$; 112,5 m³

Considerando que o vilarejo possui 75 habitantes e que ainda restam 10 dias no mês, temos que o consumo de água diário até o fim do mês deve ser de:

$\frac{112{,}5}{10 \cdot 75} = 0{,}15$; 0,15 m³

$0{,}15 \cdot 1\,000 = 150$; 150 L

Assim, o consumo diário desse vilarejo deve ser de 150 L, e o racionamento feito será de aproximadamente:

$200 - 150 = 50$; 50 L

Alternativa **a**.

36. Analisando a tabela, temos que a altura da água sobe 0,3 m por hora dentro da cisterna. Assim, sejam h a altura inicial da cisterna, V_i o volume inicial e V_f o volume após 1 hora:

$V_f - V_i = 3(h + 0{,}3) - 3h$

$V_f - V_i = 0{,}9$; 0,9 m³

Alternativa **c**.

37. O volume do rolo de papel higiênico é a diferença do volume do cilindro V_e definido pela parte com papel do volume V_i do cilindro de papelão onde o papel é enrolado. Logo, sendo:

$h = 10$, $r_e = \frac{12}{2} = 6$ e $r_i = \frac{4}{2} = 2$

$V = V_e - V_i$

$V = \pi \cdot r_e^2 \cdot h - \pi \cdot r_i^2 \cdot h$

$V = \pi \cdot h \cdot \left(r_e^2 - r_i^2\right)$

$V = \pi \cdot 10 \cdot (6^2 - 2^2)$

$V = \pi \cdot 10 \cdot 32$

$V = 320\pi$; 320π cm³

Alternativa **c**.

38. Volume da caneca A, cujo formato é um prisma reto regular hexagonal, com altura $h = 10$ cm e lado $L = 4$ cm:

$V_A = 6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$

$V_A = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot 10$

$V_A = 60 \cdot 4\sqrt{3}$

Utilizando a aproximação $\sqrt{3} \cong 1{,}7$, temos:

$V_A \cong 60 \cdot 4 \cdot 1{,}7$

$V_A \cong 408$; 408 cm³

Calculando o volume da caneca B, que possui o formato de um cilindro circular reto de raio $r = \frac{6}{2} = 3$ e altura $h = 10$ cm:

$V_B = \pi \cdot 3^2 \cdot 10$

$V_B = 90\pi$

Utilizando a aproximação $\pi \cong 3{,}1$, temos:

$V_B \cong 90 \cdot 3{,}1$

$V_B \cong 279$; 279 cm³

Portanto, a caneca com maior volume é a caneca A, com capacidade igual a 408 cm³.

Alternativa **c**.

CAPÍTULO 2

Pirâmides, cones e esferas

Objetivos

- Compreender os procedimentos para o cálculo de medidas de superfícies de pirâmides, cones e esferas.
- Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de medidas de superfícies.
- Compreender o procedimento para o cálculo de volume de pirâmides, cones e esferas, com base no princípio de Cavalieri.
- Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de volume.
- Compreender o procedimento para o cálculo de medidas de superfícies de cones.
- Compreender as razões de semelhança entre os sólidos geométricos para obter áreas e volumes de tronco de pirâmide e tronco de cone.
- Compreender a relação matemática para o cálculo da medida da superfície de uma esfera com base em seu raio.
- Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de medida de superfície de esfera.

Justificativa

O cálculo de áreas totais e volumes de pirâmides, cones e esferas permite aos estudantes resolver problemas que envolvem esses sólidos geométricos nos mais diversos contextos, sejam eles da vida cotidiana ou de outras áreas do conhecimento.

Sugerimos que, ao iniciar o trabalho com o cálculo de áreas de superfícies de pirâmides, seja feita uma retomada das relações métricas existentes entre elementos das pirâmides (aresta da base, aresta lateral, apótema da pirâmide, altura da pirâmide, raio da circunferência inscrita à base e raio da circunferência circunscrita à base). Essa retomada pode ser feita com base no último capítulo do volume anterior desta coleção.

Competências gerais da BNCC

Competência geral 1: Na seção **Análise e contexto** da página 53, os estudantes fazem a leitura de um texto sobre a construção da grande pirâmide de Quéops, refletem sobre o legado das construções das grandes pirâmides egípcias e pensam sobre os conhecimentos matemáticos necessários caso fossem construídas hoje. Têm, assim, a oportunidade de valorizar os conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar a realidade.

Competências gerais 2, 4 e 7: Na atividade 20 da página 61, os estudantes, em duplas, determinam a expressão algébrica que modela a área total de um sólido formado a partir de um cubo e de pirâmides quadrangulares cujas bases estão contidas nas faces do cubo. Para isso, recorrem à abordagem própria das Ciências que envolve a imaginação, a reflexão e a criatividade, mobilizando a **competência 2**. Como trabalham em duplas, utilizam tanto a linguagem verbal como a matemática, incluindo a algébrica, para partilhar informações, experiências e ideias. Desenvolvem, assim, a **competência 4**. Por meio dessa atividade, os estudantes desenvolvem também a **competência 7**, uma vez que utilizam a argumentação embasada em fundamentos geométricos para formular, negociar e defender ideias.

Competência geral 3: Os estudantes têm a oportunidade de valorizar manifestações artísticas e culturais ao analisarem o infográfico das páginas 76 e 77, em que os prédios dos museus são usados como um percurso para que observem como a forma geométrica está presente na arquitetura.

Competência geral 6: Essa competência é mobilizada no trabalho com o infográfico das páginas 76 e 77.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 2

EM13MAT201: Essa habilidade é mobilizada quando os estudantes discutem, na seção **Para pensar e discutir** da página 62, como calcular a quantidade de tinta necessária para pintar a catedral de Maringá. Esse problema é retomado na atividade resolvida 5 da página 64.

Competência específica 3

EM13MAT309: Ao longo todo o capítulo, os estudantes resolvem e elaboram problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e volumes de cilindros, cones e esferas em diversos contextos, por exemplo, nas atividades de 16 a 19 da página 61. Esses conhecimentos são utilizados para a resolução de problemas reais, como a discussão da quantidade de tinta necessária para pintar uma catedral de forma cônica, na seção **Para pensar e discutir** da página 62. As atividades 25 e 26 da página 67 também envolvem situações reais.

Nas atividades 6 e 7 da página 57, os estudantes elaboram problemas sobre pirâmides.

Competência específica 5

EM13MAT504: Os estudantes exploram e investigam diversos processos de obtenção de volumes de cones e de pirâmides. Na página 69, por exemplo, explora-se o princípio de Cavalieri para se efetuar o cálculo do volume de um cone. Por meio das atividades propostas na seção **Para pensar e discutir** da página 70, os estudantes fazem comparações entre as formas de obtenção dos volumes do cone e da pirâmide. A relação para o cálculo do volume da esfera em função de seu raio é obtida, nas páginas 78 e 79, por meio de questionamentos e discussões que levam os estudantes a estabelecer relações matemáticas e justificar suas formas de pensar.

Conexões com outras áreas do conhecimento

A seção **Análise e contexto** da página 80 pode ser explorada com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Pode haver uma integração com a **Física** para explorar o texto e as questões relativas a ele.

O Infográfico das páginas 76 e 77 pode ser explorado com a área de **Linguagens e suas Tecnologias**, por meio do trabalho conjunto com **Arte**.

Temas Contemporâneos Transversais

O TCT **Educação Ambiental** é discutido na página 69 ao abordar a utilização de copos descartáveis que não poluam o ambiente.

Resoluções e comentários

Página 51

Abertura

1. A Terra, segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), não é uma esfera perfeita, mas sim um esferoide oblato. Isso significa que a Terra tem uma forma ligeiramente achatada nos polos e um pouco mais alargada na Linha do Equador em razão de sua rotação.
2. Exemplo de resposta: No cotidiano, nem todas as formas geométricas teóricas podem existir. Algumas delas podem ser puramente conceituais ou matemáticas.

   Aproveite este momento para discutir com os estudantes o fato de que a Matemática e a Geometria, em especial, são modelos perfeitos que representam a realidade, mas que não existem na realidade. Discuta, inclusive, sobre a geometria plana. Será que existem figuras realmente planas, uma vez que vivemos em um mundo que é tridimensional? Este momento de fechamento do estudo da Geometria é adequado para discutir com os estudantes o fato de que as figuras geométricas são uma representação perfeita da realidade, mas elas não existem na realidade.

   Pode ser feita uma parceria com os professores de Biologia e Geografia para fazer a discussão sobre as atitudes que devem ser tomadas para salvar o planeta Terra.

1. Pirâmides

Página 52

Para pensar e discutir

1. Exemplo de resposta: São necessárias as medidas do lado do polígono da base e da altura de cada triângulo (apótema) da pirâmide que compõe a face lateral.
2. São necessárias as medidas do lado do polígono da base.
3. Uma pirâmide regular é aquela que possui uma base poligonal regular, e a projeção ortogonal do vértice *V* sobre o plano da base coincide com o centro da base.

Página 53

Análise e Contexto

1. Exemplo de resposta: Fazendo um apanhado histórico, a construção das pirâmides egípcias tinha o objetivo de servir como túmulos para abrigar os corpos dos faraós e simbolizavam a conexão do governante com alguma divindade.
2.
   a) Exemplo de resposta: Conhecimentos matemáticos para lidar com medidas e projeções, como Geometria Plana e Espacial; Matemática Financeira para cálculo de gastos e investimentos da obra; Trigonometria para calcular relações entre ângulos e arestas e Álgebra para resolver equações que possam surgir no decorrer da construção.

   b) Ao final dessa atividade, você pode propor uma discussão coletiva sobre os itens listados.

Página 54

Para pensar e discutir

1. Exemplo de resposta: Calcular a área de um triângulo da face lateral e multiplicar pelo número de triângulos que correspondem às faces laterais. São necessárias as medidas do lado do polígono da base e da altura de um triângulo que compõem a face lateral.
2. Representa o apótema da pirâmide.
3. Adicionando a área da superfície lateral com a área da superfície da base da pirâmide.

Páginas 56-57

Para pensar e discutir

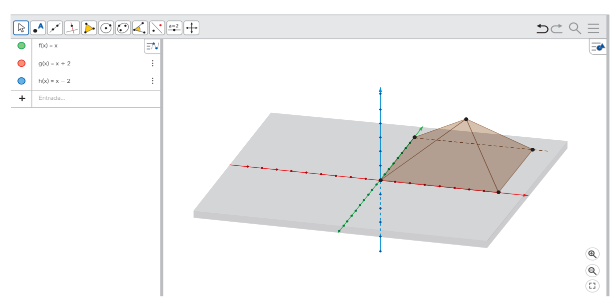
1. Porque a superfície lateral da pirâmide é composta de 4 triângulos e a área de cada triângulo é expressa pelo valor dado.
2. A área da folha A4, cujas dimensões são 29,7 cm e 21 cm, é 623,7 cm² ou 62 370 mm².

   94 336 − 62 370 = 31 966; 31 966 mm²

   Logo, a área total da superfície é maior.

Atividades

1.
   a) Para esta atividade, você pode sugerir aos estudantes construírem a pirâmide solicitada em *softwares* de geometria dinâmica.



Reinaldo Vignati

   b) Sendo a altura da pirâmide (h) 6 cm e a aresta da base (ℓ) 16 cm, temos:

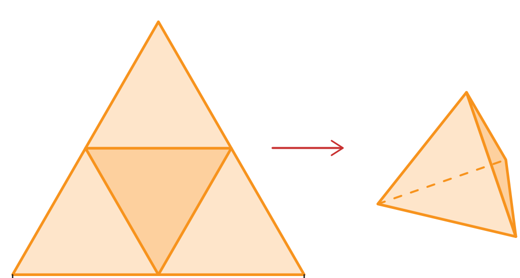
$$a_p^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow a_p^2 = 6^2 + \left(\frac{16}{2}\right)^2$$

$$a_p^2 = 36 + 64 \Rightarrow a_p^2 = 100 \Rightarrow a_p = \sqrt{100} = 10;\ 10\text{ cm}$$

   c) $A_L = 4 \cdot \dfrac{16 \cdot 10}{2} \Rightarrow A_L = \dfrac{640}{2} \Rightarrow A_L = 320;\ 320\text{ cm}^2$

   d) $A_T = A_L + A_B \Rightarrow A_T = 320 + 256 = 576;\ 576\text{ cm}^2$

2.
   a)



FJF Vetorização

$30^2 = h^2 + 15^2$

$h^2 = 900 - 225$

$h = \sqrt{675} \cong 25{,}98$

$A_T = \dfrac{30 \cdot 25{,}98}{2} \cong 390$; 390 cm²

b) $H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{15\sqrt{6}}{3} \cong 12{,}25$; 12,25 cm

3.

a) A razão entre as arestas será dada por $\frac{2}{4} = 0{,}5$.

b) A razão entre as alturas será dada por $\frac{3}{6} = 0{,}5$.

c) Os perímetros das bases de P_1 e P_2 são, respectivamente, 8 cm e 16 cm.

$\frac{8}{16} = 0{,}5$

d) Calculando o apótema de P_1:

$a_{P_1}^2 = 1^2 + 3^2 \Rightarrow a_{P_1} = \sqrt{10}$

Calculando o apótema de P_2:

$a_{P_2}^2 = 2^2 + 6^2 \Rightarrow a_{P_2} = 2\sqrt{10}$

A medida dos apótemas de P_1 e P_2 são, respectivamente:

$\sqrt{10}$ cm e $2\sqrt{10}$ cm.

$\dfrac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = 0{,}5$

e) As áreas das bases de P_1 e P_2 são, respectivamente, 4 cm² e 16 cm².

$\frac{4}{16} = 0{,}25$

f) As áreas laterais de P_1 e P_2 são, respectivamente, $4\sqrt{10}$ cm² e $16\sqrt{10}$ cm²

$\dfrac{4\sqrt{10}}{16\sqrt{10}} = 0{,}25$

g) As áreas totais de P_1 e P_2 são, respectivamente,

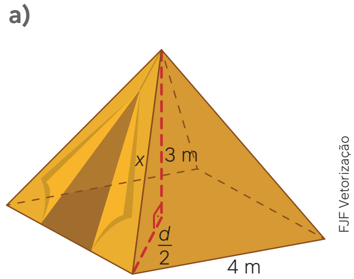
$4\sqrt{10} + 4$ cm² e $16\sqrt{10} + 16$ cm²

$\dfrac{4\sqrt{10} + 4}{16\sqrt{10} + 16} = 0{,}25$

4. A medida do lado da base e a medida do apótema da pirâmide (corresponde à altura do triângulo da face).

5.

a)



Seja d a diagonal da base quadrangular e x a aresta lateral.

$\dfrac{d}{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d = 2\sqrt{2}$

$x^2 = (2\sqrt{2})^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 8 + 9$

$x = \sqrt{17} \cong 4{,}12$

Canos da base: $4 \cdot 4 = 16$; 16 m

Canos das laterais:

$4 \cdot 4{,}12 = 16{,}48$; 16,48 m

Medida total:

$16 + 16{,}48 = 32{,}48$; 32,48 m

b) Calculando o apótema, tem-se:

$a_P^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow a_P = \sqrt{13}$

$a_P \cong 3{,}6$; 3,6 m

$A_L \cong 4 \cdot \dfrac{4 \cdot 3{,}6}{2} \Rightarrow A_L \cong 28{,}8$

Nas **atividades 6** e **7**, você pode selecionar alguns estudantes para exporem suas elaborações com a sala. Pode solicitar a um estudante que resolva as atividades e que os demais confiram se as etapas de resolução estão corretas.

6. Exemplo de resposta: Uma empresa está projetando uma pirâmide de vidro para ser a entrada de um centro comercial. A base da pirâmide será um hexágono regular de 6 metros de lado, e a altura da face lateral (apótema) da pirâmide será de 9 metros. Determine a área de vidro necessária para cobrir as faces laterais e a base da pirâmide.

7. As respostas dependerão do problema elaborado. Considerando o exemplo de problema fornecido na **atividade 6**, temos:

Área Lateral:

$A_L = 6 \cdot \dfrac{6 \cdot 9}{2} = 6 \cdot 27$

$A_L = 162$; 162 m²

Área da base hexagonal:

$A_B = \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 54\sqrt{3}$

$A_B \cong 93{,}53$; 93,53 m²

$A_T \cong 162 + 93{,}53$

$A_T \cong 255{,}53$; 255,53 m²

8. Como as faces de um tetraedro regular são triângulos equiláteros, segue que o custo pedido é dado por

$A_L = 3 \cdot \dfrac{20^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot 100\sqrt{3}$

$A_L \cong 300 \cdot 1{,}70 = 510$; 510 cm²

Calculando a área da base, temos:

$A_B = \dfrac{20^2\sqrt{3}}{4} \cong 100 \cdot 1{,}70$

$A_B \cong 170$; 170 cm²

Custo aproximado:

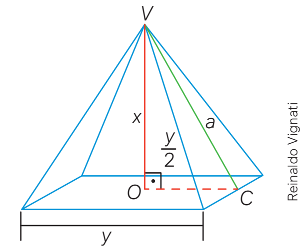
$170 \cdot 50 + 510 \cdot 30 = 23\,800$;

R$ 23.800,00

Ou seja, aproximadamente R$ 24.000,00.

Alternativa **a**.

9. Traçando a pirâmide, temos que:



$a_P^2 = x^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 \Rightarrow a_P^2 = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$

$a_P = \sqrt{x^2 + \dfrac{y^2}{4}}$

A área lateral será:

$A_L = 4 \cdot \dfrac{y \cdot \sqrt{x^2 + \dfrac{y^2}{4}}}{2}$

$A_L = 2y\sqrt{x^2 + \dfrac{y^2}{4}}$

Alternativa **a**.

10. $a_P^2 = 1^2 + 2^2 \Rightarrow a_P = \sqrt{5}$

Cálculo das áreas em m²:

$A_B = 4$

$A_L = 4 \cdot \dfrac{2 \cdot \sqrt{5}}{2} \Rightarrow A_L = 4\sqrt{5}$

$A_T = 4 + 4\sqrt{5} \Rightarrow A_T = 4 + \sqrt{80}$

Alternativa **e**.

11. A aresta da base da pirâmide tem a mesma medida do raio da circunferência circunscrita

Cálculo do apótema em m:

$a_P^2 = 30^2 + \left(\dfrac{10\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$a_P^2 = 900 + \dfrac{300}{4}$

$a_P^2 = 975 \Rightarrow a_P = 5\sqrt{39}$

Cálculo da área em m²:

$A_L = 6 \cdot \dfrac{10 \cdot 5\sqrt{39}}{2} \Rightarrow A_L = 150\sqrt{39}$

Alternativa **b**.

Página 58

Para pensar e discutir

1. Sim. Considerando que as bases sejam os triângulos *DEF* (pirâmide 1) e *ABC* (pirâmide 2), temos dois triângulos que representam as bases congruentes do prisma original. A altura do prisma representa a altura das duas pirâmides.

2. Sim, com base no princípio de Cavalieri, que já foi estudado no capítulo anterior, como as pirâmides têm a mesma altura e bases com a mesma área, os volumes são iguais.

3. Sim. Podemos considerar como bases dessas duas pirâmides o triângulo AEF. Assim, a altura da pirâmide 1 seria a distância do vértice D ao plano AEF, enquanto a altura da pirâmide 3 seria a distância do vértice C ao plano AEF. Como o plano AEF está situado à mesma distância de C e de D, as duas pirâmides têm a mesma altura. Como as pirâmides têm a mesma altura e a mesma área da base, elas também têm o mesmo volume se considerarmos o princípio de Cavalieri.

Infográfico clicável – A pirâmide mais famosa do Louvre

Apresente o infográfico *A pirâmide mais famosa do Louvre* para os estudantes. Esse recurso didático explora as características geométricas da icônica pirâmide de vidro do Louvre, abordando conceitos como apótema, área lateral e base.

Página 59

Podcast – Pirâmides do Egito

Apresente o *podcast Pirâmides do Egito* para os estudantes. Esse recurso didático explora os segredos matemáticos das pirâmides egípcias, discutindo como a geometria e a proporção áurea foram utilizadas na construção dessas maravilhas arquitetônicas. O *podcast* oferece uma análise sobre como os antigos egípcios aplicavam conceitos matemáticos avançados para garantir a estabilidade e a estética das pirâmides.

Para pensar e discutir

1. As respostas irão depender das medidas obtidas.
2. Considerando que a altura da pirâmide de Quéops mede 138 metros, o volume da pirâmide é de aproximadamente 2 433 400 m³. Assim, houve uma redução de 158 700 m³. Dessa forma, houve uma redução no volume de:

$$\frac{158\,700}{2\,433\,400} \cong 0{,}06 \Rightarrow V \cong 6\%$$

Páginas 60-61

Atividades

12.

a) O volume do cubo é dado por $V = 2^3 = 8$; 8 m³

$1\text{ m}^3 \rightarrow 1\,000$ L

$8 \cdot 1\,000 = 8\,000$; 8 000 L

b) Precisamos calcular a diferença da capacidade do cubo e do octaedro. Calculando-se o volume do octaedro, temos:

$V = 2 \cdot V_{\text{pirâmide}}$

$V = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot A_b h\right)$

$V = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot 1$

$V = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 1 \cong 1{,}33; \cong 1{,}33\text{ m}^3$

$1\text{ m}^3 \rightarrow 1\,000$ L

Capacidade aproximada:

$8\,000 - 1\,330 \cdot 1\,000 = 6\,670$; 6 670 L

13.

a) Seja V_1 volume da pirâmide de base A e altura h, tem-se:

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$

Duplicando-se a altura, o volume:

$V_2 = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot 2h$

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3} \cdot A_b \cdot 2h}{\frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h} = 2$

Duplicando-se a altura, o volume também irá duplicar.

b) $32 = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot 8 \Rightarrow \frac{32}{8} = \frac{A_b}{3}$

$A_b = 12$; 12 cm²

14. O volume de cada pirâmide triangular é $\frac{V}{3}$, já que as alturas serão iguais à altura da pirâmide original; e a superfície da base é igual a $\frac{1}{3}$ da superfície da base da pirâmide original.

15.

a) Volume do cubo:

$V_c = 60^3$

$V_c = 216\,000$; 216 000 cm³

Volume da pirâmide:

$V_P = \frac{1}{3} \cdot 3\,600 \cdot 60$

$V_P = 72\,000$; 72 000 cm³

Razão entre os volumes:

$\frac{72\,000}{216\,000} = \frac{1}{3}$

b) Capacidade do recipiente:

$216 - 72 = 144$; 144 L

16.

a) Volume do cubo:

$V_c = 60^3 = 216\,000$; 216 000 cm³

Volume da pirâmide:

$V_P = \frac{1}{3} \cdot 3\,600 \cdot 30 = 36\,000$; 36 000 cm³

Razão entre os volumes:

$\frac{216\,000}{36\,000} = 6$

O volume do cubo será 6 vezes o volume da pirâmide.

b) Capacidade do recipiente:

$216 - 32 = 180$; 180 L

17.

a) Razão entre as alturas de P_A e P_B:

$\frac{8}{5} = 1{,}6$

b) Em P_A, para calcular a área da lateral, precisamos dos apótemas da base e da face lateral.

Seja, a_{base} o apótema da base e a_{lateral} o apótema da face lateral:

$a_{\text{base}} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$a^2_{\text{lateral}} = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 8^2$

$a_{\text{lateral}} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$

A área da base será:

$A_B = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_B = 24\sqrt{3}$

A área lateral será:

$A_L = 6 \cdot \frac{4 \cdot 2\sqrt{19}}{2} = 24\sqrt{19}$

$A_{TA} = 24\sqrt{3} + 24\sqrt{19}$

$A_{TA} = 24\left(\sqrt{3} + \sqrt{19}\right)$

Para P_B, primeiro vamos calcular o apótema da base:

$a_{\text{base}} = \frac{2{,}5\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{4}\sqrt{3}$

Agora, vamos calcular o apótema da face lateral:

$a^2_{\text{lateral}} = \left(\frac{5}{4}\sqrt{3}\right)^2 + 5^2$

$a_{\text{lateral}} = \sqrt{\frac{475}{16}} = \frac{5\sqrt{19}}{4}$

Área da base:

$A_B = 6 \cdot \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{8}$

Área lateral:

$A_L = 6 \cdot \frac{2{,}5 \cdot \frac{5\sqrt{19}}{4}}{2} = \frac{75\sqrt{19}}{8}$

$A_{TB} = \frac{75\sqrt{3}}{8} + \frac{75\sqrt{19}}{8}$

$A_{TB} = \frac{75}{8}\left(\sqrt{3} + \sqrt{19}\right)$

A razão entre as áreas totais será:

$\frac{A_{TA}}{A_{TB}} = \frac{24\left(\sqrt{3} + \sqrt{19}\right)}{\frac{75}{8}\left(\sqrt{3} + \sqrt{19}\right)}$

$\frac{A_{TA}}{A_{TB}} = 2{,}56 = 1{,}6^2$

c) O volume da pirâmide maior:

$V_{PA} = A_B \cdot h \cdot \frac{1}{3} =$

$= 24\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} = 64\sqrt{3}$

O volume da pirâmide menor:

$V_{PB} = A_B \cdot h \cdot \frac{1}{3} =$

$= \frac{75\sqrt{3}}{8} \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{125\sqrt{3}}{8}$

A razão entre volumes totais:

$\dfrac{V_{PA}}{V_{PB}} = \dfrac{64\sqrt{3}}{\dfrac{125\sqrt{3}}{8}} =$

$= \dfrac{64\sqrt{3}}{1} \cdot \dfrac{8}{125\sqrt{3}} =$

$= \dfrac{512}{125} = 4{,}096 = 1{,}6^3$

18.

a) $V = \dfrac{1}{3} A_B \cdot h$

$A_B = 6 \cdot \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_B = 24\sqrt{3}$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}$

$V = 144$; $144\ cm^3$

b) Duplicando-se a aresta da base:

$A_B = 6 \cdot \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_B = 96\sqrt{3}$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 96\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \Rightarrow V = 576$

Razão entre os volumes:

$\dfrac{576}{144} = 4$

Logo, o volume quadruplica.

19.

a) Calculando a área lateral do prisma hexagonal:

$A_L = 6 \cdot 6 \cdot 4 = 144$

Para calcular a área lateral da pirâmide, precisamos encontrar os apótemas da base e da face lateral.

$a_p = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_p = 3\sqrt{3}$

Altura da face:

$h^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 6^2 \Rightarrow h = 3\sqrt{7}$

Área lateral da pirâmide:

$A_L = 6 \cdot \dfrac{6 \cdot 3\sqrt{7}}{2} = 54\sqrt{7}$

Área total:

$54\sqrt{7} + 144 \cong 287$; $287\ m^2$

b) O volume do silo será a soma do volume do prisma hexagonal e o volume da pirâmide.

$V_{prisma} = A_b \cdot h$

$V_{prisma} = 6 \cdot \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4$

$V_{prisma} = 216\sqrt{3}$

$V_{pirâmide} = \dfrac{1}{3} A_b \cdot h$

$V_{prisma} = \dfrac{1}{3} \cdot \left(6 \cdot \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 6$

$V_{prisma} = 108\sqrt{3}$

Volume total:

$216\sqrt{3} + 108\sqrt{3} \cong 561$; $561\ m^3$

20.

a) Cálculo das áreas das faces do cubo:

O cubo possui 6 faces quadradas e cada uma de suas faces quadradas possui área de x^2.

$A_{cubo} = 6x^2$

Cálculo das áreas das faces laterais das pirâmides:

Cada pirâmide possui 4 faces laterais, que são triângulos equiláteros. A área de um triângulo equilátero de lado x é dada por:

$A_{triângulo} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} x^2$

A área total das faces laterais de uma pirâmide é:

$A_{faces\ laterais} = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} x^2 = x^2\sqrt{3}$

Dado que são 6 faces:

$6x^2\sqrt{3}$

Cálculo da área total do sólido:

O sólido geométrico é composto do cubo e das faces laterais das pirâmides. No entanto, devemos lembrar que a área total do cubo não conta com as áreas cobertas pelas bases das pirâmides, mas essas bases também não adicionam nova área visível.

Então, a área total visível é a soma das áreas das faces do cubo e das áreas das faces laterais das pirâmides.

Portanto, a área da superfície total do sólido é a soma das áreas das faces do cubo e das áreas das faces laterais das pirâmides:

$A_{Total} = A_{faces\ laterais} + A_{cubo}$

$A_{Total} = 6x^2\sqrt{3} + 6x^2 =$

$= 6x^2\left(\sqrt{3} + 1\right)$

b) Volume do sólido:

$V_{sólido} = V_{cubo} + V_{pirâmides}$

Volume do cubo: $V_{cubo} = x^3$

Volume de uma pirâmide quadrangular:

$V_{pirâmide} = \dfrac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot \text{altura}$

Área da base:

$A_{base} = \left(\dfrac{x\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{x\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{x^2}{2}$

Altura (h) da pirâmide:

$\left(\dfrac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

$h = \sqrt{\dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{x}{2}$

Volume de uma pirâmide:

$V_{pirâmide} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^2}{2} \cdot \dfrac{x}{2} = \dfrac{x^3}{12}$

Como há 6 pirâmides, o volume total é:

$V_{pirâmides} = 6 \cdot \dfrac{x^3}{12} = \dfrac{x^3}{2}$

Volume do sólido:

$V_{sólido} = x^3 + \dfrac{x^3}{2} = \dfrac{3}{2}x^3$

2. Cones

Página 62

Para pensar e discutir

1. É necessário conhecer o raio de sua base e a altura do cone (a distância da base até o vértice do cone).

Para pensar e discutir

1. A área total de sua superfície.
2. É esperado que os estudantes percebam que com base na área total da superfície, pode-se obter a quantidade de tinta necessária.

Página 63

Para pensar e discutir

1. Representa a geratriz do cone.
2. Representa o comprimento da circunferência da base do cone.
3. Espera-se que os estudantes percebam que 360° estão para α assim como a área do círculo (πr^2) está para a área do setor circular.

Página 65

Para pensar e discutir

1. A medida da altura será 5 cm e a medida do raio da base será 8 cm.
2. $A_T = A_L + A_b \Rightarrow A_T = \pi r g + \pi r^2$

$A_T = 3{,}14 \cdot 8 \cdot 9{,}43 + 3{,}14 \cdot 8^2$

$A_T \cong 437{,}84$; $437{,}84\ cm^2$

Ou seja, maior que a área total do cone da atividade resolvida 6.

Páginas 66-68

Atividades

21.

a) Admitindo que o raio da base será a metade do lado do triângulo, tem-se que a área lateral do cone será dada por:

$A_L = \pi \cdot \dfrac{\ell}{2} \cdot \ell \Rightarrow A_L = \dfrac{\pi\ell^2}{2}$

b) Área da base:

$A_b = \pi \cdot \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow A_b = \dfrac{\pi\ell^2}{4}$

Área total:

$A_T = \dfrac{\pi\ell^2}{2} + \dfrac{\pi\ell^2}{4} \Rightarrow A_T = \dfrac{3\pi\ell^2}{4}$

c) Para $\ell = 10$ cm, a área total do cone será $A_T = \dfrac{3\pi 10^2}{4}$

$A_T = 75\pi$; 75π cm

22.

a) Chamemos os cones de C_1 e C_2. A área da base de C_1 será $A_{C_1} = \pi r^2$ e a área da base de C_2 será $A_{C_2} = \pi(2r)^2 \Rightarrow A_{C_2} = 4\pi r^2$

Dessa forma, duplicando-se o raio, a área quadriplica.

b) Geratriz de C_1:

$g_1^2 = h^2 + r^2$

Geratriz de C_2:

$g_2^2 = h^2 + (2r)^2$

$g_2^2 = h^2 + 4r^2$

$g_2 = \sqrt{h^2 + 4r^2}$

Há um aumento na medida da geratriz, o qual não é diretamente proporcional ao aumento da medida do raio.

23.

a) Área lateral do cone:

$A_L = A_{\text{setor circular}}$

$\dfrac{A_L}{\pi \cdot 10^2} = \dfrac{252°}{360°} \Rightarrow \dfrac{A_L}{100\pi} = \dfrac{7}{10}$

$A_L = 70\pi$; 70π cm²

A geratriz do cone corresponde ao raio do setor circular, ou seja, $g = R = 10$.

$A_L = \pi r g \Rightarrow 70\pi = \pi \cdot r \cdot 10$

$10r = 70 \Rightarrow r = 7$; 7 cm

Altura do cone:

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 10^2 = 7^2 + h^2$

$h^2 = 100 - 49$

$h^2 = 51 \Rightarrow h = \sqrt{51}$

b) Já calculamos anteriormente que a área lateral do cone é igual a 70π cm².

c) $A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = \pi \cdot 7^2$

$A_b = 49\pi$

$A_T = A_L + A_b$

$A_T = 49\pi + 70\pi \Rightarrow A_T = 119\pi$; 119π cm²

24.

a) Vamos calcular o comprimento do arco do setor circular:

$C_s = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 12 \cdot 120°}{360°}$

$C_s = \dfrac{2\,880\pi}{360} \Rightarrow C_s = 8\pi$; 8π cm

Raio da base do cone:

$2\pi r = 8\pi \Rightarrow r = 4$; 4 cm

Como já temos o raio da base e o raio do setor circular que também é a geratriz do cone, podemos encontrar sua altura:

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 12^2 = 4^2 + h^2$

$h^2 = 144 - 16 \Rightarrow h = 8\sqrt{2}$; $8\sqrt{2}$ cm

b) $A_b = \pi \cdot 4^2 \Rightarrow A_b = 16\pi$; 16π cm²

25. Inicialmente, vamos encontrar o raio da base a partir da sua área:

$28{,}26 = \pi r^2 \Rightarrow 28{,}26 = 3{,}14 r^2$

$r^2 = \dfrac{28{,}26}{3{,}14} \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$; 3 m

Para encontrar a altura da luminária, utilizamos o teorema de Pitágoras:

$5^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 25 - 9$

$h = \sqrt{16} \Rightarrow h = 4$; 4 cm

Alternativa **b**.

26. Para calcular o gasto máximo com 100 cisternas, precisamos encontrar a área total de cada cisterna. Primeiramente, temos que a área lateral do cone é dada por

$A_L = \pi \cdot r \cdot g \Rightarrow A_L \cong 15{,}7$; 15,7 m²

Área da base do cilindro:

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b \cong 12{,}56$; 12,56 m²

Área lateral do cilindro:

$A_{Lc} = 2\pi r \cdot h = 25{,}12$; 25,22 m²

$15{,}7 + 12{,}56 + 25{,}22 = 53{,}38$; 53,38 m

$53{,}38 \cdot 100 = 5\,338$; 5 338 m².

Valor gasto:

$40 \cdot 5\,338 = 213\,520$; R$ 213.520,00

Alternativa **e**.

27.

a) A ilustração nos mostra que a geratriz do cone é igual ao raio da circunferência maior e que seu comprimento é igual ao dobro da circunferência menor.

$2\pi g = 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6 \Rightarrow g = 12$ cm

b) Área total do cone:

$A_T = A_L + A_b$

$A_L = \pi \cdot 6 \cdot 12 = 72\pi$

$A_b = \pi \cdot 6^2 \Rightarrow A_b = 36\pi$

$72\pi + 36\pi = 108\pi$; 108π cm².

28. Calculando a área do setor circular que determina a área lateral do cone.

$A_L = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 120°}{360°} = 12\pi$; 12π cm²

Área da base:

$A_b = \pi \cdot 2^2 \Rightarrow A_b = 4\pi$; 4π cm²

Área total:

$12\pi + 4\pi = 16\pi$; 16π cm²

29. Primeiramente, devemos encontrar o raio da circunferência para determinar sua área da base. Como a área lateral do cone é 12π:

$\pi \cdot r \cdot g = 12\pi \Rightarrow r \cdot g = 12$ (Equação A)

$\dfrac{2\pi r}{g} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow g = 4r$ (Equação B)

Substituindo B em A, temos

$r \cdot 4r = 12 \Rightarrow r^2 = 3 \Rightarrow r = \sqrt{3}$

Área da base:

$A_b = \pi \cdot (\sqrt{3})^2 \Rightarrow A_b = 3\pi$

Alternativa **c**.

30. O hexágono regular tem a distância do vértice ao seu centro igual ao lado. O raio da base do cone é igual a esse lado, visto que a base é circunscrita ao hexágono. Aplicando o Teorema de Pitágoras, encontra-se a geratriz:

$g^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow g = \sqrt{20}$

Área lateral do cone:

$A_L = \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{20}$

$A_L = 4\pi\sqrt{5}$; $4\pi\sqrt{5}$ cm²

Alternativa **b**.

31. A área do setor circular será:

$A_s = \dfrac{\pi \cdot 10^2 \cdot 216°}{360°} \Rightarrow A_L = 60\pi$

A área do setor circular é igual à área lateral do cone.

$60\pi = \pi \cdot r \cdot 10 \Rightarrow r = 6$

Pelo Teorema de Pitágoras, podemos encontrar a altura:

$10^2 = 6^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 64$

$h = 8$; 8 cm

Alternativa **d**.

32. A circunferência da base do cone é igual ao comprimento do arco do setor circular. O comprimento do arco do setor é dado por

$2\pi r = \dfrac{2\pi R\alpha}{360} \Rightarrow 2\pi \cdot 5 = \dfrac{2\pi \cdot 20 \cdot \alpha}{360}$

$10\pi = \dfrac{40\pi\alpha}{360} \Rightarrow \dfrac{10\pi}{40\pi} = \dfrac{\alpha}{360}$

$\alpha = \dfrac{360}{4} \Rightarrow \alpha = 90$; 90°

Alternativa **e**.

Página 70

Para pensar e discutir

1. Aumenta da esquerda para a direita.
2. Diminuem, pois o número de lados aumenta e o perímetro do polígono da base está limitado ao comprimento da circunferência que o circunscreve.
3. As arestas laterais têm medidas cada vez mais próximas à medida do apótema da pirâmide, pois o comprimento dos lados da base diminui, diminuindo também a distância entre as arestas laterais e o apótema da pirâmide.
4. As medidas dos apótemas das bases (raio da circunferência inscrita) ficam cada vez mais próximas da medida do raio da base da circunferência circunscrita à base de cada pirâmide, pois o perímetro

do polígono da base fica cada vez mais próximo do comprimento da circunferência, aproximando também o comprimento dos apótemas da base do comprimento dos raios da circunferência.

Para pensar e discutir

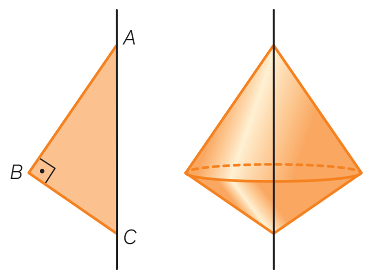
1. Sim, pois as medidas do raio e da altura seriam, respectivamente, 4 cm e 3 cm. Então:

   $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 \Rightarrow \; V = \frac{48\pi}{3}$

   $V = 16\pi$

   O novo volume será igual a 16π cm³.

2. Obtém-se dois cones com a mesma base, como ilustra a figura a seguir.



FJF Vetorização

Páginas 71-72

Atividades

33.

a) O sólido será um cone com uma região oca no interior, também em forma de cone.

b) O volume pode ser calculado considerando a diferença entre o volume do cone, cujo raio da base mede 8 cm, e o cone oco, cujo raio da base mede 4 cm. Os dois cones têm altura igual a 6 cm.

Raio do cone maior: *R*.

Raio do cone menor: *r*.

$g^2 = R^2 + h^2 \Rightarrow 10^2 = R^2 + 6^2$

$R = 8$

Então: $r = 8 - 4 \Rightarrow r = 4$

Calculamos os volumes do cone maior e menor:

$V_{maior} = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 6$

$V_{maior} = \frac{384\pi}{3} = 128\pi$

$V_{menor} = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 6$

$V_{menor} = \frac{93\pi}{3} = 32\pi$

$V = 128\pi - 32\pi = 96\pi$; 96π cm³

34. Vamos considerar dois cones semelhantes em que a razão de semelhança é 2,5. Se o raio da base do cone menor é *x*, então o raio da base do cone maior é 2,5*x*. De forma semelhante, se a altura do cone menor é *h*, então a altura do cone maior é 2,5*h*.

$V_{menor} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ e $V_{maior} = \frac{1}{3}\pi x^2 h$

Para o cone maior, cujo raio é 2,5*x* e cuja altura é 2,5*h*, o volume será

$V_{maior} = \frac{1}{3}\pi \cdot (2{,}5x)^2 \cdot (2{,}5h)$

$V_{maior} = \frac{1}{3}\pi \cdot 6{,}25x^2 \cdot (2{,}5h)$

$V_{maior} = \frac{1}{3}\pi \cdot 15{,}625x^2 h$

Razão entre o volume do cone maior e do cone:

$$\frac{\frac{1}{3}\pi \cdot 15{,}625x^2 h}{\frac{1}{3}\pi x^2 h} = 15{,}625 = 2{,}5^3$$

35. Professor, esta questão pode ser utilizada para discutir a diferença de volume e capacidade. Oriente os estudantes na elaboração de questões, indicando possíveis dificuldades na elaboração e resolução dos problemas propostos.

36.

a) $g^2 = 10^2 + (2{,}5)^2$

$g \cong 10{,}3$; 10,3 cm

$A_L = 3{,}14 \cdot (2{,}5) \cdot (10{,}3)$

$A_L \cong 81$; 81 cm²

b) $V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (2{,}5)^2 \cdot 10$

$V \cong 65{,}4$; 65,4 mL

37.

a) $V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 8$

$V \cong 19$; 19 cm³ → 0,019 L

$\frac{1}{0{,}019} \cong 53$; 53 doces

b) $100\,000 \cdot 0{,}019 = 1\,900$; 1 900 L

38. A figura formada é um cilindro, excluindo dois cones do seu interior, um em cada base. Nessa figura, o raio mede 3 cm. A altura do cilindro mede 15 cm, pois é gerada da base maior do trapézio.

Altura de cada cone:

$\frac{15 - 7}{2} = 4$

Volume do cilindro:

$V_{cilindro} = \pi \cdot 3^2 \cdot 15 \Rightarrow V = 135\pi$

Volume do cone:

$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 \Rightarrow V = 12\pi$

Volume da peça:

$135\pi - 12\pi = 111\pi$, ou seja, 111π cm³

39. O ângulo de 45° indica os triângulos retângulos isósceles mostrados na figura.

$$\frac{\pi \cdot (x+1)^2 \cdot (x+1)}{3} - \frac{\pi x^2 \cdot x}{3} = 19$$

$(x+1)^3 - x^3 = 10$

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 - 19 = 0$

$3x(x^2 + x - 6) = 0$

$3x(x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$

Pelo contexto, x = 2; 2 m.

40. A rotação do triângulo retângulo *ABC* em torno do cateto *AB* é um cone cujo raio da base é *r* e cuja altura é 6 cm.

$128\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 6 \Rightarrow r^2 = 64$

$r = 8$; 8 cm

Geratriz:

$g^2 = r^2 + h^2$

$g^2 = 8^2 + 6^2$

$g^2 = 64 + 36$

$g^2 = 10 \Rightarrow g = 10$; 10 cm

Área total:

$A_T = \pi \cdot r \cdot g + \pi r^2$

$A_T = \pi \cdot 8 \cdot 10 + \pi \cdot 8^2$

$A_T = 80\pi + 64\pi$

$A_T = 144\pi$; 144π cm²

Alternativa **a**.

Página 73

Para pensar e discutir

1. Para o cálculo do volume de um tronco de cone (ou tronco de pirâmide), basta fazer a diferença entre os volumes do cone maior (ou pirâmide maior) e do cone menor (ou pirâmide menor). Para a determinação do volume do cone menor (ou pirâmide menor), utiliza-se a proporção entre os volumes e o cubo da razão de semelhança apresentada anteriormente.

2. O cálculo da área lateral de um tronco de cone (ou tronco de pirâmide) é análogo ao cálculo de volume. Então, basta fazer a diferença entre as áreas laterais do cone maior (ou pirâmide maior) e do cone menor (ou pirâmide menor).

Página 75

Atividades

41.

a) Como as pirâmides de altura *H* e de altura *h* são semelhantes, temos uma razão de semelhança *k* entre as medidas de comprimento. Calculamos a razão usando as medidas dos lados da base $L = 10$ e $\ell = 4$.

$k = \frac{\ell}{L} \Rightarrow k = \frac{4}{10} \Rightarrow k = 0{,}4$

Usando essa relação, obtemos:

$\frac{h}{H} = 0{,}4 \Rightarrow h = 0{,}4H$

$h = 0{,}4(h + 6) \Rightarrow 0{,}6h = 2{,}4$
Assim, teremos $h = 4$ cm e, consequentemente, $H = 10$ cm.

b) Volume da pirâmide de altura H:

$V_H = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 10$

$V_H \cong 333$; 333 cm³

Volume da pirâmide de altura h:

$V_h = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 4$

$V_h \cong 21$; 21 cm³

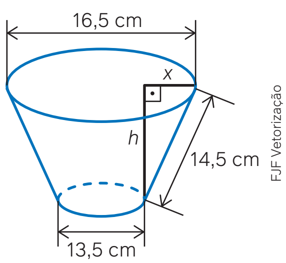
Assim, os volumes medem, aproximadamente, 333 cm³ e 21 cm³.

c) Volume aproximado do tronco:

$333 - 21 = 312$; 312 cm³

42.

a)



Calculamos a medida x na figura pela metade da diferença dos diâmetros:

$x = \frac{16{,}5 - 13{,}5}{2} = 1{,}5$; 1,5 cm

Usando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$(14{,}5)^2 = (1{,}5)^2 + h^2$

$h^2 = 210{,}25 - 2{,}25$

$h = \sqrt{208} \cong 14{,}4$; 14,4 cm

b) Como o cone de altura H foi seccionado por um plano paralelo à base, foi obtido um cone semelhante de altura $H - 14{,}4$. Como esses cones são semelhantes, temos uma razão de semelhança k entre as medidas de comprimento:

$k = \frac{13{,}5}{16{,}5} \Rightarrow k = \frac{9}{11}$

Usando essa razão, calculamos a altura H:

$\frac{h}{H} = \frac{9}{11} \Rightarrow \frac{H - 14{,}4}{H} = \frac{9}{11}$

$11H - 158{,}4 = 9H$

$2H = 158{,}4 \Rightarrow H = 79{,}2$; 79,2 cm

c) Volume:

$V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{16{,}5}{2}\right)^2 \cdot 79{,}2$

$V \cong 5\,642$; 5 642 cm³

d) Usando o cubo da razão das medidas lineares, calculamos a razão entre os volumes dos cones sabendo que o volume do tronco é a diferença entre esses volumes. Volume do cone de altura $H - 14{,}4$:

$\frac{v}{V} = \left(\frac{9}{11}\right)^3 \Rightarrow \frac{v}{5\,642} = \frac{729}{1\,331}$

$1\,331v = 4\,113\,018$

$V \cong 3\,090$; 3 090 cm³

Volume aproximado do tronco:

$V \cong 5\,642 - 3\,090 = 2\,552$;

2 552 cm³ → 2 552 mL

O volume do cone de altura $H - 14{,}4$ pode ser calculado da mesma maneira que foi calculado o volume do cone de altura H no item **c**. A altura do cone retirado mede:

$H - 14{,}4 = 79{,}2 - 14{,}4 = 64{,}8$

Volume desse cone:

$V \cong \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{13{,}5}{2}\right)^2 \cdot 64{,}8$

$V \cong 3\,090$; 3 090 cm³

Volume do tronco de cone:

$V \cong 5642 - 3090 = 2552$

2552 cm³ → 2 552 mL

43. Ao reduzirmos todas as medidas para 20%, representado por 0,2, obtemos como resultado um brinde com capacidade de 7 mL. Com base nisso e nas informações anteriores, podemos encontrar o volume original, representado por V, para ser calculado como:

$\frac{V}{7} = \left(\frac{1}{0{,}2}\right)^3 \Rightarrow V = 875$; 875 mL

Alternativa **a**.

44. Seja h a altura do cone de base menor e H a altura do cone de base maior.

$\frac{h}{H} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h}{3 + h} = \frac{1}{2}$

$2h = 3 + h \Rightarrow h = 3$

Volume do tronco de cone:

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 6 - \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 3$

$V = 7\pi \Rightarrow V = 7 \cdot \frac{22}{7} = 22$; 22 dm³

45. Sejam V e v respectivamente, o volume da embalagem maior e o volume da embalagem menor. Ademais, se h é a altura da embalagem menor, então a altura da embalagem maior é $3h$.

$\frac{V}{v} = \left(\frac{3h}{h}\right)^3 \Rightarrow V = 37v$

$N = 27$

Alternativa **a**.

46. Usando o cubo da razão das medidas lineares, calculamos a razão entre os volumes:

$\frac{V}{v} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 \Rightarrow \frac{V}{\frac{8}{27}V} = \left(\frac{21}{h}\right)^3$

$\frac{27}{8} = \left(\frac{21}{h}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{21}{h}\right)^3$

$\frac{3}{2} = \frac{21}{h} \Rightarrow h = 14$; 14 cm

Portanto, a distância solicitada é:
$d = H - h \Rightarrow d = 21 - 14 \Rightarrow d = 7$

A medida da distância será um número primo.

Alternativa **b**.

47. Sejam v e $2v$, respectivamente, o volume do cone de raio r e o volume do cone de raio R. Portanto, como os cones são semelhantes, temos:

$\frac{v}{2v} = \left(\frac{r}{R}\right)^3 \Rightarrow R^3 = 2r^3$

Alternativa **c**.

Páginas 76-77

Infográfico

1. Exemplo de resposta: O Museu Solomon R. Guggenheim, em Nova York, é uma notável obra de Frank Lloyd Wright, caracterizada por uma espiral única. Essa estrutura incorpora figuras geométricas, como círculos, semicírculos e linhas curvas.
2. Exemplo de resposta: Pirâmide de Gizé, no Egito; Taj Mahal, na Índia; Torre de Pisa, na Itália.
3. Caso julgue oportuno, você pode levar os grupos para a sala de informática para que elaborem suas apresentações em um programa de *slides*.

O professor de Arte pode ser convidado a participar dessa atividade, inclusive com propostas de ampliação.

3. Esfera

Página 79

Para pensar e discutir

1. A relação métrica é $R^2 = r^2 + d^2$, obtida com base no triângulo retângulo no qual a hipotenusa é igual ao raio da esfera e os dois catetos são iguais a r (raio da secção) e d.
2. Área do círculo:
$A = \pi r^2 = \pi(R^2 - d^2)$
3. As duas medidas são iguais, pois o triângulo é retângulo e isósceles:
$x = d$
4. A secção é uma coroa circular de área:
$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi(R^2 - d^2)$

Para explorar

1. As duas seções serão círculos de raio R com a mesma área πr^2. Na anticlepsidra, pode ser necessário explicar que a interseção dos cones corresponde ao ponto do centro da seção e que, por ser apenas um ponto, não tem dimensão.
2. Sim. A justificativa pode ser, por exemplo, uma analogia com o que aconteceu na etapa 1, quando o plano estava "abaixo" do centro dos dois sólidos.
3. Como a anticlepsidra é um cilindro equilátero, retirados dois cones, podemos dizer que seu volume é igual ao volume do cilindro menos os volumes dos dois cones.

Página 80

Análise e contexto

1. Exemplo de resposta: Dividindo o volume do Sol pelo volume da Terra.
2. Exemplo de resposta: Segundo a *BBC News*, a diferença entre a KIC 11 145 123 e o Sol é surpreendentemente pequena, apenas 3 quilômetros, quando consideramos que essa estrela possui um raio de 1,5 milhões de quilômetros, o dobro do raio solar.

Vídeo – Esfera quase perfeita

Apresente o vídeo *Esfera quase perfeita* para os estudantes. Esse recurso didático discute a forma da Terra e como, embora seja frequentemente descrita como uma esfera, sua verdadeira forma é a de um geoide, achatada nos polos e alongada no Equador devido à rotação. O vídeo compara a esfericidade da Terra com a de Vênus, destacando este como o planeta mais esférico do Sistema Solar.

Página 81

Para pensar e discutir

1. $V_T = V_A + V_B + V_C$

$$V_T = \frac{4}{3}\pi A^3 + \frac{4}{3}\pi B^3 + \frac{4}{3}\pi C^3$$

$$V_T = \frac{4}{3}\pi(A^3 + B^3 + C^3) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$r^3 = A^3 + B^3 + C^3$$

$$r = \sqrt[3]{A^3 + B^3 + C^3}$$

Páginas 82-84

Para pensar e discutir

1. Para que a cunha represente a metade da esfera, o ângulo α precisa ser de 180°.
2. A medida do volume duplica. Os estudantes podem argumentar que, na relação obtida na atividade anterior, o ângulo α é um fator de multiplicação que não está elevado a nenhuma potência, ou seja, o volume da cunha é diretamente proporcional à medida do ângulo α considerado.
3. $\frac{3}{4}$ de $360° = 270°$ e $\frac{15°}{360°} = \frac{1}{24}$

Atividades

48.

a) Seja r a medida do raio inicial e R a do raio da esfera após o aumento, temos que $R = 1{,}1r$.

$$V_a = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V_a = \frac{4}{3}\pi \cdot (1{,}1r)^3$$

$$V_a = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 1{,}331$$

$$V_a = 1{,}331V$$

Percentual de aumento:

$$\frac{1{,}331V - V}{V} = 0{,}331 = 33{,}1\%$$

b) Sendo r a medida do raio inicial e r_d a do raio da esfera após dobrar, temos que $r_d = 2r$.

Volume da esfera:

$$V_a = \frac{4}{3}\pi(2r)^3$$

$$V_a = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 8 \Rightarrow V_a = 8V$$

Dessa forma, o volume é multiplicado por 8.

c) Sim, pois é possível identificar uma razão de semelhança k entre duas esferas quaisquer de raios r_1 e r_2 tal que $\frac{r_1}{r_2}$.

49.

a) De acordo com informações do *site* do Banco Central, disponíveis em: https://www.bcb.gov.br/dinheirobrasileiro/segunda-familia-moedas.html (acesso em: 16 out. 2024), o diâmetro da moeda de 1 real atual é 27 mm. Então, a esfera de revolução tem o mesmo diâmetro que a moeda: 27 mm.

b) O diâmetro da esfera será 27 mm; logo, o raio será 13,5 mm.

Volume da esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot (13{,}5)^3$$

$$V \cong \frac{4 \cdot 2\,460{,}38 \cdot 3{,}14}{3}$$

$$V \cong \frac{30\,902}{3} \cong 10\,300;\ 10\,300 \text{ mm}^3$$

50. O volume da esfera corresponde ao volume de água que subiu:

$$V_e = \pi R^2 \cdot H \Rightarrow V_e = \pi R^2 \cdot \frac{R}{6}$$

$$V_e = \frac{\pi R^3}{6}$$

Então, calculamos o raio dessa esfera

$$V_e = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{\pi R^3}{6} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$r^3 = \frac{R^3}{8} \Rightarrow r = \frac{R}{2}$$

51.

a) $V_R = nV_r$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = n \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$R^3 = nr^3 \Rightarrow R = r\sqrt[3]{n}$$

b) $50 = 0{,}5\sqrt[3]{n} \Rightarrow \sqrt[3]{n} = 100$

$$n = 100^3 = (10^2)^3 = 10^6$$

c) Você pode sugerir aos estudantes que se unam em duplas e troquem suas atividades elaboradas para que um resolva a do outro.

52.

a) Sabendo a área lateral do cilindro e que o cilindro é equilátero, ou seja, $h = 2r$, calculamos a medida do raio do cilindro:

$A_L = 2\pi rh \Rightarrow 16\pi = 2\pi r \cdot 2r$

$4r^2 = 16 \Rightarrow r = 2$; 2 cm

b) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3$

$V = \frac{32\pi}{3}$; $\frac{32\pi}{3}$ cm³

53. Volume do cilindro:

$V = \pi \cdot 2^2 \cdot (2 \cdot 2) = 16\pi$; 16π cm³

O volume da água que fica no cilindro corresponde ao volume do cilindro menos o volume da esfera:

$V_{água} = 16\pi - \frac{32\pi}{3}$

$V_{água} = \frac{48\pi - 32\pi}{3}$

$V_{água} = \frac{16\pi}{3}$; $\frac{16\pi}{3}$ cm³

Então, calculamos a altura h' da água que fica no cilindro:

$\frac{16\pi}{3} = \pi \cdot 2^2 \cdot h' \Rightarrow 4h' = \frac{16}{3}$

$h' = \frac{4}{3}$; $\frac{4}{3}$ cm

54. Pelo princípio de Cavalieri, os dois recipientes têm a mesma capacidade.

55. Primeiro vamos calcular o volume da semiesfera (em cm³):

$V_{semiesfera} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3$

$V_{semiesfera} = \frac{128\pi}{3}$. Calculando o volume do cone (em cm³), temos:

$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 4 \Rightarrow V_{cone} = \frac{64\pi}{3}$

Portanto, o volume da ampulheta é $\frac{128\pi}{3} + \frac{64\pi}{3} = \frac{192\pi}{3} = 64\pi$.

Como o volume da areia é 25% $\left(\frac{1}{4}\right)$ do volume da ampulheta, temos:

$64\pi \cdot \frac{1}{4} = 16\pi$; 16π cm³

Alternativa **a**.

56. O volume da esfera é dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Com o aumento de 20% do raio, o volume passará a ser:

$V' = \frac{4}{3}\pi \cdot (1{,}2r)^3$

$V' = \frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}728 \Rightarrow V' = 1{,}728V$

Dessa forma, o aumento será de:

$\frac{1{,}728V - V}{V} \cong 0{,}73 = 73\%$

Alternativa **a**.

57. O volume correspondente a 10 esferas, em cm³, será:

$V = 10 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 20^3$

$V \cong 334\,933{,}33$; $334\,933{,}33$ cm³

Alternativa **c**.

58. Raio da esfera: $1{,}5 = \frac{3}{2}$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3$

$V = \frac{4}{3}\pi\frac{27}{8} = \frac{9\pi}{2}$

Ao juntar as 8 esferas teremos um volume total de 36π, com isso:

$36\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow 36 = \frac{4}{3}r^3$

$36 \cdot \frac{3}{4} = r^3 \Rightarrow 27 = r^3 \Rightarrow r = 3$; 3 cm

59. O raio da circunferência no plano de corte, a distância do corte ao centro e o raio da esfera formam um triângulo retângulo pitagórico com catetos medindo 3 e 4 e hipotenusa medindo 5. Portanto, o raio será 5 cm e o volume será:

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 \Rightarrow V = \frac{500\pi}{3}$; $\frac{500\pi}{3}$ cm³

Alternativa **e**.

Página 85

Para pensar e discutir

1. O contorno do polígono estaria se aproximando de uma circunferência, e a superfície limitada pelo polígono estaria se aproximando de um círculo.
2. A altura de cada uma das pirâmides estaria tendendo a ser o raio da esfera.

Página 86

Para pensar e discutir

1. $A = 4\pi \cdot 3^2 \Rightarrow A = 36\pi$; 36π m²

   $V = \frac{5}{3}\pi \cdot 3^3 \Rightarrow V = 45\pi$; 45π m³
2. $A_F = 4\pi(2r)^2 \Rightarrow A_F = 4\pi \cdot 4r^2$

   $A_F = 4 \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow A_F = 4A$

   $V_F = \frac{5}{3}\pi \cdot (2r)^3$

   $V_F = 8 \cdot \frac{5}{3}\pi r^3 \Rightarrow V_F = 8V$

   A área fica multiplicada por 4 e o volume fica multiplicado por 8. Isso ocorre porque a área é proporcional ao quadrado da medida do raio e o volume é proporcional ao cubo da medida do raio.

Páginas 88-90

Atividades

60.

a) Como a esfera está completamente inscrita no cilindro, temos $h = 2r$.

b) Possuem a mesma medida.

c) Volume da esfera: $V_e = \frac{4}{3}\pi r^3$

Volume do cilindro:

$V_c = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow V_c = \pi r^2 \cdot 2r$

$V_c = 2\pi r^3$

Razão entre os volumes:

$\frac{V_e}{V_c} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} \Rightarrow \frac{V_e}{V_c} = \frac{2}{3}$

d) Área da esfera:

$A_e = 4\pi r^2$

Área total do cilindro:

$A_{total} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

$A_{total} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r$

$A_{total} = 2\pi r^2 + 4\pi r^2$

$A_{total} = 6\pi r^2$

Razão entre as áreas:

$\frac{A_e}{A_c} = \frac{4\pi r^2}{6\pi r^2} \Rightarrow \frac{A_e}{A_c} = \frac{2}{3}$

61.

a) Considerando, $d = 6{,}7$ cm

$r = 3{,}35$ cm

$A = 4\pi(3{,}35)^2 = 4\pi \cdot 11{,}2225$

$A = 44{,}89\pi \cong 141$; 141 cm²

b) Considerando a bola de vôlei, com diâmetro medindo 22 centímetros, o raio será 11 cm. Área da superfície da bola de vôlei:

$A_{vôlei} = 4\pi \cdot 11^2$

$A_{vôlei} = 484\pi; \cong 1\,520$; 1 520 cm²

c) Considerando a bola de futebol, com diâmetro medindo 22 centímetros, o raio será 11 cm.

Área da superfície da bola de futebol:

$A_{futebol} = 4\pi \cdot 11^2$

$A_{futebol} = 484\pi; \cong 1\,520$; 1 520 cm²

62. A superfície externa da pílula corresponde à área lateral do cilindro e à área da esfera (ou de duas semiesferas).

$A = 4\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

$A = 4\pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 5 \cdot 10$

$A = 200\pi$; 200π mm²

63.

a) Volume da esfera:

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3$

$V_{esfera} = 36\pi$; 36π dm³

Volume do cone:

$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi (3\sqrt{3})^2 \cdot 4$

$V_{cone} = 36\pi$; 36π dm^3

Volume do cilindro:

$V_{cilindro} = \pi \cdot 3^2 \cdot 4$

$V_{cilindro} = 36\pi$; 36π dm^3

Os três volumes são iguais, logo as capacidades também são.

b) Antes de calcularmos a área da superfície de cada embalagem, vamos calcular a medida da geratriz do cone:

$g^2 = r^2 + h^2$

$g^2 = (3\sqrt{3})^2 + 4^2$

$g^2 = 43 \Rightarrow g \cong 6{,}6$

Área da esfera:

$A_{esfera} = 4\pi \cdot 3^2$

$A_{esfera} = 36\pi$; 36π dm^3

Área do cone: $A_{cone} = \pi rg + \pi r^2$

$A_{cone} \cong \pi \cdot (3\sqrt{3}) \cdot 6{,}6 + \pi (3\sqrt{3})^2$

$A_{cone} \cong 19{,}8\pi\sqrt{3} + 27\pi$

$A_{cone} \cong 61\pi$; 61π dm^2

Área total do cilindro:

$A_{cilindro} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

$A_{cilindro} = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 4$

$A_{cilindro} = 42\pi$; 42π dm^2

A área da esfera é menor, portanto, deve ser utilizado menos material na fabricação da embalagem esférica, o que resulta em um custo menor.

c) Exemplo de resposta: Apesar dos três objetos serem distintos quanto à forma e suas medidas de raio e altura, eles possuem a mesma capacidade.

64.

a) Calculamos a área, em m², da semiesfera:

$A = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2$

$A \cong \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 30^2$

$A \cong \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 900$

$A \cong 5\,652$; $5\,652$ m^2

b) Se aumentarmos o raio em 1 m, a nova área, em m², será:

$A \cong \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 31^2$

$A \cong \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 961$

$A \cong 6\,035$; $6\,035$ m^2

O aumento da área da semiesfera após o aumento do raio é de aproximadamente:

$6\,035 - 5\,652 = 383$; 383 m^2

65. $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow 2\,304\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$

$R^3 = 1\,728 \Rightarrow R = 12$

Então, calculamos a área da superfície de cada faixa

$A = \frac{4\pi R^2}{24} \Rightarrow A = \frac{4\pi \cdot 12^2}{24}$

$A = 24\pi$; 24π cm^2

Alternativa **b**.

66. Seja r a medida do raio da esfera obtida após a fundição de três esferas idênticas e maciças de diâmetro 2 cm.

$\frac{4}{3}\pi r^3 = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3$

$r^3 = 3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{3}$; $\sqrt[3]{3}$ cm

Alternativa **a**.

67. Sabendo o volume do cubo, de 216 cm³, calculamos a medida da aresta a do cubo:

$V = a^3 \Rightarrow 216 = a^3 \Rightarrow a = 6$; 6 cm

Volume da esfera:

$V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{6}{2}\right)^3 \Rightarrow V = 36\pi$; 36π cm^3

68. Volume da esfera:

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 \Rightarrow V = 36\pi$; 36π cm^3

Ao colocar a esfera no recipiente, como o solvente a cobre completamente, a altura do líquido é 6 cm (medida do diâmetro da esfera). Então, a altura do líquido variou:

$6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$ cm

Raio do cilindro pelo volume de líquido deslocado:

$V = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow 36\pi = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{2}{3}$

$r^2 = 54 \Rightarrow r = 3\sqrt{6}$; $3\sqrt{6}$ cm

Alternativa **d**.

69. Raio do cilindro: $r = \frac{6}{2} \Rightarrow r = 3$; 3 cm

O raio da esfera e da base do cone devem ser 3 cm. Considerando $\pi \cong 3$.

Volume da semiesfera:

$V_{esfera} \cong \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 3^3$

$V \cong 54$; 54 cm^3

Volume, em cm³, do cone:

$V_{cone} \cong \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 4$

$V_{cone} \cong 36$; 36 cm^3

Volume aproximado do pião:

$54 + 36 = 90$; 90 cm^3

Volume do cilindro:

$V_{cilindro} \cong 3 \cdot 3^2 \cdot 7$

$V_{cilindro} \cong 189$, 189 cm^3

Volume aproximado de madeira descartada:

$189 - 90 = 99$; 99 cm^3

Alternativa **e**.

70. A área da esfera é igual à área da superfície do cilindro.

$4\pi r^2 = 2\pi R^2 + 2\pi R^2$

$4\pi r^2 = 4\pi R^2 \Rightarrow r = R$

Alternativa **d**.

71. Volume da fruta, em cm²:

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3$

Raio do caroço:

$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3$

$r^3 = \left(\frac{12}{2}\right)^3 \Rightarrow r = 6$; 6 cm

Área da superfície do caroço:

$A = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi$; 144π cm^3

Alternativa **b**.

Páginas 91-97

Atividades finais

1.

a) Cada face lateral de uma pirâmide regular é um triângulo isósceles.

b) O apótema da pirâmide (que corresponde à altura do triângulo que representa cada face).

2. Volume da pirâmide:

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3}A_b \cdot h$

Volume do prisma:

$V_{prisma} = A_b \cdot h$

$\frac{V_{pirâmide}}{V_{prisma}} = \frac{\frac{1}{3}A_b \cdot h}{A_b \cdot h} = \frac{1}{3}$

Ou seja, o volume do prisma é o triplo do volume da pirâmide (ou o volume da pirâmide é um terço do volume do prisma).

3. Volume do cone:

$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

Volume do cilindro:

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h$

$\frac{V_{cone}}{V_{cilindro}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h}{\pi r^2 \cdot h} = \frac{1}{3}$

Ou seja, o volume do cilindro é o triplo do volume do cone.

4.

a) Representa um setor circular.

b) A expressão $A_L = \pi rg$.

c) A expressão $A_T = \pi rg + \pi r^2$.

5.

a) Razão entre os volumes:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{5}{1}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 125$$

b) Razão entre as áreas:

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{5}{1}\right)^2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = 25$$

c) Razão entre as áreas totais:

$$\frac{A_{total\,(1)}}{A_{total(2)}} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 = \left(\frac{5}{1}\right)^2$$

$$\frac{A_{total\,(1)}}{A_{total(2)}} = 25$$

6.

a) Razão entre os volumes:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \sqrt[3]{27}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = 3$$

b) Razão entre as áreas:

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{3}{1}\right)^2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = 9$$

c) Razão entre as áreas totais:

$$\frac{A_{total\,(1)}}{A_{total(2)}} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

$$\frac{A_{total\,(1)}}{A_{total(2)}} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 \Rightarrow \frac{A_{total\,(1)}}{A_{total(2)}} = 9$$

7.

a) A expressão é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

b) A expressão é $A = 4\pi r^2$.

c) É qualquer círculo contendo o diâmetro da esfera.

Questões de vestibulares e Enem

8.

a) Arestas:

$$A = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{2} \Rightarrow A = 16$$

O poliedro tem 9 vértices e 16 arestas.

b) O volume total será: $V_{pirâmide} + V_{prisma}$. Calculando a altura da pirâmide, temos:

$13^2 = 5^2 + h^2 \Rightarrow h = 12$

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12$

$V_{pirâmide} = 400$; $400\ cm^3$

$V_{prisma} = 10^2 \cdot 16 = 1600$; $1600\ cm^3$

Volume total:

$400 + 1\,600 = 2\,000$; $2\,000\ cm^3$

9. O volume será dado pela diferença dos volumes da pirâmide maior e da pirâmide menor.

$V = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 3$

$V = 32 - 4 = 28$; $28\ cm^3$

Alternativa **c**.

10. $V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 10 = 30$; $30\ cm^3$

Alternativa **b**.

11. Volume do prisma de base triangular e a altura medindo 3 cm:

$V = \frac{6 \cdot 4}{2} \cdot 3 \Rightarrow V = 36$. Esse volume é igual ao da pirâmide. Seja L a aresta da pirâmide.

$36 = \frac{1}{3} \cdot L^2 \cdot 4$

$L^2 = 27 \Rightarrow L = 3\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}$ cm

Alternativa **d**.

12. Se a geratriz do cone mede 10 cm, então o raio do setor circular do cone planificado mede $R = g = 10$ cm. Assim:

$$\frac{A_L}{\pi \cdot 10^2} = \frac{216°}{360°} \Rightarrow A_L = \frac{3}{5} \cdot 100\pi$$

$A_L = 60\pi$; $60\pi\ cm^2$

Com essa medida, calculamos a medida do raio da base r do cone:

$A_L = \pi r g \Rightarrow 60\pi = \pi \cdot r \cdot 10$

$10r = 60 \Rightarrow r = 6$; 6 cm

Por fim, calculamos a altura, em cm, do cone h:

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + h^2$

$h^2 = 64 \Rightarrow h = 8$; 8 cm

Alternativa **d**.

13. O sólido *ACDH* é uma pirâmide cuja base pode ser qualquer uma das faces. No entanto, usar a face *ACH* como base da pirâmide é mais trabalhoso porque devemos calcular todas as medidas dos lados. Dessa forma, calcularemos o volume da pirâmide *ACDH* usando como base a face *ACD*, mas o mesmo processo pode ser empregado caso a escolha da base seja a face *ADH* ou a face *DCH*:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 10}{2} \cdot 6 \Rightarrow V = 30;\ 30\ \text{u.v.}$$

Alternativa **c**.

14. O volume do tanque, em m^3, será:

$V \cong \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 5$

$V \cong 83{,}73333$

Portanto, a capacidade do tanque é de aproximadamente 83 733,33 L.

Alternativa **c**.

15.

a) O perímetro da base do cilindro corresponde ao comprimento do círculo.

$C = 2\pi r \Rightarrow C \cong 2 \cdot 3{,}1 \cdot 24 = 148{,}8$; 148,8 m

b) Calculamos cada volume. Logo, o volume do cilindro, em m^3:

$V_{cilindro} \cong 3{,}1 \cdot 24^2 \cdot 22$

$V_{cilindro} \cong 39\,283{,}2$

Volume do cone, em m^3:

$V_{cone} \cong \frac{1}{3} \cdot 3{,}1 \cdot 24^2 \cdot 8$

$V_{cone} \cong 4\,761{,}6$

Volume do silo:

$39\,283{,}2 + 4\,761{,}6 =$

$= 44\,044{,}8$; $44\,044{,}8\ m^3$

16. Aresta da base da pirâmide: L.

Altura da pirâmide: h.

Volume inicial da pirâmide:

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot L^2 \cdot h$

Volume aproximado da pirâmide após as modificações:

$V_2 = \frac{1}{3} \cdot (2L)^2 \cdot \frac{h}{2}$

$V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot L^2 \cdot h \Rightarrow V_2 = 2V_1$

Logo, o volume será duplicado.

Alternativa **d**.

17. Volume do paralelepípedo:

$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V = 1{,}25 \cdot 2 \cdot 1$

$V = 2{,}5$; $2{,}5\ m^3$

Então, 10% do volume do paralelepípedo corresponde a

$0{,}1 \cdot 2{,}5 = 0{,}25$; $250\,000\ cm^3$

Volume de cada esfera:

$V_{esfera} \cong \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 5^3 \Rightarrow V_{esfera} \cong 500$

Razão entre os volumes:

$\frac{250\,000}{500} = 500$

Terão de ser colocadas 500 esferas.

Alternativa **e**.

18. Área do teto:

$A \cong \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3{,}1 \cdot 4^2$

$A \cong 99{,}2$; $99{,}2\ m^2$

Custo aproximado do teto:

$99{,}2 \cdot 300 = 29\,760$; R$ 29.760,00

Alternativa **e**.

19. Volume do ralador em formato de cone:

$V_{ralador} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 10$

$V_{ralador} = \frac{160\pi}{3}$

Assim, 90% do volume do ralador, em cm^3, corresponde a:

$\frac{90}{100} \cdot \frac{160\pi}{3} = 48\pi$

Volume do queijo em formato cilíndrico:

$V_{cilindro} = \pi \cdot 8^2 \cdot 6$

$V_{cilindro} = 384\pi$

Calculando a razão entre os volumes, determinamos α.

$\frac{48\pi}{384\pi} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow 8\alpha = 360°$

$\alpha = 45°$

Alternativa **a**.

20. O volume da esfera era $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Após o aumento de 50%, o raio passou a medir 1,5R. Volume da esfera depois do aumento do raio:

$V_2 = \frac{4}{3}\pi(1,5R)^3$

$V_2 = 3,375 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$

$V_2 = 3,375\,V_1$.

Portanto, houve um aumento percentual do volume da esfera de:

$\frac{3,375\,V_1 - V_1}{V_1} = 2,375 = 237,5\,\%$

Alternativa **d**.

21. O volume da esfera era $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Após o aumento de 20%, o raio passou a medir 1,2R. Volume da esfera depois do aumento do raio:

$V_2 = \frac{4}{3}\pi(1,2R)^3$

$V_2 = 1,728 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$

$V_2 = 1,728\,V_1$

Portanto, houve um aumento percentual do volume da esfera de

$\frac{1,728\,V_1 - V_1}{V_1} = 0,728 = 72,8\,\%$

Alternativa **e**.

22. Raio da Terra: $R_T = 6\,350$

Raio da camada descrita:

$R_c = 6\,350 - 2\,900 = 3\,450$

Razão do volume da Terra ocupada pela camada descrita:

$\frac{V_C}{V_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_C^3}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot 3\,450^3}{\frac{4}{3}\pi \cdot 6\,350^3}$

$\frac{V_C}{V_T} = \frac{3\,450^3}{6\,350^3} \Rightarrow \frac{V_C}{V_T} \cong \frac{1}{6,23}$

$\frac{1}{8} < \frac{1}{6,23} < \frac{1}{5}$

Alternativa **a**.

23. Volume do prisma:

$V_{prisma} = 3^2 \cdot 5 \Rightarrow V_{prisma} = 45$; 45 cm^3

Volume da pirâmide:

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 6 = 32$; 32 cm^3

$V_{prisma} - V_{pirâmide} = 45 - 32 = 13$; 13 cm^3

Alternativa **c**.

24. A área total da minipirâmide será $A_T = A_L + A_B$. Para calcular a área lateral, precisamos calcular a geratriz.

$g^2 = 12^2 + 16^2$

$g^2 = 144 + 256$

$g = \sqrt{400} \Rightarrow g = 20$

Área lateral:

$A_L = 4 \cdot \frac{24 \cdot 20}{2} = 960$; 960 cm^2

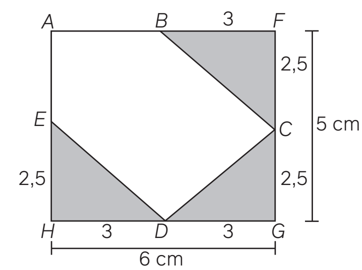
Área da base:

$A_B = 24^2 = 576$; 576 cm^2

$A_T = 960 + 576 \Rightarrow A_T = 1\,536$; 1 536 cm^2

Alternativa **d**.

25. Sejam *ABCDE* os vértices da base da pirâmide, sua área *S* pode ser escrita como:



Reinaldo Vignati

$S = S_{AFGH} - 3 \cdot S_{BFC}$

$S = 6 \cdot 5 - 3 \cdot \frac{3 \cdot 2,5}{2}$

$S = 18,75$; 18,75 cm^2

$V = \frac{1}{3} \cdot 18,75 \cdot 4$

$V = 25$; 25 cm^3

Alternativa **a**.

26. $V_T = V_{cilindro} + V_{cone}$

$V_{cilindro} = \pi \cdot 10^2 \cdot 10$

$V_{cilindro} = 1\,000\pi$

$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 3$

$V_{cilindro} = 100\pi$

$V_T = 1\,000\pi + 100\pi$

$V_T = 1\,100\pi$; 1 100π m^3

Número de dias:

$D = \frac{1\,100\pi}{15} \cong \frac{1\,100 \cdot 3,14}{15} = \frac{3\,454}{15} = 230$; 230 dias

Alternativa **d**.

27. O volume do cilindro é igual ao volume do cone.

$\pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h \Rightarrow 3H = h \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{1}{3}$. Alternativa **a**.

28. A capacidade do cone é de 205 mL, logo seu volume é 205 cm^3. $V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$

$205 = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$

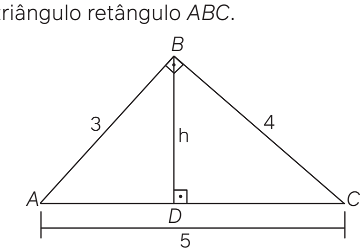
$615 = \pi r^2 \cdot h$

Como o volume do cilindro é

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h$, conclui-se que a capacidade do cilindro é de 615 mL.

Alternativa **d**.

29. Seja o triângulo retângulo *ABC*.



Reinaldo Vignati

Por relações métricas no triângulo retângulo, encontramos a altura: $5h = 3 \cdot 4 \Rightarrow h = \frac{12}{5}$

Essa medida será necessária, pois corresponderá ao raio da base dos cones formados. Vale ressaltar que a soma das alturas dos dois cones gerados é igual à medida da hipotenusa do triângulo *ABC*.

$S = \pi \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2 \Rightarrow S = \frac{144}{25}\pi$

Agora, vamos encontrar a soma dos dois volumes:

$V_{C1} + V_{C2} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_2$

$V_{C1} + V_{C2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{144\pi}{25} \cdot 5$

$V_{C1} + V_{C2} = \frac{48\pi}{5}$

Alternativa **d**.

30. Podemos observar que o volume da esfera V_E de raio igual a R deve ser igual ao volume do cilindro correspondente ao que é ocupado inicialmente pela água com raio igual a $2R$ e altura igual a $h_2 - h_1$. Então:

$V_{esfera} = V_{cilindro}$

$\pi \cdot (2R)^2 \cdot (h_2 - h_1) = \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \pi \cdot R^3$

$4R^2 \cdot (h_2 - h_1) = \left(\frac{4}{3}\right)R^3$

$(h_2 - h_1) = \frac{R}{3}$

Alternativa **c**.

31. $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$

Novo volume:

$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^3 \Rightarrow V_2 = \frac{1}{8}V_1$

$V_1 = 8V_2$

Alternativa **d**.

32. Podemos afirmar que

$H = 3h \Rightarrow h = \frac{H}{3}$

Para a relação dos volumes:

$\frac{V}{v} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 \Rightarrow \frac{V}{v} = 3^3 \Rightarrow \frac{V}{v} = 27$

Alternativa **a**.

33. $5^2 = 3^2 + R^2 \Rightarrow R = 4$

Alternativa **a**.

34. Volume do silo:

$V_{cilindro} + V_{cone} =$

$= \pi \cdot 3^2 \cdot 12 + \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3$

$V \cong 351$; 351 m^3

Número de viagens: $\frac{351}{20} = 17{,}55 \cong 18$; 18 viagens

Alternativa **d**.

35. Seja R a medida do raio da base e h a medida da altura do cone.

$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 10 \Rightarrow V_1 = \frac{160}{3}\pi$

Diminuindo 19%, temos:

$V_2 - 19\%$ de V_1

$V_2 = V_1 - 0{,}19V_1$

$V_2 = V_1(1 - 0{,}19)$

$V_2 = 0{,}81V_1$

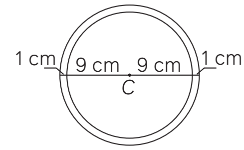
Raio da base do segundo cone após diminuição:

$x^2 = 0{,}81 \cdot 16 \Rightarrow x^2 = \frac{81}{100} \cdot 16$

$x^2 = \frac{16 \cdot 81}{100} \Rightarrow x = 3{,}6$; 3,6 cm

Alternativa **c**.

36. Segundo o enunciado:



Reinaldo Vignati

Volume da esfera maior, em cm³:

$V_{maior} = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3$

$V_{maior} = \frac{4}{3}\pi \cdot 1\,000$

Volume da esfera menor, em cm³:

$V_{menor} = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3$

$V_{maior} = \frac{4}{3}\pi \cdot 729$

Diferença entre os volumes, em cm³:

$\frac{4}{3}\pi \cdot 1\,000 - \frac{4}{3}\pi \cdot 729 = \frac{1\,084\pi}{3}$

Cálculo da quantidade de chocolate:

$\frac{1\,084\pi}{3} \cdot \frac{4}{3} \text{g} = \frac{4\,336\pi}{9} \text{g}$

Alternativa **c**.

37. O volume V_1 de um único docinho:

$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 \Rightarrow V_1 = \frac{4}{3}\pi$

Para 50 docinhos:

$V_1 = 50 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V_1 = \frac{200\pi}{3}$

A encomenda do cliente é de 150 docinhos, os quais são esferas maciças de 4 cm de diâmetro; logo, possuem raio $R = 2$ cm. O volume V_2 de cada docinho desses solicitados pelo cliente é igual a

$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 \Rightarrow V_2 = \frac{32\pi}{3}$

Assim, o volume total da encomenda, em cm³, é igual a

$150 \cdot \frac{32\pi}{3} \Rightarrow 1600\pi$

Porções da receita-base necessárias para atender a encomenda:

$\frac{1600\pi}{\frac{200\pi}{3}} = 24$

Alternativa **e**.

38. O volume V de um cone pode ser calculado pela fórmula: $\frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$, em que R é o raio da base maior, r a medida da base menor e h é a distância entre as duas bases. Dado que as dimensões do cone menor são 3 vezes menores que as do cone maior, e a altura do cone maior é igual a 36 cm, então a altura do cone menor é $\frac{36}{3} = 12$. Isso nos leva a concluir que a altura do tronco (a distância entre as bases) é igual a $36 - 12 = 24$; 24 cm.

Volume do tronco:

$V_{tronco} = \frac{\pi \cdot 24}{3}(9^2 + 3^2 + 9 \cdot 3)$

$V_{tronco} = 2\,808$; $2\,808 \text{ cm}^3$

Volume do cilindro:

$V_{cilindro} = \pi \cdot 3^2 \cdot 24 = 3 \cdot 3^2 \cdot 24 = 648$; 648 cm^2

Volume da escultura:

$2\,808 - 648 = 2\,160$; $2\,160 \text{ cm}^3$. Se a massa de cada centímetro cúbico é igual a 0,6 grama, a massa da escultura é igual a:

$0{,}6 \cdot 2\,160 = 1\,296$; 1 296 g

Alternativa **b**.

39. O tachão tem a representação de um tronco de pirâmide quadrangular.

Alternativa **e**.

CAPÍTULO 3

Sistemas lineares

Objetivos

- Identificar equações lineares com mais de uma incógnita.
- Compreender o que representa a solução de um sistema de equações lineares com duas ou mais incógnitas.
- Resolver sistemas de equações lineares por meio do método do escalonamento.
- Identificar quando um sistema de equações lineares possui solução única, não possui solução ou admite infinitas soluções.
- Resolver problemas relacionados a sistemas e equações lineares.

Justificativa

O estudo de sistemas lineares, envolvendo a sistematização de algumas técnicas, tem como objetivo assegurar aos estudantes o domínio de recursos que os permitam, além reconhecer o tipo de modelo que resolve determinado problema, usar as técnicas necessárias para resolvê-los.

Competências gerais da BNCC

Competências gerais 2 e 4: Os estudantes exercitam a reflexão, a análise crítica e a criatividade na atividade 6 das páginas 104 e 105, quando elaboram e resolvem, em duplas, sistemas lineares no plano cartesiano, sob algumas condições. Além disso, fazem a interpretação geométrica desses sistemas e, assim, desenvolvem a **competência 2**. Como trabalham em duplas utilizam várias formas de linguagem, como a verbal oral e a matemática, seja algébrica ou gráfica, mobilizam também a **competência 4**.

Competência geral 9: Essa competência é desenvolvida nas diversas atividades ao longo do capítulo em que os estudantes trabalham em duplas ou em grupos, como na seção **Para explorar** da página 104, em pequenos grupos, e da página 109, em duplas. Assim, os estudantes têm a oportunidade de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 3

EM13MAT301: O trabalho realizado com as equações lineares simultâneas envolve a resolução de problemas do cotidiano como, entre outros, o que consta na seção **Para pensar e discutir** da página 102, que envolve o número de cédulas possíveis de serem retiradas em um caixa eletrônico quando se faz o saque de determinada quantia. Na atividade 6 das páginas 104 e 105, os estudantes elaboram e resolvem, em duplas, sistemas lineares no plano cartesiano, sob algumas condições. As equações lineares simultâneas também são utilizadas pelos estudantes para fazer o balanceamento de equações químicas, como no caso das atividades que constam das atividades 20, 21 e 22 da página 110. São utilizadas também na Física, como consta da seção **Análise e contexto** das páginas 112 e 113.

Competência específica 4

EM13MAT401: Essa habilidade é mobilizada na seção **Para explorar** da página 104 quando os estudantes convertem funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano para representar um sistema linear formado por duas equações a duas incógnitas podendo, inclusive, utilizar um *software* de geometria dinâmica.

Conexões com outras áreas do conhecimento

Neste capítulo há conexões com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, mais especificamente em Química e Física. O balanceamento de equações químicas é abordado no texto da página 100, retomado e trabalhado nas atividades 20, 21 e 22 da página 110. A seção **Análise e contexto** das páginas 112 e 113 aborda a aplicação de sistemas lineares na Física.

Resoluções e comentários

Página 99

Abertura

1. Espera-se que os estudantes se lembrem do nome de alguns procedimentos, como o método de substituição e o método de adição. Incentive-os a falar sobre isso e a relembrar como essas técnicas são utilizadas.
2. Proponha aos estudantes que elaborem alguns problemas e justifiquem por que são resolvidos por meio de sistemas do 1º grau.

   Aproveite esta oportunidade para fazer um levantamento de conhecimentos prévios dos estudantes acerca da resolução de sistemas de 1º grau, estudados no Ensino Fundamental. Além disso, os professores da área de Ciências da Natureza podem apresentar problemas que são resolvidos por meio de sistemas lineares, o que dará significado a esse estudo.

1. Sistemas de equações lineares

Página 100

Para pensar e discutir

1. Resolver uma equação com uma incógnita é obter o valor dessa incógnita que torna verdadeira a sentença. Resolver um sistema consiste em determinar todas as incógnitas que tornam verdadeiras todas as sentenças.

2. O estudante deve se lembrar de equações resolvidas no Ensino Fundamental.

3. Sim. Por exemplo, se $x = 2$, temos na 1ª equação: $z = 2 \cdot 2 = 4$, na 2ª equação: $w = (6 \cdot 2) \div 2 = 6$. Conhecendo w e z, obtemos na 3ª equação o valor de y.

$y = (2 \cdot 4 + 6) \div 2 = 7$

Página 101

Para pensar e discutir

1. A equação I apresenta um termo com o produto de duas incógnitas; a equação II apresenta uma incógnita elevada ao cubo; a equação III apresenta uma incógnita elevada ao expoente $\frac{1}{2}$.

2. A primeira equação é linear, pois a incógnita x não está como radicando, e a segunda equação não é linear, pois a incógnita x está como radicando, isto é, elevada ao expoente $\frac{1}{2}$.

Página 102

Para pensar e discutir

1. De acordo com o problema, Júlia vai retirar 180 reais, sendo 2 cédulas de 5 reais e 1 cédula de 50 reais. Sendo y o número de cédulas de 10 reais, calculamos:

$2 \cdot 5 + 1 \cdot 50 + y \cdot 10 = 180$

$10 + 50 + 10y = 180$

$10y = 120 \Rightarrow y = 12$; 12 cédulas

2. Uma solução: 4 cédulas de 5 reais e 6 cédulas de 10 reais. Existem outras soluções.

3. Uma solução: 2 cédulas de 50 reais, 6 cédulas de 5 reais e 5 cédulas de 10 reais. Existem outras soluções.

Para pensar e discutir

1. Verificamos os valores (4, 4, 6) no sistema dado:

$$\begin{cases} x + y + z = 14 \\ 50x + 10y + 5z = 180 \end{cases}$$

Temos:

$$\begin{cases} 4 + 4 + 6 = 14 \\ 50 \cdot 4 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 270 \end{cases}$$

Portanto, a terna ordenada (4, 4, 6) não é solução do sistema, pois fazendo $x = 4$, $y = 4$ e $z = 6$ a segunda equação não é verificada.

2. Verificamos os valores (2, 4, 8) no sistema dado:

$$\begin{cases} x + y + z = 14 \\ 50x + 10y + 5z = 180 \end{cases}$$

Temos:

$$\begin{cases} 2 + 4 + 8 = 14 \\ 50 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 8 = 180 \end{cases}$$

Portanto, a terna ordenada (2, 4, 8) é solução do sistema, pois fazendo $x = 2$, $y = 4$ e $z = 8$ as duas equações são verificadas.

Página 103

Para pensar e discutir

1. Cada equação é interpretada como uma reta no plano cartesiano.

2. A solução é interpretada como o ponto de encontro dessas duas retas.

3. Duas retas representadas no plano cartesiano podem ser: concorrentes (1 só ponto em comum), paralelas (nenhum ponto em comum) ou coincidentes (infinitos pontos em comum).

Páginas 104-105

Para explorar

1.

a) $\begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 26 \end{cases}$

Adicionamos as duas equações:

$2x = 36 \Rightarrow x = 18$

Substituímos x por 18, por exemplo, na primeira equação:

$18 - y = 10 \Rightarrow y = 8$

Portanto, a solução é $x = 18$ e $y = 8$.

b) $\begin{cases} x - y = 10 \\ x - y = 12 \end{cases}$

Esse sistema não tem solução, pois não podemos ter, simultaneamente, $x - y = 10$ e $x - y = 12$. Portanto, não existe solução.

c) $\begin{cases} x - y = 10 \\ 2x - 2y = 20 \end{cases}$

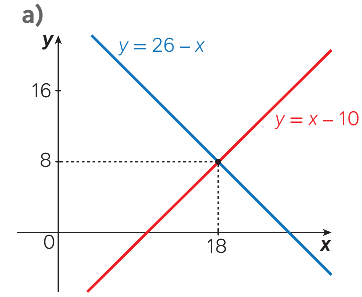
Dividimos os dois membros da segunda equação por 2:

$\begin{cases} x - y = 10 \\ x - y = 10 \end{cases} \Rightarrow y = x - 10$

Portanto, existem infinitas soluções.

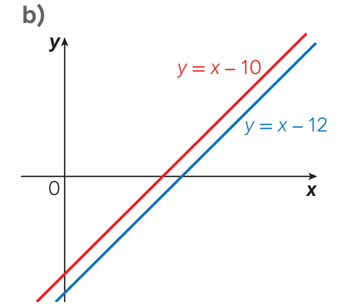
2.

a)



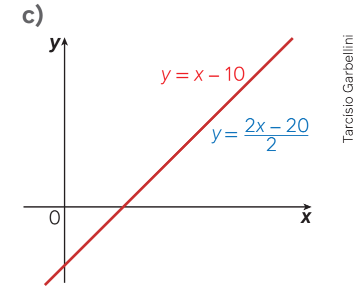
Tarcísio Garbellini

b)



Tarcísio Garbellini

c)



Tarcísio Garbellini

3. Sistema possível e determinado (apresenta uma única solução); sistema impossível (não apresenta solução); sistema possível e indeterminado (apresenta infinitas soluções). Em relação a isso, a interpretação geométrica é fundamental: duas retas concorrentes (somente um ponto em comum); duas retas paralelas (nenhum ponto em comum); duas retas coincidentes

Atividades

1.

a) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

Podemos adicionar as duas equações:

$4x = 16 \Rightarrow x = 4$

Substituímos x por 4, por exemplo, na primeira equação:

$2 \cdot 4 - y = 6 \Rightarrow y = 2$

Logo, a solução do sistema é (4, 2).

b) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

Logo, o sistema não admite solução, pois, por exemplo, ao subtrair essas duas equações membro a membro obtemos:

$0 = -4$ (impossível).

c) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

$y = 2x - 6$

Logo, o sistema admite infinitas soluções.

2.

a) Não, o sistema do item **b** não tem solução.

b) Sim, o sistema do item **c** tem infinitas soluções.

3.

a) $x = -1$

b) $y = -3$

c) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x - \ \ y = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Podemos multiplicar a segunda equação por (–1) e, depois, adicionar as equações obtidas:

$\begin{cases} 2x - y = \ \ 1 \\ -x + y = -2 \end{cases} \Rightarrow x = -1$

Substituímos x por –1, por exemplo, na segunda equação:

$-1 - y = 2 \Rightarrow y = -3$

Logo, a solução do sistema é (–1, –3).

4.

I. $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

Podemos isolar x na primeira equação e, depois, substituir na segunda equação:

$x - 3y = 0 \Rightarrow x = 3y$

Então: $2x + y = 0$

$2 \cdot 3y + y = 0 \Rightarrow y = 0$

Substituímos y por 0, por exemplo, na primeira equação:

$x = 3y \Rightarrow x = 3 \cdot 0 \Rightarrow x = 0$

Logo, a solução do sistema é $S = \{(0, 0)\}$.

II. $\begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases}$

Podemos multiplicar a primeira equação por $-\frac{1}{2}$ e, depois, adicionar as equações obtidas:

$\begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases}$

Então: $3y = 2x$

$y = \frac{2x}{3}$

Logo, o sistema admite infinitas soluções.

a) $S = \{(0, 0)\}$

b) Sim, pois para $x = 0$, temos $y = \frac{2x}{3} = \frac{2 \cdot 0}{3} = 0$

c) Infinitas soluções. Comente com os estudantes que, quando o sistema é linear e homogêneo, ele admite sempre a solução dita trivial, isto é, aquela em que todas as incógnitas são nulas.

5.

a) Temos o sistema:

$\begin{cases} 2x - \ \ y + \ \ z = 0 \\ \quad\ \ 3y + 2z = 0 \\ \qquad\quad\ 5z = 0 \end{cases}$

Da terceira equação, obtemos:

$5z = 0 \Rightarrow z = 0$

Substituímos z por 0 na segunda equação:

$3y + 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow y = 0$

Substituímos z por 0 e y por 0 na primeira equação:

$2x - 0 + 0 = 0 \Rightarrow x = 0$

Logo, a solução do sistema é (0, 0, 0) e, portanto, ele admite a solução trivial.

b) Apenas 1 solução (a trivial).

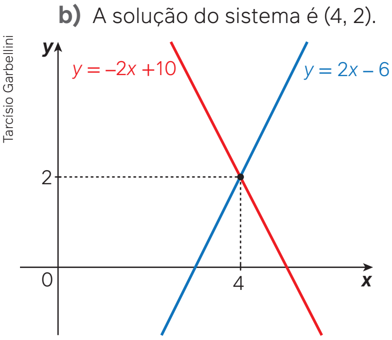
6. Exemplo de resposta:

Parte 1

a) $\begin{cases} x - \frac{y}{2} = 3 \\ x + \frac{y}{2} = 5 \end{cases}$

b) A solução do sistema é (4, 2).

Tarcísio Garbellini

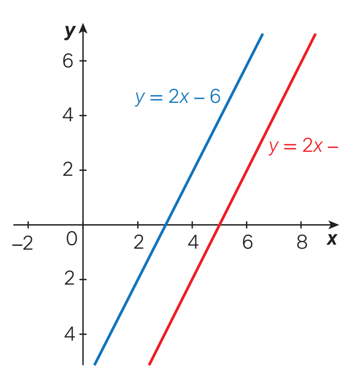


Parte 2

a) $\begin{cases} x - \frac{y}{2} = 3 \\ x - \frac{y}{2} = 5 \end{cases}$

b) O sistema não admite solução. Observe que as retas são paralelas, ou seja, não têm ponto em comum.

Tarcísio Garbellini

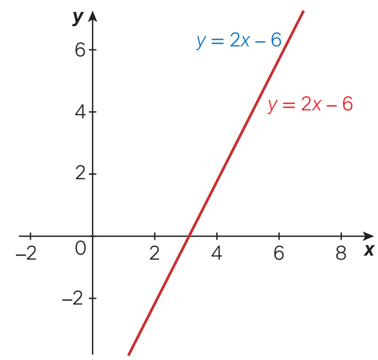


Parte 3

a) $\begin{cases} x - \frac{y}{2} = 3 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

b) O sistema admite infinitas soluções. As retas são coincidentes, isto é, têm infinitos pontos em comum.

Tarcísio Garbellini



7.

a) $50x + 20y + 10z = 100$

b) A cédula de 50 reais, pois, pelo contexto, só pode ter recebido 1 cédula de 50 reais.

c) Primeira possibilidade: 1 cédula de 50 reais; 1 cédula de 20 reais; 3 cédulas de 10 reais.

Segunda possibilidade: 1 cédula de 50 reais; 2 cédulas de 20 reais; 1 cédula de 10 reais.

8.

a) $\begin{cases} 50x + 20y + 10z = 100 \\ \ \ \ x + \ \ \ y + \ \ \ z = \ \ \ 4 \end{cases}$

Note que sabemos o valor de x.

$\begin{cases} 50 \cdot 1 + 20y + 10z = 100 \\ \quad\ 1 + \ \ \ y + \ \ \ z = \ \ \ 4 \end{cases}$

$\begin{cases} 20y + 10z = 50 \\ \ \ \ y + \ \ \ z = \ \ 3 \end{cases}$

b) Considerando o sistema inicial com duas equações e três incógnitas, a solução do sistema é (1, 2, 1); considerando o sistema com duas equações e duas incógnitas poderia ser (2, 1), uma vez que já é possível identificar a quantidade de cédulas de 50 reais.

A possibilidade de 1 cédula de 20 reais e 3 cédulas de 10 reais não é válida, pois seriam ao todo:

$1 + 1 + 3 = 5$; cédulas

9. Ao final da atividade recomenda-se que dois colegas troquem informações a respeito do enunciado e da resolução, fazendo ajustes se necessário.

10. Sistema I

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

Podemos multiplicar a primeira equação por (–2) e, depois, adicionar as equações obtidas:

$$\begin{cases} -2x - 2y = -10 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

$y = 3$

Substituímos y por 3, por exemplo, na primeira equação:

$x + 3 = 5 \Rightarrow x = 2$

Logo, a solução do sistema I é (2, 3).

Sistema II

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Sabemos que $y = 3$; então, substituímos esse valor na primeira equação:

$x + 3 = 5 \Rightarrow x = 2$

Logo, a solução do sistema II é (2, 3).

Portanto, os sistemas são equivalentes, pois ambos têm o mesmo conjunto-solução $S = \{(2, 3)\}$.

11. Dependerá dos sistemas elaborados pelos estudantes. Exemplo de resposta:

I. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = -4 \end{cases}$

A solução do sistema I é (0, 4).

II. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

A solução do sistema II é (0, 4).

12.

a) Seja x a quantidade de sucos e y a quantidade de sanduíches. Assim:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 16{,}80 \\ 3x + 4y = 30{,}40 \end{cases}$$

b) Resolvendo o sistema, obtemos o valor do suco e do sanduíche.

Podemos dividir os membros da primeira equação por 2 e, depois, isolar x.

$2x + 2y = 16{,}80$

$x + y = 8{,}40$

$x = 8{,}40 - y$

Agora, substituímos x por $8{,}40 - y$ na segunda equação:

$3(8{,}40 - y) + 4y = 30{,}40$

$25{,}20 - 3y + 4y = 30{,}40$

$y = 30{,}40 - 25{,}20$

$y = 5{,}20$

Por fim, calculamos o valor de x:

$x = 8{,}40 - y$

$x = 8{,}40 - 5{,}20$

$x = 3{,}20$

Portanto, o suco custa R$ 3,20 e o sanduíche custa R$ 5,20.

13.

a) Temos o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 2y + z = 6 \\ 2z = 8 \end{cases}$$

Resolvemos a terceira equação:

$2z = 8$

$z = \frac{8}{2}$

$z = 4$

Substituímos z por 4 na segunda equação:

$2y + 4 = 6 \Rightarrow y = 1$

Substituímos z por 4 e y por 1 na primeira equação:

$2x + 1 - 2 \cdot 4 = 10$

$x = \frac{17}{2}$

Logo, o conjunto-solução do sistema é $S = \left\{\left(\frac{17}{2}, 1, 4\right)\right\}$.

b) Espera-se que o estudante escreva que inicialmente determinou o valor de z na 3ª equação, substituiu esse valor na 2ª equação para obter y e, então, substituiu esses dois valores encontrados na 1ª equação para determinar o valor de x.

14. Para calcular o valor de k, substituímos a solução (1, 3, –2) na equação

$3x + ky - 2z = -14$

$3 \cdot 1 + k \cdot 3 - 2 \cdot (-2) = -14$

$3k = -14 - 7$

$k = -7$

Portanto, $k = -7$

15. Sejam x o PIB da Alemanha e y o PIB do Brasil. Podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 10x = 19y \\ x - y = 1{,}8 \end{cases}$$

Podemos multiplicar a segunda equação por (–10) e, depois, adicionar as equações obtidas:

$$\begin{cases} 10x = 19y \\ -10x + 10y = -18 \end{cases}$$

$10y = 19y - 18 \Rightarrow y = 2$

Alternativa **e**.

16. Sejam M o número de mulheres convidadas e H o número de homens convidados, podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} M + H = 132 \\ M = H + 26 \end{cases}$$

Substituindo a segunda linha na primeira temos:

$H + H + 26 = 132 \Rightarrow H = 53$

A empresa que está fazendo a organização cobra 50 reais. Assim, a empresa irá cobrar

$53 \cdot 50 = 2\,650$; R$ 2.650,00

Alternativa **b**.

17. Sejam x, y e z o número de mesas com 4, 5 e 6 lugares, respectivamente. Assim, podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x + 5y + 6z = 113 \\ x + y + z = 22 \\ z = 2y \end{cases}$$

Substituindo a terceira equação na primeira e na segunda, temos:

$$\begin{cases} 4x + 5y + 6 \cdot 2y = 113 \\ x + y + 2y = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 17y = 113 \\ x + 3y = 22 \end{cases}$$

Podemos multiplicar a segunda equação por (–4) e, depois, adicionar as duas equações:

$$\begin{cases} 4x + 17y = 113 \\ -4x - 12y = -88 \end{cases}$$

$17y - 12y = 113 - 88$

$y = 5$

Do sistema, inicial, temos que:

$z = 2y \Rightarrow z = 10$

Finalmente, podemos obter o valor de x:

$x + 5 + 10 = 22 \Rightarrow x = 7$

Alternativa **b**.

2. Resolução de sistemas de equações lineares

Página 106

Para pensar e discutir

1. Sim. Essa questão serve para que o estudante compreenda a disposição das incógnitas em um sistema.
2. No sistema I, nenhuma das incógnitas tem seus coeficientes nulos. Já no sistema II há 3 coeficientes nulos.
3. Resposta esperada: sistema II. A solução pode ser obtida determinando z na terceira equação ($z = 3$) e obtendo, considerando $z = 3$, o valor de y na segunda equação ($y = -1$). Conhecendo-se os valores de z e de y, substituímos esses valores na primeira equação para determinar o valor de x ($x = 2$). O conjunto-solução é $S = \{(2, -1, 3)\}$.

Página 107

Para pensar e discutir

1. Para $z = 2$ no sistema

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ \quad y - z = 5 \end{cases}$$

$y - 2 = 5 \Rightarrow y = 7$

Substituímos z por 2 e y por 7 na primeira equação:

$x - 3 \cdot 7 + 2 = 0 \Rightarrow x = 19$

Logo, a solução do sistema para $z = 2$ é (19, 7, 2).

2. Para $z = 0$, temos:

$y - 0 = 5 \Rightarrow y = 5$

Substituímos z por 0 e y por 5 na primeira equação:

$x - 3 \cdot 5 + 0 = 0 \Rightarrow x = 15$

Logo, a solução do sistema para $z = 0$ é (15, 5, 0).

3. Para $z = a$, temos, na segunda equação: $y - a = 5 \Rightarrow y = 5 + a$

$x - 3 \cdot (5 + a) + a = 0$

$x = 15 + 2a$

Portanto, para $x = a$, temos $y = 5 + a$ e $x = 15 + 2a$

4. O conjunto-solução do sistema, em função de a, é $S = \{(15 + 2a, 5 + a, a)\}$.

Peça aos estudantes que classifiquem o sistema apresentado na **atividade resolvida 5** com base na quantidade de soluções (nenhuma, uma ou infinitas soluções). O sistema possui infinitas soluções.

Página 109

Para pensar e discutir

1. Para obter x, basta substituir na equação $x + y + z = 215$ o valor de $y + z$ por 120 (conforme 3ª equação do sistema).

Para obter y, basta substituir na equação $x + y + z = 215$ o valor de $x + z$ por 170 (conforme 2ª equação do sistema).

Para obter z, basta substituir na equação $x + y + z = 215$ o valor de $x + y$ por 140 (conforme 1ª equação do sistema).

2. Uma forma escalonada do sistema é:

$$\begin{cases} x + y \qquad = 140 \\ \quad - y + \ z = \ \ 22 \\ \qquad\quad 2z = \ \ 90 \end{cases}$$

Para pensar e discutir

1. Para que x, y, z e w sejam números inteiros, é necessário que x, $\frac{7}{2}x$, $2x$ e $3x$ sejam números inteiros.

Logo, o coeficiente que acompanha $y = \frac{7}{2}x$ precisa ser divisível por 2 e, portanto, um número par.

2. A solução é (10, 35, 20, 30).

3. Considerando que as soluções são inteiras, o sistema pode ser resolvido ao comparar as equações e buscar os menores inteiros positivos que as satisfaçam.

Para explorar

Sistema I

$$\begin{cases} 2x + \ y - \ z = -3 \\ \ \ x - \ y + 2z = \ \ 2 \\ -x + 3y - 4z = -4 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2x + \ y - \ z = -3 \\ \ 0 + 3y - 5z = -7 \\ \ 0 + 2y - 2z = -2 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2x + \ y - \ z = -3 \\ \qquad 3y - 5z = -7 \\ \qquad -y - \ z = -1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2x + \ y - \quad z = -3 \\ \qquad 3y - \ 5z = -7 \\ \qquad\quad -2z = -4 \end{cases}$$

Pela terceira equação obteremos na segunda equação:

$3y - 5 \cdot 2 = -7 \Rightarrow y = 1$

Na primeira equação, obtemos:

$2x + 1 - 2 = -3 \Rightarrow x = -1$

Logo, o conjunto-solução é

$S = \{(-1, 1, 2)\}$.

Sistema II

$$\begin{cases} \ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - \ y + 4z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 5 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - 2y + 3z = \ \ 2 \\ 0 + \ 7y - 8z = -7 \\ \ 0 + 7y - 8z = \ \ 1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ \quad 7y - 8z = -7 \\ \qquad\qquad 0 = 8 \end{cases}$$

O sistema é impossível, pois obtivemos $0 = 8$.

Sistema III

$$\begin{cases} \ x + 2y - 2z = 5 \\ \ x - \ y + \ z = 2 \\ 2x + \ y - \ z = 7 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - 2z = \ \ 5 \\ \quad - 3y + 3z = -3 \\ \quad - 3y + 3z = -3 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + \ \ 2y - 2z = \ \ 5 \\ \qquad -3y - 3z = -3 \\ \qquad\quad 3 \qquad 0 = \ \ 0 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos:

$y = 1 + z$. Logo, o conjunto-solução é $S = \{(3, 1 + z, z)\}$.

1. O sistema III, ao ser escalonado, fica com duas equações e três incógnitas. Esse sistema tem infinitas soluções.

2. O sistema II. A conclusão é que esse sistema não admite solução.

3. Existem três possibilidades: admitir solução (sistema possível e determinado), admitir infinitas soluções (sistema possível e indeterminado), não admitir solução (sistema impossível).

Páginas 110-111

Atividades

A compreensão do escalonamento para a resolução de sistemas lineares é o grande objetivo destas atividades.

18.

a) $\begin{cases} \ x - 2y = 10 \\ 3x + \ y = \ \ 5 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 3x - 6y = 30 \\ 3x + \ \ y = \ \ 5 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 3x - 6y = 30 \\ \quad - 7y = 25 \end{cases}$

Resolvemos a segunda equação:

$y = -\frac{25}{7}$

Resolvemos a primeira equação:

$3x - 6 \cdot \left(-\frac{25}{7}\right) = 30$

$x = \frac{20}{7}$

Logo, o conjunto-solução do sistema é $S = \left\{\left(\frac{20}{7}, -\frac{25}{7}\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} \ x + y = 25 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 2x + 2y = 50 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 2x + 2y = 50 \\ \qquad 5y = 32 \end{cases}$

Resolvemos a segunda equação:

$y = \frac{32}{5}$

Resolvemos a primeira equação:

$2x + 2 \cdot \frac{32}{5} = 50$

$x = \frac{93}{5}$

Logo, o conjunto-solução do sistema é $S = \left\{\left(\frac{93}{5}, \frac{32}{5}\right)\right\}$.

c) $\begin{cases} \ x - \ y = 10 \\ 3x - 3y = 30 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y = 10 \\ x - y = 10 \end{cases}$

Então:

$y = x - 10$

Logo, o conjunto-solução do sistema é $S = \{(x, x - 10)\}$.

d) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 7 \\ 0 = 3 \end{cases}$

Logo, o sistema é impossível, pois obtivemos $0 = 3$.

19. Exemplo de resposta:

calça + camisa = R$ 120,00

calça + bermuda = R$ 190,00

bermuda + camisa = R$ 110,00

Sejam x o valor da calça, y o valor da camisa e z o valor da bermuda. Então:

$$\begin{cases} x + y = 160 \\ x + z = 190 \\ z + y = 110 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 160 \\ y - z = -30 \\ z + y = 110 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 160 \\ y - z = -30 \\ 2y = 80 \end{cases}$$

Resolvemos a terceira equação:

$2y = 80 \Rightarrow y = 40$

Resolvemos a segunda equação:

$40 - z = -30 \Rightarrow z = 70$

Resolvemos a primeira equação:

$x + 40 = 160 \Rightarrow x = 120$

Logo, o conjunto-solução do sistema é $S = \{(120, 70, 400)\}$ e, portanto, a calça custa R$ 120,00, a camisa custa R$ 40,00 e a bermuda custa R$ 70,00.

20.

a) Nessa situação, podemos escrever:

$xC_3H_8 + yO_2 \rightarrow zH_2O + wCO_2$

$$\begin{cases} 3x = w \\ 8x = 2z \\ 2y = z + 2w \end{cases}$$

b) Escrevendo cada incógnita em função de w, temos:

$3x = w$

$x = \dfrac{w}{3}$

$8 \cdot \dfrac{w}{3} = 2z$

$z = \dfrac{4w}{3}$

$2y = z + 2w$

$y = \dfrac{5w}{3}$

$S = \left\{\left(\dfrac{w}{3}, \dfrac{5w}{3}, \dfrac{4w}{3}\right)\right\}.$

Assim, fazendo $w = 3$, teremos $(1, 5, 4)$ como solução.

21.

a) Exemplo de resposta:

$xC_4H_9 + yO_3 \Rightarrow zH_3O + wCO_3$

Então: $\begin{cases} 4x = w \\ 9x = 3z \\ 3y = z + 3w \end{cases}$

b) Escrevemos cada incógnita em função de w.

$4x = w \Rightarrow x = \dfrac{w}{4}$

$9x = 3z \Rightarrow z = \dfrac{3w}{4}$

$3y = z + 3w \Rightarrow y = \dfrac{5w}{4}$

$S = \left\{\left(\dfrac{w}{4}, \dfrac{5w}{4}, \dfrac{3w}{4}\right)\right\}$

Assim, fazendo $w = 4$, teremos $(1, 5, 3)$ como solução.

22. $\begin{cases} 6x = y + 2z \\ 12x = 6z \\ 6x = 2y + z \end{cases} \sim \begin{cases} 6x = y + 2z \\ 2x = z \\ 6x = 2y + z \end{cases} \sim \begin{cases} y = 2x \\ 2x = z \\ 6x = y + z \end{cases}$

O sistema admite infinitas soluções. Logo, o conjunto-solução pode ser representado por $S = \{(x, 2x, 2x)\}$.

Os menores valores inteiros positivos ocorrem quando $x = 1$.

Portanto, nesse caso, o conjunto-solução é $S = \{(1, 2, 2)\}$.

23.

a) Considerando $z = 2k$, da segunda equação do sistema

$\begin{cases} x - 3y + 4z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$

$2y - 2k = 0 \Rightarrow y = k$

Da primeira equação, obtemos:

$x - 3k + 4 \cdot 2k = 0 \Rightarrow x = -5k$

Logo, para $z = 2k$, temos:

$S = \{(-5k, k, 2k)\}$.

b) Para $k = 2$, temos $S = \{(-10, 2, 4)\}$.

c) Com $y = 0$, temos $k = 0$; e com $k = 0$, temos $S = \{(0, 0, 0)\}$. Logo, esse sistema admite a solução trivial.

24. Sendo b e t, respectivamente, o preço de um bombom e o preço de uma trufa, podemos escrever o seguinte sistema na forma escalonada:

$\begin{cases} 25b + 15t = 107{,}5 \\ 20b + 45t = 185 \end{cases} \sim \begin{cases} 75b + 45t = 322{,}5 \\ 20b + 45t = 185 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 75b + 45t = 322{,}5 \\ 55b = 137{,}5 \end{cases}$

Da segunda equação, obtemos:

$b = 2{,}5$

Então, substituindo b por 2,5 na primeira equação, obtemos:

$75 \cdot 2{,}5 + 45t = 322{,}5 \Rightarrow t = 3$

Logo, um bombom custa R$ 2,50 e uma trufa custa R$ 3,00. Assim:

$4 \cdot 2{,}50 + 3 \cdot 3 = 10 + 9 = 19$; R$ 19,00.

Portanto, o estudante pagou R$ 19,00 em 4 bombons e 3 trufas.

Alternativa **a**.

25. Sejam x, y e z as questões que valem 1, 2 e 3 pontos, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 55 \\ x + y + z = 30 \\ y = x + 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 55 \\ 2y + z = 35 \\ x = y - 5 \end{cases}$$

Podemos, então, escrever x e z em função de y. Assim, temos:

$x = y - 5$ e $z = 35 - 2y$

Substituindo na primeira equação, obtemos:

$y - 5 + 2y + 3 \cdot (35 - 2y) = 55$

$y = 15$

Assim, temos que $x = 10$ e $z = 5$

Portanto, o aluno acertou 5 questões que valem 3 pontos.

Alternativa **e**.

26. Sejam A e B a quantidade de carros que valem, respectivamente, R$ 70.000,00 e R$ 50.000,00. A partir disso, temos:

$$\begin{cases} 70\,000A + 50\,000B = 7\,400\,000 \\ 70\,000\left(\frac{2}{5}A\right) + 50\,000\left(\frac{3}{5}B\right) = 3\,810\,000 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 7A + 5B = 740 \\ \frac{14}{5}A + \frac{3}{5}B = 381 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por (-5) e a primeira equação por 2, e adicionando as duas equações temos:

$14A + 10B + (-14A - 15B) = 1\,480 + (-1\,905) \Rightarrow B = 85$; 85 carros

Substituindo na primeira equação, temos:

$7A + 5 \cdot 85 = 740 \Rightarrow A = 45$; 45 carros

Assim, o total de carros na concessionária é de $85 + 45 = 130$, e foram vendidos no mês em questão

$\frac{2}{5} \cdot 45 + \frac{3}{5} \cdot 85 = 69$

$\frac{69}{130} \cdot 100 \cong 53$; 53% do estoque.

Alternativa **b**.

27. Adicionando as três equações do sistema, obtemos:

$(x - y) + (y + z) + (w - z) = 1 + 2 + 3$

$x + w = 6$

Adicionando com a segunda equação dada no sistema, temos:

$x + w + y + z = 6 + 2 = 8$

Alternativa **d**.

28. Sejam a, b e c a quantidade de comprimidos ingerida no mês pelos pacientes A, B e C, respectivamente.

$$\begin{cases} 10a + 12b + 15c = 2\,016 \\ a = \frac{b}{2} \\ a + b + c = 163 \end{cases}$$

Usando a condição da segunda equação, temos:

$$\begin{cases} 17b + 15c = 2\,016 \\ \frac{3b}{2} + \quad c = 163 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por (–15) e adicionando as duas equações obtemos:

$17b + 15c + \left(-\frac{45}{2}b - 15c\right) = 2\,016 - 2\,445$

$b = 78$; 78 comprimidos

$a = \frac{b}{2} = \frac{78}{2} = 39$; 39 comprimidos

$c = 163 - b - \frac{b}{2} = 163 - 78 - 39$

$c = 46$; 46 comprimidos

Portanto, o paciente C ingere 46 comprimidos por mês.

Alternativa **b**.

29. Sejam A, B e C as idades de Ana, Bia e Carla, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} B = C + 6 \\ B - 2 = 3(A - 2) \\ B + 1 = A + 1 + C + 1 \end{cases}$$

Utilizando a primeira e a segunda equações, podemos escrever A e C em função de B e substituir na terceira.

$C = B - 6$

$A = \frac{B - 2}{3} + 2$

$B + 1 = \left(\frac{B - 2}{3} + 2\right) + 1 + B - 6 + 1$

$B = 11$; 11 anos

$C = 11 - 6 = 5$; 5 anos

$A = \frac{11 - 2}{3} + 2 = 5$; 5 anos

Assim, Ana e Carla possuem a mesma idade.

Alternativa **e**.

30. Considere o sistema de equações lineares dado:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por (–2) e adicionando com a segunda equação, obtemos:

$2x + y - z + (-2x - 4y - 2z) = -3y - 3z = -15$

Multiplicando a primeira equação por (–3) e adicionando com a terceira equação, temos:

$3x - y - 2z + (-3x - 6y - 3z) = -7y - 5z = -31$

Substituindo as equações obtidas na segunda e na terceira linhas, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ -3y - 3z = -15 \\ -7y - 5z = -31 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 7, a terceira equação por (–3) e adicionando as duas obtemos:

$-21y - 21z + (21y + 15z) \Rightarrow z = 2$

Assim, substituindo z na segunda equação temos:

$-3y - 3(2) = -15 \Rightarrow y = 3$

Finalmente, substituindo os valores de y e z na primeira equação, obtemos:

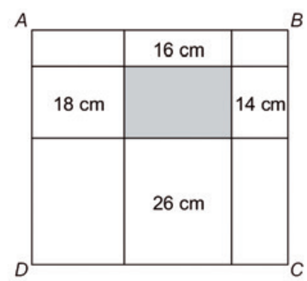
$x + 2 \cdot 3 + 2 = 9 \Rightarrow x = 1$

Ou seja, a terna (1, 3, 2) é solução desse sistema, e a soma dessas soluções é 6.

31. Como as três retas não possuem ponto que pertença simultaneamente às três retas, o sistema de equações não tem solução real.

Alternativa **d**.

32. Considere a figura abaixo:



Obmep, 2016

A partir dela, podemos definir os perímetros dos retângulos internos da seguinte forma:

$$\begin{cases} 2a + 2y = 18 \\ 2b + 2x = 16 \\ 2b + 2z = 26 \\ 2c + 2y = 14 \end{cases}$$

Note que, ao somar as 4 equações, temos:

$(2a + 2b + 2c + 2x + 2y + 2z) + 2b + 2y = 74$

$(2a + 2b + 2c + 2x + 2y + 2z)$ corresponde ao perímetro do retângulo $ABCD$ e $2b + 2y$ é o perímetro do retângulo cinza dentro da figura. Sabendo que o perímetro de $ABCD$ é de 54 cm, temos:

$(2a + 2b + 2c + 2x + 2y + 2z) + 2b + 2y = 74$

$54 + 2b + 2y = 74$

$2b + 2y = 20$; 20 cm

Portanto, o retângulo cinza tem perímetro de 20 cm.

Alternativa **c**.

Páginas 112-113

Análise e contexto

1. Depende da interpretação do estudante em relação à malha apresentada.

2. $\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 7I_1 + 3I_3 = 30 \\ 11I_2 - 3I_3 = 50 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ 7I_1 + 3I_3 = 30 \\ 11I_2 - 3I_3 = 50 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 7I_2 + 7I_3 + 3I_3 = 30 \\ 11I_2 - 3I_3 = 50 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por 3, a segunda equação por 10 e adicionando as duas obtemos:

$21I_2 + 30I_3 + 110I_2 - 30I_3 = 90 + 500$

$131I_2 = 590 \Rightarrow I_2 = \frac{590}{131}$ A

Substituindo o valor de I_2 obtido na segunda equação temos:

$11 \cdot \frac{590}{131} - 3I_3 = 50 \Rightarrow I_3 = -\frac{20}{131}$A

$I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow I_1 = \frac{570}{131}$A

Páginas 114-117

Atividades finais

1. Da segunda equação, temos que $y = \frac{12}{3} = 4$. Substituindo na primeira equação, obtemos:

$2x - 4 = 10 \Rightarrow x = 7$

Portanto, o sistema dado possui a solução $S = \{(7, 4)\}$, que é única.

2. Verificando se o par ordenado (3, –1) é solução da equação:

$1 \cdot (3) + 2 \cdot (-1) = 3 - 2 = 1$

$2 \cdot (3) - 5 \cdot (-1) = 6 + 5 = 11$

Sim, é solução do sistema, pois, ao substituir x e y por 3 e –1 verificam-se as igualdades.

3. Dois sistemas lineares são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto-solução.

4.

a) Sistema possível e determinado: uma solução.

b) Sistema possível e indeterminado: infinitas soluções.

c) Sistema impossível: nenhuma solução.

5. Como o sistema tem duas equações e três incógnitas, ele admite infinitas soluções.

6. O estudante concluiu que o sistema não tem solução devido à igualdade 0 = 10, que é absurda.

7.

a) O conjunto-solução é vazio, pois o sistema não apresenta soluções.

b) O sistema admite infinitas soluções.

c) O conjunto-solução é unitário, isto é, tem apenas um elemento (um par ordenado) correspondente à solução única desse sistema.

Questões de vestibulares e Enem

8. Da primeira equação, temos que

$x = \frac{74 - 3y}{2}$

Substituindo na segunda equação:

$3 \cdot \left(\frac{74 - 3y}{2}\right) - 2y = 20 \Rightarrow y = 14$

$x = \frac{74 - (3 \cdot 14)}{2} = 16$

$x - y = 16 - 14 = 2$

Alternativa **a**.

9. Sejam A e B os valores poupados por Ana e Beto, respectivamente, temos:

$\begin{cases} \frac{A}{B} = \frac{13}{7} \\ A - 90 = B + 90 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 7A - 13B = 0 \\ A - B = 180 \end{cases}$

Podemos escrever a primeira equação da seguinte forma:

$7A - 13B = 0 \Rightarrow 7 \cdot (A - B) - 6B = 0$

Substituindo a segunda equação na primeira, temos:

$7 \cdot (180) - 6B = 0$

$B = \frac{7 \cdot 180}{6}$

$B = 210$; R$ 210,00

Alternativa **d**.

10. Sejam S e E a quantidade de *pizzas* simples e especiais vendidas, respectivamente, temos:

$\begin{cases} 0{,}4S + 0{,}5E = 40 \\ 0{,}2S + 0{,}3E = 22 \end{cases}$

Multiplicando a segunda equação por (–2) e adicionando com a primeira equação, temos:

$-0{,}1E = -4$

$E = 40$; 40 *pizzas* especiais.

$0{,}4S + 0{,}5E = 40 \Rightarrow 0{,}4S + 0{,}5 \cdot 40 = 40$

$S = 50$; 50 *pizzas* simples

Alternativa **c**.

11. Sejam C, G e P a quantidade, disponível para adoção, de cachorros, gatos e patos, respectivamente, temos:

$\begin{cases} G + P = 4 + C \\ G + C = 6 + P \end{cases}$

Usando a primeira equação, podemos escrever P em função de G e C e substituir na segunda equação:

$P = 4 + C - G$

$G + C = 6 + (4 + C - G) \Rightarrow 2G = 10$

$G = 5$; 5 gatos

Alternativa **b**.

12. Sejam P, F e I as porções de pão, fruta e iogurte da dieta, temos:

$\begin{cases} 8P + 4I = 16 \\ 60P + 20F + 2I = 124 \\ 4P + 3I = 10 \end{cases}$

Multiplicando a terceira equação por (–2) e adicionando com a primeira equação, obtemos:

$-2I = -4 \Rightarrow I = 2$

Substituindo o valor de I na terceira equação, obtemos o valor de P:

$4P + 3 \cdot 2 = 10 \Rightarrow P = 1$

Finalmente, substituindo os valores de P e I na segunda equação, encontramos o valor de F:

$60 \cdot 1 + 20F + 2 \cdot 2 = 124$

$F = 3$

Portanto, a dieta recomendada para esta pessoa no café da manhã tem 1 porção de pão, 3 porções de fruta e 2 porções de iogurte.

13. Sejam A, B e C o número de motos, carros com 4 lugares e carros com 5 lugares, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} A + B + C = 19 \\ 2A + 4B + 5C - 5 = 61 \\ B = 2C \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por (–2) e adicionando com a segunda equação, obtemos:

$2A + 4B + 5C - 5 + (-2A - 2B - 2C) =$

$= 61 - 19 \cdot 2 \Rightarrow 2B + 3C = 28$

Pela terceira equação, podemos substituir B por $2C$:

$2 \cdot 2C + 3C = 28 \Rightarrow C = 4$; 4 carros com 5 lugares.

$B = 2 \cdot 4 \Rightarrow B = 8$; 8 carros com 4 lugares.

Finalmente, substituindo os valores de B e C na primeira equação, obtemos o valor de A:

$A + 8 + 4 = 19$

$A = 7$; 7 motos

Portanto, 7 motos participaram dessa viagem.

Alternativa **a**.

14. Sejam M e J a quantidade de ingressos vendidos para as atrações "O Mergulho da Sereia" e "Jurassic Aquarium", respectivamente, temos:

$$\begin{cases} M + J = 378 \\ 20M + 15J = 6\,700 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por (–15) e adicionando com a segunda equação, obtemos:

$20M + 15J + (-15M - 15J) = 6\,700 - 5\,670$

$M = 206$; 206 ingressos

Portanto, foram vendidos 206 ingressos para "O Mergulho da Sereia".

Alternativa **a**.

15. Pelo enunciado, temos:

$$\begin{cases} 2A + B + 3C = 3{,}2 \\ A + 2B + 2C = 2{,}5 \\ A + 3B + C = 2{,}3 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por (–2) e adicionando com a primeira equação, obtemos:

$2A + B + 3C - 2A - 4B - 4C = -1{,}8 \Rightarrow -3B - C = -1{,}8$

Multiplicando a equação obtida por (–1) temos: $3B + C = 1{,}8$.

Multiplicando a segunda equação por (–2) e adicionando com a primeira equação, obtemos:

$2A + B + 3C - 2A - 6B - 2C = -1{,}4$

$-5B + C = -1{,}4$

Multiplicando a equação obtida por (–1), temos: $5B - C = 1{,}4$.

Assim, temos:

$$\begin{cases} 2A + B + 3C = 3{,}2 \\ 3B + C = 1{,}8 \\ 5B - C = 1{,}4 \end{cases}$$

Adicionando a segunda e a terceira equações, obtemos:

$3B + C + (5B - C) = 1{,}8 + 1{,}4 \Rightarrow B = 0{,}4$; 0,4 kg

Substituindo o valor de B na segunda equação:

$3 \cdot 0{,}4 + C = 1{,}8 \Rightarrow C = 0{,}6$; 0,6 kg

Finalmente, substituindo os valores de B e C na primeira equação, temos:

$2A + 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}6 = 3{,}2 \Rightarrow A = 0{,}5$; 0,5 kg

Portanto, a massa total de 3 unidades do produto A, 5 unidades do produto B e 2 unidades do produto C é de:

$3A + 5B + 2C = 3 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}6 = 4{,}7$; 4,7 kg

Alternativa **c**.

16. Sejam a, b e c a quantidade adquirida de vacinas Alfa, Beta e Gama, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 5\,000\,000 \\ 5a + 10b + 20c = 40\,000\,000 \\ b = 3c \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por (–5) e adicionando com a segunda equação, obtemos:

$-5a - 5b - 5c + 5a + 10b + 20c = 40\,000\,000 - 25\,000\,000$

$5b + 15c = 15\,000\,000$

Da terceira equação, temos que $b = 3c$. Substituindo na equação obtida, temos:

$5 \cdot (3c) + 15c = 15\,000\,000$

$c = 500\,000$; 500 000 doses

Como $b = 3c$, $b = 3 \cdot 500\,000 = 1\,500\,000$; 1 500 000 doses.

Finalmente, substituindo os valores de b e c na primeira equação, temos:

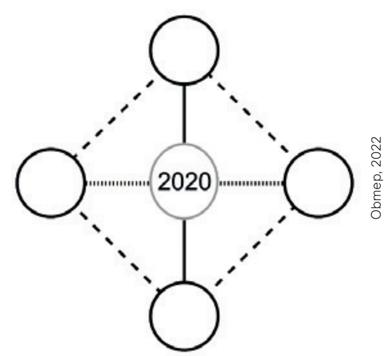
$a + 1\,500\,000 + 500\,000 = 5\,000\,000$

$a = 3\,000\,000$; 3 000 000 doses

Portanto, foram adquiridas 3 000 000 de doses da vacina alfa.

Alternativa **d**.

17. Sejam x, y, z e w os números em cada um dos círculos em branco, conforme a figura a seguir.



Então, pelo enunciado, temos:

$$\begin{cases} x + y + z + w = x + z + 2\,020 \\ x + y + z + w = y + w + 2\,020 \end{cases}$$

Adicionando as duas equações, temos:

$x + y + z + w + x + y + z + w = x + z + 2\,020 + y + w + 2\,020$

$x + y + z + w = 4\,040$

Portanto, a soma dos quatro números que Priscila escreveu é 4 040.

Alternativa **c**.

18. Sejam A, B e C a quantidade de figurinhas de André, Beto e Carlos, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{A + B + C}{3} = 332 \\ A + 45 + B = 490 \end{cases}$$

Da segunda equação, temos que:

$A + 45 + B = 490$

$A + B = 445$

Substituindo $A + B$ por 445 na primeira equação, temos:

$\frac{445 + C}{3} = 332 \Rightarrow C = 551$; 551 figurinhas

Alternativa **a**.

19. Sejam A e V os custos de um *ticket* unitário azul e vermelho, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 18A + 9V = 32{,}40 \\ A - 2V = 0{,}05 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 2, a segunda equação por 9 e adicionando as duas, temos:

$36A + 18V + 9A - 18V = 64{,}80 + 0{,}45 \Rightarrow A = 1{,}45$; R\$ 1,45

Assim, substituindo o valor de A na segunda equação, temos:

$1{,}45 - 2V = 0{,}05 \Rightarrow V = 0{,}70$; R\$ 0,70

$0{,}70 \cdot 9 = 6{,}30$; R\$ 6,30.

Alternativa **b**.

20. Considerando que x, y e z representem, respectivamente, o número de barras de 50 g, de 100 g e de 200 g a serem compradas, temos que a soma S deve ser mínima, isto é:

$S = 2x + 3{,}6y + 6{,}4z + 10$ (I)

Além disso, temos:

$2x + 4y + 6z = 12$ (II)

Como a solução será formada por valores inteiros para as incógnitas, uma maneira de resolver é atribuindo valores naturais às ternas (x, y, z):

(6, 0, 0), (4, 2, 0), (3, 0, 1), (2, 2, 0), (1, 1, 1), (0, 3, 0) e (0, 0, 2)

A terna que verifica as duas condições é (0, 3, 0). Então, temos:

$S = 2 \cdot (0) + 3{,}6 \cdot (3) + 6{,}4 \cdot (0) + 10$

$S = 20{,}8$; R\$ 20,80.

Alternativa **c**.

21. A meta de vendas para o mês é de 104 carros. Nos primeiros 6 dias, foram vendidos 18 carros. Para atingir a meta, é necessário vender $104 - 18 = 86$ carros.

Então, sejam x e y o número de dias em que são oferecidos os descontos mínimo e máximo, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 5y = 86 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por (–4) e adicionando as duas, temos:

$-4x - 4y + 4x + 5y = -80 + 86 \Rightarrow y = 6$

Então, para que a meta seja batida, o mínimo de dias em que a concessionária deve oferecer o desconto máximo para bater a meta mensal é de 6 dias.

Alternativa **a**.

22. Sejam A e E, respectivamente, o número de tiros certos e errados do participante, temos:

$$\begin{cases} A + E = 80 \\ 20A - 10E = 100 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 10 e adicionando com a segunda equação, temos:

$10A + 10E + 20A - 10E = 100 + 800 \Rightarrow A = 30$

Alternativa **a**.

23. Do enunciado, temos:

$$\begin{cases} \text{Verde} = X \text{ segundos} \\ \text{Amarelo} = 5 \text{ segundos} \\ \text{Vermelho} = \frac{3}{2}X \text{ segundos} \end{cases}$$

Pelo enunciado, a duração de um ciclo é dada por:

$Y = X + 5 + \frac{3X}{2} \Rightarrow 5X - 2Y + 10 = 0$

Alternativa **b**.

24. Sejam E, S e T os preços da estante, do sofá e da televisão, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} T + S = 3\,800 \\ S + E = 3\,400 \\ T + E = 4\,200 \end{cases}$$

Adicionando as 3 equações temos que: $2T + 2S + 2E = 11\,400$ (I)

Multiplicando a segunda equação por (–2) e adicionando com (I), temos:

$2T + 2S + 2E + (-2S - 2E) = 11\,400 + (-6\,800)$

$T = 2\,300$

Assim, substituindo na primeira equação, temos que:

$2\,300 + S = 3\,800 \Rightarrow S = 1\,500$

Substituindo o valor de T na terceira equação, obtemos o valor de E:

$2\,300 + E = 4\,200 \Rightarrow E = 1\,900$

Finalmente, sabendo que o cliente comprou 2 televisões e 1 sofá com 5% de desconto, temos que ele gastou:

$(2\,300 \cdot 2 + 1\,500) \cdot \frac{95}{100} = 61 \cdot 95 = 5\,795$; R\$ 5.795,00

Alternativa **d**.

25. Sejam a, f e m, respectivamente, os preços do quilo de arroz, de feijão e de macarrão, temos:

$$\begin{cases} 3a + 2f + 4m = 40 - 4 = 36 \\ 2a + 3f + 3m = 40 - 7{,}30 = 32{,}70 \\ 2a + 2f + 2m = 30 - 5{,}40 = 24{,}60 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da terceira, temos que:

$2a + 3f + 3m - 2a - 2f - 2m = 32{,}70 - 24{,}60$

$f + m = 8{,}10$

Multiplicando a primeira equação por 2, a segunda equação por (–3) e adicionando as duas, obtemos:

$6a + 4f + 8m + (-6a - 6f - 6m) = 72 - 73{,}80$

$f - m = 0{,}90$

Montando um novo sistema, temos:

$$\begin{cases} 3a + 2f + 4m = 36 \\ f + m = 8{,}10 \\ f - m = 0{,}90 \end{cases}$$

Adicionando a segunda equação e a terceira, temos que:

$2f = 9 \Rightarrow f = 4{,}50$; R\$ 4,50

Substituindo o valor de f na segunda equação, temos:

$4{,}50 + m = 8{,}10 \Rightarrow m = 3{,}60$; R\$ 3,60

Agora, para encontrar o valor de a, basta substituir f e m na primeira equação:

$3a + 2 \cdot 4{,}50 + 4 \cdot 3{,}60 = 36$

$a = 4{,}20$; R\$ 4,20

Finalmente, a vizinha de A, que lhe pediu que comprasse 1 quilo de arroz e 2 quilos de macarrão, precisa pagar para ele

$4{,}20 + 2 \cdot 3{,}60 = 4{,}20 + 7{,}20 = 11{,}40$; R\$ 11,40

Alternativa **c**.

CAPÍTULO 4

Análise combinatória

Objetivos

- Empregar o diagrama de árvore na resolução de problemas de contagem.
- Utilizar o princípio aditivo de contagem para resolver problemas.
- Utilizar o princípio multiplicativo de contagem para resolver problemas.
- Elaborar situações de contagem que possam ser resolvidas pelo princípio aditivo ou princípio multiplicativo.
- Diferenciar problemas de contagem em que a ordem dos elementos influencia no total de possibilidades daqueles problemas em que a ordem dos elementos não influencia.
- Calcular o número de possibilidades de ocorrência de um evento utilizando estratégias de arranjo, combinação, permutação simples e permutação com repetição.
- Construir o triângulo de Pascal e compreender propriedades entre os elementos correspondentes.

Justificativa

A construção de modelos empregando estratégias de cálculo em que a ordem dos elementos pode ou não influenciar o resultado permite resolver problemas de variados contextos que envolvem contagem dos elementos de determinado conjunto.

Competências gerais da BNCC

Competência geral 1: Na seção **Análise e contexto** das páginas 162 e 163, o triângulo de Pascal é abordado em uma perspectiva histórica, o que leva os estudantes a valorizar os conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar a realidade.

Competência geral 2: Ao longo deste capítulo, os estudantes exercitam a curiosidade intelectual por meio da investigação, da reflexão, da imaginação e da criatividade ao experimentarem possibilidades para resolver problemas que envolvem os diversos tipos de contagem. Eles elaboram e testam hipóteses a fim de elaborar formas de resolução para uma mesma classe de problemas. Isso fica evidente nas atividades propostas, por exemplo, na seção **Para pensar e discutir** da página 134, quando investigam possibilidades para o cálculo de permutações simples.

Competências gerais 4 e 9: Os estudantes utilizam diferentes linguagens, como a verbal (oral e escrita), visual e matemática para se expressar e partilhar informações, experiências e ideias. Isso ocorre por meio das atividades em duplas e em grupos que realizam ao longo do capítulo, por exemplo, na seção **Para explorar** da página 151. Os estudantes discutem, em grupos, quantas são as possibilidades para o total de placas de carros no atual sistema brasileiro e no antigo. Em seguida, comparam os dois sistemas e redigem um texto sobre as semelhanças e diferenças. Utilizam, assim, diferentes linguagens para se comunicar, como a verbal, além da matemática, o que mobiliza a **competência 4**. Como trabalham em grupos, desenvolvem também a **competência 9**, pois exercem a empatia, o diálogo, a cooperação e trabalham a resolução de conflitos.

Competência geral 5: Nas páginas 130 e 131, os estudantes utilizam uma calculadora para explorar o conceito de fatorial de um número. Desenvolvem, assim, essa competência ao utilizar uma tecnologia digital de forma significativa e reflexiva para produzir conhecimentos e resolver problemas.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competências específicas 3 e 4

EM13MAT310: Ao longo de todo o capítulo, os estudantes desenvolvem esta habilidade ao resolverem e elaborarem problemas de contagem que envolvem agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, usando os princípios multiplicativo e aditivo e recorrendo a estratégias diversas.

EM13MAT315 e **EM13MAT405:** Estas habilidades são mobilizadas por meio da atividade proposta na seção **Para pensar e discutir** da página 137. Os estudantes expressam, por meio de um algoritmo e de um fluxograma, o cálculo do número de permutações de n elementos.

Resoluções

Página 119

Abertura

1. Ao longo de uma hora, 60 voltas; ao longo de um dia, 60 x 24. São, portanto, 1 440 voltas ao longo de um dia.
2. A questão visa investigar o conhecimento prévio do estudante em relação ao cálculo combinatório. A resposta é: $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$, sendo n o número de estudantes da turma.
   Incentive-os a elaborar estratégias de cálculo e apresentá-las para a turma.
   Proponha que as questões sejam resolvidas em duplas ou em grupos, de modo que os estudantes tenham a oportunidade de discutir as estratégias usadas. Os problemas de contagem já foram trabalhados no Ensino Fundamental e aqui serão aprofundados e sistematizados. Aproveite esse momento para fazer um levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes. Você pode convidar professores de outras áreas do conhecimento, como Biologia, por exemplo, para fazer uma discussão com os estudantes acerca do uso da análise combinatória em problemas de sua área.

1. Princípios de contagem

Página 120

Para pensar e discutir

1. Nas unidades dos minutos, as trocas dos algarismos ocorrem do 0 até 9 por seis vezes, ou seja, são feitas 10 trocas seis vezes. Portanto, 60 trocas no intervalo de uma hora.
2. Nas dezenas dos minutos, as trocas dos algarismos ocorrem de 0 até 5 por seis vezes, ou seja, são feitas 6 trocas no intervalo de uma hora.
3. Nas unidades das horas, as trocas dos algarismos ocorrem do 0 até 9 por duas vezes, e de 0 até 3 uma única vez, ou seja, são feitas 10 trocas duas vezes e 4 trocas uma vez. Portanto, 24 trocas no intervalo de um dia.
4. Nas dezenas das horas, as trocas dos algarismos ocorrem de 0 até 2, ou seja, são feitas 3 trocas no intervalo de um dia.
5. Vimos que, no intervalo de uma hora, os algarismos das unidades dos minutos sofrem trocas 60 vezes, e os algarismos das dezenas dos minutos sofrem trocas 6 vezes, ou seja, juntas, são 66 trocas no total de uma hora. Assim, em um dia inteiro, eles sofrem trocas 1 584 ($24 \cdot 66$) vezes. E vimos que os algarismos das unidades das horas e das dezenas das horas sofrem trocas, respectivamente, 24 vezes e 3 vezes, ou seja, juntas elas totalizam 27 trocas em um dia.

   Assim, temos: $1584 + 27 = 1611$; 1 611 trocas.

Página 122

Para pensar e discutir

1. O ano de 2020 não entrou na contagem porque não se trabalhou ao longo dele.
2. Quando fazemos a diferença, tiramos o valor 1 998, por isso precisamos acrescentar 1 à quantidade de números que foram subtraídos.

Página 123

Para pensar e discutir

1. O símbolo $\varnothing$ representa o conjunto vazio. Esse conjunto não tem elementos, por isso dizemos que $n(\varnothing) = 0$.
2. Temos:

   $n(A) = 20$ $\quad$ $n(A \cup B) = 20$

   $n(B) = 14$ $\quad$ $n(A \cap B) = 14$
3. Quando todos os elementos do conjunto B são também elementos do conjunto A. Nesse caso, dizemos que B é subconjunto de A e representamos por $B \subset A$.

Páginas 124-125

Para pensar e discutir

1. Esse é um momento oportuno para que você observe se os procedimentos próprios dos estudantes seguem uma linha de raciocínio certa ou se cometem erros nas passagens. Para isso, é importante solicitar todas as passagens e analisar com eles cada uma delas.
2. Temos os significados a seguir.

   Estudantes que cursam somente Inglês: $20 - 6$.

   Estudantes que cursam as duas disciplinas: 6.

   Estudantes que cursam somente Espanhol: $12 - 6$.

   Estudantes que não cursam nem Inglês e nem Espanhol: 10.

Para pensar e discutir

1. Adicionam-se as possibilidades, pois os dois “eventos” são excludentes.
2. O resultado seria 12, pois é possível assistir a um filme e a uma peça de teatro. Nesse caso, os estudantes podem listar todas essas possibilidades:
   - filme 1 e peça 1, filme 1 e peça 2, filme 1 e peça 3;
   - filme 2 e peça 1, filme 2 e peça 2, filme 2 e peça 3;
   - filme 3 e peça 1, filme 3 e peça 2, filme 3 e peça 3;
   - filme 4 e peça 1, filme 4 e peça 2, filme 4 e peça 3.

Atividades

A **atividade 8** exigirá um pouco mais dos estudantes na interpretação da situação proposta. Proponha essa atividade como desafio para instigá-los a fazê-la.

1.

a) Seja n a quantidade de números naturais de 100 a 500. Sendo assim, temos:

$n = 500 - 100 + 1 = 401$; 401 números

b) Fazemos:
- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 1 modo (só pode ser o número 1);
- o segundo algarismo pode ser escolhido de 10 modos;
- o último algarismo pode ser escolhido de 10 modos.

$1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$; 100 números

c) Observe:
- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 4 modos;
- o segundo algarismo pode ser escolhido de 1 modo (só pode ser o número 9);
- o último algarismo pode ser escolhido de 10 modos.

$4 \cdot 1 \cdot 10 = 40$; 40 números naturais

d) Se o número não começar pelo algarismo 5:
- há 4 modos de selecionar o primeiro algarismo (1, 2, 3 ou 4);
- há 10 modos de selecionar o segundo algarismo (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ,7 ,8 ou 9);
- há 5 modos de selecionar o terceiro algarismo (0, 2, 4, 6 ou 8).

$4 \cdot 10 \cdot 5 = 200$; 200 números pares não começados por 5

Se o número começar por 5, há 1 modo de escolher o primeiro algarismo, 1 de escolher o segundo (deve ser o 0) e 1 de escolher o terceiro (que também deve ser o 0).

$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$; 1 número par começado por 5

$200 + 1 = 201$; 201 números pares

e) Queremos descobrir quantos números ímpares há nessa sequência. Vamos contar separadamente:
- há 4 modos de selecionar o primeiro algarismo (1, 2, 3 ou 4);
- há 10 modos de selecionar o segundo algarismo (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9);
- há 5 modos de selecionar o terceiro algarismo (1, 3, 5, 7 ou 9).

$4 \cdot 10 \cdot 5 = 200$; 200 números ímpares

Observação: desconsideramos o algarismo 5 no primeiro algarismo, pois só é possível formar o número 500, que é par.

2. A ideia é que os estudantes elaborem situações relacionadas à contagem de números observando certas condições. Esse tipo de atividade coloca os estudantes diante de situações nas quais eles precisam desenvolver estratégias de resolução.

3.

a) $n(A) = 102 + 36 = 138$; 138 elementos

b) $n(A) - n(A \cap B) = 138 - 36$; 102 elementos

c) $n(B) = 88 + 36 = 124$; 124 elementos

d) $n(B) - n(A \cap B) = 124 - 36 = 88$; 88 elementos

e) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = 138 + 124 - 36$

$n(A \cup B) = 226$; 226 elementos

4. Contando separadamente:

1ª coluna – a primeira pessoa tem 2 escolhas; a segunda tem 1, ou seja, $2 \cdot 1 = 2$; 2 maneiras;

2ª coluna – a primeira pessoa tem 3 escolhas; a segunda tem 2, ou seja, $3 \cdot 2 = 6$; 6 maneiras;

3ª coluna – a primeira pessoa tem 2 escolhas; a segunda tem 1, ou seja, $2 \cdot 1 = 2$; 2 maneiras.

Assim: $2 + 6 + 2 = 10$; 10 maneiras.

5.

a) São 13 times que vão disputar o campeonato em uma partida única, ou seja, cada time vai jogar 12 partidas.

Time 1 → Time 2
⋮
Time 13

$\underbrace{\boxed{1} . \boxed{12}}_{13 \text{ times}} = 12$ partidas

b) Sabemos que cada time vai disputar 12 jogos e são 13 times, ou seja, 156 ($12 \cdot 13$) partidas, mas estamos contando duas vezes os mesmos jogos; então, precisamos dividir por 2. Assim:

$\frac{12 . 13}{2} = \frac{156}{2} = 78$; 78 partidas

c) A pontuação será máxima se um dos times ganhar as 12 partidas. Como cada vitória vale 3 pontos: $12 \cdot 3 = 36$; 36 pontos.

6.

a) Seja n a quantidade de números naturais de 1 a 900. Sendo assim, temos:

$n = 900 - 1 + 1$

$n = 900$; 900 números naturais

b) Devemos considerar dois casos.

1º caso – O último algarismo é 0.

Primeiro, vamos considerar os números de 2 algarismos:

- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 3 modos (3, 6 ou 9);
- o último algarismo pode ser escolhido de 1 modo (deve ser 0).

$3 \cdot 1 = 3$; 3 números

A seguir, vamos considerar os números de 3 algarismos, em que o último algarismo é 0:

- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8);
- o segundo algarismo pode ser escolhido de 3 modos (3, 6 ou 9);
- o último algarismo pode ser escolhido de 1 modo (deve ser 0).

$8 \cdot 3 \cdot 1 = 24$; 24 números

Agora, vamos considerar os números de 3 algarismos, em que o último e o antepenúltimo algarismos são zero:

- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 3 modos (3, 6 ou 9);
- o segundo algarismo pode ser escolhido de 1 modo (deve ser 0);
- o último algarismo pode ser escolhido de 1 modo (deve ser 0).

$3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$; 3 números

2º caso – O último algarismo não é 0.

Primeiro, vamos considerar os números de 1 algarismo:

- há 3 modos de escolher (3, 6 ou 9).

Agora, vamos considerar os números de 2 algarismos:

- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9);
- o segundo algarismo pode ser escolhido de 3 modos (3, 6 ou 9).

$9 \cdot 3 = 27$; 27 números

Por fim, vamos considerar os números de 3 algarismos:

- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8);
- o segundo algarismo pode ser escolhido de 10 modos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9);
- o último algarismo pode ser escolhido de 3 modos (3, 6 ou 9).

Então: $8 \cdot 10 \cdot 3 = 240$; 240 números.

Desse modo, temos:

$3 + 24 + 3 + 3 + 27 + 240 = 300$; 300 múltiplos de 3

c) Contando separadamente.

Primeiro, vamos considerar os números de 1 algarismo (1 a 9):

- há 1 modo de escolher (apenas o 5).

Agora, vamos considerar os números de 2 algarismos (10 a 99):

- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9);
- o segundo algarismo pode ser escolhido de 2 modos (0 ou 5).

$1 \cdot 9 \cdot 2 = 18$; 18 números

Por fim, os números de 3 algarismos (100 a 899):

- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8);
- o segundo algarismo pode ser escolhido de 10 modos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9);
- o último algarismo pode ser escolhido de 2 modos (0 ou 5).

$8 \cdot 10 \cdot 2 = 160$; 160 números

Precisamos acrescentar mais um número, pois deixamos de fora o número 900.

$1 + 18 + 160 + 1 = 180$; 180 múltiplos de 5

d) Vamos usar PA (Progressão Aritmética) para resolver este item.

Sejam $a_1 = 7$, $r = 7$ e $a_n = 896$ (pois 896 é o último número múltiplo de 7).

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$896 = 7 + (n - 1) \cdot 7$

$896 = 7 + 7n - 7$

$896 = 7n \Rightarrow n = 128$; 128 múltiplos de 7

7. É importante que os estudantes confrontem as respostas e, em caso de dúvida, discutam-na com a turma.

8.

a) $S(44) = (44, 22, 11, 12, 6, 3, 4, 2, 1)$. O número de elementos de $S(44)$ é igual a 9.

b) $S(100) = (100, 50, 25, 26, 13, 14, 7, 8, 4, 2, 1)$.
O número de elementos de $S(100)$ é igual a 11.

9.

a) São 50 números pares.

b) São 50 números ímpares.

c) Ela utilizou exatamente 11 vezes o algarismo **zero**: 1**0**, 2**0**, 3**0**, 4**0**, 5**0**, 6**0**, 7**0**, 8**0**, 9**0** e 1**00**.

d) Ela utilizou exatamente 20 vezes o algarismo **dois**: **2**, 1**2**, **2**0, **2**1, **22**, **2**3, **2**4, **2**5, **2**6, **2**7, **2**8, **2**9, 3**2**, 4**2**, 5**2**, 6**2**, 7**2**, 8**2** e 9**2**.

10. Do total de 150 pessoas participantes da pesquisa temos:
pessoas com deficiência de vitamina C – 65;
pessoas com deficiência de vitamina D – 60;
pessoas com deficiência de vitaminas C e D – 23.
Assim, temos que:
$150 - 65 - 60 + 23 = 48$; 48 pessoas
Alternativa **e**.

11. Com as condições dadas, podemos dispor as possibilidades da senha do cartão de Ana da seguinte forma:

- 1 _ 3 3
- _ 3 3 1
- 3 3 1 _
- 3 3 _ 1
- 3 _ 3 1
- 3 1 _ 3

Para cada um dos espaços vazios, existem 8 possibilidades de números: 0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
$6 \cdot 8 = 48$; 48 possibilidades
Alternativa **a**.

12. Do enunciado, pode-se escolher:

Objeto	Cores disponíveis
caneta	azul, amarelo e vermelho
lápis	amarelo, laranja e verde
giz	azul, laranja, roxo, marrom e cinza

O total n de possibilidades para escolher uma caneta, um lápis e um giz:
$n = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$

Porém, como não queremos nenhuma repetição de cores devemos excluir 3 casos.

1º caso: Caneta azul e giz azul.

Ao escolher a caneta e o giz azuis, existem 3 opções de lápis que podem acompanhar essa combinação.

2º caso: Caneta amarela e giz amarelo.

Ao escolher a caneta e o lápis amarelos, existem 5 opções de giz que podem acompanhar essa combinação.

3º caso: Lápis laranja e giz laranja.

Ao escolher o lápis e o giz laranja, existem 3 opções de caneta que podem acompanhar essa combinação.

Portanto, das 45 possibilidades de escolha de caneta, lápis e giz, devemos excluir os três casos acima:

$45 - 3 - 5 - 3 = 34$; 34 possibilidades

Alternativa **a**.

13. São 6 possíveis caminhos do ponto P ao ponto Q.
1 – 2 – 4 – 10 – 11 – 13
1 – 2 – 5 – 9 – 11 – 13
1 – 2 – 5 – 12 – 13
1 – 2 – 6 – 13
1 – 2 – 7 – 8 – 13
1 – 2 – 3 – 8 – 13
Alternativa **c**.

14. Os números primos entre 0 e 20 são: $S = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.
Considere a fração $\frac{a}{b}$, onde $a, b \in S$ e $a < b$. Tome $a = 2$. Então, temos 7 possibilidades para o valor de b: 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19.
Com as mesmas condições da fração anterior, suponha que $a = 3$. Temos 6 possibilidades para o valor de b: 5, 7, 11, 13, 17 e 19.
De maneira análoga, pode-se concluir que substituindo o valor de a pelos próximos primos em S, no caso, 5, 7, 11, 13 e 17, teremos 5, 4, 3, 2 e 1 possibilidades de valores de b para montar a fração $\frac{a}{b}$.
$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$; 28 possibildades
Alternativa **c**.

Página 126

Para pensar e discutir

1. São 3 etapas: 1º lançamento, 2º lançamento e 3º lançamento.
2. Cada lançamento tem 2 possibilidades de ocorrência: cara ou coroa.
3. São 8 resultados possíveis: (cara, cara, cara), (cara, cara, coroa), (cara, coroa, cara), (cara, coroa, coroa), (coroa, cara, cara), (coroa, cara, coroa), (coroa, coroa, cara) ou (coroa, coroa, coroa).
Ou podemos usar o princípio multiplicativo, mesmo que intuitivamente: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.
4. São 4 resultados possíveis, considerando que o 1º lançamento deu cara: (cara, cara, cara), (cara, cara, coroa), (cara, coroa, cara), (cara, coroa, coroa).

Página 127

Para pensar e discutir

1. Possibilidade de resposta: Dos 900 números naturais de 100 a 999, devemos excluir todos os que tiverem exatamente 2 algarismos iguais e todos os que tiverem 3 algarismos iguais.
2. $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$

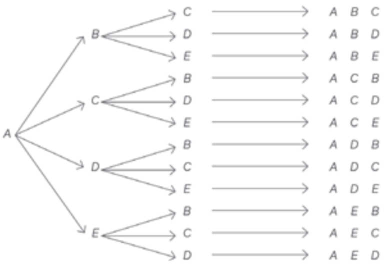
Páginas 128-130

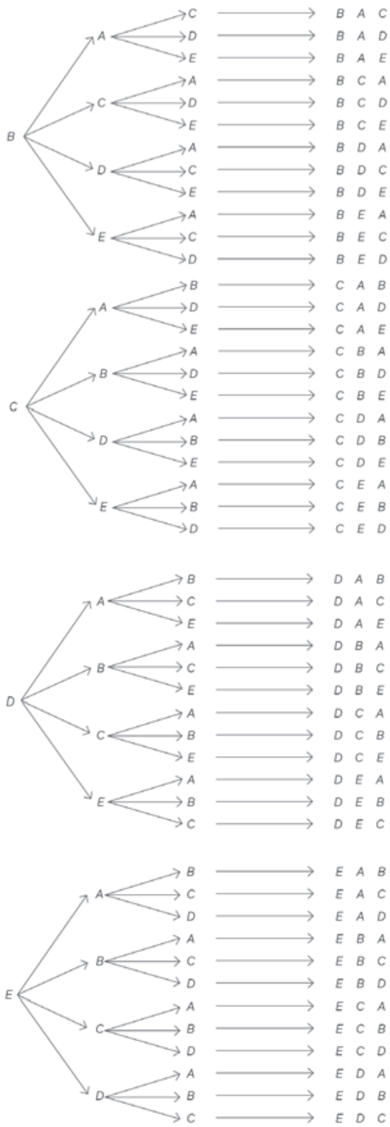
Podcast – Falando de análise combinatória

Apresente o *podcast Falando de análise combinatória* para os estudantes. Esse recurso didático explora como a análise combinatória pode ser utilizada no dia a dia, desde a escolha de senhas até o planejamento de viagens. O *podcast* discute as diferentes formas de agrupar elementos, como arranjos, permutações e combinações, e oferece exemplos práticos que podem facilitar a compreensão dos estudantes.

Para explorar

Exemplo de resposta:





Há 12 siglas começadas com cada letra (A, B, C, D, E)

$12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 5 \cdot 12 = 60$; 60 possibilidades

Atividades

O princípio fundamental da contagem deve ser bem compreendido para o estudo de análise combinatória. Por isso, é importante que a maioria dessas atividades seja realizada individualmente, como forma de avaliação. As discussões coletivas sobre as atividades permitirão verificar se os alunos compreenderam o conteúdo. Sugerimos que, caso alguns estudantes ainda apresentem dificuldades, sejam apresentadas outras resoluções similares antes de prosseguir.

15. Há 3 possibilidades de indicação de temperatura e 5 figuras.

$3 \cdot 5 = 15$; 15 maneiras

16. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$; $n = 16$

17.

a) $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$; 900 números

b) $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$; 648 números

c) $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$; 450 números pares

d) Vamos contar separadamente.

Se o número não terminar com o algarismo 0, há 8 modos de escolher o primeiro algarismo, há 8 modos de escolher o algarismo do meio e há 4 modos de escolher o último algarismo (2, 4, 6 ou 8).

$8 \cdot 8 \cdot 4 = 256$; 256 números

Se o número terminar com o algarismo 0, há 9 modos para escolher o primeiro algarismo, há 8 modos de escolher o segundo e 1 modo de escolher o último algarismo (deve ser 0).

$9 \cdot 8 \cdot 1 = 72$; 72 números

$256 + 72 = 328$; 328 números pares com algarismos distintos

e) $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$; 450 números ímpares

f) $8 \cdot 8 \cdot 5 = 320$; 320 números ímpares com algarismos distintos

18. Seguindo o mesmo raciocínio da atividade anterior, porém, com números de 4 algarismos, obtemos os resultados a seguir.

a) Pelo princípio multiplicativo:

$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$; 9 000 números

b) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$; 4 536 números

c) $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4\,500$; 4 500 números pares

d) No caso de 0 ser o primeiro algarismo.

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2\,520$; 2 520 números pares com algarismos distintos (incluindo os números começados por 0)

$1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 224$; 224 números pares com algarismo distintos começando com 0

$2\,520 - 224 = 2\,296$; 2 296 números pares com algarismos distintos

e) $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4\,500$; 4 500 números ímpares

f) $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2\,240$; 2 240 números ímpares com algarismos distintos

19.

a) $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^8$; 10^8 números de telefone

b) $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 10^4$; 10^4 números de telefone nos quais os últimos algarismos sejam 1234

20. Temos duas possibilidades de respostas (**V** ou **F**).

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} = 1\,024$; 1 024 maneiras

21. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^7$; $9 \cdot 10^7$ CEPs para a codificação de logradouros no Brasil

Alternativa **e**.

22. Vamos contar separadamente.

Se a barra do meio é escura:

- há 2 modos de escolher a cor da primeira barra;
- há 2 modos de escolher a cor da segunda barra;
- há 1 modo de escolher a cor da barra do meio (escura);
- há 1 modo de escolher a cor da quarta barra (deve ser igual à da segunda barra);
- há 1 modo de escolher a cor da última barra (deve ser igual à da primeira barra).

$2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

O enunciado diz para desconsiderar o caso de todas as barras serem escuras. Assim, temos: $4 - 1 = 3$, ou seja, 3 códigos na condição dada.

Se a barra do meio é clara:

- há 2 modos de escolher a cor da primeira barra;
- há 2 modos de escolher a cor da segunda barra;
- há 1 modo de escolher a cor da barra do meio (clara);
- há 1 modo de escolher a cor da quarta barra (deve ser igual à da segunda barra);
- há 1 modo de escolher a última barra (deve ser igual à da primeira barra).

$2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

O enunciado diz para desconsiderar o caso de todas as barras serem claras. Assim, temos: $4 - 1 = 3$, ou seja, 3 códigos na condição dada.

Portanto, 6 é a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à leitura da direita para a esquerda.

Alternativa **d**.

23. $5 \cdot 4 = 20$; 20 combinações de saia e blusa possíveis

Porém, como Maria não quer usar peças de mesma cor, devemos excluir duas combinações:

- saia e blusa azuis;
- saia e blusa pretas.

$20 - 2 = 18$; 18 combinações diferentes

Alternativa **c**.

24. Desejamos formar um número com três algarismos distintos entre 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 8.

$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$; 210 números

Alternativa **d**.

25. Temos de tratar dois casos.

1º caso: O algarismo do milhar é igual a 2.

Se o algarismo do milhar for igual a 2, temos:

- 1 possibilidade para a casa do milhar, o número 2;
- 5 possibilidades para a casa da centena, os números 5, 6, 7, 8 e 9;
- 8 possibilidades para a casa da dezena (é preciso excluir o 2 e o número da casa da centena);
- 7 possibilidades para a casa da unidade.

$1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 = 280$; 280 números de quatro algarismos distintos

2º caso: O algarismo do milhar não é igual a 2.

Caso o algarismo do milhar não seja igual a 2, temos:

- 7 possibilidades para a casa do milhar, os números 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
- 9 possibilidades para a casa da centena, já que só é preciso excluir o número escolhido da casa do milhar.

De maneira análoga, temos 8 possibilidades para a casa da dezena e 7 possibilidades para a casa da unidade.

$7 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 3\,528$; 3 528 números de 4 algarismos distintos

$280 + 3\,528 = 3\,808$; 3 808 possíveis combinações

Alternativa **b**.

26. João tem 5 camisas e 3 calças.

$5 \cdot 3 = 15$; 15 possíveis formas de se vestir

Porém, João não quer repetir as cores das peças de roupa. Assim, temos que excluir as seguintes combinações:

- camisa e calça azuis;
- camisa e calça pretas;
- camisa e calça brancas.

$15 - 3 = 12$; 12 maneiras diferentes para João se vestir

Alternativa **c**.

27. Entre letras e números, temos 16 possibilidades para cada um dos caracteres após o sustenido.

$16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 = 16^6 = (2^4)^6 = 2^{4 \cdot 6} = 2^{24}$;

2^{24} cores que podem ser representadas

Alternativa **e**.

28. Os cartões que admitem duas leituras são os cartões que possuem apenas os dígitos 6 e 9.

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$; 32 cartões que admitem duas leituras

Alternativa **a**.

29. $5 \cdot 3 = 15$; 15 possíveis formas de montar o computador

Alternativa **b**.

Página 131

Para pensar e discutir

1. $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$

$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

2. No visor da calculadora aparece a mensagem ERRO.

Página 132

Atividades

Todas as atividades exigem dos estudantes conhecimento de como manipular, em situações de cálculo, o fatorial de um número natural.

Escolha algumas dessas atividades para que eles as resolvam individualmente como verificação da aprendizagem.

30.

a) $1! = 1$ e $2! = 2 \cdot 1 = 2$

Portanto, existem dois números cujo fatorial é igual ao próprio número: 1 e 2.

b) $0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040 > 1\,000$

Portanto, são 7 números naturais cujo fatorial é menor que 1 000: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

31.

a) Falsa.

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \neq 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$24 + 120 \neq 362\,880$

$144 \neq 362\,880$

b) Falsa.

$(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) \neq 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$(24) \cdot (6) \neq 479\,001\,600$

$144 \neq 479\,001\,600$

c) Verdadeira.

$(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) + (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 2 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$

$120 + 120 = 2 \cdot 120$

$240 = 240$

d) Falsa.

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} \neq 2$

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \neq 2$

$1\,680 \neq 2$

32. $E = (3!)^2 + 2 \cdot 4! + (4 - 2!) + (2!)^{3!}$

$E = (3 \cdot 2 \cdot 1)^2 + 2 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) + (4 - 2 \cdot 1) + (2 \cdot 1)^{3 \cdot 2 \cdot 1}$

$E = 6^2 + 2 \cdot 24 + (4 - 2) + 2^6$

$E = 36 + 48 + 2 + 64 = 150$

33.

a) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$

b) $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10! = 14!$

c) $(k + 1) \cdot k \cdot (k - 1)! = (k + 1)!$

34.

a) $\frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 336$

b) $\frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4! \cdot 6!} =$

$= 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 210$

c) $\frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2\,730$

35.

a) $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = n \cdot (n-1) = n^2 - n$

b) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} =$

$= (n-1) \cdot (n-2) = n^2 - 3n + 2$

c) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{(n-1)!}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!} = \frac{1}{(n+1) \cdot n} = \frac{1}{n^2 + n}$

36. $E = \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+1)!}$

$E = \frac{(n+2) \cdot (n+1)! + (n+1)!}{(n+1)!}$

$E = \frac{(n+1)! \cdot [(n+2)+1]}{(n+1)!}$

$E = n + 2 + 1$

$E = n + 3$

37.

a) $\frac{x!}{(x-1)!} = 5!$

$\frac{x \cdot (x-1)!}{(x-1)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$x = 120$

b) $\frac{(x+1)! - x!}{(x-1)!} = 81$

$\frac{(x+1) \cdot x! - x!}{(x-1)!} = 81$

$\frac{[(x+1) - 1] \cdot x!}{(x-1)!} = 81$

$\frac{x \cdot x \cdot (x-1)!}{(x-1)!} = 81$

$x^2 = 81$

$x = 9$ ou $x = -9$ (não convém, pois x é um número natural)

Logo, $x = 9$.

2. Permutações

Página 133

Para pensar e discutir

1. Respostas esperadas: Em todas as fotografias, há um grupo de pessoas; em todos os grupos, há a mesma quantidade de pessoas.
2. Resposta esperada: Em duas dessas fotografias, há uma característica que não aparece nas outras duas – a ordem das pessoas formando uma sequência.

Página 134

Para pensar e discutir

1. Há 2 posições diferentes. Explicação esperada: $2 \cdot 1 = 2$
2. Há 6 posições diferentes. Explicação esperada: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
3. Há 24 posições diferentes. Explicação esperada: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
4. Há 120 posições diferentes. Explicação esperada: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Página 136

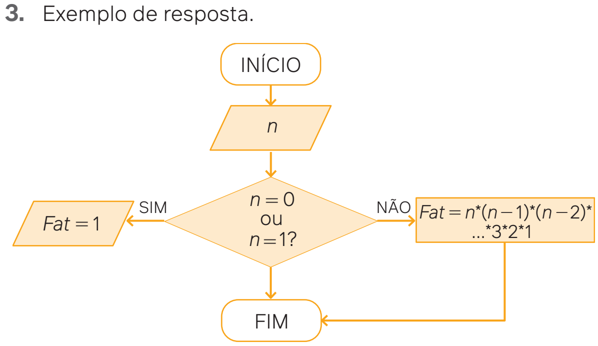
Para pensar e discutir

1. Iniciando por consoante, temos:
   $n = 2 \cdot P_4 \Rightarrow n = 2 \cdot 4! \Rightarrow n = 48$
2. Começando e terminando com uma vogal, temos:
   $n = 3 \cdot 2 \cdot P_3 \Rightarrow n = 6 \cdot 3! \Rightarrow n = 36$

Páginas 137-139

Para pensar e discutir

1. Basta, do total de permutações possíveis, excluirmos aquelas em que as três pessoas que usam bonés ficam juntas, ou seja: $P_6 - P_4 \cdot P_3 = 6! - 4! \cdot 3! = 720 - 144 = 576$.
2. Colocamos as pessoas com bonés nas posições ímpares (P_3) e as pessoas sem bonés nas posições pares (P_2). Como podemos inverter isso, temos:
   $P_2 \cdot P_3 \cdot P_3 = 2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$
3. Exemplo de resposta.



Acervo editora

Atividades

38. $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; 24 possibilidades

39.

a) $P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$; 3 628 800 maneiras

b) $2! \cdot P_8 = 2 \cdot 8! = 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$

$= 2 \cdot 40\,320 = 80\,640$; 80 640 maneiras

40. Exemplo de resposta: A palavra é PRÁTICO.

a) Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO?

$P_7 = 7! = 5\,040$

b) Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO que começam com consoantes?

$4 \cdot P_6 = 4 \cdot 6! = 2\,880$

c) Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO que começam com vogais?

$3 \cdot P_6 = 3 \cdot 6! = 2\,160$

d) Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO que começam e terminam com consoantes?

Há 4 maneiras de escolher a consoante inicial, 3 maneiras de escolher a consoante final e as 5 letras restantes podem ser arrumadas de P_5 modos.

$4 \cdot 3 \cdot P_5 = 4 \cdot 3 \cdot 5! = 1\,440$

41. Como são 3 grupos de 5 pessoas e em cada grupo as pessoas têm a mesma cor de camiseta, podemos ter:

$n = (3!) \cdot (5!)^3 \Rightarrow n = 6 \cdot 120^3 = 10\,368\,000$

42.

a) Para formar o maior número basta colocar os algarismos em ordem decrescente: 654 321.

b) Para formar o menor número basta colocar os algarismos em ordem crescente: 123 456.

c) $P_5 = 5! = 120$

d) $P_5 = 5! = 120$

e) Primeiro, vamos determinar quantos números podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

$P_6 = 6! = 720$

Agora vamos determinar todos os números **menores** que 452 316. Vamos contar separadamente. Vamos fixar o primeiro algarismo:

1 _ _ _ _ _ → $P_5 = 5! = 120$
2 _ _ _ _ _ → $P_5 = 5! = 120$
3 _ _ _ _ _ → $P_5 = 5! = 120$

Fixando o primeiro e o segundo algarismos:

4 1 _ _ _ _ → $P_4 = 4! = 24$
4 2 _ _ _ _ → $P_4 = 4! = 24$
4 3 _ _ _ _ → $P_4 = 4! = 24$

Fixando o primeiro, o segundo e o terceiro algarismos:

4 5 1 _ _ _ → $P_3 = 3! = 6$

Número cujo terceiro algarismo é 2, incluindo o número dado:

4 5 2 1 3 6 → 1
4 5 2 1 6 3 → 1
4 5 2 3 1 6 → 1

Agora, só resta contar os números **menores** que 452 316, incluindo esse número:

120 + 120 + 120 + 24 + 24 + 24 + 6 + 1 + 1 + 1 = 441

720 – 441 = 279; 279 números

f) Agora, vamos determinar todos os números **menores** que 345 612, contando separadamente.

Fixando o primeiro algarismo:

1 _ _ _ _ _ → $P_5 = 5! = 120$
2 _ _ _ _ _ → $P_5 = 5! = 120$

Fixando o primeiro e o segundo algarismos:

3 1 _ _ _ _ → $P_4 = 4! = 24$
3 2 _ _ _ _ → $P_4 = 4! = 24$

Fixando o primeiro, o segundo e o terceiro algarismos:

3 4 1 _ _ _ → $P_3 = 3! = 6$
3 4 2 _ _ _ → $P_3 = 3! = 6$

Agora, é preciso contar os números que faltam até o 345 261:

3 4 5 1 2 6 → 1
3 4 5 1 6 2 → 1
3 4 5 2 1 6 → 1
3 4 5 2 6 1 → 1

Agora, só resta contar os números **menores** que 345 612:

120 + 120 + 24 + 24 + 6 + 6 + 1 + 1 + 1 + 1 = 304;

304 números menores que 345 612

43.

a) São 3 posições (salada, prato quente, sobremesa) que os 3 grupos de alimentos ocuparão com permutação dentro de cada grupo. Então:

$P_3 \cdot P_5 \cdot P_4 = 3! \cdot 5! \cdot 4! = 6 \cdot 120 \cdot 24 = 17\,280$

b) $P_3 \cdot P_3 \cdot P_5 \cdot P_4 = 3! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 4! = 6 \cdot 6 \cdot 120 \cdot 24 = 103\,680$

44.

a) Primeiro, devemos escolher a ordem em que as letras *A* e *R* aparecerão. Há 2! modos. Depois, devemos arrumar em fila 6 objetos: o bloco das letras *AR* e as 5 letras *E*, *L*, *O*, *G*, *I*. Há 6! modos. Então:

2! · 6! = 1 440; 1 440 anagramas

b) Considere *AR* como uma única letra. Arrumando 6 objetos: *AR*, *E*, *L*, *O*, *G*, *I*. Então: 6! = 720; 720 anagramas.

c) Primeiro, devemos escolher a ordem em que as letras *A*, *R*, *G* aparecerão. Há 3! modos.

Depois, devemos arrumar em fila 5 objetos: o bloco das letras *ARG* e as 4 letras *E*, *L*, *O*, *I*.

Há 5! modos. Então:

3! · 5! = 720; 720 anagramas

d) Considere *ARG* como uma única letra. Arrumando 5 objetos: *ARG*, *E*, *L*, *O*, *I*.

5! = 120; 120 anagramas

45. Há 3! maneiras de se escolher as nacionalidades. As pessoas de mesma nacionalidade ficam juntas, ou seja, há 3! modos de organizar os brasileiros, 4! modos de organizar os americanos, 5! modos de organizar os mexicanos. Então:

3! · 3! · 4! · 5! = 103 680; 103 680 maneiras

46. Distribuindo os rapazes nos sofás: 3!.

Distribuindo as moças nos sofás: 3!.

Assim, lembrando que podemos alternar em cada sofá a posição do rapaz com a moça, temos:

$n = (3!) \cdot (3!) \cdot (2!) \cdot (2!) \cdot (2!)$

$n = 6 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$n = 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3!$

Alternativa **a**.

47. Carlos (*C*), Timóteo (*T*) e Joana (*J*) sempre estarão juntos em uma fila com 8 pessoas. Considere o exemplo abaixo de como eles estarão na fila: _ _ C T J _ _ _

$P_3 = 3!$ maneiras diferentes.

Ao longo da fila, esse grupo pode estar em 6 posições diferentes

C J T _ _ _ _ _ → $P_5 = 5! = 120$
_ C J T _ _ _ _ → $P_5 = 5! = 120$
_ _ C J T _ _ _ → $P_5 = 5! = 120$
_ _ _ C J T _ _ → $P_5 = 5! = 120$
_ _ _ _ C J T _ → $P_5 = 5! = 120$
_ _ _ _ _ C J T → $P_5 = 5! = 120$

E fixando uma posição qualquer desse grupo na fila, em uma ordem também fixada, as outras 5 pessoas do grupo podem estar em quaisquer das posições restantes da fila, ou seja, podem se organizar em $P_5 = 5!$ maneiras distintas.

$(3!) \cdot 6 \cdot (5!) = (6!) \cdot (3!)$.

Alternativa **c**.

48. Sejam os alunos *A*, *B* e *C* os que devem se sentar um ao lado do outro em uma fileira de sete carteiras. Considere o exemplo abaixo de como eles estarão sentados:

$\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}\ \_\ \_\ \_\ \_$

Nessa posição da fileira, eles podem se organizar de $P_3 = 3!$ maneiras diferentes.

Além disso, ao longo da fileira, esse grupo pode estar em 5 posições diferentes da fila:

$\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}\ \_\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_4 = 4! = 24$

$\_\ \underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_4 = 4! = 24$

$\_\ \_\ \underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}\ \_\ \_ \rightarrow P_4 = 4! = 24$

$\_\ \_\ \_\ \underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}\ \_ \rightarrow P_4 = 4! = 24$

$\_\ \_\ \_\ \_\ \underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C} \rightarrow P_4 = 4! = 24$

E fixando uma posição qualquer desse grupo na fileira, em uma ordem também fixada, os outros quatro alunos podem estar em quaisquer das posições restantes da fileira, ou seja, podem se organizar em $P_4 = 4! = 24$ maneiras distintas.

$3! \cdot 5 \cdot 4! = 5! \cdot 3! = 120 \cdot 6 = 720$

Alternativa **d**.

49. O total de formas de escrever os números da sequência $S = (3, 5, 7, 9)$ é $P_4 = 4! = 24$. Porém, temos duas restrições.

1ª restrição: 3 elementos consecutivos em ordem crescente. Entre os números da sequência *S*, existem as seguintes sequências com 3 números crescentes consecutivos:

$\underline{3}\ \underline{7}\ \underline{9}\ \underline{5}$

$\underline{3}\ \underline{5}\ \underline{7}\ \underline{9}$

$\underline{3}\ \underline{5}\ \underline{9}\ \underline{7}$

$\underline{5}\ \underline{7}\ \underline{9}\ \underline{3}$

$\underline{5}\ \underline{3}\ \underline{7}\ \underline{9}$

$\underline{9}\ \underline{3}\ \underline{5}\ \underline{7}$

$\underline{7}\ \underline{3}\ \underline{5}\ \underline{9}$

Assim, temos 7 sequências com essa restrição.

2ª restrição: 3 elementos consecutivos em ordem decrescente.

Entre os números da sequência *S*, existem as seguintes sequências com 3 números decrescentes consecutivos:

$\underline{9}\ \underline{7}\ \underline{5}\ \underline{3}$

$\underline{9}\ \underline{7}\ \underline{3}\ \underline{5}$

$\underline{9}\ \underline{5}\ \underline{3}\ \underline{7}$

$\underline{7}\ \underline{5}\ \underline{3}\ \underline{9}$

$\underline{3}\ \underline{9}\ \underline{7}\ \underline{5}$

$\underline{5}\ \underline{9}\ \underline{7}\ \underline{3}$

$\underline{7}\ \underline{9}\ \underline{5}\ \underline{3}$

Assim, temos 7 sequências com essa restrição.

$24 - 7 - 7 = 10$; 10 maneiras diferentes

Alternativa **c**.

50. Considere que Ana e Bruno sejam representados respectivamente pelas letras *A* e *B*. Dentro da *van*, eles podem sentar-se em 4 fileiras.

- Na fileira do motorista, como Ana não quer sentar-se ao lado do motorista, eles podem se sentar de apenas uma maneira.
- Na fileira com 3 lugares vazios, Ana e Bruno podem ocupar os bancos de duas formas:

  $\underline{A}\ \underline{B}\ \_$

  $\_\ \underline{A}\ \underline{B}$

  Como eles podem se sentar em qualquer ordem, eles podem se sentar de 4 maneiras diferentes.

  Como a *van* tem duas fileiras de 3 lugares, eles podem ocupar essas duas fileiras de 8 maneiras diferentes.
- Na fileira com 4 lugares, o casal pode se sentar de 3 maneiras diferentes:

  $\underline{A}\ \underline{B}\ \_\ \_$

  $\_\ \underline{A}\ \underline{B}\ \_$

  $\_\ \_\ \underline{A}\ \underline{B}$

  $1 + 8 + 6 = 15$; 15 maneiras diferentes

  Alternativa **e**.

51. A palavra APRENDIZ possui 8 letras distintas.

$P_8 = 8! = 40\,320$; 40 320 anagramas

Alternativa **b**.

52. Temos 5 pessoas lado a lado que vão posar para a foto, ou seja, temos $P_5 = 5! = 120$ maneiras de posicionar essas 5 pessoas. Entretanto, duas delas, *A* e *B*, não podem estar juntas. Essas duas pessoas podem estar lado a lado das seguintes maneiras diferentes:

$\underline{A}\ \underline{B}\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_3 = 3! = 6$

$\_\ \underline{A}\ \underline{B}\ \_\ \_ \rightarrow P_3 = 3! = 6$

$\_\ \_\ \underline{A}\ \underline{B}\ \_ \rightarrow P_3 = 3! = 6$

$\_\ \_\ \_\ \underline{A}\ \underline{B} \rightarrow P_3 = 3! = 6$

Como *A* e *B* podem se posicionar em $P_2 = 2! = 2$ maneiras diferentes, temos que existem:

$P_5 - 4 \cdot 2 \cdot 3! = 120 - 48 = 72$

Alternativa **b**.

53. Com os meninos ocupando as pontas da mesa, restam 4 lugares vagos para que as meninas possam se sentar. Assim, a quantidade de combinações possíveis para que eles possam se posicionar para a foto é dada por:

$P_2 \cdot P_4 = 2! \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48$

Alternativa **c**.

54. Podemos construir, com os números dados (2, 3, 4, 6, 7), um número de cinco algarismos distintos: $P_5 = 5! = 120$ maneiras diferentes

Vamos fixar um dos algarismos. Utilizando os algarismos restantes, podemos construir $P_4 = 4! = 24$ números distintos. Assim, analisando o número 62 437, temos que ele ocupa ao menos a posição 73, já que temos 24 números que começam com o algarismo 2, 24 que começam com o algarismo 3 e 24 que começam com o algarismo 4.

Como o 2 é o menor dos quatro algarismos restantes após o 6, temos $P_3 = 3! = 6$ números que podem ser construídos e o número 62 437 está entre as posições 73 e 78.

Entre os algarismos restantes para a casa da centena, o número 4 é maior do que o número 3, mas menor do que o número 7.

Assim, podemos definir que 62 437 está na posição 75 ou na posição 76. Como $62\,437 < 62\,473$, o número 62 437 está na posição 75.

Alternativa **a**.

55. Nessa linguagem, podemos ter palavras de 1 a 4 letras, sem nenhuma restrição de repetição de letras. Como eles possuíam apenas 3 letras disponíveis, temos:

_ → $3^1 = 3$; 3 palavras de uma letra;

_ _ → $3^2 = 9$; 9 palavras de duas letras;

_ _ _ → $3^3 = 27$; 27 palavras de três letras;

_ _ _ _ → $3^4 = 81$; 81 palavras de quatro letras.

Assim, nessa linguagem temos:

$3 + 9 + 27 + 81 = 120$; 120 palavras

Alternativa **e**.

Página 140

Para pensar e discutir

1. Considerando **c** diferente de **C**, temos $P_4 = 4! = 24$; 24 permutações possíveis.
2. Considerando **c** igual a **C**, devemos descartar todas aquelas em que são trocadas apenas as posições entre **c** e **C**.
3. Resposta esperada:

$$P_4^2 = \frac{P_4}{P_2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 12$$

Para pensar e discutir

1. Considerando todas as letras distintas, temos:
$P_5 = 5! = 120$; 120 anagramas possíveis.
2. Fixando a letra *O*, temos:
$\underline{O}\ \underline{O}\ \underbrace{\_\ \_\ \_}_{P_3} \rightarrow P_3 = 3! = 6$
3. Fixando a letra *S*, temos:
$\underline{S}\ \underline{S}\ \underline{S}\ \underbrace{\_\ \_}_{P_2} \rightarrow P_2 = 2! = 2$
4. $P_5^{2,3} = \dfrac{P_5}{P_2 \cdot P_3} = \dfrac{5!}{(2!) \cdot (3!)} = 10$, igual à quantidade do quadro.

Carrossel de imagens – Permutação

Apresente o carrossel de imagens *Permutação* para os estudantes. Esse recurso didático ilustra como as permutações estão presentes em diferentes situações do dia a dia, como em corridas de bicicleta, no jogo de xadrez e até na música. Cada imagem no carrosssel destaca a importância da ordem na disposição dos elementos, ajudando os estudantes a compreender o conceito de permutação de forma prática e visual.

Páginas 142-144

Atividades

Sugerimos que as três primeiras atividades sejam encaminhadas para resolução individual para você verificar se os estudantes assimilaram adequadamente o procedimento do cálculo envolvendo permutações com repetição.

56. $P_5^{3,1,1} = \dfrac{5!}{(3!) \cdot (1!) \cdot (1!)} = 20$

57.

a) AASS, ASSA, SSAA, SASA, ASAS, SAAS.

b) Permutação de 4 com 2 e 2 repetições.

$P_4^{2,2} = \dfrac{4!}{(2!) \cdot (2!)} = 6$

Portanto, podem ser formados 6 anagramas com as letras de ASAS.

58. São 10 anagramas:

AAARR, AARRA, ARRAA, RRAAA, RARAA, RAARA, RAAAR, ARARA, ARAAR, AARAR.

$P_5^{3,2} = \dfrac{5!}{(3!) \cdot (2!)} = 10$

59. $P_6^{4,1,1} = \dfrac{6!}{(4!) \cdot (1!) \cdot (1!)} = 30$; 30 possibilidades para ordená-las

60. Após a realização das atividades, você pode pedir que as duplas que não entraram em um consenso com relação à resolução exponham suas dúvidas para esclarecer eventuais pontos que podem estar dúbios para a turma.

61.

a) Uma sugestão: (*N*, *N*, *L*, *L*, *L*, *L*). Existem outros caminhos.

b) Permutação de 6 com 4 e 2 repetições:

$P_6^{4,2} = \dfrac{6!}{(4!) \cdot (2!)} = 15$; 15 caminhos diferentes

62. Visando trazer ludicidade para esta atividade, você pode organizar a sala de modo que as carteiras representem os quadrados laranja da **atividade 61**, determinar os pontos *A* e *B* comuns para todos os estudantes e solicitar que coloquem um objeto (que representará *P*); eles deverão anotar qual trajeto farão, realizar o trajeto e terão êxito se cumprirem o trajeto anotado: partindo de *A*, passando por *P* e chegando em *B*.

63. Permutação de 12 com 7 e 5 repetições:

$P_{12}^{7,5} = \dfrac{12!}{(7!) \cdot (5!)} = 792$; 792 caminhos diferentes

Alternativa **d**.

64. Do enunciado, temos as seguintes informações: Um sistema luminoso, constituído de 8 módulos, cada módulo com 3 lâmpadas de cores diferentes. Uma mensagem é composta de uma sequência configurada pelo acendimento simultâneo de 3 lâmpadas vermelhas, 2 verdes e 1 amarela, permanecendo 2 módulos com as 3 lâmpadas apagadas. Existem 8 permutações com 3, 2, 1 e 2 repetições, isto é:

$P_8^{3,2,1,2} = \dfrac{8!}{(3!) \cdot (2!) \cdot (1!) \cdot (2!)} = 1\,680$; 1 680 mensagens distintas

65. Como a palavra PET tem de estar em todas as senhas, as senhas possíveis são dadas pela permutação de 5 com 2 repetições:

$P_5^2 = \dfrac{5!}{2!} = 60$; 60 senhas

Alternativa **e**.

66. O total de anagramas da palavra NATURAL é dado pela permutação de 7 com 2 repetições:

$P_7^2 = \dfrac{7!}{2!} = 2\,520$

Desses 2 520 anagramas, queremos excluir todos aqueles que possuem as letras T, U e R juntas e em qualquer ordem, cuja quantidade é dada por:

$P_3 \cdot P_5^2 = \frac{5!}{2!} \cdot 3! = 60 \cdot 6 = 360$; 360 anagramas com as letras T, U e R juntas e em qualquer ordem

$2\,520 - 360 = 2\,160$; 2 160 anagramas

Alternativa **c**.

67. O total de anagramas dessa palavra que começa com a sequência FLORES é dado pela permutação de 9 com 2 e 2 repetições:

$P_9^{2,2} = \frac{9!}{(2!) \cdot (2!)}$

Alternativa **c**.

68. O total de anagramas da palavra MEDICINA é dado pela permutação de 8 com 2 repetições:

$P_8^2 = \frac{8!}{2!} = 20\,160$; 20 160 anagramas

Alternativa **d**.

69. O total de menores caminhos possíveis do ponto A ao ponto C é dado pela permutação de 6 com 3 e 3 repetições:

$P_6^{3,3} = \frac{6!}{(3!) \cdot (3!)} = 20$

E o total de menores caminhos de C até B é dado pela permutação de 6 com 2 e 4 repetições:

$P_6^{4,2} = \frac{6!}{(4!) \cdot (2!)} = 15$

Assim, o total de caminhos menores de A até B é dado por:

$20 \cdot 15 = 300$

Alternativa **d**.

3. Formando agrupamentos

Página 145

Para pensar e discutir

1. Como são 11 pilotos disputando, qualquer um deles teoricamente tem possibilidade de ocupar o 1º lugar. Assim, há 11 possibilidades.

2. Sabendo qual piloto é o 1º colocado, temos 10 possibilidades para o 2º colocado.

3. Podemos determinar o total de possibilidades da seguinte maneira: $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55\,440$.

Portanto, 55 440 é o total de possibilidades.

Página 146

Para pensar e discutir

1. O significado da palavra **arranjo** está associado a “pôr em ordem”, “dispor em certa colocação”.

2. $A_{11,5} = \frac{11!}{(11-5)!} = 55\,440$

Página 147

Para pensar e discutir

1. $n = k \Rightarrow A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$

2. Permutação simples de n elementos nada mais é do que o arranjo simples desses n elementos tomados n a n.

Páginas 148-150

Atividades

70.

a) Dado que a senha começa pelo dígito 0, restam cinco dígitos entre nove números possíveis. Assim, a quantidade de senhas possíveis é dada por $A_{9,5}$.

b) Como queremos que ela comece por um número par, isto é, por 0, 2, 4, 6 ou 8, temos cinco opções. Portanto, o total de senhas que se inicia com um número par é dado por $5 \cdot A_{9,5}$.

c) Vamos fixar dois números da senha:

- 5 possibilidades para o primeiro dígito (0, 2, 4, 6 e 8);
- 5 possibilidades para o último dígito (1, 3, 5, 7 e 9).

Portanto, retirados um número para o primeiro dígito e um número para o último, restam oito números para preencher quatro posições. Assim, a quantidade de senhas que têm o primeiro dígito par e o último ímpar é dada por $5 \cdot 5 \cdot A_{8,4} = 25 \cdot A_{8,4}$.

71.

a) $A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 90$

b) $A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 336$

72.

a) $A_n^3 = 120 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 120$

$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}{(n-3)!} = 120$

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \Rightarrow n = 6$

b) $A_n^2 = 3 \cdot n + 5 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 3n + 5$

$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = 3n + 5$

$n \cdot (n-1) = 3n + 5$

$n^2 - n = 3n + 5$

$n^2 - 4n - 5 = 0$

$n = 5$ ou $n = -1$ (não convém)

Logo, $n = 5$.

73.

a) Há 7 pessoas para ocupar a primeira cadeira; há 6 pessoas para ocupar a segunda cadeira; e há 5 pessoas para ocupar a terceira cadeira.

$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$; 210 maneiras

b) $A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 210$; 210 maneiras

Portanto, esse problema poderia ser resolvido utilizando arranjos simples.

74.

a) Sim, pois em problemas de arranjos simples qualquer mudança na ordem dos elementos altera o agrupamento.

b) $A_{5,5} = \dfrac{5!}{(5-5)!} = \dfrac{5!}{0!} =$

$= \dfrac{5!}{1} = 5! = P_5$

Portanto, o cálculo de P_5 pode ser feito por meio de arranjo simples, pois $A_{5,5} = P_5$.

75.

a) O candidato pode escolher suas opções de curso de 132 maneiras.

b) Pelo princípio multiplicativo:

$12 \cdot 11 = 132$

c) Por meio de arranjo:

$A_{12,2} = \dfrac{12!}{(12-2)!} =$

$= \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} = 132$

76. Exemplo de situação: Nosso grupo tem 6 estudantes – Ana, Bruno, Carla, Daniel, Eduardo e Fernanda. Queremos saber de quantas maneiras diferentes podemos organizar 4 cadeiras, uma ao lado da outra, ocupadas por 4 dos 6 estudantes.

$A_{6,4} = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!} = 360$

A outra dupla resolve o problema e, ao comparar os resultados, todos chegam ao mesmo valor: 360 maneiras diferentes.

77.

a) Há 10 modos de obter o primeiro colocado; 9 modos de obter o segundo colocado; e 8 modos de obter o terceiro colocado. Assim:

$A_{10,3} = \dfrac{10!}{(10-3)!} =$

$= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$

Portanto, são 720 maneiras de obter o primeiro colocado.

b) Se Ricardo não está entre os 3 primeiros colocados, há 9 modos de obter o primeiro colocado; 8 modos de obter o segundo colocado; e 7 modos de obter o terceiro colocado. Assim:

$A_{9,3} = \dfrac{9!}{(9-3)!} =$

$= \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 504$

Portanto, são 504 maneiras de Ricardo não estar entre os três primeiros colocados.

c) Se Ricardo está entre os 3 primeiros colocados, ele está em primeiro, segundo ou terceiro colocado. Para cada uma das possibilidades temos sempre $A_{9,2}$ de configurações possíveis para as outras duas colocações.

$3 \cdot A_{9,2} = 3 \cdot \dfrac{9!}{(9-2)!} =$

$= 3 \cdot \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 3 \cdot 72 = 216$

Portanto, são 216 maneiras.

78. Vamos determinar quantos números de 5 algarismos distintos formados por {1, 3, 5, 7, 9} são **menores** que 75 913, contando separadamente, fixando:

o primeiro algarismo.

$\underline{1}\,\_\,\_\,\_\,\_ \rightarrow P_4 = 4! = 24$

$\underline{3}\,\_\,\_\,\_\,\_ \rightarrow P_4 = 4! = 24$

$\underline{5}\,\_\,\_\,\_\,\_ \rightarrow P_4 = 4! = 24$

o primeiro e o segundo algarismos.

$\underline{7}\,\underline{1}\,\_\,\_\,\_ \rightarrow P_3 = 3! = 6$

$\underline{7}\,\underline{3}\,\_\,\_\,\_ \rightarrow P_3 = 3! = 6$

o primeiro, o segundo e o terceiro algarismos.

$\underline{7}\,\underline{5}\,\underline{1}\,\_\,\_ \rightarrow P_2 = 2! = 2$

$\underline{7}\,\underline{5}\,\underline{3}\,\_\,\_ \rightarrow P_2 = 2! = 2$

Agora, só resta contar os números:

$\underline{7}\,\underline{5}\,\underline{9}\,\underline{1}\,\underline{3} \rightarrow 1$

$24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 + 1 = 89$

Portanto, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é 89.

Alternativa **e**.

79. Há 26 modos de escolher a primeira letra; 25 modos de escolher a segunda letra; 24 modos de escolher a terceira letra e 23 modos de escolher a quarta letra. Logo:

$A_{26,4} = \dfrac{26!}{(26-4)!} =$

$= \dfrac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22!}{22!} = 358\,800$

Portanto, são 358 800 maneiras.

80. Deseja-se obter um número de 3 algarismos distintos a partir do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8}, que possui 7 algarismos. Então, temos que:

$A_{7,3} = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} =$

$= 210$; 210 números

Alternativa **d**.

81. Da viagem para Salvador, temos 4 fotos para 3 posições. Assim:

$A_{4,3} = \dfrac{4!}{(4-3)!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} =$

$= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Da viagem para o Jalapão, temos 5 fotos para 3 posições.

$A_{5,3} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} =$

$= 5 \cdot 4 \cdot 3$

Analogamente, da viagem para o Rio de Janeiro, temos 5 fotos para 3 posições, portanto, $5 \cdot 4 \cdot 3$ maneiras de organizar as fotos.

Como temos 3 linhas que esses conjuntos de fotos podem ocupar, temos $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ possibilidades para isso.

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 =$

$= (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) =$

$= (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot (3! \cdot 3!) =$

$= (5!) \cdot (5!) \cdot (3!) \cdot (3!) = (5!)^2 \cdot (3!)^2$

Alternativa **b**.

82. Temos 40 lugares para 25 turistas. Assim, o total de maneiras que os turistas podem se sentar no ônibus é dado pelo seguinte arranjo:

$A_{40,25} = \dfrac{40!}{(40-25)!} = \dfrac{40!}{15!}$

Alternativa **a**.

83. Seja x o total de pessoas na reunião. Assim, temos que o total de possibilidades para escolher 3 pessoas para os cargos do sindicato é dado pelo arranjo:

$A_{x,3} = \dfrac{x!}{(x-3)!} =$

$= \dfrac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)!}{(x-3)!} =$

$= x \cdot (x-1) \cdot (x-2)$

$30 \cdot x = x \cdot (x-1) \cdot (x-2)$

$x^2 - 3x + 2 - 30 = 0$

$x^2 - 3x - 28 = 0$

Resolvendo a equação de segundo grau acima, temos que $x = 7$ ou $x = -4$ (não convém), logo são 7 pessoas.

Alternativa **d**.

84. **Afirmação I:** Correta, o total de possibilidades é dado por $8 \cdot 7 \cdot 6$.

Afirmação II: Correta, utilizando arranjos, temos que:

$A_{8,3} = \dfrac{8!}{(8-3)!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} =$

$= 8 \cdot 7 \cdot 6$

Afirmação III: Correta. Fixando a Pediatria como especialidade, restam 7 especialidades para 2 escolhas, com o total de possibilidades dado pelo arranjo $A_{7,2}$.

Afirmação IV: Correta, excluindo a Pediatria, restam 7 especialidades para 3 escolhas, com o total de possibilidades dado pelo arranjo $A_{7,3}$.

Todas as afirmações estão corretas.

Alternativa **a**.

85. Para saber quantas partidas serão disputadas, basta calcular a combinação de 20 clubes combinados 2 a 2:

$C_{20,\,2} = \dfrac{20!}{(20-2)! \cdot 2!} =$

$= \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{(18!) \cdot (2!)} = 10 \cdot 19 = 190$

Como são dois turnos, o total é o dobro de partidas: $190 \cdot 2 = 380$.

Sabendo que houve 126 empates, o total de jogos com um vencedor é:

$380 - 126 = 254$; 254 jogos

Alternativa **c**.

86. As duas salas de cirurgia ocupadas por ortopedistas podem ser ocupadas de duas maneiras, $A_{2,\,2}$. Portanto, restam 6 cirurgiões para ocupar as outras 3 salas, com $A_{6,\,3}$ possibilidades de ocupação. Assim:

$A_{2,\,2} \cdot A_{6,\,3} = \dfrac{2!}{(2-2)!} \cdot \dfrac{6!}{(6-3)!} =$

$= \dfrac{2!}{0!} \cdot \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 240$

Alternativa **b**.

87. Para cada gênero dessa *playlist* de 25 músicas, temos que escolher 5 músicas entre 10. Assim, podemos montar o seguinte arranjo para determinar de quantas maneiras é possível escolher essas músicas:

$A_{10,\,5} = \dfrac{10!}{(10-5)!} =$

$= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 30\,240$

E, para cada gênero que será encaixado na *playlist*, como um será tocado na sequência do outro, temos 5 gêneros para 5 posições:

$A_{5,\,5} = \dfrac{5!}{(5-5)!} = \dfrac{5!}{0!} = 5! = 120$

Portanto, o total de maneiras que essa *playlist* de 25 músicas pode ser montada é de:

$30\,240 \cdot 30\,240 \cdot 30\,240 \cdot 30\,240 \cdot$
$\cdot\, 30\,240 \cdot 120 = (30\,240)^5 \cdot 120$

Alternativa **e**.

Página 151

Para explorar

1. Cada letra pode ser escolhida de 26 modos e cada algarismo de 10 modos.

Pelo princípio multiplicativo:

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$
$= 175\,760\,000$

Portanto, podem ser formadas 175 760 000 placas nesse sistema.

2.

a) As posições do algarismo e das letras nesse sistema de emplacamento são: letra; letra; letra; número; letra; número; número.

b) Cada letra pode ser escolhida de 26 modos e cada algarismo pode ser escolhido de 10 modos.

Pelo princípio multiplicativo:

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 =$
$= 456\,976\,000$

Portanto, podem ser formadas 456 976 000 placas nesse sistema.

3. Os estudantes podem escrever sobre como optar por aumentar uma letra e retirar um número da configuração das placas aumentou em mais de duas vezes o número de possibilidades.

Página 152

Para pensar e discutir

1. $A_{3,\,2} = \dfrac{3!}{(3-2)!} = \dfrac{3!}{1!} = 6$

Portanto, seriam obtidas 6 cores.

2. As 6 cores obtidas são as 3 primárias e as 3 secundárias. Resultariam as mesmas 3 cores secundárias.

3. A ordem das cores primárias na mistura não altera a cor secundária resultante.

Para pensar e discutir

1. Cada um dos estudantes apertará a mão de outros 9 estudantes.

2. $10 \cdot 9 = 90$. O resultado é 90.

3. Não, pois aqui está sendo computado em dobro.

Página 154

Para pensar e discutir

1. $C_{n,\,n-k} = \dfrac{n!}{[n-(n-k)]! \cdot (n-k)!} =$

$= \dfrac{n!}{(n-n+k)! \cdot (n-k)!} =$

$= \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = C_{n,\,k}$

Portanto, os resultados são iguais.

2. Para cada conjunto formado com 3 elementos (a partir de 10 elementos), é formado outro conjunto com 7 elementos (7 é complementar de 3 em relação a 10).

3. $C_{8,\,3} = \dfrac{8!}{3! \cdot (8-3)!} =$

$= \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{(3!) \cdot (5!)} = 56$

É possível formar 56 grupos.

Para pensar e discutir

1. Espera-se que os estudantes justifiquem que para cada conjunto com 2 elementos que formamos (a partir dos 5 elementos disponíveis), corresponde outro conjunto com 3 elementos (os 3 que sobram).

2. Para determinar o total de subconjuntos que podemos formar com os elementos de um conjunto que contenha 6 elementos, calculamos todas as combinações possíveis, ou seja:

$C_{6,\,0} + C_{6,\,1} + C_{6,\,2} + C_{6,\,3} + C_{6,\,4} +$
$+\, C_{6,\,5} + C_{6,\,6} = 1 + 6 + 15 + 20 +$
$+\, 15 + 6 + 1 = 64$.

Portanto, são 64 subconjuntos.

Página 155

Para pensar e discutir

1. A diagonal *AB* (extremidades em dois vértices do polígono) é igual à diagonal *BA*. Assim, cada diagonal está sendo considerada duas vezes. Por isso, dividimos o resultado por 2.

2. Quando combinamos os 12 vértices 2 a 2, incluímos os lados. Assim, é necessário excluí-los, pois eles não são diagonais.

Para explorar

Embora essa atividade de exploração seja um pouco trabalhosa, ela precisa ser conduzida para que os estudantes compreendam que, ao formar um grupo, a ordem dos nomes não altera o grupo.

Páginas 156-157

Atividades

88.

a) {2}, {3}, {5}, {7}, {11}, {13}

b) {2, 3}, {2, 5}, {2, 7}, {2, 11}, {2, 13}, {3, 5}, {3, 7}, {3, 11}, {3, 13}, {5, 7}, {5, 11}, {5, 13}, {7, 11}, {7, 13}, {11, 13}

c) $C_{6,\,3} = \dfrac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} =$

$= \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{(3!) \cdot (3!)} = 20$

Portanto, podem ser formados 20 subconjuntos de *A* com exatamente 3 elementos.

d) $C_{6,\,4} = \dfrac{6!}{(6-4)! \cdot 4!} =$

$= \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{(2!) \cdot (4!)} = 15$

Portanto, podem ser formados 15 subconjuntos de *A* com exatamente 4 elementos.

89. Como o técnico vai começar com o líbero, podemos combinar os 11 jogadores restantes 5 a 5. Então:

$C_{11,5} = \dfrac{11!}{(11-5)! \cdot 5!} =$

$= \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!} =$

$= 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 462$

Portanto, há 462 maneiras de formar o time inicial.

90. Exemplo de resposta: Vamos utilizar os 10 estudantes da turma – Ana, Bruno, Carla, Daniel, Eduardo, Fernanda, Gustavo, Helena, Isabela e João. Lembrando que a ordem não altera o agrupamento (combinação).

Situação 1: Escolher 3 estudantes para representar a turma em um evento. Total de combinações: $C_{10,3}$.

$C_{10,3} = \dfrac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} =$

$= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{(7!) \cdot (3!)} = 120$

Situação 2: Formar um grupo de 4 estudantes para um trabalho em grupo. Total de combinações: $C_{10,4}$.

$C_{10,4} = \dfrac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} =$

$= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{(6!) \cdot (4!)} = 210$

Situação 3: Selecionar 5 estudantes para uma atividade de voluntariado. Total de combinações: $C_{10,5}$.

$C_{10,5} = \dfrac{10!}{(10-5)! \cdot 5!} =$

$= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{(5!) \cdot (5!)} = 252$

Situação 4: Escolher 6 estudantes para participar de um concurso. Total de combinações: $C_{10,6}$.

$C_{10,6} = \dfrac{10!}{(10-6)! \cdot 6!} =$

$= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{(4!) \cdot (6!)} = 210$

91.

a) $C_{20,2} = \dfrac{20!}{(20-2)! \cdot 2!} =$

$= \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{(18!) \cdot (2!)} = 190$

Portanto, 190 é o número de possibilidades de duas pessoas serem sorteadas.

b) Como você não é uma das pessoas sorteadas, podemos combinar 19 pessoas 2 a 2.

$C_{19,2} = \dfrac{19!}{(19-2)! \cdot 2!} =$

$= \dfrac{19 \cdot 18 \cdot 17!}{(17!) \cdot (2!)} = 171$

Portanto, 171 é o número de possibilidades de duas pessoas serem sorteadas, sendo que você não é uma delas.

c) Como você é uma das pessoas sorteadas, podemos combinar 19 pessoas 1 a 1.

$C_{19,1} = \dfrac{19!}{(19-1)! \cdot 1!} =$

$= \dfrac{19 \cdot 18!}{(18!) \cdot (1!)} = 19$

Portanto, 19 é o número de possibilidades de duas pessoas serem sorteadas, sendo que você é uma delas.

92.

a) $C_{5,3} = \dfrac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} =$

$= \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{(2!) \cdot (3!)} = 10$

Portanto, 10 é o número total de triângulos que podem ser formados.

b) $C_{5,4} = \dfrac{5!}{(5-4)! \cdot 4!} =$

$= \dfrac{5 \cdot 4!}{(1!) \cdot (4!)} = 5$

Portanto, 5 é o número total de quadriláteros que podem ser formados.

c) $C_{5,5} = \dfrac{5!}{(5-5)! \cdot 5!} = \dfrac{5!}{0!} = 1$

Portanto, pode ser formado apenas 1 pentágono.

93.

a) $C_{60,6} = \dfrac{60!}{(60-6)! \cdot 6!} =$

$= \dfrac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot 54!}{54! \cdot 6!} =$

$= 50\,063\,860$

Portanto, 50 063 860 é o número de possibilidades para um sorteio.

b) $C_{7,6} = \dfrac{7!}{(7-6)! \cdot 6!} =$

$= \dfrac{7 \cdot 6!}{(1!) \cdot (6!)} = 7$

Portanto, alguém que aposta com 7 dezenas está competindo com 7 possíveis senas.

c) $C_{8,6} = \dfrac{8!}{(8-6)! \cdot 6!} =$

$= \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{(2!) \cdot (6!)} = 28$

Portanto, alguém que aposta com 8 dezenas está competindo com 28 possíveis senas.

94.

a) Uma maneira de formar todos os triângulos possíveis: escolher 2 vértices da reta *r* e 1 vértice da reta *s* (e ligá-los por segmentos) ou escolher 1 vértice da reta *r* e 2 vértices da reta *s* (e ligá-los por segmentos).

b) $C_{7,2} \cdot C_{5,1} + C_{7,1} \cdot C_{5,2} =$

$= 21 \cdot 5 + 10 \cdot 7 = 105 + 70 = 175$

Outra resolução:

$C_{12,3} - C_{7,3} - C_{5,3} =$

$= 220 - 35 - 10 = 175$

Portanto, podem ser formados 175 triângulos unindo-se 3 pontos quaisquer dos 12 pontos indicados.

95. Precisamos escolher 3 bolas e há 7 sabores diferentes (coco, manga, graviola, cajá, acerola, maracujá e pitanga). Uma das bolas precisa ser necessariamente de coco, ou seja, podemos combinar 6 sabores 2 a 2.

$C_{6,2} = \dfrac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} =$

$= \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{(4!) \cdot (2!)} = 15$

Portanto, são 15 possibilidades de escolha.

96. Para determinar o número total de caracteres que podem ser representados no alfabeto braile, calculamos todas as combinações possíveis dos 6 pontos.

$C_{6,1} + C_{6,2} + C_{6,3} + C_{6,4} + C_{6,5} + C_{6,6} =$

$= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$

Portanto, o número total de caracteres que podem ser representados no alfabeto braile é 63.

Alternativa **d**.

97. Do enunciado temos que dos 12 vagões:

4 são pintados de vermelho, então podem ser escolhidos 12 combinados 4 a 4;

3 são pintados de azul, então podem ser escolhidos 8 combinados 3 a 3;

3 são pintados de verde, então podem ser escolhidos 5 combinados 3 a 3;

2 são pintados de amarelo, então podem ser escolhidos 2 combinados 2 a 2.

$C_{12}^{4} \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{3} \times C_{2}^{2}$.

Alternativa **e**.

98. Para determinar de quantas formas esses 9 amigos podem se dividir nos dois carros, basta calcular a combinação de 9 tomados 5 a 5:

$C_{9,5} = \dfrac{9!}{(9-5)! \cdot 5!} =$

$= \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{(4!) \cdot (5!)} =$

$= \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 126$

Alternativa **d**.

99. O professor pode escolher 2 questões entre 3 possíveis de Matemática e 6 questões entre 8 questões de Física. Assim, o total de provas que ele pode montar é:

$C_{3,2} \cdot C_{8,6} = \dfrac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} \cdot \dfrac{8!}{(8-6)! \cdot 6!} =$

$= \dfrac{3 \cdot 2!}{(1!) \cdot (2!)} \cdot \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{(2!) \cdot (6!)} = 84$

Alternativa **e**.

100. Para montar o plantão, a clínica tem as seguintes opções: 3 fisioterapeutas, combinados 1 a 1; 5 traumatologistas, combinados 2 a 2; 4 enfermeiros, combinados 2 a 2.

Assim, o total de equipes de plantão que podem ser formadas é dado por:

$C_{3,1} \cdot C_{5,2} \cdot C_{4,2} = \dfrac{3!}{(3-1)! \cdot 1!} \cdot$

$\cdot \dfrac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} \cdot \dfrac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = 180$

Alternativa **b**.

101. Dados 12 pontos na circunferência, serão escolhidos 4 para construir um quadrilátero. Para saber o total de quadriláteros que podem ser construídos, basta calcular:

$C_{12,4} = \dfrac{12!}{(12-4)! \cdot 4!} =$

$= \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{(8!) \cdot (4!)} = 495$

Alternativa **d**.

102. Para saber quantas partidas serão disputadas, basta calcular a combinação de 20 clubes combinados 2 a 2:

$C_{20,2} = \dfrac{20!}{(20-2)! \cdot 2!} =$

$= 10 \cdot 19 = 190$

Como o campeonato possui dois turnos, as equipes irão se enfrentar novamente, apenas invertendo o mandante. Então, o total de partidas é $190 \cdot 2 = 380$. Alternativa **c**.

103. Temos 5 médicos e 7 enfermeiros disponíveis para montar uma equipe de 5 profissionais, com pelo menos 1 médico e 1 enfermeiro. Assim, as formações possíveis são listadas a seguir.

- **4 médicos e 1 enfermeiro**

$C_{5,4} \cdot C_{7,1} =$

$= \dfrac{5!}{(5-4)! \cdot 4!} \cdot \dfrac{7!}{(7-1)! \cdot 1!} = 35$

- **3 médicos e 2 enfermeiros**

$C_{5,3} \cdot C_{7,2} =$

$= \dfrac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} \cdot \dfrac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = 210$

- **2 médicos e 3 enfermeiros**

$C_{5,2} \cdot C_{7,3} =$

$= \dfrac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} \cdot \dfrac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} =$

$= \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{(3!) \cdot (2!)} \cdot \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{(4!) \cdot (3!)} = 350$

- **1 médico e 4 enfermeiros**

$C_{5,1} \cdot C_{7,4} =$

$= \dfrac{5!}{(5-1)! \cdot 1!} \cdot \dfrac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = 175$

Portanto, o total de equipes que podem ser formadas nessas condições é:

$35 + 210 + 350 + 175 = 770$; 770 equipes

Alternativa **e**.

104. O total de guarda-vidas dessa praia é dado pela combinação de 9 postos, combinados 2 a 2:

$C_{9,2} = \dfrac{9!}{(9-2)! \cdot 2!} =$

$= \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{(7!) \cdot (2!)} = 9 \cdot 4 = 36$;

36 guarda-vidas

Alternativa **b**.

105. $y = \dfrac{C_{n,4}}{C_{n-1,3}} = \dfrac{\dfrac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}}{\dfrac{(n-1)!}{[(n-1)-3]! \cdot 3!}} =$

$= \dfrac{n \cdot (n-1)!}{(n-4)! \cdot 4!} \cdot \dfrac{(n-4)! \cdot 3!}{(n-1)!} = \dfrac{n}{4}$

Alternativa **d**.

106. Dados 8 jogadores e uma equipe de 6, o total de formações possíveis é dado por:

$C_{8,6} = \dfrac{8!}{(8-6)! \cdot 6!} =$

$= \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{(2!) \cdot (6!)} = 28$

Alternativa **c**.

107. Temos duas composições possíveis para uma comissão de 6 integrantes, conforme a seguir.

- **2 mulheres e 4 homens**

$C_{3,2} \cdot C_{5,4} =$

$= \dfrac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} \cdot \dfrac{5!}{(5-4)! \cdot 4!} =$

$= \dfrac{3 \cdot 2!}{(1!) \cdot (2!)} \cdot \dfrac{5 \cdot 4!}{(1!) \cdot (4!)} = 15$

- **3 mulheres e 3 homens**

$C_{3,3} \cdot C_{5,3} =$

$= \dfrac{3!}{(3-3)! \cdot 3!} \cdot \dfrac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} =$

$= \dfrac{3!}{(0!) \cdot (3!)} \cdot \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{(2!) \cdot (3!)} = 10$

O total de composições é dado pela soma das 2 possibilidades:

$C_{3,2} \cdot C_{5,4} + C_{3,3} \cdot C_{5,3} = 25$

Alternativa **c**.

108. Para calcular o total de equipes possíveis, basta tomar a combinação de 10 paramédicos combinados 3 a 3:

$C_{10,3} = \dfrac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} =$

$= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{(7!) \cdot (3!)} = 120$

Alternativa **b**.

4. Triângulo de Pascal

Página 158

Para pensar e discutir

1. $C_{n,0}, C_{n,1}, C_{n,2}, ..., C_{n,n-2}, C_{n,n-1}, C_{n,n}$, em que n é a linha correspondente.

2. **Linha 1**: $1 = 2^0$

   Linha 2: $1 + 1 = 2^1$

   Linha 3: $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

   Linha 4: $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

   Linha 5: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

   Linha 6: $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$

   Linha 7: $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$

   Linha 8: $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$

   Linha 9: $1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 256 = 2^8$

   Linha 10:

   $1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 512 = 2^9$

   Portanto, a soma dos elementos de uma linha sempre resulta em uma potência inteira de 2.

3. Os extremos ou termos equidistantes dos extremos são iguais (os extremos são sempre iguais a 1).

Página 160

Para pensar e discutir

1. Corresponde a elementos extremos ou equidistantes dos extremos em uma mesma linha do triângulo de Pascal.

2. Adicionando-se dois números consecutivos de uma linha, obtém-se o número que fica entre esses dois na linha imediatamente abaixo.

3. A soma de todos os elementos de uma linha do triângulo de Pascal resulta em uma potência de base 2.

Página 161

Para explorar

1.

a) O padrão numérico pode ser identificado conforme a seguir.

1ª figura: 1
2ª figura: $1 + 2 = 3$
3ª figura: $1 + 2 + 3 = 6$
4ª figura: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$
5ª figura: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
6ª figura: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
7ª figura: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$
8ª figura: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$

b) Ao construir o triângulo de Pascal, os números triangulares estão dispostos em uma das duas diagonais, conforme a seguir:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Acervo editora

2.

a) $(x - a)^2 = x^2 - xa - xa + a^2$

$(x - a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$

b) $(x - a)^3 = (x - a)^2 \cdot (x - a)$

$(x - a)^3 = (x^2 - 2xa + a^2) \cdot (x - a)$

$(x - a)^3 = x^3 - x^2a - 2x^2a + 2xa^2 + xa^2 - a^3$

$(x - a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$

c) $(x - a)^4 = (x - a)^3 \cdot (x - a)$

$(x - a)^4 = (x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3) \cdot (x - a)$

$(x - a)^4 = x^4 - x^3a - 3x^3a + 3x^2a^2 + 3x^2a^2 - 3xa^3 - xa^3 + a^4$

$(x - a)^4 = x^4 - 4x^3a + 6x^2a^2 - 4xa^3 + a^4$

3.

a) Do item **b** da **atividade 1**, temos:

$(x - a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$

Substituindo x por $2x$ e a por 1, temos:

$(2x - 1)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 1 + 3(2x) \cdot (1)^2 - (1)^3$

$(2x - 1)^3 = 8x^3 - 3 \cdot 4x^2 + 6x - 1$

$(2x - 1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

b) Da explicação dada no enunciado da 2ª parte, temos:

$(x + a)^3 = 1x^3a^0 + 3x^2a^1 + 3x^1a^2 + 1x^0a^3$

Substituindo x por y e a por 2:

$(y + 2)^3 = y^3 + 3y^2 \cdot 2 + 3y \cdot (2)^2 + (2)^3$

$(y + 2)^3 = y^3 + 3y^2 \cdot 2 + 3y \cdot 4 + 8$

$(y + 2)^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$

c) Da explicação dada no enunciado da 2ª parte, temos:

$(x + a)^4 = 1x^4a^0 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + 1x^0a^4$

Substituindo x por $\sqrt{3}$ e a por 3:

$(\sqrt{3} + 3)^4 = (\sqrt{3})^4 + 4 \cdot (\sqrt{3})^3 \cdot 3 +$

$+ 6 \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot (3)^2 + 4 \cdot \sqrt{3} \cdot (3)^3 + (3)^4$

$(\sqrt{3} + 3)^4 = 9 + 36\sqrt{3} + 162 + 108\sqrt{3} + 81$

$(\sqrt{3} + 3)^4 = 252 + 144\sqrt{3}$

Atividades

109.

a) É a 2ª propriedade, a Relação de Stifel.

b) Representa a soma de todos os elementos da 9ª linha.

c) A 1ª propriedade sobre taxas complementares.

110.

a) $C_{10,\,0} = \dfrac{10!}{(10 - 0)! \cdot 0!} = 1$

$C_{10,\,1} = \dfrac{10!}{(10 - 1)! \cdot 1!} = 10$

$C_{10,\,2} = \dfrac{10!}{(10 - 2)! \cdot 2!} = 45$

$C_{10,\,3} = \dfrac{10!}{(10 - 3)! \cdot 3!} = 120$

$C_{10,\,4} = \dfrac{10!}{(10 - 4)! \cdot 4!} = 210$

$C_{10,\,5} = \dfrac{10!}{(10 - 5)! \cdot 5!} = 252$

$C_{10,\,6} = \dfrac{10!}{(10 - 6)! \cdot 6!} = 210$

$C_{10,\,7} = \dfrac{10!}{(10 - 7)! \cdot 7!} = 120$

$C_{10,\,8} = \dfrac{10!}{(10 - 8)! \cdot 8!} = 45$

$C_{10,\,9} = \dfrac{10!}{(10 - 9)! \cdot 9!} = 10$

$C_{10,\,10} = \dfrac{10!}{(10 - 10)! \cdot 10!} = 1$

b) $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} +$

$+ \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} =$

$= C_{10,\,0} + C_{10,\,1} + C_{10,\,2} + C_{10,\,3} + C_{10,\,4} +$

$+ C_{10,\,5} + C_{10,\,6} + C_{10,\,7} + C_{10,\,8} + C_{10,\,9} + C_{10,\,10} =$

$= 1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 +$

$+ 120 + 45 + 10 + 1 = 1024$

111. Temos o seguinte polinômio de 4º grau:

$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

Comparando o desenvolvimento de $(x + a)^4$ com a igualdade a seguir:

$(x + a)^4 = 1x^4a^0 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + 1x^0a^4$

Assim, observe o trecho onde x^0 é igual a 1:

$1x^0a^4 = 1$

$a^4 = 1$

$a = \pm 1$

Como todos os termos da expressão dada são positivos, temos que $a^4 = 1$ e que a potência desenvolvida é:

$(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

112.

a) $C_{11,\,x} = C_{11,\,2} = \dfrac{11!}{(11 - 2)! \cdot 2!} =$

$= \dfrac{11!}{(9!) \cdot (2!)} = \dfrac{11!}{(2!) \cdot (9!)}$

$= \dfrac{11!}{(11 - 9)! \cdot 9!} = C_{11,\,9}$

$x = 2$ ou $x = 9$

b) $C_{8,\,x-1} = C_{8,\,3} = \dfrac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \dfrac{8!}{(5!) \cdot (3!)} = \dfrac{8!}{(3!) \cdot (5!)} =$

$= \dfrac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} = C_{8,\,5}$

$x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4$ ou $x - 1 = 5 \Rightarrow x = 6$

c) $C_{20,\,x} = C_{20,\,14} = \dfrac{20!}{(20-14)! \cdot 14!} = \dfrac{20!}{(6!) \cdot (14!)} =$

$= \dfrac{20!}{(14!) \cdot (6!)} = \dfrac{20!}{(20-6)! \cdot 6!} = C_{20,\,6}$

$x = 14$ ou $x = 6$

d) $C_{9,\,x+2} = C_{9,\,3} = \dfrac{9!}{(9-3)! \cdot 3!} = \dfrac{9!}{(6!) \cdot (3!)} =$

$= \dfrac{9!}{(3!) \cdot (6!)} = \dfrac{9!}{(9-6)! \cdot 6!} = C_{9,\,6}$

$x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$ ou $x + 2 = 6 \Rightarrow x = 4$.

113. Observe a expressão dada e compare-a com o polinômio de 5º grau abaixo:

$y = 1 \cdot (999)^5 + 5 \cdot (999)^4 + 10 \cdot (999)^3 + 10 \cdot (999)^2 +$
$+ 5 \cdot (999) + 1 \cdot (999)^0$

$(x + 1)^5 = 1 \cdot x^5 + 5 \cdot x^4 + 10 \cdot x^3 + 10 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 1 \cdot x^0$

Assim, substituindo o valor de x por 999 temos:

$(999 + 1)^5 = 1 \cdot 999^5 + 5 \cdot 999^4 + 10 \cdot 999^3 + 10 \cdot 999^2 +$
$+ 5 \cdot x + 1 \cdot 999^0$

Assim, temos que $y = (999 + 1)^5$. Então, temos:

$y = (999 + 1)^5 = (1\,000)^5 = (10^3)^5 = 10^{15}$

114. Temos que a soma dos binômios de n corresponde à potência de 2 elevado a n:

$256 = 2^n$; $2^8 = 2^n$; $n = 8$

115. Note que x só pode assumir valores inteiros entre 0 e 6, isto é, $0 \leq x \leq 6$. Além disso, x^2 tem de ser menor do que 6. Assim, temos que $x < 3$.

Suponha que x seja igual a 1. Então:

$2 \cdot 1 = 1^2$

$2 = 1$ (contradição)

$x = 0$ ou $x = 2$

Alternativa **b**.

Páginas 162-167

Análise e contexto

1. Os números triangulares formam a seguinte sequência:

{(1, 3, 6, 10, 15, ...)}

Essa sequência pode ser obtida da seguinte maneira:

1º termo: 1

2º termo: $1 + 2 = 3$

3º termo: $1 + 2 + 3 = 6$

4º termo: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

5º termo: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

(...)

No triângulo de Pascal, essa sequência pode ser obtida conforme diagonal a seguir:

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Incentive os estudantes a realizar a pesquisa e apresentar os resultados aos demais colegas.

Atividades finais

1.

a) Uma hora tem 60 minutos, então 24 horas têm 1 440 ($24 \cdot 60$) minutos.

b) Uma hora tem 3600 segundos, então 24 horas têm 86 400 ($24 \cdot 3\,600$) segundos.

2. Existem 5 maneiras de ir de Curitiba a São Paulo e 5 maneiras de ir de São Paulo a Curitiba, ou seja, podemos fazer esses percursos de 10 maneiras.

3. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} = 1\,024$; 1 024 sequências

4. $x = 0! + 1! + 2! + 3! + 4! + 5!$

$x = 1 + 1 + 2 + 6 + 24 + 120 = 154$

5.

a) Apenas para $n = 0$ e $n = 1$.

b) Para todo n maior ou igual a 2, o fatorial sempre terá um fator 2 no produto e, portanto, eles serão pares.

6.

a) O significado de permutar é “trocar”.

b) O primeiro número pode ser escolhido de 5 modos; o segundo, de 4 modos; o terceiro, de 3 modos.

Pelo princípio multiplicativo:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; 60 possibilidades

7.

a) No arranjo, a ordem dos elementos no agrupamento importa, enquanto na combinação a ordem não altera o agrupamento.

b) $C_{6,\,3} = \dfrac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = 20$

Portanto, podem ser formados 20 conjuntos de três elementos distintos.

c) $A_{6,\,3} = \dfrac{6!}{(6-3)!} = 120$

Questões de vestibulares e Enem

8. Assim, há 3 modos de retirar a esfera com o número 8.

Devemos retirar 2 das 31 esferas restantes, o que pode ser feito de $A_{31,\,2}$ maneiras.

$3 \cdot A_{31,\,2} = 3 \cdot \dfrac{31!}{(31-2)!} = 3 \cdot \dfrac{31!}{29!} = 3 \cdot 930 = 2\,790$;

2 790 maneiras

Outra resolução:

Separando em três casos:

1º caso: a terceira esfera retirada é a número 8; então, há 31 modos de retirar a primeira esfera e 30 modos de retirar a segunda esfera.

Pelo princípio multiplicativo:

$31 \cdot 30 \cdot 1 = 930$

2º caso: a segunda esfera retirada é a número 8; então, há 31 modos de retirar a primeira esfera e 30 modos de retirar a terceira esfera.

Pelo princípio multiplicativo:

$31 \cdot 1 \cdot 30 = 930$

3º caso: a primeira esfera retirada é a número 8; então, há 31 modos de retirar a segunda esfera e 30 modos de retirar a terceira esfera.

Pelo princípio multiplicativo:

$1 \cdot 31 \cdot 30 = 930$

Então: $930 + 930 + 930 = 2\,790$.

Portanto, há 2 790 maneiras diferentes de retirar as esferas.

Alternativa **e**.

9. Pelo princípio multiplicativo, temos:
$3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$

Portanto, os tubos podem ser colocados no suporte de 36 maneiras distintas.

Outra resolução:

Pelo enunciado, temos:

$3 \cdot A_{4,\,2} = 3 \cdot \dfrac{4!}{(4-2)!} =$

$= 3 \cdot \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 3 \cdot 12 = 36$

Portanto, os tubos podem ser colocados no suporte de 36 maneiras distintas. Alternativa **c**.

10. Há 5 modos de escolher o presidente, 4 modos de escolher o tesoureiro e 3 modos de escolher o secretário. Pelo princípio multiplicativo, temos:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Portanto, a comissão poderá ser formada de 60 maneiras diferentes.

Alternativa **b**.

11. O número total de jogos disputados pelos times é dado por:

$20 \cdot 19 = 380$

Logo, serão disputados 380 jogos no total.

Há 6 modos de escolher o primeiro time e 5 modos de escolher o segundo time.

Pelo princípio multiplicativo:

$6 \cdot 5 = 30$

Logo, serão disputados 30 jogos em que os dois times são paulistas.

A porcentagem é igual a
$\dfrac{30}{380} \cong 0{,}079 = 7{,}9\%$

Portanto, a porcentagem é maior que 7%, mas menor que 10%.

Alternativa **b**.

12. Vamos determinar quantos jogos podem ser feitos com os 6 times. Assim:

$C_{6,\,2} = \dfrac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} =$

$= \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{(4!) \cdot (2!)} = 15$

Logo, podem ser feitos 15 jogos com os 6 times.

Supondo que o time campeão venceu todas as partidas:

$15 \cdot 3 = 45$; 45 pontos no total

Na tabela, o total de pontos feitos pelos 6 times é:

$9 + 6 + 4 + 2 + 6 + 13 = 40$; 40 pontos

O número de empates nesse torneio é dado pela diferença entre o total de pontos possíveis e o total de pontos marcados:

$45 - 40 = 5$; 5 empates

Outra resolução:

Vamos determinar quantos jogos podem ser feitos com os 6 times. Assim,

$C_{6,\,2} = \dfrac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} =$

$= \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{(4!) \cdot (2!)} = 15$

Logo, podem ser feitos 15 jogos com os 6 times.

Na tabela, o total de pontos feitos pelos 6 times é:

$9 + 6 + 4 + 2 + 6 + 13 = 40$; 40 pontos

Chamando V o número de vitórias e E o número de empates, temos que:

$V + E = 15$

$V = 15 - E$ (I)

$3V + 2E = 40$

$V = \dfrac{40 - 2E}{3}$ (II)

Igualando (I) com (II), obtemos o valor de E:

$\dfrac{40 - 2E}{3} = 15 - E$

$E = 5$

Então, o número de empates nesse torneio é igual a 5.

Alternativa **b**.

13. Como há 12 pontos na figura, vamos determinar o número de maneiras de escolher 3 dos 12 pontos dela. Para isso, combinamos 12 pontos tomados 3 a 3.

$C_{12,\,3} = \dfrac{12!}{(12-3)! \cdot 3!} =$

$= \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{(9!) \cdot (3!)} = 220$

Determinamos de quantas maneiras podemos escolher 3 pontos alinhados. Para isso, combinamos 4 pontos tomados 3 a 3.

$2 \cdot C_{4,\,3} = 2 \cdot \dfrac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} =$

$= 2 \cdot \dfrac{4 \cdot 3!}{(1!) \cdot (3!)} = 8$

$220 - 8 = 212$; 212 triângulos

Alternativa **d**.

14. Pelo princípio multiplicativo:

$27 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 353\,808$

Outra resolução:

É possível resolver o problema usando arranjos:

$A_{27,\,2} \cdot A_{9,\,3} = \dfrac{27!}{(27-2)!} \cdot \dfrac{9!}{(9-3)!} =$

$= \dfrac{27 \cdot 26 \cdot 25!}{25!} \cdot \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} =$

$= 353\,808$

Alternativa **d**.

15. Ana, Beatriz e Carlos querem se sentar de maneira que eles não fiquem em lados opostos da mesa. Assim, suponha, sem perda de generalidade, que Ana, Beatriz e Carlos vão se sentar à mesa, nessa ordem.

Ana vai se sentar primeiro à mesa. Assim, ela tem 6 lugares disponíveis para se sentar.

A seguir, Beatriz irá se sentar. Ela pode sentar-se em qualquer lugar, exceto no lugar de Ana, que já está ocupado, e no lugar oposto ao lugar no qual Ana está sentada. Assim, ela pode se sentar em 4 lugares.

Finalmente, Carlos irá se sentar. Existem 4 lugares disponíveis na mesa; porém, ele não pode se sentar no lugar oposto ao de Ana nem no lugar oposto ao de Beatriz. Assim, ele pode se sentar em 2 lugares.

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$

Portanto, o grupo pode se sentar à mesa de 48 maneiras diferentes.

Alternativa **a**.

16. **I.** Correta.

Para encontrar a quantidade de cartelas obtidas por João, vamos separar em 3 casos, conforme a seguir.

1º caso: a cartela contém apenas um algarismo 2 e um algarismo 5.

Nesse caso, temos:

- duas possibilidades para o primeiro algarismo, já que as cartelas vão de 0 001 até 2 000;
- $P_3 = 3! = 6$ maneiras de preencher os algarismos 2 e 5 na cartela;
- 8 possibilidades para preencher o algarismo restante na cartela, já que ele não pode ser igual a 2 e nem igual a 5.

$\underline{0}\ \_\ \_\ \_ \rightarrow 8 \cdot P_3 = 8 \cdot 3! = 48$

$\underline{1}\ \_\ \_\ \_ \rightarrow 8 \cdot P_3 = 8 \cdot 3! = 48$

48 + 48 = 96; 96 cartelas com um algarismo 2 e um algarismo 5

2º caso: a cartela contém dois algarismos 2 e um algarismo 5.

Nesse caso, temos:

- 2 possibilidades para o primeiro algarismo, já que as cartelas vão de 0 001 até 2 000;
- $P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$ maneiras de preencher os algarismos 2 e 5 na cartela.

$\underline{0}\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$

$\underline{1}\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$

3 + 3 = 6; 6 cartelas com dois algarismos 2 e um algarismo 5

3º caso: a cartela contém um algarismo 2 e dois algarismos 5.

É análogo ao caso anterior. Assim, João comprou 6 cartelas com um algarismo 2 e dois algarismos 5.

Total de cartelas que João comprou:

96 + 6 + 6 = 108; 108 cartelas

II. Incorreta.

Vamos comparar como seria o 1º caso se João tivesse comprado todas as cartelas com os algarismos 1 e 5.

- Se o primeiro algarismo for 0, temos $P_3 = 3! = 6$ maneiras de preencher os algarismos 1 e 5 na cartela e 8 possibilidades para preencher o algarismo restante na cartela, já que ele não pode ser igual a 1 nem igual a 5.
- Se o primeiro algarismo for 1, temos 3 posições possíveis para o algarismo 5 e 8 possibilidades para cada um dos dois algarismos restantes.

$\underline{0}\ \_\ \_\ \_ \rightarrow 8 \cdot P_3 = 8 \cdot 3! = 48$

$\underline{1}\ \_\ \_\ \_ \rightarrow 1 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 8 = 192$

48 + 192 = 240; 240 cartelas com um algarismo 1 e um algarismo 5

III. Incorreta.

As cartelas com os algarismos 2, 3 e 5 presentes possuem, necessariamente, os algarismos 0 ou 1 na casa do milhar. Então, o total de cartelas com esses algarismos é dado por:

$2 \cdot P_3 = 2 \cdot 3! = 12$; 12 cartelas

Alternativa **b**.

17. Dado que o aparelho tem 10 pesos disponíveis, temos que o total de maneiras de colocar esses pesos é dado por $2^{10} = 1\,024$.

Porém, devemos excluir os casos em que os pesos excedem a capacidade máxima de 95 kg e o caso particular de nenhum peso ser colocado no aparelho.

Os pesos disponíveis têm massa total de:

$4 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 15 + 1 \cdot 20 = 100$; 100 kg

Portanto, o único caso que excede a capacidade máxima é o que utiliza todos os pesos.

$1\,024 - 1 - 1 = 1\,022$; 1 022 maneiras

Alternativa **d**.

18. Sejam *m*, *p* e *q* algarismos quaisquer de *M*, *P* e *Q*, respectivamente. Fixando *m*, *p* e *q* na casa da centena, temos:

$m\ \_\ \_ \rightarrow P_2 = 2! = 2$

$p\ \_\ \_ \rightarrow P_2 = 2! = 2$

$q\ \_\ \_ \rightarrow P_2 = 2! = 2$

2 + 2 + 2 = 6; 6 posições possíveis

Finalmente, temos 2 possibilidades para *m*, 3 possibilidades para *p* e 4 possibilidades para *q*. Assim, o total de números que podem ser formados é:

$6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 144$

Alternativa **b**.

19. Entre as permutações de 15 792 que estão entre 30 000 e 70 000, estão apenas as que começam pelo número 5. Assim:

$\underline{5}\ \_\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_4 = 4! = 24$

Alternativa **e**.

20. Pelo enunciado, temos que Ana tem:

$P_3 \cdot 5 = 3! \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$; 30 possibilidades de senha

Alternativa **e**.

21. O total de anagramas da palavra COMUM é dado por:

$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = 60$

Porém, queremos excluir os casos em que as letras M aparecem juntas. Assim, queremos excluir os casos a seguir:

$\underline{M}\ \underline{M}\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_3 = 3! = 6$

$\_\ \underline{M}\ \underline{M}\ \_\ \_ \rightarrow P_3 = 3! = 6$

$\_\ \_\ \underline{M}\ \underline{M}\ \_ \rightarrow P_3 = 3! = 6$

$\_\ \_\ \_\ \underline{M}\ \underline{M} \rightarrow P_3 = 3! = 6$

Portanto, o total de anagramas da palavra COMUM em que as letras M não aparecem juntas é:

$60 - 6 - 6 - 6 - 6 = 60 - 24 = 36$

Alternativa **c**.

22. A ordem das letras presentes na palavra PORTA é A, O, P, R e T. Assim, para cada letra fixada na primeira posição temos:

$\underline{A}\ \_\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_4 = 4! = 24$

$\underline{O}\ \_\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_4 = 4! = 24$

$\underline{P}\ \_\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_4 = 4! = 24$

Dessa forma, o anagrama para PRATO está entre as posições 49 e 72.

Agora, vamos fixar a segunda letra:

$\underline{P}\ \underline{A}\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_3 = 3! = 6$

$\underline{P}\ \underline{O}\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_3 = 3! = 6$

$\underline{P}\ \underline{R}\ \_\ \_\ \_ \rightarrow P_3 = 4! = 6$

Assim, o anagrama PRATO está entre as posições 61 e 66.

Fixando a terceira letra, temos:

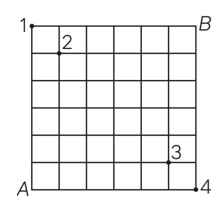
$\underline{P}\ \underline{R}\ \underline{A}\ \_\ \_ \rightarrow P_2 = 2! = 2$

Dessa forma, o anagrama PRATO ocupa a posição 61 ou a posição 62.

Finalmente, como a letra T está depois da letra O no alfabeto, temos que o anagrama PRATO ocupa a posição 62.

Alternativa **c**.

23. Considere a figura abaixo:



Acervo editora

- De *A* para o ponto 1, a formiga pode se deslocar de $P_6^6 = 1$; 1 maneira. E do ponto 1 para o ponto *B*, ela pode se deslocar de $P_6^6 = 1$; 1 maneira. Assim, de *A* até *B*, passando pelo ponto 1, a formiga pode ir de apenas 1 maneira.
- Analogamente, do ponto *A* para o ponto *B*, passando pelo ponto 4, a formiga também só pode ir de 1 maneira.
- De *A* para o ponto 2, a formiga pode se deslocar de $P_6^{5,\,1} = \frac{6!}{(5!) \cdot (1!)} = 6$; 6 maneiras. E do ponto 2 para o ponto *B*, ela pode se deslocar de $P_6^{5,\,1} = 6$; 6 maneiras.

  Assim, de *A* até *B*, passando pelo ponto 2, a formiga pode ir de $P_6^{5,\,1} \cdot P_6^{5,\,1} = 6 \cdot 6 = 36$; 36 maneiras

- Analogamente, do ponto A para o ponto B, passando pelo ponto 3, a formiga pode utilizar 36 caminhos diferentes.

Portanto, o total de caminhos que podem ser utilizados é:

$1 + 1 + 36 + 36 = 74$

Alternativa **e**.

24. A palavra UNISINOS tem 8 letras, com 3 letras que se repetem duas vezes. Assim, o total de anagramas da palavra é dado por:

$P_8^{2,2,2} = \frac{8!}{(2!) \cdot (2!) \cdot (2!)} = \frac{8 \cdot 7!}{8} =$
$= 7! = 5\,040$

Alternativa **c**.

25. Para que a função $f{:}A \to B$ seja injetora, a sua imagem deve ser um subconjunto de B com 5 elementos distintos, já que A tem 5 elementos.

$C_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} =$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{(3!) \cdot (5!)} = 56$

Assim, o total de funções $f{:}A \to B$ que podem ser construídas, tais que f seja injetora, é:

$C_{8,5} \cdot P_5 = 56 \cdot 120 = 6\,720$

Alternativa **c**.

26. A quantidade de etiquetas que podem ser formadas é dada pelo arranjo de 26 letras, em arranjos de tamanho 4, multiplicado pelo arranjo de 10 algarismos, em arranjos também de tamanho 4: $A_{26,4} \cdot A_{10,4}$.

Alternativa **c**.

27. Dividindo as restrições, temos:

1º caso: Ana pegou um pirulito.

Caso Ana pegue um pirulito, ela necessariamente tem de pegar uma fruta. Logo, como ela tem 3 opções de pirulito e 5 opções de frutas, pelo princípio multiplicativo, temos:

$3 \cdot 5 = 15$; 15 sobremesas possíveis.

2º caso: Ana não pegou um pirulito.

Caso Ana não pegue um pirulito, Ana não tem nenhuma restrição, podendo escolher quaisquer 2 itens entre as 5 frutas e os 2 pedaços de bolo. Logo, a quantidade de opções é dada pela combinação de 7 itens, combinados 2 a 2:

$C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{(5!) \cdot (2!)} =$
$= 21$; 21 sobremesas possíveis.

$15 + 21 = 36$

Alternativa **b**.

28. O mínimo de sintomas que o médico deve constatar para diagnosticar essa doença é 4 entre 7 sintomas conhecidos. Assim, podemos calcular a quantidade de sintomas pela combinação de 7 sintomas, combinados 4 a 4:

$C_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} =$

$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{(3!) \cdot (4!)} = 35$; 35 sintomas

Alternativa **c**.

29. O número de maneiras distintas do assinante escolher 2 filmes entre 6 disponíveis é dado pela combinação de 6 filmes, combinados 2 a 2:

$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} =$

$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{(4!) \cdot (2!)} = 15$

Alternativa **d**.

30. A quantidade de conjuntos de 3 elementos, onde a ordem não importa, com 2 consoantes entre 10 possíveis e 1 vogal entre 5 disponíveis que podem ser formados, é dada por:

$C_{10,2} \cdot C_{5,1} =$

$= \frac{10!}{(10-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{5!}{(5-1)! \cdot 1!} =$

$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{(8!) \cdot (2!)} \cdot \frac{5 \cdot 4!}{(4!) \cdot (1!)} = 225$

Alternativa **e**.

31. Temos 3 maneiras possíveis de compor essa diretoria.

1ª maneira: 3 rapazes e 2 moças.

$C_{5,3} \cdot C_{4,2} =$

$= \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} =$

$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{(2!) \cdot (3!)} \cdot \frac{4 \cdot 3!}{(2!) \cdot (2!)} =$
$= 10 \cdot 6 = 60$

2ª maneira: 2 rapazes e 3 moças.

$C_{5,2} \cdot C_{4,3} =$

$= \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} =$

$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{(3!) \cdot (2!)} \cdot \frac{4 \cdot 3!}{(1!) \cdot (3!)} = 40$

3ª maneira: 1 rapaz e 4 moças.

$C_{5,1} \cdot C_{4,4} =$

$= \frac{5!}{(5-1)! \cdot 1!} \cdot \frac{4!}{(4-4)! \cdot 4!} =$

$= \frac{5 \cdot 4!}{(4!) \cdot (1!)} \cdot \frac{4!}{(0!) \cdot (4!)} = 5$

$60 + 40 + 5 = 105$; 105 maneiras

Alternativa **c**.

32. O número de senhas distintas deve ser maior que $1\,000\,000 = 10^6$ e menor que $2\,000\,000 = 2 \cdot 10^6$.

Vamos determinar quantas senhas é possível formar em cada opção.

Opção I: $26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$
$= 26 \cdot 10^5 = 2{,}6 \cdot 10^6$

Não atende a uma das condições exigidas, pois $2{,}6 \cdot 10^6 > 2 \cdot 10^6$.

Opção II: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$

Não atende a uma das condições exigidas, pois 10^6 é igual ao número de clientes.

Opção III: $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$
$= 26^2 \cdot 10^4 = 676 \cdot 10^4 = 6{,}76 \cdot 10^6$

Não atende a uma das condições exigidas, pois $6{,}76 \cdot 10^6 > 2 \cdot 10^6$

Opção IV: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$

Não atende a uma das condições exigidas, pois $10^5 < 10^6$

Opção V: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 =$
$= 26^3 \cdot 10^2 = 17.576 \cdot 10^2 =$
$= 1{,}7576 \cdot 10^4 \cdot 10^2 = 1{,}7576 \cdot 10^6$

Atende às condições exigidas, pois:
$10^6 < 1{,}7576 \cdot 10^6 < 2 \cdot 10^6$

A única opção que atende às condições da empresa é a **Opção V**.

Alternativa **e**.

33. Para cada quantidade de jogadores, a quantidade de jogos é determinada pela combinação simples.

$C_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} =$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{(6!) \cdot (2!)} = 28$

Alternativa **e**.

34. O total de caminhos possíveis é dado por:

$P_7^{3,4} = \frac{7!}{(4!) \cdot (3!)} =$

$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{(4!) \cdot (3!)} = 35$

O total de caminhos até a casa de Carlos é dado por:

$P_4^{2,2} = \frac{4!}{(2!) \cdot (2!)} = \frac{4 \cdot 3!}{(2!) \cdot (2!)} =$
$= 3! = 6$

O total de maneiras de ir da casa de Carlos até a casa de Bernardo é dado por:

$P_3^{2,1} = \frac{3!}{(2!) \cdot (1!)} = \frac{3 \cdot 2!}{2!} = 3$

Segue que o total de caminhos que não passam pela casa de Carlos é dado por:

35 – 18 = 17; 17 caminhos

Alternativa **c**.

35. Seja x a quantidade de times desse campeonato. Temos que a quantidade de partidas nesse campeonato, em dois turnos, é dada por:

$2 \cdot C_{x,\,2} = 380$

$2 \cdot \dfrac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} = 380$

$2 \cdot \dfrac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)!}{(x-2)! \cdot 2} = 380$

$x \cdot (x-1) = 380$

$x^2 - x = 380$

Alternativa **b**.

36. As opções de configurações de carro disponíveis, sem considerar as cores, são:

- 7 modelos de carro;
- 2 tipos de motor, 1.0 e 1.6;
- 3 opcionais, podendo estar presentes 0, 1, 2 ou 3 deles. As possibilidades aqui são dadas pela soma dos binômios de 3, que é 23 = 8.

Assim, a quantidade de configurações é dada por:

$7 \cdot 2 \cdot 2^3 = 112$

Finalmente, para determinar qual é o mínimo de cores, vamos dividir 1 000 pela quantidade de configurações atual: $\dfrac{1\,000}{112} \cong 8{,}92$.

Ou seja, o número de cores tem de ser o maior número inteiro maior do que 8,92, que é 9.

Alternativa **b**.

CAPÍTULO 5

Probabilidades

Objetivos

- Identificar no cotidiano situações de uso de probabilidades.
- Reconhecer diferentes tipos de espaços amostrais (discretos ou não).
- Calcular a probabilidade condicional de dois eventos simultâneos.
- Identificar e descrever o espaço amostral em diferentes experimentos aleatórios.
- Elaborar e resolver situações relacionadas com o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios.
- Reconhecer eventos independentes em situações relacionadas a eventos equiprováveis consecutivos.
- Diferenciar eventos dependentes de eventos independentes em experimentos aleatórios.
- Calcular a quantidade de elementos do evento e do espaço amostral utilizando contagem das possibilidades relacionadas à análise combinatória.

Justificativa

As noções de probabilidade constituem ferramentas básicas que permitem aos estudantes compreender informações que envolvem riscos para que possam se posicionar, tomar decisões e fazer escolhas em diferentes aspectos de sua vida pessoal e da coletividade.

Competências gerais da BNCC

Competência geral 1: Nas páginas 170 e 213, os estudantes têm a oportunidade de conhecer e explorar um dispositivo criado por Francis Galton, nascido no Reino Unido em 1922. Além disso, na seção **Análise e contexto** da página 180 são apresentadas as primeiras ideias ligadas à Probabilidade. São citados diversos matemáticos, entre eles os franceses Pierre de Fermat e Blaise Pascal, cujas ideias são retomadas nas páginas seguintes. Os estudantes aprendem assim a valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos a fim de entender e explicar a realidade.

Competências gerais 2 e 7: O estudo da Probabilidade feito neste capítulo permite aos estudantes, em diversas oportunidades, explorar ideias, fazer conexões, desenvolver processos, interpretar dados, testar hipóteses e apresentar soluções mobilizando, assim, a **competência 2**. Isso fica evidente, por exemplo, na atividade proposta na seção **Para explorar** da página 188, em que os estudantes, em grupos, pesquisam os valores das apostas de um jogo de acordo com o número de dezenas. Com o auxílio de uma calculadora, eles calculam, para cada número de dezenas, a probabilidade de se ganhar o prêmio e elaboram hipóteses relativas ao valor cobrado pelas apostas em cada caso. Apresentam então suas conclusões para serem discutidas com os colegas. Como trabalham em grupos discutindo ideias, confrontando pontos de vista e argumentando com base em fatos, dados e informações confiáveis, uma vez que utilizam os cálculos feitos para apresentar seus argumentos, desenvolvem, também, a **competência 7**.

Competências gerais 4, 5 e 9: Durante a realização das diversas atividades propostas em grupos ou em duplas, os estudantes utilizam diferentes linguagens e desenvolvem a **competência 4**. Por exemplo, na seção **Para explorar** da página 188, os estudantes elaboram e resolvem situações envolvendo o cálculo de probabilidade condicional. Utilizam a linguagem verbal oralmente e por escrito, além da linguagem matemática, tanto durante as discussões como ao fazer o experimento e, também, ao responder às questões propostas, apresentando justificativas para suas conclusões. Como fazem os cálculos utilizando uma calculadora, desenvolvem a **competência 5**. Por trabalharem em grupos, desenvolvem também a **competência 9**, pois exercitam a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos.

Competência geral 8: O Infográfico da página 215 e as respectivas questões propostas mobilizam essa competência, uma vez que os estudantes têm a oportunidade de conhecer alguns métodos contraceptivos e observar estatisticamente a probabilidade de sua eficácia para evitar uma gravidez. Esse conhecimento propicia o cuidado com a própria saúde e a possibilidade de fazer escolhas mais conscientes.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 1

EM13MAT106: Várias situações da vida cotidiana que envolvem probabilidade são abordadas neste capítulo. Na página 215, por exemplo, por meio do infográfico que aborda os métodos contraceptivos, os estudantes têm a oportunidade de avaliar os riscos probabilísticos de adotar este ou aquele método.

Competências específicas 3 e 5

EM13MAT311 e EM13MAT511: Nas atividades propostas nas páginas 173 a 179, os estudantes resolvem e elaboram problemas em que identificam e exploram o espaço amostral em diversos tipos de eventos. Em seguida, nas páginas 181 a 187, eles analisam exemplos resolvidos sobre o cálculo de probabilidade, em diversas situações, levando em conta o espaço amostral. Por meio das atividades propostas, os estudantes pensam e discutem sobre os exemplos, resolvem e elaboram problemas sobre o assunto, reconhecem a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigam implicações no cálculo de probabilidades. Desenvolvem, assim, as habilidades EM13MAT311 e EM13MAT511.

EM13MAT312: Essa habilidade é mobilizada da página 202 a 206, quando são propostas situações que envolvem o cálculo da probabilidade em experimentos aleatórios sucessivos, com e sem reposição.

Conexões com outras áreas do conhecimento

Em várias situações propostas neste capítulo é possível fazer conexão com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** por meio da **Biologia**. Por exemplo, a seção **Análise e contexto** da página 207 aborda diferentes maneiras de empregar a probabilidade na ciência natural, incluindo as experiências de Mendel, com ervilhas. O Infográfico da página 215 aborda diversos métodos contraceptivos e a probabilidade de eficácia de cada um.

Temas Contemporâneos Transversais

O TCT **Saúde** é abordado em várias situações, como, por exemplo, nas atividades resolvidas e propostas nas páginas 209 e 210, além do Infográfico da página 215.

Resoluções e comentários

Página 169

Abertura

1. Incentive os estudantes a resgatar na memória tudo o que aprenderam no Ensino Fundamental sobre o assunto e a conversar com os colegas, em duplas ou em grupos, a respeito de suas listas.
2. Os estudantes podem pensar em situações que envolvam sorte, como algum jogo com dado, cartas sacadas de forma aleatória, par ou ímpar etc.

   Promova um debate coletivo sobre o que os estudantes se lembraram. Aproveite para fazer um levantamento dos conhecimentos prévios e corrigir conceitos equivocados. Os professores da área de Ciências da Natureza podem ser envolvidos para enriquecer o debate acerca do uso de probabilidades nessa área.

1. Probabilidade

Página 170

Para pensar e discutir

1. É tão provável que a bolinha azul caia no tubo H quanto no tubo I.
2. Não é possível saber. Entretanto, na posição em que ela está, passará entre o 2º e o 3º pinos da 3ª linha, de baixo para cima. Assim, cairá nos seguintes tubos: B, C ou D.
3. A bolinha preta poderá cair em qualquer um dos tubos. Porém, devido às posições que eles ocupam na distribuição no tabuleiro, é mais provável que caia nos tubos centrais do que nos tubos laterais.

Página 171

Podcast – Probabilidade na história

Apresente o *podcast* "Probabilidade na história" para os estudantes. Esse recurso didático discute o desenvolvimento histórico do conceito de probabilidade, explorando as contribuições de matemáticos como Girolamo Cardano, Blaise Pascal e Pierre Fermat. O *podcast* apresenta como a teoria da probabilidade evoluiu a partir de jogos de azar para se tornar uma área fundamental da Matemática moderna.

Página 172

Para pensar e discutir

1. Os dois têm as mesmas “chances” de serem sorteados, pois cada um irá participar com 6 números e serão sorteados 6.
2. Você tem 1 possibilidade de ganhar (dando exatamente os 6 números que você escolheu); seu colega tem 7 possibilidades de ganhar (dando qualquer uma das 7 possibilidades de formar agrupamento dos 7 números 6 a 6 – problema de combinação, isto é, $C_{7,6} = 7$).

Para explorar

1. Sim, como o experimento envolve uma situação cujo resultado não pode ser previsto, trata-se de um experimento aleatório.

2. Sim, como nenhum papel foi retirado do recipiente, então a chance ainda é igual para todos.
3. No segundo, pois diminui-se o número de possíveis resultados após o 1º sorteio.
4. Se o número de estudantes da turma é *n*, temos: *n* possibilidades para o 1º sorteio, $n - 1$ possibilidades para o 2º sorteio e $n - 2$ possibilidades para o 3º sorteio.

Página 173

Para pensar e discutir

1. Não é possível saber qual será a bola retirada, por ser um experimento aleatório.
2. São 75 resultados possíveis no sorteio da 1ª bolinha.
3. Sim. As duas cartelas têm a mesma quantidade de números.

Página 175

Para pensar e discutir

1. Exemplo de resposta: O espaço amostral é formado por "todas as senas" (conjunto de 6 elementos) que podem ocorrer.
2. Exemplo de resposta: Um "elemento" do espaço amostral seria a seguinte sena: {10, 22, 24, 01, 58, 55}. Outro "elemento" seria a seguinte sena: {8, 9, 10, 11, 12, 13}.
3. O número de elementos do espaço amostral é a quantidade de senas que podem ser formadas a partir de 60 números, isto é:
   $C_{60,\,6} = 50\,063\,860$.

Página 176

Para pensar e discutir

1. 7: (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)
2. 2 ou 12, pois a soma 2 será apenas o par (1, 1) e soma 12 será apenas (6, 6).

Páginas 177-179

Atividades

1.
   a) Como não sabemos o número de estudantes, iremos expressar como uma incógnita *n*.
   b) $\Omega = \{A, E, I, O, U\}$
   c) $\Omega = \{B, C, D, F, G, H, J, K, L, M, N, P, Q, R, S, T, V, X, W, Y, Z\}$
   d) Por ter mais elementos, é provável que o evento "escolher um estudante que tenha o primeiro nome começado por consoante" aconteça.

2.
   a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   b) $A = \{4, 5, 6\}$
   c) $B = \{2, 3, 5\}$
   d) $C = \{1, 4\}$
   e) $D = \{\ \}$, evento impossível
   f) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3.
   a) Os eventos *A* e *B*.
   b) O evento *D*.
   c) O evento *E*, ou seja, todo o espaço amostral.

4.
   a) Exemplo de resposta: Seja o espaço amostral do dodecaedro $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; se o evento *A* é "sair número primo", quantos e quais são os elementos?
      5 elementos: 2, 3, 5, 7, 11
   b) Exemplo de resposta: Seja o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 20\}$; se o evento *B* é "lançar o icosaedro e sair número par", quantos elementos terá esse conjunto?
      10 elementos: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 e 20.

5.
   a) São 37 elementos.
      $\Omega = \{0, 1, 2, ..., 36\}$
   b) $n(A) = 13$. $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36\}$
   c) $n(B) = 8$. $B = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$
   d) $n(C) = 3$; $C = \{0, 15, 30\}$

6.
   - Evento *A*: será formado por 13 cartas com o naipe espadas.
   - Evento *B*: será formado por 4 cartas com o número 3, uma de cada naipe.
   - Evento *C*: será formado por 1 carta com o rei de ouros.
   - Evento *D*: será formado por 4 cartas com o ás, uma de cada naipe.

   O evento *A* é o mais provável, pois são 13 resultados entre 52 possíveis de ocorrer. O evento *C* é o menos provável, pois há 1 resultado entre 52 possíveis de ocorrer.

7.
   a) O espaço amostral é formado por todas as sequências possíveis de 6 letras, isto é, permutação de 6 elementos: $6! = 720$
   b) Apenas 1.

8. Exemplo de resposta: O espaço amostral seria Ω = {preto, amarelo}. Como a área da região amarela é maior, pois mede 4 m², a chance de acertar o alvo também é maior.

9.
   a) O espaço amostral será formado por 32 elementos, pois consiste em $\Omega = n(\text{faces})^{n(\text{lançamentos})} = 2^5$.
   b) $A = \{C, C, C, C, C\}$. Portanto, o evento *A* contém 1 elemento.

10.
   a) Terá 13 elementos.
   b) Terá 9 elementos.
   c) Terá 4 elementos.

11. Os eventos serão determinados por: $n(A) = 3$; $n(B) = 4$.

12.
   a) O espaço amostral será a quantidade de possibilidades retirando uma bola sem reposição: $\Omega = 21 \cdot 20 = 420$.
   b) $A = 42$ elementos

13.
   a) $\Omega = 52$

b) Subtraindo as quatro cartas às, o espaço amostral será 48.

14. Exemplo de problema: Considere o lançamento de dois dados e o evento *A* com soma igual a 7.

a) $\Omega = 36$

b) $A = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$; 6 elementos

Página 180

Análise e contexto

1. Exemplo de resposta: Uma outra forma de distribuir o prêmio seria contar a chance de vitórias de cada jogador até o jogo finalizar.

2. Exemplo de resposta: Os matemáticos possivelmente analisaram as chances por cada jogada, assim como as possíveis sequências de resultados do jogo.

Página 181

Para pensar e discutir

1. É mais provável que Pedro erre, já que as chances de se obter uma meia que não é o par são maiores.

2. Sim, é um experimento aleatório.

3. O espaço amostral é formado pelo número de maneiras de escolher 2 de 12 meias. Assim, o número de elementos desse espaço amostral é calculado por $C_{12,\,2} = 66$.

4. O evento é o conjunto formado pelos pares de meias. O número de pares de meias é 6.

Página 182

Para pensar e discutir

Espaço amostral – proporcional à área do quadrado correspondente ao alvo: $4\ m^2 \rightarrow 100\%$ (considerando que a flecha atinge o alvo).

1. Ocorrência do evento A – proporcional à área amarela:

$4 - 1 = 3$; $3\ m^2 \rightarrow 75\%$

2. Ocorrência do evento B – proporcional à área preta: $1\ m^2 \rightarrow 25\%$.

Página 183

Para pensar e discutir

1. Exemplo de resposta: A probabilidade total é de 100% ou 1. A probabilidade de sair um salgado sem:

$P = 1 - \frac{13}{15} \Rightarrow P = \frac{2}{15}$

Página 184

Para pensar e discutir

1. A probabilidade seria $\frac{2}{120}$ isto é, o dobro da calculada no exemplo.

Página 185

Para pensar e discutir

1. Não, pois a face 1 tem o triplo de probabilidade de ocorrer do que qualquer outra face.

2. Resposta esperada:

Pode-se calcular a probabilidade de cada face analogamente à **atividade resolvida 11**:

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$

$1x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1$

$x = \frac{1}{21}$

$P(1) = \frac{1}{21},\ P(2) = \frac{2}{21},\ P(3) = \frac{3}{21}$

$P(4) = \frac{4}{21},\ P(5) = \frac{5}{21}$ e $P(6) = \frac{6}{21}$

Páginas 186-187

Atividades

15. Calculando as correspondentes probabilidades de ocorrência:

$P(A) = \frac{7}{15}, P(B) = \frac{8}{15}, P(C) = \frac{10}{15}$

Assim, o mais provável é o evento *C*, e o menos provável é o evento *A*.

16.

a) $n(\Omega) = 8$ e $n(2 \text{ caras}) = 4$; portanto, a probabilidade é $P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, ou 50%.

b) $P = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ou 25%

c) Incentive os estudantes a criar a situação proposta, apresentá-la aos colegas, e discutir as soluções.

17. Espaço amostral: formado por todas as sequências possíveis de 3 algarismos $(10 \cdot 10 \cdot 10)$. Evento: apenas uma sequência é favorável (aquela que abre o cadeado).

Probabilidade: $\frac{1}{1\,000}$.

18.

a) $P = \frac{1}{C_{n,\,2}}$, sendo *n* o número de estudantes da turma.

b) $P = 1 - \frac{1}{C_{n,\,2}}$, sendo *n* o número de estudantes da turma.

19.

a) A probabilidade será $\frac{1}{6}$.

b) Admitindo que a frequência de sair 1 seja x, a frequência de sair 6 será 2x, conforme o enunciado. Os outros números terão a mesma probabilidade $\frac{1}{6}$ de acontecer.

$x + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 2x = 1$

$3x = 1 - \frac{4}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

c) Como a probabilidade de se obter a face 6 será o dobro da face 1, então $\frac{2}{9}$.

20. Admitindo que $P(1) = P(3) = P(5) =$
$= P(7) = P(9) = 2x$ e $P(2) = P(4) =$
$= P(6) = P(8) = P(10) = x$.

$5 \cdot (2x) + 5x = 1$

$15x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{15}$

$P(7) = \frac{2}{15}$

21. Área total, em cm^2, é dada por: $\pi \cdot 50^2 = 2\,500\pi$. Já a área azul, em cm^2, será $\pi \cdot (50^2 - 30^2) = 1\,600\pi$. A área vermelha, em cm^2, será: $\pi \cdot (30^2 - 10^2) = 800\pi$. Por fim, a área amarela, em cm^2, será:

$\pi \cdot 10^2 = 100\pi$

$P(\text{azul}) = \frac{1\,600\pi}{2\,500\pi} = 0{,}64$

$P(\text{vermelha}) = \frac{800\pi}{2\,500\pi} = 0{,}32$

$P(\text{amarela}) = \frac{100\pi}{2\,500\pi} = 0{,}04$

22. Os ângulos A e B são suplementares, então a soma é igual a 180°. Logo, a área da região formada é a de um semicírculo.

$A_C = \frac{\pi \cdot 10^2}{2} \cong \frac{3{,}14 \cdot 100}{2} = 157$; $157\ cm^2$

$P \cong \frac{157}{628} = 0{,}25 = 25\%$

Alternativa **b**.

23. Quantidade de cédulas que somam 200 reais.

- 1 de 50, 1 de 20 e 13 de 10;
- 1 de 50, 2 de 20 e 11 de 10;
- 1 de 50, 3 de 20 e 9 de 10;
- 1 de 50, 4 de 20 e 7 de 10;
- 1 de 50, 5 de 20 e 5 de 10;
- 1 de 50, 6 de 20 e 3 de 10;
- 1 de 50, 7 de 20 e 1 de 10;
- 2 de 50, 1 de 20 e 8 de 10;
- 2 de 50, 2 de 20 e 6 de 10;
- 2 de 50, 3 de 20 e 4 de 10;
- 2 de 50, 4 de 20 e 2 de 10;
- 1 de 50, 1 de 20 e 3 de 10;
- 1 de 50, 2 de 20 e 1 de 10.

De todas as situações possíveis, 6 são favoráveis.

$P = \frac{6}{13}$

24.

a) As duas têm a mesma probabilidade de ganhar.

b) A probabilidade pode ser calculada da seguinte maneira: o espaço amostral é formado pelo número total de senas que podem ser formadas.

$C_{60,\,6} = \dfrac{60!}{(60-6)! \cdot 6!}$

$C_{60,\,6} = 50\,063\,860$

Cada uma delas só está concorrendo com 1 sena.

$P(L) = P(A) = \dfrac{1}{50\,063\,860}$

Página 188

Para explorar

1 e 2. Para isso, você pode acessar o *site* oficial da Caixa Econômica Federal ou consultar em loterias. Abaixo estão os valores típicos para cada quantidade de dezenas na Mega-Sena (os valores podem variar conforme o ano de pesquisa):

Número de dezenas	Valor da aposta (R$)
6	5,00
7	35,00
8	140,00
9	420,00
10	1.050,00
11	2.310,00
12	4.620,00
13	8.030,00
14	12.870,00
15	19.305,00

3. A fórmula para calcular a probabilidade de ganhar na loteria, ao escolher k dezenas, é dada por:

$P = \dfrac{1}{\dfrac{C_{60,\,6}}{C_{k,\,6}}}$

- 6 dezenas:

$P = \dfrac{1}{C_{60,\,6}} = \dfrac{1}{50\,063\,860}$

- 7 dezenas:

$P = \dfrac{1}{\dfrac{C_{60,\,6}}{C_{7,\,6}}} = \dfrac{1}{7\,151\,980}$

- 8 dezenas:

$P = \dfrac{1}{\dfrac{C_{60,\,6}}{C_{8,\,6}}} = \dfrac{1}{1\,787\,995}$

E assim por diante até 15 dezenas.

4. Quando se escolhe mais dezenas, há mais combinações possíveis que podem resultar em um prêmio. Portanto, o custo da aposta reflete esse aumento na probabilidade de ganhar. A justificativa dos valores é baseada em:

- Mais combinações possíveis: ao escolher mais dezenas, você está cobrindo mais combinações possíveis, o que justifica um preço maior.
- Gestão de riscos: para a loteria, cobrar mais por aposta com mais dezenas ajuda a equilibrar o risco e garantir a sustentabilidade do prêmio.

Para pensar e discutir

1. As probabilidades são:

$P(A) = 1$ $\quad P(C) = \dfrac{2}{6}$

$P(B) = 0$ $\quad P(\overline{C}) = \dfrac{4}{6}$

2. O evento A é certo; o evento B é impossível.

3. O resultado é 1. Significa que esses eventos são complementares.

4. Pode variar de 0 a 1, isto é, de 0% a 100%.

Página 190

Carrossel de imagens – De olho na probabilidade

Apresente o carrossel de imagens "De olho na probabilidade" para os estudantes. Esse recurso didático oferece exemplos de eventos cotidianos com diferentes graus de probabilidade, como a chance de ser atingido por um raio ou de encontrar uma pérola em uma ostra. As imagens ajudam os estudantes a visualizar e entender como a probabilidade se aplica no mundo real, tornando o conceito mais acessível e relevante.

Para pensar e discutir

1. Será igual a 1 somente se todos os estudantes da turma têm cabelo preto.

2. Será igual a zero somente se todos os estudantes da turma não usarem tênis vermelho.

3. A probabilidade será representada por um número maior ou igual a zero (será zero se você não for estudante dessa turma) e menor ou igual a um (será um se você for o único estudante dessa turma). Então, dizemos que a probabilidade será um número pertencente ao intervalo [0, 1].

4. A probabilidade de acontecer um evento e a probabilidade de ele não acontecer são complementares. Assim, a probabilidade de não acontecer o evento é 70%.

Página 191

Atividades

25.

a) Total = 75 números. Já foram sorteados 40.

75 – 40 = 35; 35 números

Evento: "preencher no próximo número sorteado uma linha ou uma coluna"; $P = \dfrac{2}{35}$.

b) É a probabilidade complementar do evento anterior: $P = \dfrac{33}{35}$.

26.

a) A probabilidade de ele não ocorrer é 55%.

b) A probabilidade será $1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$.

27.

a) Exemplo de resposta: Em um dado no formato de dodecaedro (numerado de 1 a 12), qual é a probabilidade de sair o número 15 na face voltada para cima? O evento é impossível, pois não há face numerada com o número 15, uma vez que o dodecaedro só tem 12 faces.

b) Exemplo de resposta: Em uma caixa foram colocadas 8 bolas pretas. Qual é a probabilidade de retirar uma bola preta da caixa? O evento é certo, pois todas as bolas são pretas.

28. Exemplos de respostas:

a) Qual é a probabilidade de retirar uma carta de naipe preto do baralho? São 4 naipes: espadas e paus são pretos; ouros e copas são vermelhos. Cada naipe tem 13 cartas. $P = \dfrac{26}{52} = 0{,}5 = 50\%$.

Qual é a probabilidade de retirar uma carta que não seja de naipe preto? Evento complementar ao anterior. $P = \dfrac{26}{52} = 0{,}5 = 50\%$.

b) Qual a probabilidade de se retirar do baralho o ás de espadas? Como só há 1 ás de espadas no baralho, temos: $P = \dfrac{1}{52} \cong 0{,}02$.

29.

a) A probabilidade de sair uma face com um número menor que 3 é $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

b) A probabilidade de sair uma face com um número maior ou igual a 3 é $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

c) Sim, pois no lançamento do dado esses dois eventos unidos correspondem ao espaço amostral (observe que a soma das probabilidades é igual a 1).

30.

a) Probabilidade de serem perfeitos: $P = \frac{C_{90,\,6}}{C_{100,\,6}}$.

b) Probabilidade de 6 parafusos serem defeituosos: $P = \frac{C_{10,\,6}}{C_{100,\,6}}$.

c) Probabilidade de que nenhum dos seis parafusos sejam perfeitos é de que sejam seis defeituosos: $P = \frac{C_{10,\,6}}{C_{100,\,6}}$.

d) A probabilidade de que nenhum dos seis parafusos sejam defeituosos é de que sejam seis perfeitos; portanto, $P = \frac{C_{90,\,6}}{C_{100,\,6}}$.

e) Retiramos do todo os parafusos defeituosos; logo, $P = 1 - \frac{C_{10,\,6}}{C_{100,\,6}}$.

f) Retiramos do todo os parafusos perfeitos; logo, $P = 1 - \frac{C_{90,\,6}}{C_{100,\,6}}$.

31. Total: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; 6 números

a) Evento *A*: todos os números formados são múltiplos de 3, pois a soma dos três algarismos (9) é um múltiplo de 3. Logo, $P(A) = 1 = 100\%$.

b) Evento *B*: é o evento complementar de *A*, ou seja, $P(B) = 0 = 0\%$.

c) Evento *C*: para o número ser múltiplo de 5, é preciso terminar em 0 ou 5. Como não temos esses algarismos, $P(C) = 0 = 0\%$.

d) Evento *D*: é o evento complementar de *C*, ou seja, $P(D) = 1 = 100\%$.

32.

a) Podem ocorrer os seguintes resultados: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12.

b) Não, pois os resultados não têm a mesma probabilidade de ocorrência.

c) Os pares cujas somas serão iguais a sete: (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4) e (4, 3). Portanto, a probabilidade de se obter soma sete é $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

d) Complementar do evento anterior: $P = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

e) Os pares cujas somas serão números ímpares: (1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5).

$P = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

f) Complementar do evento anterior: $P = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Página 192

Análise e contexto

1. Sim, é possível, pois a probabilidade de isso acontecer é de $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1\,024} \cong 0{,}000976$ 0,0976%, ou seja, a probabilidade não é nula. É impossível saber qual é o próximo, mas pode-se estimar 50% de chance para cada possibilidade.
2. É impossível saber um fato que ainda não aconteceu. Pode-se estimá-lo com base no seu histórico e na probabilidade de o evento acontecer.

2. Adição de probabilidades

Página 193

Para pensar e discutir

1. São 13 elementos. $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 3, 9, 15\}$
2. São 3 elementos. $A \cap B = \{6, 12, 18\}$
3. São 7 elementos que estão em Ω e não estão em $A \cup B$: $\Omega - (A \cup B) = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.
4. A probabilidade é $\frac{13}{20}$.
5. Não, pois $P(A) + P(B) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} = \frac{16}{20}$, que é diferente de $\frac{13}{20}$. Essa diferença ocorre porque existem três elementos que estão nos dois conjuntos simultaneamente, e ao adicionar as probabilidades eles foram computados duplamente.

Páginas 195-196

Para pensar e discutir

1. Exemplo de resposta: Uma ideia é calcular a probabilidade de nenhum deles participar e, a partir daí, diminuir de 100%.
2. A probabilidade de nenhum deles participar é de aproximadamente 33%, pois 100% – 67% = 33%.
3. Calculando o espaço amostral, temos $C_{10,\,4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$

Agora, calculando as possibilidades de nenhum deles participar, temos $C_{8,\,4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70$

Portanto, a probabilidade de nenhum deles participar é dada por

$P = \frac{C_{8,\,4}}{C_{10,\,4}} \Rightarrow P = \frac{70}{210} \Rightarrow P = \frac{1}{3}$

Atividades

33. Quando os eventos *A* e *B* forem mutuamente exclusivos, isto é, quando a interseção entre eles for o conjunto vazio.

34.

a) Total: 15 números.
$P(A) = \frac{3}{15}; P(B) = \frac{8}{15}$;
$P(A \cap B) = \frac{2}{15}$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = \frac{3}{15} + \frac{8}{15} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15}$

b) Não, pois existem elementos que pertencem aos dois conjuntos correspondentes aos eventos *A* e *B*.

35. Exemplo de resposta:
Total: 15 números.
Evento *A*: o número sorteado é múltiplo de 3.
Evento *B*: o número sorteado é múltiplo de 7.
Qual é a probabilidade de ocorrência de *A* ou de *B*?
$A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $B = \{7, 14\}$
$P(A \cup B) = \frac{5}{15} + \frac{2}{15} - \frac{0}{15} = \frac{7}{15}$

36. Total: 52 cartas. Evento *A*: retirar um rei; evento *B*: retirar uma dama.
$P(A) = \frac{4}{52}$ e $P(B) = \frac{4}{52}$
Probabilidade de retirar um rei ou uma dama:
$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} - \frac{0}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$
A probabilidade é $\frac{2}{13}$. Os eventos são mutuamente exclusivos, pois a interseção deles é vazia, isto é, não há uma carta que possa ser simultaneamente dama e rei.

37. Exemplo de resposta:

a) Evento *A*: retirar uma carta de copas; evento *B*: retirar um rei.

b) Retirando-se aleatoriamente uma carta de um baralho de 52 cartas, calcule a probabilidade de ocorrer uma carta de naipe de copas ou um rei.

c) $P(A) = \frac{13}{52}; P(B) = \frac{4}{52}$
$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

$P(A \cup B) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52}$

$P(A \cup B) = \frac{16}{52} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{4}{13}$

38. Os divisíveis por 2 são 50 números, pois é a metade de 100. São divisíveis por 3: (3, 6, 9, ...,99); ao todo, temos 33 números. Já os divisíveis por 6 (divisores de 2 e 3 ao mesmo tempo) são 16 números.

São 67 números divisíveis por 2 ou por 3.

$50 + 33 - 16 = 67$

$P = \frac{67}{100} \Rightarrow 100P = 67$

39. Vamos representar os dados do enunciado em uma tabela, sendo:

X: sofre da doença X;

$\overline{X}$: não sofre da doença X;

A: presença do gene A;

$\overline{A}$: ausência do gene A.

	A	$\overline{A}$	Total
X	6%	4%	10%
$\overline{X}$	2%	88%	90%
Total	8%	92%	100%

Probabilidade de que uma pessoa dessa população seja portadora do gene A, dado que sofre da doença X:

$P = \frac{6\%}{10\%} = 0,6 = 60\%$

Alternativa **e**.

40. Probabilidade de retirar o cartão escrito sábado: $\frac{1}{7}$; probabilidade de retirar o cartão escrito domingo: $\frac{1}{7}$.

$\frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$

Alternativa **d**.

41. O total de números é 20; seja o evento A (números primos): {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}; seja o evento B (quadrados perfeitos): {1, 4, 9, 16}.

$P(A \cup B) = \frac{8}{20} + \frac{4}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

42. Retirando 4 bolas múltiplas de 5: {5, 10, 15, 20}, restam 15 bolas na urna. Considerando que os números do espaço amostral são maiores que 5, temos: Ω = {6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19}. Seja o evento A todos os múltiplos de 6 pertencentes ao espaço amostral, logo:

A = {6, 12, 18}.

$P(A) = \frac{3}{12} = 0,25 = 25\%$

Alternativa **e**.

Página 197

Para pensar e discutir

1. A probabilidade é $\frac{30}{125}$. Temos aqui um primeiro evento: "Pessoas que nunca tinham viajado de avião".

Assim, o espaço amostral diminui (das 180 pessoas, 55 são descartadas) para 125. Dessas 125, apenas 30 pessoas têm idade menor de 50 anos.

2. A probabilidade seria de $\frac{95}{125}$. A explicação é análoga à anterior.

Página 199

Para pensar e discutir

1. Exemplo de resposta: Um procedimento é organizar a resolução como detalhado a seguir:

1º) Como sabemos que o estudante sorteado está com a mensalidade atrasada, o espaço amostral fica reduzido a apenas 13 elementos (estudantes que estão com a mensalidade atrasada).

2º) Queremos calcular a probabilidade de sortear, entre esses 13 estudantes, alguém que estuda Inglês. Como são 5 estudantes entre 13 que fazem o curso de Inglês, a probabilidade é $\frac{5}{13}$.

Para explorar

1. Queremos apenas pares de números cuja soma seja menor que 7, então temos 15 possibilidades desse evento; e, para que a face 2 ocorra ao menos em um dos dados, são 7 possibilidades. Portanto, a probabilidade é $\frac{7}{15}$.

2. Exemplo de resposta: Os dois dados são lançados. Sabendo-se que as faces voltadas para cima têm números pares, qual é a probabilidade de esses números serem iguais? $P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

3. Exemplo de resposta: Os dois dados são lançados. Sabendo-se que a soma dos resultados das faces é 10, qual é a probabilidade de que em ao menos um dos dados ocorra a face 5? $P = \frac{1}{3}$.

4. Exemplo de resposta: Os dois dados são lançados. Sabendo-se que em ao menos um dos dados ocorre a face 4, qual é a probabilidade de que a soma dos resultados das faces seja igual a 10? $P = \frac{2}{11}$.

Página 200

Atividades

43. A resposta depende do número de estudantes da turma. Se a turma tiver n estudantes, a probabilidade será $\frac{1}{(n-1)}$.

44. Total de mulheres: 18 + 18 + 8 = 38

Pessoa que não seja adulta:

$12 + 18 = 30 \Rightarrow P = \frac{30}{38}$

45. O espaço amostral é formado por 13 cartas de paus. De 2 a 10, temos 9 cartas possíveis, então: $P = \frac{9}{13}$.

46.

a) $P(\text{ambas pretas}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$

b) $P(\text{ambas vermelhas}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$

c) P(a primeira ser preta e a segunda ser vermelha) $= \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$

d) P(a primeira ser vermelha e a segunda ser preta) $= \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$

47.

a) $P(\text{ambas pretas}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$

b) $P(\text{ambas vermelhas}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

c) P(a primeira ser preta e a segunda ser vermelha) $= \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$

d) P(a primeira ser vermelha e a segunda ser preta) $= \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

48.

a) Sabendo que o espaço amostral de fumantes é de 50 funcionários e querendo que seja um homem, temos:

$P = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$

b) Sabendo que o espaço amostral de não fumantes é de 150 funcionários e querendo que seja uma mulher, temos:

$P = \frac{85}{150} = \frac{17}{30}$

49. O espaço amostral é de 60 pessoas do sexo masculino e 12 querem Medicina; então: $P = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 20\%$.

Alternativa **e**.

50. Exemplo de resposta: Uma escola fez uma pesquisa sobre a disciplina preferida de estudantes, como a seguir.

Disciplina	Masculino	Feminino
Matemática	15	8
Literatura	6	12
Ed. Física	10	5
Geografia	6	8
Outras	18	12

Um desses estudantes é escolhido ao acaso e sabe-se que sua disciplina favorita é Matemática. A probabilidade de esse estudante ser do sexo feminino é de $P = \frac{8}{23}$.

51. Total de alunos: 300; $\frac{1}{5}$ dos alunos atuam em área diferente, ou seja: $\frac{300}{5} = 60$. $\frac{3}{8}$ do restante não trabalham (o restante é igual ao total menos $\frac{1}{5}$ dos que atuam em áreas diferentes, 300 – 60), ou seja, $\frac{240}{8} = 30$ (como queremos 3 partes das 8, então multiplicaremos o resultado por 3); $3 \cdot 30 = 90$. O restante trabalha na área escolhida (o restante é igual a 240 menos os 90 alunos que não trabalham); 240 – 90 = 150. Dessa forma, a probabilidade de escolhermos um aluno que trabalha na mesma área.
$P = \frac{150}{300} = \frac{1}{2} = 0,5$
Alternativa **a**.

3. Multiplicação de probabilidades

Página 202

Para pensar e discutir

1. São 2 de 3 possibilidades para o jogador 1 ser vencedor. Aqui, o estudante fica tentado a dizer que a probabilidade seria de $\frac{2}{3}$ para o jogador 1 vencer e de $\frac{1}{3}$ para o jogador 2 vencer; nesse caso, a distribuição deveria ser $\frac{2}{3}$ para o jogador 1 e $\frac{1}{3}$ para o jogador 2. Mas isso não acontece: observe a distribuição de probabilidades.
2. Os percentuais indicam que a probabilidade de o jogador 2 vencer a disputa em jogos futuros é de 25%, enquanto a probabilidade de o jogador 1 vencer é de 75%.

Para pensar e discutir

1. Exemplo de resposta: A probabilidade será maior na situação 2, pois o fato de ser "sem reposição" diminui o espaço amostral quando comparado com a situação 1.
2. Não, pois haverá reposição. Assim, as condições iniciais da 2ª extração da ficha são mantidas em relação às condições iniciais da 1ª extração.
3. Sim. Há uma alteração no espaço amostral, diminuindo o número de fichas.

Página 204

Vídeo – Os perigos das apostas *on-line*

Apresente o vídeo "Os perigos das apostas *on-line*" para os estudantes. Esse recurso didático explora os riscos associados às apostas *on-line* e mostra como elas podem levar a perdas financeiras. O vídeo explica como as casas de apostas fazem ajustes para garantir lucro e como a adrenalina das apostas pode causar dependência, levando o apostador a ignorar as perdas.

Páginas 205-206

Para pensar e discutir

1. A probabilidade é $\frac{1}{5}$.
2. Na 1ª tentativa, temos 4 chaves em 5 que não abrem, e separamos uma; na 2ª, temos 3 chaves em 4 que não abrem, e separamos uma; na 3ª, temos 2 chaves em 3 que não abrem, e separamos uma; na 4ª tentativa, queremos que abra e temos 2 opções de chaves. Então, a probabilidade é: $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$.
3. A probabilidade de resultar coroa é $\frac{1}{2}$. Logo, a probabilidade de 3 coroas consecutivas é: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Atividades

52.

a) Probabilidade de acertar apenas a 1ª questão: $P = \frac{1}{4}$

b) Probabilidade de acertar todas as questões:
$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{1024}$

c) Probabilidade de errar todas as questões: $1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$

d) Probabilidade de acertar as 3 primeiras e errar as 2 últimas:
$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{1024}$

53. Pelo enunciado, temos:
$P(B) = 3 \cdot P(C)$; $P(A) = 2 \cdot P(B)$
Sabemos que
$P(A) + P(B) + P(C) = 100\%$, então:
$6 \cdot P(C) + 3 \cdot P(C) + P(C) = 100\%$
$P(C) = 10\% = \frac{1}{10}$
$P(B) = \frac{3}{10}$ e $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

54. Exemplo de resposta:
$P(B) = \frac{1}{2} \cdot P(C)$
$P(A) = 4 \cdot P(B) = 2 \cdot P(C)$
Como $P(A) + P(B) + P(C) = 100\%$
$\frac{1}{2} \cdot P(C) + 2 \cdot P(C) + P(C) = 100\%$
$P(C) \cong 28,57\%$
Assim, $P(B) \cong 14,29\%$ e $P(A) \cong 57,14\%$.

55. A probabilidade de chover no dia, combinada com a probabilidade de o piloto vencer, é dada por:
$\frac{75}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{45}{100} = 0,45$ ou 45%
Dessa forma, a probabilidade de não chover e de o piloto vencer é:
$\left(1 - \frac{75}{100}\right) \cdot \frac{20}{100} = \frac{25}{100} \cdot \frac{75}{100} =$
$= 0,05 = 5\%$
A probabilidade de o piloto vencer é 45% (chovendo) + 5% (sem chover), totalizando 50%.

56. Probabilidade de se atrasar e chover: 50% (de chance de atraso se chover); 30% (de chance de chover). Ou seja, $P = 50\% \cdot 30\% = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$.
Probabilidade de se atrasar e não chover: 25% de chance de atraso sem chuva; 70% (100% – 30%) de chance de não chover. Ou seja,
$P = 25\% \cdot 70\% = 0,25 \cdot 0,7 = 0,175$.
Concluindo, ele tem 0,15 de chance de se atrasar se chover; 0,175 de chance de se atrasar se não chover. Como pode ou não chover, ele tem a probabilidade de se atrasar de: $0,15 + 0,175 = 0,325$
Alternativa **c**.

57.

a) A probabilidade é de $P = \frac{1}{4}$ ou 25%.

b) $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$

58. A probabilidade de André acertar o alvo é 80%; logo, a de não acertar é 20%. A de Bruno acertar é 60%; logo, a de não acertar é 40%.
$0,4 \cdot 0,2 = 0,08 = 8\%$
Alternativa **a**.

59. Supondo que haja 1000 declarações: 10% de 1000 = 100 declarações suspeitas; 20% de 100 = 20; 20 declarações fraudulentas suspeitas; 90% de 1000 = 900 declarações não suspeitas; 2% de 900 = 18 declarações fraudulentas não suspeitas.

a) 20% de 10%: 2%.

b) 20 + 18 = 38 declarações fraudulentas, sendo 20 suspeitas:
$P = \frac{20}{38} \cong 0,526 = 52,6\%$

60. O mágico pode retirar, sucessivamente e sem reposição, dois lenços azuis ou dois lenços brancos, logo:

$P = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$

Alternativa **c**.

61. Sendo M o número de enfermeiros do sexo masculino, temos que a probabilidade é:

$\frac{\frac{M}{5}}{60} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{M}{5} = \frac{60}{12} \Rightarrow M = 25$

Portanto, o número de mulheres será $60 - 25 = 35$.

Alternativa **d**.

62. Se 59 das 150 camisetas eram lisas, então 91 são estampadas. Se 67 das camisetas estampadas eram tamanho P, logo, 33 eram lisas. O lote tinha 150 camisetas e 100 eram de tamanho P, então 50 eram de tamanho M. Dessa maneira, entre as camisetas de tamanho M:

$91 - 67 = 24$; 24 estampadas

$50 - 24 = 26$; 26 lisas

Calculando a probabilidade condicional de a camiseta ser estampada tamanho M:

$P = \frac{24}{50} = 0,48 = 48\%$

Alternativa **c**.

Página 207

Análise e contexto

1. Exemplo de resposta: O experimento de Mendel com ervilhas envolveu o estudo de sete características distintas, como a cor e a textura das sementes e a altura das plantas. Ele cruzou plantas puras com características diferentes e observou os resultados nas gerações subsequentes. Na primeira geração filial (F1), todas as plantas mostraram a característica dominante (por exemplo, sementes amarelas). Na segunda geração filial (F2), a característica recessiva reapareceu na proporção de 3:1. A partir desses experimentos, Mendel formulou duas leis: a lei da Segregação, que afirma que cada planta tem dois alelos para cada característica, que se separam durante a formação dos gametas, e a lei da Segregação Independente, que diz que os alelos de diferentes características se distribuem de forma independente. Seu trabalho estabeleceu as bases da genética moderna, explicando como as características são herdadas de uma geração para outra.

2. Exemplos de respostas:

   Exemplo 1: A determinação da cor dos olhos irá depender de algumas variáveis complexas. Sabe-se que o gene responsável pela produção de melanina nos olhos pode ter diferentes variantes (alelos) que determinam a cor dos olhos (como azul, verde, castanho). A probabilidade de herdar a cor dos olhos irá depender das variantes presentes nos pais.

   Exemplo 2: A miopia é uma condição oftalmológica que pode ser influenciada pelos alelos herdados dos pais. Por exemplo, se a mãe é míope, a probabilidade de a criança também desenvolver miopia é maior do que se nenhum dos pais tivesse a condição.

   Exemplo 3: Alguns tipos de câncer têm uma componente hereditária significativa que também pode depender de fatores ambientais. A probabilidade de um indivíduo herdar uma mutação genética específica e, portanto, ter um risco aumentado de câncer depende da variação genética hereditária e da expressão dos alelos envolvidos.

3. Exemplo de resposta: A relação observada nos três exemplos é a herança genética de características e condições, influenciada pelos alelos herdados dos pais, com probabilidades variáveis de manifestação.

   Você pode fazer uma parceria com o professor de Biologia para desenvolver essas atividades.

4. Probabilidade e estatística

Página 208

Para pensar e discutir

1. Exemplo de resposta: A chance de morrer em um acidente de ônibus é maior do que a chance de morrer em um acidente de avião.

2. Exemplo de resposta: Esses dados são importantes para o público se conscientizar sobre os riscos, para o governo adotar políticas de segurança e prioridade de investimentos e para as indústrias de transporte.

Página 209

Para pensar e discutir

1. Pelo resultado de pesquisas realizadas com a aplicação do remédio em muitas pessoas que são portadoras da doença. É claro que isso é feito com todos os protocolos necessários e devidamente regulados pelos órgãos competentes.

2. Observe que, conforme o enunciado da situação, são muitas pessoas. Assim, a escolha da 1ª pessoa não altera percentualmente a escolha da 2ª pessoa, e analogamente para as duas outras pessoas escolhidas.

Páginas 210-212

Atividades

63.

- **I.** Falso, pois a probabilidade de ser afetada é de:

  $P = \frac{1}{800} \cong 0,00125 = 0,125\%$

  Logo, a de não ser afetada é 99,875%.

- **II.** Verdadeiro, como mostra o item anterior.

- **III.** Verdadeiro, pois a probabilidade é de: $P = \frac{1}{800} \cong 0,00125$

64. Exemplo de resposta: Confira o calendário de jogos da Copa do Mundo de 2026 (disponível em: https://www.fifa.com/pt/tournaments/mens/worldcup/canadamexicousa2026/articles/copa-mundo-2026-tabela-jogos. Acesso em: 13 set. 2024).

Jorge pretende presentear seu filho com um ingresso para um dos jogos da Copa do Mundo de 2026. Qual é a probabilidade de esse ingresso ser para um jogo que acontecerá no Canadá?

A Copa 2026 terá 104 jogos, sendo 13 deles no Canadá. Portanto: $P = \frac{13}{104}$

65. Comprador A em fevereiro:

$P(A) = \frac{30}{100}$

Comprador B em fevereiro:

$P(B) = \frac{20}{120}$

Assim, $P = \frac{30}{100} \cdot \frac{20}{120} = \frac{1}{20}$.

Alternativa **a**.

66. $P(O) = \frac{30}{200} = 0,15$

Alternativa **c**.

67. $500 - \frac{21}{100} \cdot 500 = 395$

Total de pessoas que assinalaram "Chato": $\frac{12}{100} \cdot 500 = 60$.

$P = \frac{60}{395} \Rightarrow P \cong 0,15$

Alternativa **d**.

68. No total há 180 alunos. O número de alunos com 15 anos (grupo de idade de 15 a 17 anos) é $\frac{1}{5} \cdot 40 = 8$. Portanto, a probabilidade será: $P = \frac{8}{180} \Rightarrow P = \frac{2}{45}$

Alternativa **e**.

69.

a) 200 pessoas sadias: 170 negativos e 30 positivos; 100 pessoas portadoras: 10 negativos e 90 positivos, logo, $P = \frac{30 + 90}{300} = \frac{2}{5}$.

b) 120 laudos positivos: 30 pessoas sadias e 90 pessoas portadoras, logo $P = \frac{90}{120} = \frac{3}{4}$.

70. A probabilidade de que o ganhador da viagem seja de 65 anos ou mais é de $\frac{12}{100}$; a probabilidade que o ganhador seja mulher é de $\frac{77}{100}$. Portanto, a probabilidade de que o ganhador seja mulher com 65 anos ou mais é de:

$P = \frac{12}{100} \cdot \frac{77}{100} = 0{,}0924 = 9{,}24\%$

Alternativa **d**.

71.

2%	Infectado	90% positivo
		10% negativo
98%	Não infectado	3% positivo
		97% negativo

A probabilidade de ser infectado/positivo é dada por:

$$P = \frac{P(\text{infectado} \cap \text{positivo})}{P(\text{positivo})} =$$

$$= \frac{0{,}02 \cdot 90\%}{0{,}02 \cdot 90\% + 0{,}98 \cdot 3\%} \cong 38\%$$

Alternativa **e**.

72. Sejam A e B, respectivamente, o conjunto das pessoas que praticam exercícios aeróbicos e o conjunto das pessoas que praticam exercícios anaeróbicos. Como, $n(A) = 37$, $n(B) = 29$ e $n(A \cap B) = x$, temos:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$50 - 6 = 37 + 29 - x$

$x = 22$

$P = \frac{22}{50} = 0{,}44 = 44\%$

Alternativa **a**.

73. Há 480 pessoas com resultado positivo, mas dessas 160 são saudáveis; portanto, a probabilidade pedida será: $P = \frac{160}{480} = \frac{1}{3}$

Alternativa **a**.

74. Vamos representar por x a quantidade de pessoas da população. Montando o seguinte esquema, temos:

Tem doença	1% de $x = 0{,}01x$	95% positivo
		5% negativo
Não tem doença	99% de $x = 0{,}99x$	2% positivo
		98% negativo

A probabilidade de que uma pessoa, escolhida ao acaso, tenha a doença, sabendo que seu resultado deu positivo, é

$$P = \frac{0{,}0095x}{0{,}0095x + 0{,}0198x} = \frac{95}{293}$$

Alternativa **a**.

75. Calculando a probabilidade de o teste detectar a doença em quem a possui, temos: $P = \frac{204}{204 + 36} = 85\%$. Agora, vamos calcular a probabilidade de uma pessoa desse grupo que obtém um resultado positivo não ter a doença (falso positivo):

$P = \frac{612}{612 + 204} = 0{,}75 = 75\%$

Alternativa **e**.

Página 213

Para pensar e discutir

1. Exemplo de resposta: Houve maior frequência para as posições centrais; à medida que se afasta do centro, a frequência vai diminuindo.
2. Exemplo de resposta: São maiores nas posições centrais x_9, x_{10}, x_{11} e x_{12}.
3. É a mediana dos valores de x.

Página 214

Para pensar e discutir

1. Da esquerda para a direita, temos:

$\frac{1}{64} = 0{,}015625 = 1{,}5625\%$

$\frac{6}{64} = 0{,}09375 = 9{,}375\%$

$\frac{15}{64} = 0{,}234375 = 23{,}4375\%$

$\frac{20}{64} = 0{,}3125 = 31{,}25\%$

$\frac{15}{64} = 0{,}234375 = 23{,}4375\%$

$\frac{6}{64} = 0{,}09375 = 9{,}375\%$

$\frac{1}{64} = 0{,}015625 = 1{,}5625\%$

2. Sim, pois temos probabilidades iguais em tubos posicionados simetricamente em relação ao tubo central.

Página 215

Infográfico

Essa atividade deve ser explorada com as disciplinas de Língua Portuguesa e Biologia. O texto dos estudantes externará, de certa forma, o conhecimento ou a falta de conhecimento do tema, que precisa ser trabalhado nesse momento da vida dos jovens. A ideia é abordar o tema da gravidez e as possíveis doenças transmissíveis no ato sexual sem a devida proteção.

Páginas 216-220

Atividades finais

1. A probabilidade do próximo lançamento ser novamente cara é $P = \frac{1}{2}$.

2.

a) Experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso.

b) Representa o conjunto formado por todos os resultados possíveis.

c) O conjunto formado por todos os resultados favoráveis para a realização desse evento.

d) Significa um evento impossível de ocorrer.

e) Significa um evento certo.

3. Será o complementar, ou seja, 97,2%.

4.

a) Quando a interseção entre eles é vazia.

b) Quando a realização de um deles não interfere na realização do outro.

5.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

b) Quando os dois eventos são mutuamente exclusivos, isto é, a interseção entre eles é vazia.

Questões de vestibulares e Enem

6. Com os números de 1 a 5, podemos formar 20 $(5 \cdot 4)$ pares (casos possíveis; lembre-se de que é sem reposição). O caso favorável é retirar números consecutivos; existem 4 possibilidades: 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4, 4 e 5. Portanto, a probabilidade é: $P = \frac{4}{20} = 20\%$. Alternativa **b**.
7. Existem três maneiras diferentes para que isso ocorra: (Falso) e

(Verdadeiro); (Verdadeiro) e (Falso); (Falso) e (Falso). Vamos calcular as três probabilidades e somá-las.

$(0,40) \cdot (0,60) = 0,24$

$(0,60) \cdot (0,40) = 0,24$

$(0,40) \cdot (0,40) = 0,16$

Somando as três maneiras, temos: $0,24 + 0,24 + 0,16 = 0,64 = 64\%$

Alternativa **a**.

8.

a) Sendo P a probabilidade de que uma turma escolhida tenha pelo menos 3 alunos canhotos, temos:

$P = \dfrac{12 + 8 + 2}{1 + 2 + 5 + 12 + 8 + 2} = \dfrac{11}{15}$

b) O número total de canhotos é dado por $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 2 = 90$. A probabilidade de que um aluno escolhido ao acaso na escola seja canhoto é $P = \dfrac{90}{960} = \dfrac{3}{32}$.

9. Calculando o percentual de diabéticos (que chamaremos de evento A) e hipertensos (que chamaremos de evento B), temos:

$P(A \cup B) = 30\% + 50\% - 70\% = 10\%$

A probabilidade de se tomar, ao acaso, entre os pacientes hipertensos, um paciente diabético:

$P = \dfrac{10\%}{50\%} = 0,2 = 20\%$

Alternativa **b**.

10. O total de alunos é 120. Diante isso, podemos formar 60 duplas sem haver restrições. Assim, teremos 30 duplas que podem ser formadas sem alunos do terceiro ano. Portanto, a probabilidade de a dupla escolhida ter um aluno do primeiro ano e um aluno do segundo ano é $P = \dfrac{30}{60} = \dfrac{1}{2}$. Alternativa **c**.

11. Calculando as áreas das coroas circulares concêntricas, temos:

$A_1 = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$

$A_2 = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (2^2 - 1^2) = 3\pi$

$A_3 = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (3^2 - 2^2) = 5\pi$

$A_4 = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (4^2 - 3^2) = 7\pi$

A probabilidade será calculada em função da área e da distância, ou seja, $P = \dfrac{A}{d^2}$. Portanto, a probabilidade de acertar A_4 a uma distância de 16 metros, é:

$A_1 = \dfrac{\pi}{16^2} = \dfrac{\pi}{256}; A_2 = \dfrac{3\pi}{256}$

$A_3 = \dfrac{5\pi}{256}; A_4 = \dfrac{7\pi}{256} = 7 \cdot A_1$

Alternativa **c**.

12. Admitindo que há x bolas na urna, temos que 5 são vermelhas e $x - 5$ são amarelas, logo:

$\dfrac{x-5}{x} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = 15$

Alternativa **b**.

13. Calculando os possíveis resultados de Ana e Beto, obtemos:

Ana	Beto
$8 + 9 = 17$	$3 \cdot 5 = 15$
$8 + 10 = 18$	$3 \cdot 6 = 18$
$9 + 10 = 19$	$5 \cdot 6 = 30$

O espaço amostral é igual a 9 e os resultados em que Ana possui um resultado maior ou igual ao de Beto são (17, 15); (18,15); (18, 18); (19, 15); (19, 18). Assim, a probabilidade pedida será $P = \dfrac{5}{9}$

Alternativa **e**.

14. O espaço amostral no lançamento de dois dados é igual a 36. Seja o evento A obter soma 7, considerando que o número 1 foi apagado de um dado e o número 4 foi apagado do outro. O evento será dado por n(A) = {(6, 1); (4, 3); (5, 2); (2, 5)}.

$P(A) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

Alternativa **e**.

15. Após a primeira retirada, sobraram 15 pedrinhas brancas de um total de 40; logo, a probabilidade de retirar uma pedrinha branca na próxima retirada é $P = \dfrac{25}{40} = \dfrac{5}{8}$. Na retirada seguinte, restarão 24 pedrinhas brancas de um total de 39 pedrinhas, pois já foi retirada uma pedrinha branca na primeira vez. A probabilidade de se retirar pedrinha branca novamente é de $P = \dfrac{24}{39} = \dfrac{8}{13}$. A probabilidade de retirar uma pedrinha branca nas próximas duas retiradas é

$P = \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{8}{13} = \dfrac{5}{13}$

Alternativa **b**.

16. A probabilidade de o terceiro amigo retirar a primeira bola preta e ficar com o livro:

$P = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{4} \cdot \dfrac{2}{3} = 0,2 = 20\%$

Alternativa **b**.

17. Calculando o número de elementos do espaço amostral, temos:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$100 - 12 = 80 + 73 - x$

$x = 72$

Logo, a porcentagem de pessoas que usam ambas as redes sociais é de 72%.

Alternativa **e**.

18. Os garotos podem sentar-se em cadeiras adjacentes à esquerda ou à direita das garotas. Existem 2 possibilidades e as meninas poderão ocupar 6 posições entre os 5 garotos:

$P = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Alternativa **c**.

19. Sendo x, y e z, respectivamente, o total de meninas, o total de meninos e o número de meninas canhotas, temos:

$z = \dfrac{\dfrac{y}{4} + z}{4} \Rightarrow y = 12z$

$\dfrac{3y}{4} = \dfrac{3(x+y)}{10} \Rightarrow 3y = 2x \Rightarrow x = 18z$

$P = \dfrac{z}{18z + 12z} = \dfrac{1}{30}$

Alternativa **b**.

20. Número de maneiras distintas para que três alunas ganhem um livro:

$C_{12,3} = \dfrac{12!}{(3!) \cdot (9!)} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{6 \cdot 9!} = 220$

Número de maneiras distintas em que Adriana seja sorteadas:

$C_{11,2} = \dfrac{11!}{(2!) \cdot (9!)} = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9!}{2 \cdot 9!} = 55$

A probabilidade pedida será dada por: $P = \dfrac{55}{220} = 25\%$. Alternativa **c.**

21. Total de escolhas diferentes para o quarteto: $C_{10,4} = \dfrac{10!}{(4!) \cdot (6)!}$.

Quartetos com Antônia e Francisca: $C_{8,2} = \dfrac{8!}{(2!) \cdot (6)!}$.

A probabilidade pedida será:

$P = \dfrac{\dfrac{8!}{(2!) \cdot (6!)}}{\dfrac{10!}{(4!) \cdot (6!)}} = \dfrac{8!}{2!} \cdot \dfrac{4!}{10!} = \dfrac{12}{90} = \dfrac{2}{15}$

Alternativa **d**.

22. No esquema abaixo, sejam 'C' as posições de cada um dos 9 carros e '_' uma posição não ocupada:

_C_C_C_C_C_C_C_C_C_

Como existem 14 vagas no total, há 5 vagas vazias 'V' para serem distribuídas entre as 10 posições '_'. Esse número de possibilidades vale:

$C_{10,5} = \dfrac{10!}{(5!) \cdot (5!)} = 252$

E o total de possibilidades de se distribuir os 9 carros entre as 14 vagas é igual a: $C_{14,9} = \dfrac{14!}{(9!) \cdot (5!)} = 2\,002$.

$P = \dfrac{252}{2\,002} = \dfrac{18}{143}$

Alternativa **e**.

23. Sejam A e B, respectivamente, o conjunto das pessoas que praticam exercícios aeróbicos e o conjunto das pessoas que praticam exercícios anaeróbicos. Logo, como $n(A) = 37$ e $n(B) = 29$, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, vem

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = 66 - n(A \cap B)$

Assim, desde que $n(U) = 50$ e $n\left(\overline{A \cup B}\right) = 6$, temos

$n(U) = n(A \cup B) + n\left(\overline{A \cup B}\right)$

$50 = 66 - n(A \cap B) + 6$

$n(A \cap B) = 22$

$\frac{22}{50} = 0{,}44 = 44\%$

Alternativa **a**.

24. Total de peças defeituosas:

$0{,}02 \cdot 2\,000 + 0{,}03 \cdot 3\,000 = 130$

Número de peças defeituosas produzidas na tulipa T_1:

$0{,}02 \cdot 2\,000 = 40$

Assim, a probabilidade de se obter uma peça defeituosa da tulipa T_1 é de $P = \frac{40}{130} = \frac{4}{13}$

Alternativa **c**.

25.

Declarações		Fraudulentas
Inconsistente	20%	25% · 20%
Consistente	80%	6,25% · 80%

Logo, a probabilidade de, nesse ano, a declaração de um contribuinte ser considerada inconsistente, dado que ela era fraudulenta, é de

$P = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}20}{0{,}25 \cdot 0{,}20 + 0{,}0625 \cdot 0{,}80} =$

$= 0{,}5$

Alternativa **e**.

26. As probabilidades de se obter o prêmio serão:

$P_1 = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cong 0{,}066$

$P_2 = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cong 0{,}066$

$P_3 = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cong 0{,}19$

$P_4 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cong 0{,}4$

$P_5 = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cong 0{,}43$

Assim, a pessoa deve escolher a opção 5 para ter a maior probabilidade possível de ganhar.

Alternativa **e**.

27. Sendo 21 dias letivos e 6h22min a mediana, podemos concluir que o rapaz chegou antes de 6h22min exatamente $\frac{21-1}{2} = 10$ vezes.

Assim, se a moda é 6h21min e n é o número de dias em que o rapaz chegou às 6h21min, então a probabilidade pedida é de $\frac{10-n}{21}$.

Essa probabilidade é máxima quando n é mínimo; dessa forma, como existem 6 observações menores do que 6h21min, deve-se ter $n = 3$; caso contrário, haveria pelo menos outra soma maior que 6h21min. Portanto, a probabilidade de que, em algum dos dias letivos de fevereiro, esse rapaz tenha apanhado o ônibus antes de 6h21min da manhã é $P = \frac{10-3}{21} = \frac{7}{21}$

Alternativa **d**.

28. Há 5 perguntas fáceis, que é 25% de 20. Serão acrescentadas x perguntas fáceis, ou seja, $5 + x$.

Portanto:

$\frac{5+x}{20+x} = \frac{75}{100} \Rightarrow x = 40$

Alternativa **d**.

29. Existem dois caminhos favoráveis (sentido horário e sentido anti-horário) para chegar ao destino sem passar por outras áreas e sem retornar, ou seja:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{24}$

Alternativa **c**.

30. A probabilidade de nenhum dos 3 alunos responder à pergunta é calculada multiplicando as probabilidades individuais de cada aluno não responder: $P = 0{,}70 \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}70 =$ $= 0{,}343 = 34{,}3\%$. A probabilidade de pelo menos um aluno responder à pergunta é dada pelo complementar de nenhum responder: $P = 100\% - 34{,}3\% = 65{,}7\%$

Alternativa **d**.

31. A probabilidade de ele estar dopado entre os 200 atletas é de

$P(I) = 3 \cdot \frac{1}{200} \cdot \frac{199}{199} \cdot \frac{198}{198} = \frac{3}{200}$.

$P(II) = \frac{1}{20} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{10}\right) \cdot \frac{9}{9} \cdot \frac{8}{8} = \frac{3}{200}$

$P(III) = 3 \cdot \left(\frac{1}{20} \cdot \frac{19}{19} \cdot \frac{18}{18}\right) \cdot$

$\cdot \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{10}{10} \cdot \frac{10}{10}\right) = \frac{3}{200}$

Alternativa **e**.

32. Sabe-se que, das cinco perguntas feitas, duas respostas estão erradas e três certas. A probabilidade de o candidato errar é de 0,20, logo, de acertar é 0,80. Portanto, a probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta será:

$0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot \frac{4!}{3!}$ (permutação das perguntas, considerando as três erradas).

$\frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot 4 = 0{,}08192$

Alternativa **b**.

33. O número de maneiras de permutarmos 3 computadores defeituosos e 2 perfeitos é dado por: $\frac{5!}{(3! \cdot 2!)} = 10$.

A probabilidade de escolhermos 3 computadores defeituosos entre os computadores comprados será:

$P = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{7} \cdot \frac{6}{6} \cdot 10 = \frac{1}{12}$

Alternativa **b**.

34. A probabilidade de extrair uma bola preta da urna A é de 20%, e na urna B é 25% (4 bolinhas pretas, então o total é16). Precisamos que a chance de ganhar o *voucher* seja menor ou igual a 1%. Assim:

$80 \leq 16 + x \Rightarrow 64 \leq x$

Alternativa **c**.

35. O primeiro número a ser retirado deve ser 0, logo a probabilidade é de $\frac{1}{10}$. Como há 5 dezenas possíveis, a probabilidade de tirarmos 5 é de $\frac{1}{5}$. Logo, a probabilidade de sair a senha 50 será: $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50}$. Já para sair a senha 02, o primeiro número a ser retirado precisa ser 2, logo a probabilidade será de $\frac{1}{10}$. Há cinco dezenas possíveis, então a probabilidade de tirarmos 0 é $\frac{1}{6}$. Dessa forma, a probabilidade de sair a senha 02 será: $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{60}$.

Alternativa **a**.

36. Precisamos calcular a probabilidade dos três tipos de senha, assim:

Tipo 1: $68 \cdot 67 \cdot 66 \cdot 65$

$P_1 = \frac{1}{\text{Tipo 1}}$

Tipo 2: $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 6$

$P_2 = \frac{1}{\text{Tipo 2}}$

Tipo 3: $52 \cdot 51 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5$

$P_3 = \frac{1}{\text{Tipo 3}}$

O tipo 1 tem maior probabilidade de ser descoberto, pois $P_1 < P_2 < P_3$.

Alternativa **a**.

CAPÍTULO 6

Matemática Financeira

Objetivos

- Compreender o conceito de juros simples e sua utilização.
- Calcular o montante de um capital aplicado na modalidade juros simples após determinado período de aplicação.
- Interpretar o crescimento do montante de um capital aplicado a juros simples como crescimento linear.
- Compreender o conceito de juros compostos e sua utilização.
- Diferenciar aplicações a juros simples de aplicações a juros compostos.
- Calcular o montante de um capital aplicado na modalidade juros compostos após determinado período de aplicação.
- Interpretar o crescimento do montante de um capital aplicado a juros compostos como crescimento exponencial.

Justificativa

O conhecimento do cálculo de juros simples e de juros compostos, trabalhados por meio de comparações envolvendo financiamentos e taxas do mercado financeiro, possibilita que os estudantes compreendam situações reais e contribui para que se tornem aptos a avaliar, com segurança, riscos e benefícios envolvendo situações financeiras.

Competências gerais da BNCC

Competências gerais 2 e 9: Na seção **Para explorar** da página 233, os estudantes pesquisam, em grupo, o significado dos índices econômicos IGPM, INPC e IPCA, descrevem a finalidade de cada um deles e, em seguida, elaboram uma tabela em planilha eletrônica, com os índices acumulados mês a mês no último ano. Por fim, produzem um texto comparativo dos dados obtidos com observações sobre a finalidade dos índices. Atividades em grupo desenvolvem a **competência 9** pelo exercício da empatia e do diálogo, da colaboração e do acolhimento da perspectiva dos outros. Ao elaborarem uma planilha eletrônica envolvendo dados de índices econômicos atuais e compararem esses dados para obter conclusões, eles desenvolvem a **competência 2**, uma vez que exercitam a curiosidade intelectual em reflexões e análises críticas, exploram ideias, fazem conexões, interpretam dados, explicam evidências e sintetizam informações.

Competência geral 4: Em diversas atividades, os estudantes trabalham em grupos para explorar situações e têm a oportunidade de se expressar, utilizar a linguagem digital, discutir ideias e produzir textos apresentando as ideias discutidas, as conclusões e as sínteses, desenvolvendo, assim, essa competência. Isso ocorre, por exemplo, na seção **Para explorar** das páginas 245 e 249, em que os estudantes elaboram, em grupos, uma tabela utilizando planilha eletrônica para comparar os juros e montantes de um empréstimo feito em duas diferentes modalidades (juros simples e juros compostos). Em seguida, produzem um texto apresentando suas conclusões acerca dessas duas modalidades.

Competência geral 5: O trabalho com planilhas eletrônicas, assim como a calculadora, é um recurso utilizado em diversas atividades ao longo do capítulo, como ocorre nas seções **Para explorar** nas páginas 233, 245, 249 e **Para pensar e discutir** na página 248.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específicas 1 e 3

EM13MAT101 e EM13MAT302: Na seção **Para explorar** da página 245, os estudantes representam no plano cartesiano o gráfico de uma função afim que indica o montante de um empréstimo em função do número de meses e analisam a taxa de crescimento. Em seguida, simulam dois empréstimos de um mesmo valor tomados a diferentes taxas de juros simples e elaboram uma tabela usando planilha eletrônica para analisar mês a mês os juros e os montantes correspondentes a cada empréstimo. Em seguida, redigem um texto comentando como é calculado o montante de uma aplicação a juros simples e como se dá o crescimento desse montante mês a mês.

EM13MAT104: Na seção **Para explorar** na página 233, os estudantes pesquisam, em grupos, os significados dos índices IGPM, INPC e IPCA, descrevem a finalidade da sua utilização e elaboram uma tabela em planilha eletrônica contendo os três índices acumulados, mês a mês, do último ano. Em seguida, individualmente, cada um escreve um texto com base na comparação desses três índices acumulados, fazendo observações sobre suas finalidades.

Competências específicas 2 e 3

EM13MAT203 e EM13MAT303: Na seção **Para explorar** da página 249, os estudantes elaboram, em grupos, uma tabela utilizando planilha eletrônica para comparar os juros e montantes de um empréstimo feito em dois diferentes regimes (juros simples e juros compostos). Em seguida, produzem um texto apresentando suas conclusões acerca desses dois regimes.

EM13MAT315: Nas atividades resolvidas das páginas 230 e 231, os estudantes têm a oportunidade de analisar fluxogramas que correspondem a algoritmos para descrever determinados processos.

Competência específica 4

EM13MAT405: Na atividade 13 da página 232, os estudantes elaboram um algoritmo para indicar o cálculo da porcentagem de um valor com uma calculadora simples, sem usar a tecla de porcentagem.

Temas Contemporâneos Transversais

O **TCT Educação para o consumo** é abordado na abertura do capítulo e nas páginas 225 e 226.

O **TCT Educação financeira** permeia todo o capítulo. Da página 233 até a página 238 é retomado o trabalho, já iniciado no Ensino Fundamental, com o cálculo de aumentos e descontos percentuais em contextos financeiros. Em seguida, são trabalhados os juros simples e compostos por meio de problemas do cotidiano. Além disso, a seção **Análise e contexto** da página 239 aborda a Educação Financeira para jovens. O uso de planilhas eletrônicas em diversas atividades contribui para a educação financeira dos estudantes.

O **TCT Educação fiscal** é trabalhado, por exemplo, na seção **Para explorar**, na página 233, em que os estudantes pesquisam, em grupos, os significados dos índices IGPM, INPC e IPCA, descrevem a finalidade da sua utilização e elaboram uma tabela em planilha eletrônica contendo os três índices acumulados, mês a mês, do último ano. Em seguida, individualmente, cada um escreve um texto com base na comparação desses três índices acumulados, fazendo observações sobre suas finalidades.

Resoluções e comentários

Página 223

Abertura

1. Esse assunto já vem sendo discutido desde o Ensino Fundamental, entretanto as pessoas, em geral, não fazem esses cálculos. Aproveite para fazer um levantamento de conhecimentos prévios e incentivar os estudantes a se envolverem com as atividades propostas no capítulo, cujo objetivo é contribuir para a formação de consumidores mais conscientes.
2. Exemplo de resposta: Mantendo um orçamento e definindo prioridades, comparando preços antes de comprar, preferindo produtos duráveis, conhecendo garantias, políticas de devolução e seus direitos.

Solicite aos estudantes que discutam essas duas questões em duplas ou em grupos. Em seguida, faça uma discussão coletiva com a turma. O professor de Sociologia pode ser convidado a participar deste momento.

1. A Matemática e a Educação Financeira

Página 224

Para pensar e discutir

1. Exemplo de resposta: Educação Financeira é o conhecimento e a habilidade para gerenciar dinheiro de forma eficaz.
2. Exemplo de resposta: Os cuidados são conhecer os preços e as ofertas, as avaliações, autenticidade, garantias e políticas de segurança usando *sites* seguros e confiáveis.

Página 226

Para pensar e discutir

1. Exemplo de resposta: Desligando aparelhos, trocando lâmpadas incandescentes por LED e usando eletrodomésticos eficientes. Isso economiza dinheiro e ajuda o meio ambiente.
2. Incentive o debate com base na complexidade da economia. Ligue a discussão aos conceitos de Matemática Financeira (como juros, inflação e dívida pública) e incentive pesquisas, ressaltando que soluções econômicas demandam tempo e planejamento.
3. Exemplo de resposta: O ciclo ilustrado representa o fluxo contínuo de gestão financeira, onde cada etapa é interdependente. O planejamento e a execução de projetos financeiros levam à necessidade de gerenciar recursos disponíveis. A poupança surge como uma prática fundamental para assegurar fundos para futuras necessidades. Consultar especialistas financeiros ou discutir finanças ajuda a tomar decisões inteligentes, que culminam na aquisição de bens significativos, como imóveis.

Página 227

Para pensar e discutir

1. A afirmação é verdadeira. 10% de 4,20 é 0,42. Como $4{,}80 - 4{,}20 = 0{,}60$ e $0{,}60 > 0{,}42$, o aumento foi maior que 10%.

Página 228

Para pensar e discutir

1. Calculamos o percentual conforme a faixa em que se encontra o salário:

   27,5% de 5 000,00 =

   $= \dfrac{27{,}5 \cdot 5\,000}{100} = \dfrac{137\,500}{100} = 1\,375$

   Desse valor obtido, deduzimos (subtraímos) o valor indicado na terceira coluna:

   $1\,375 - 806 = 479$; R\$ 479,00

   Portanto, o imposto a pagar é R\$ 479,00.
2. Calculamos o percentual conforme a faixa em que se encontra o salário:

   27,5% de 10 000 =

   $= \dfrac{27{,}5 \cdot 1\,000}{100} = 2\,750$

   Desse valor obtido, deduzimos (subtraímos) o valor indicado na terceira coluna:

   $2\,750 - 806 = 1.854$; R\$ 1.854,00

   Portanto, o imposto a pagar é R\$ 1.854,00.
3. Não. Basta observar o imposto a pagar nos itens **1** e **2**.

Página 229

Para pensar e discutir

1. Exemplo de resposta: Digita-se 420, aperta-se a tecla $\boxed{\times}$, digita-se 65 e aperta-se a tecla $\boxed{\%}$. Em algumas calculadoras, depois de apertar a tecla $\boxed{\%}$, é necessário ainda apertar a tecla $\boxed{=}$.
2. Exemplo de resposta: Digita-se 420, aperta-se a tecla $\boxed{\times}$, digita-se 0,65 e aperta-se a tecla $\boxed{=}$.

Página 230

Para pensar e discutir

1. $\dfrac{0{,}60}{4{,}20} \cong 0{,}143$

   Portanto, iria obter aproximadamente 0,143.
2. Resposta esperada:

   $0{,}143 = \dfrac{14{,}3}{100} = \dfrac{143}{1\,000} = 14{,}3\%$

Páginas 231-232

Atividades

Na **atividade 1**, aproveite para perguntar aos estudantes o que é possível comprar com um salário mínimo atual. A ideia é levá-los a pensar no valor aquisitivo e desenvolver senso de realidade ao observar que muitas famílias vivem apenas com um salário mínimo para todas as despesas.

1.

a) De 2019 a 2020:
1 045 – 998 = 47; R$ 47,00
De 2020 a 2021:
1 100 – 1 045 = 55; R$ 55,00
De 2021 a 2022:
1 212 – 1 100 = 112; R$ 112,00
De 2022 a 2023:
1 320 – 1 212 = 108; R$ 108,00
De 2023 a 2024:
1 412 – 1 320 = 98; R$ 98,00
Portanto, de 2021 para 2022 o salário mínimo teve o maior aumento, em reais, que foi R$ 112,00.

b) **De 2019 para 2020**

$\frac{100}{x} = \frac{998}{1\,045}$

$998x = 100 \cdot 937$

$x = \frac{104\,500}{998}$

$x \cong 104{,}7$

Logo, de 2019 para 2020 o salário mínimo teve um aumento relativo de aproximadamente 4,7%.

De 2020 para 2021

$\frac{100}{x} = \frac{1\,045}{1100}$

$1\,045x = 100 \cdot 1100$

$x = \frac{110\,000}{1\,045}$

$x \cong 105{,}2$

Logo, de 2020 para 2021 o salário mínimo teve um aumento relativo de aproximadamente 5,2%.

De 2021 para 2022

$\frac{100}{x} = \frac{1100}{1\,212}$

$1100x = 100 \cdot 1\,212$

$x = \frac{121\,200}{1100}$

$x \cong 110{,}2$

Logo, de 2021 para 2022 o salário mínimo teve um aumento relativo de aproximadamente 10,2%.

De 2022 para 2023

$\frac{100}{x} = \frac{1\,212}{1\,320}$

$1\,212x = 100 \cdot 1\,320$

$x = \frac{132\,000}{1\,212}$

$x \cong 108{,}9$

Logo, de 2022 para 2023 o salário mínimo teve um aumento relativo de aproximadamente 8,9%.

De 2023 para 2024

$\frac{100}{x} = \frac{1\,320}{1\,412}$

$1\,320x = 100 \cdot 1\,412$

$x = \frac{141\,200}{1\,320}$

$x \cong 106{,}9$

Logo, de 2023 para 2024 o salário mínimo teve um aumento relativo de cerca de 6,9%.

Portanto, de 2021 para 2022 o salário mínimo teve o maior aumento relativo, em porcentagem, que foi aproximadamente 10,2%.

2.

a) $\frac{4}{5} = 0{,}800 = 80\%$

b) $\frac{5}{8} = 0{,}6250 = 62{,}5\%$

c) $\frac{3}{20} = 0{,}1500 = 15\%$

d) $\frac{125}{100} = 1{,}2500 = 125\%$

e) $\frac{16}{5} = 3{,}200 = 320\%$

f) $\frac{4}{3} \cong 1{,}3333 = 133{,}33\%$

3.

a) 1º) Calculamos 1% de 4 500 dividindo 4 500 por 100: $\frac{4\,500}{100} = 45$.
2º) Multiplicamos o resultado por 32: $32 \cdot 45 = 1\,440$.
Portanto, 32% de 4 500 é 1 440.

b) 1º) Calculamos 1% de 600 dividindo 600 por 100: $\frac{600}{100} = 6$.
2º) Multiplicamos o resultado por 18: $18 \cdot 6 = 108$.
Portanto, 18% de 600 é 108.

c) 1º) Calculamos 1% de 1 000 dividindo 1 000 por 100: $\frac{1\,000}{100} = 10$.
2º) Multiplicamos o resultado por 25: $25 \cdot 10 = 250$.
Portanto, 25% de 1 000 é 250.

d) 1º) Calculamos 1% de 2 500 dividindo 2 500 por 100: $\frac{2\,500}{100} = 25$.
2º) Multiplicamos o resultado por 8: $8 \cdot 25 = 200$.
Portanto, 8% de 2 500 é 200.

4. A pesquisa da tabela atual do Imposto de Renda insere os estudantes em um tema real e os leva a calcular como é feito o pagamento desse imposto.

Para exemplificar, a tabela mensal de Imposto de Renda em fevereiro de 2024 era a seguinte:

Base de cálculo (R$)	Alíquota	Parcela a deduzir no IRPF
Até R$ 2.259,20	zero	zero
De R$ 2.259,20 a R$ 2.826,65	7,5%	R$ 169,44
De R$ 2.826,66 a R$ 3.751,05	15%	R$ 381,44
De R$ 3.751,06 a R$ 4.664,68	22,5%	R$ 662,77
Acima de R$ 4.664,68	27,5%	R$ 896,00

Assim, como exemplo, se utilizássemos essa tabela para calcular o imposto de renda de cada pessoa indicada no enunciado, teríamos:

a) Calculamos o percentual conforme a faixa em que se encontra o salário.
15% de 3 500

$\frac{15 \cdot 3\,500}{100} = \frac{52\,500}{100} = 525$

Do valor obtido, deduzimos (subtraímos) o valor indicado na terceira coluna.
525 – 381,44 = 143,56; R$ 143,56
Portanto, o imposto a pagar é R$ 143,56.

b) O valor R$ 1.800,00 se encontra na faixa isenta. Portanto, a pessoa não paga imposto de renda.

c) Calculamos o percentual conforme a faixa em que se encontra o salário.
27,5% de 9 000 =

$= \frac{27{,}5 \cdot 9\,000}{100} =$

$= \frac{247\,500}{100} = 2475$; R$ 2.475,00

Do valor obtido, deduzimos (subtraímos) o valor indicado na terceira coluna.
2 475 – 896 = 1 579; R$ 1.579,00
Portanto, o imposto a pagar é R$ 1.579,00.

5.

a) Multiplicar um valor por 0,70 é o mesmo que calcular 70%, isto é, 100% com decréscimo de 30%.

b) Multiplicar um valor por 1,12 é o mesmo que calcular 112%, isto é, 100% com acréscimo de 12%.

6.

a) O valor F$ 990,00 se encontra na faixa isenta. Portanto, a pessoa não paga IR nesse país.

b) Calculamos o percentual conforme a faixa em que se encontra o salário:

10% de 2 900.

$\frac{10 \cdot 2\,900}{100} = \frac{29\,000}{100} = 290$;

R$ 290,00

Portanto, o imposto a pagar é F$ 290,00.

c) Calculamos o percentual conforme a faixa em que se encontra o salário:

20% de 3 400 $= \frac{20 \cdot 3\,400}{100} =$

$= \frac{68\,000}{100} = 680$; F$ 680,00

Nesse sistema fictício, se a pessoa ganhar F$ 3.000,00, será descontada em F$ 300,00 e terá, fora outros possíveis descontos, um salário líquido de F$ 2.700,00. Se a pessoa ganhar F$ 3.001,00, será descontada em F$ 600,02 e terá, fora outros possíveis descontos, um salário líquido de F$ 2.400,98.

7. Primeiro, vamos descobrir quanto Manuel gastava em cada caixa de laranja antes do aumento:

$\frac{\text{Valor total gasto}}{\text{Número total de caixas}} =$

$= \frac{2\,000}{100} = 20$; R$ 20,00

Logo, Manuel gastava, antes do aumento, R$ 20,00 por caixa de laranja.

Cada caixa de laranja teve um aumento de 25%. Vamos calcular 25% de R$ 20,00.

$\frac{25 \cdot 20}{100} = 5$; R$ 5,00

A caixa de laranja aumentou R$ 5,00, passando a custar R$ 25,00.

Com isso, vamos determinar quantas caixas de laranja Manuel pode comprar depois do aumento:

$\frac{\text{Valor total gasto}}{\text{Valor de uma caixa}} =$

$= \frac{2\,000}{25} = 80$; 80 caixas

8.

a) Falso.

$\frac{12 \cdot 400}{100} = 48$; R$ 48,00

b) Verdadeiro.

$0{,}4 = \frac{40}{100} = 40$; 40%

c) Verdadeiro.

$\frac{3}{50} = 0{,}06$; 6% de um grupo de 50 pessoas

d) Falso.

$\frac{2}{5} = 0{,}4 = 40$; 40%

Portanto, $\frac{2}{5}$ é igual a 0,4, que corresponde a 40%.

e) Verdadeiro.

Primeiro, vamos saber a quanto corresponde 20% em fração:

$20\% = 0{,}2 = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Assim, um preço x sofre um desconto de 20%, ou seja, x sofre um desconto de $\frac{1 \cdot x}{5}$.

Então:

$x - \frac{1 \cdot x}{5} = \frac{5 \cdot x - 1 \cdot x}{5} =$

$= 0{,}8 \cdot x$

9.

a) Verdadeiro.

No gráfico, temos:

Brasil: 91% de 190 milhões, o que corresponde a 172,9 milhões.

Japão: 99% de 128 milhões, o que corresponde a 126,72 milhões.

Logo, o número de pessoas que sabem ler e escrever no Brasil é **maior** do que no Japão.

b) Falso.

De acordo com o gráfico, temos:

Peru: 93% de 29 milhões, o que corresponde a 26,97 milhões.

Brasil: 172,9 milhões (já calculado no item **a**).

Portanto, o número de pessoas que sabem ler e escrever no Peru é **menor** do que no Brasil.

c) Falso.

Do gráfico, temos:

Japão: 1% de 128 milhões, o que corresponde a 1,28 milhão.

Peru: 7% de 29 milhões, o que corresponde a 2,03 milhões; ou $29 - 26{,}97 = 2{,}03$; 2,03 milhões

Portanto, o número de pessoas que não sabem ler e escrever no Japão é **menor** do que no Peru.

d) Falso.

De acordo com o gráfico, temos:

Japão: 1,28 milhão (já calculado no item **c**).

Brasil: 9% de 190 milhões, o que corresponde a 17,1 milhões; ou $190 - 172{,}9 = 17{,}1$; 17,1 milhões

Portanto, o número de pessoas que não sabem ler e escrever no Japão é **menor** que no Brasil.

e) Falso.

De acordo com o gráfico, temos:

Peru: 2,03 milhões (já calculado no item **c**).

Brasil: 17,1 milhões (já calculado no item **d**).

Portanto, o número de pessoas que não sabem ler e escrever no Peru é **menor** do que no Brasil

Alternativa **a**.

10. Vamos calcular quantos miligramas (mg) de sódio estão contidos em 1 500 mL desse refrigerante.

$\frac{350}{1\,500} = \frac{35}{x}$

$x = \frac{1\,500 \cdot 35}{350} = \frac{52\,500}{350} = 150$

Logo, 1 500 mL de refrigerante contêm 150 mg de sódio. Vamos calcular a porcentagem de sódio que corresponde a essa quantidade em relação às necessidades diárias.

$\frac{500}{150} = \frac{100}{y}$

$y = \frac{150 \cdot 100}{500} = \frac{15\,000}{500} = 30$; 30%

Portanto, se ingerirmos 1 500 mL de refrigerante em um dia, consumiremos 30% da necessidade diária de sódio.

Alternativa **d**.

11. De acordo com o enunciado, temos:

$n - 0{,}2n + (n - 0{,}2n) \cdot 0{,}2 = 120$

$n - 0{,}2n + 0{,}2n - 0{,}04n = 120$

$n - 0{,}04n = 120$

$0{,}96n = 120$

$n = \frac{120}{0{,}96} = 125$; n é 125

12.

a) PIB: Produto Interno Bruto.

b) Espera-se que os estudantes observem, por exemplo, que em 2015 e em 2016 o PIB foi negativo. Também em 2009 o PIB foi negativo. Em 2010, o PIB do país foi o maior no período.

13.

a) Resposta possível: Digite 400 na calculadora; aperte $\boxed{\times}$; digite 0,32 e depois aperte $\boxed{=}$.

b) Resposta possível: Digite 400 na calculadora; aperte $\boxed{\times}$; digite 1,12 e depois aperte $\boxed{=}$.

Página 233

Para explorar

1. IGPM significa Índice Geral de Preços do Mercado e é utilizado para a correção de contratos de aluguel e como indexador de algumas tarifas, por exemplo, a de energia elétrica.

INPC é a sigla de Índice Nacional de Preços ao Consumidor. Tem o objetivo de fazer a correção do poder de compra dos salários pela mensuração das variações de preços da cesta de consumo da população assalariada que tem o mais baixo rendimento.

IPCA significa Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo.

Indica a inflação de um conjunto de produtos e serviços comercializados no varejo, referentes ao consumo pessoal das famílias.

2. Exemplo: Índices do mês de março de 2024 (em %):

   IGPM: –0,47

   INPC: 0,19

   IPCA: 0,16

3. Exemplo com dados extraídos de https://www.idealsoftwares.com.br/indices/igp_m.html, https://www.idealsoftwares.com.br/indices/inpc_ibge.html e https://www.idealsoftwares.com.br/indices/ipca_ibge.html (acessos em: 9 out. 2024).

   Planilha com os índices acumulados.

	Índices acumulados em 2023 (em %)			
	Mês	IGPM	INPC	IPCA
1	Janeiro	0,2100	0,4600	0,5300
2	Fevereiro	0,1499	1,2335	1,3745
3	Março	0,1999	1,8814	2,0942
6	Abril	– 0,7520	2,4214	2,7170
7	Maio	– 2,5781	2,7901	2,9532
8	Junho	– 4,4584	2,6873	2,8709
9	Julho	– 5,1463	2,5949	2,9943
10	Agosto	– 5,2791	2,8001	3,2312
11	Setembro	– 4,9286	2,9132	3,4996
12	Outubro	4,4532	3,0367	3,7480
13	Novembro	– 3,8895	3,1397	4,0385
14	Dezembro	– 3,1783	3,7070	4,6211

4. Espera-se que os estudantes indiquem, com base nos itens anteriores, qual é a finalidade de cada índice e qual deles é o mais empregado no dia a dia.

Página 234

Para pensar e discutir

1. 100% – 7% = 93%
2. Basta multiplicar por 0,93. Para conferir esse resultado, solicite aos estudantes que multipliquem 0,07 por 2 800 e, após isso, subtraiam o resultado de 2 800 que resultará no mesmo valor.

Página 235

Para pensar e discutir

1. O número 1 representa 100%, enquanto o número 0,035 significa 3,5%.
2. Inicialmente, vamos aplicar ao valor inicial da bicicleta, que é R$ 1.800,00, o desconto de 10%:

   $1\,800 \cdot 0{,}90 = 1\,620$

   A seguir, vamos calcular 15% dos R$ 1.620,00 e acrescentar ao valor de R$ 1.620,00:

   $1\,620 \cdot 0{,}15 = 243$

   $1\,620 + 243 = 1\,863{,}00$; R$ 1.863,00

   Esse é o mesmo valor que foi obtido aplicando o aumento de 15% e depois o desconto de 10% do produto. Portanto, aplicar o desconto de 10% primeiro e depois o aumento de 15% não alterou o valor final do produto.

Para pensar e discutir

1. Suponhamos que um produto custe R$ 100,00. Primeiro, descontamos 10% desse valor e, depois, 5%.

   $\frac{10 \cdot 100}{100} = 10$; R$ 10,00

   Ou seja, o produto passa a custar R$ 90,00.

   Agora, vamos descontar 5% desse valor.

   $\frac{5 \cdot 90}{100} = 4{,}5$; R$ 4,50

   O produto passa a custar R$ 85,50.
   $10 - 4{,}50 = 14{,}50$; R$ 14,50

   Agora, suponhamos que o mesmo produto que custa R$ 100,00 sofra um desconto de 15%.

   $\frac{15 \cdot 100}{100} = 15$; R$ 15,00

   Ou seja, o produto passou a custar R$ 85,00, tendo um desconto de R$ 15,00.

   Portanto, dois descontos sucessivos, um de 10% e outro de 5%, não correspondem a um único desconto de 15%.
2. Vamos calcular o valor do carro após um desconto de 15% (o carro valerá 85% do valor inicial):

   $0{,}85 \cdot 25\,000 = 21\,500$; R$ 21.250,00

   Portanto, após o desconto de 15% o carro vai custar R$ 21.250,00.
3. Como vimos nos cálculos dos dados apresentados na **atividade 1**, dois descontos sucessivos de 10% e de 5% sobre um valor inicial de R$ 100,00 correspondem a um desconto de R$ 14,50, ou seja, a um só desconto de 14,5%.

Página 236

Para pensar e discutir

1. Seja C_i o comprimento inicial e C_f o comprimento final. Sabemos que C_i = 8 m e C_f = 11 m, ou seja, um aumento de 3 m.

   Para saber quanto, percentualmente, será o aumento, calculamos o que o comprimento de 3 m representa em relação ao comprimento inicial de 8 m:

   $P = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$

   Portanto, haverá aumento de 37,5% no comprimento da piscina.
2. Seja L_i a largura inicial e L_f a largura final. Sabemos que L_i = 4 m e L_f = 5 m, ou seja, um aumento de 1 m.

   Para saber quanto, percentualmente, será o aumento, calculamos o que a largura de 1 m representa em relação à largura de 4 m:

   $P = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

   Portanto, haverá aumento de 25% na largura da piscina.
3. Para obter a nova medida do comprimento, deve-se multiplicar a medida inicial por 1,375 (aumento de 37,5%). Já para obter a nova medida da largura, deve-se multiplicar a medida inicial por 1,25 (aumento de 25%). Como a área é o produto dessas medidas, basta multiplicar 1,375 por 1,25, obtendo 1,71875, isto é, um aumento de 71,875%.

Páginas 237-238

Atividades

14.

a) Aumento de 7%.

$x(1 + 0{,}07) = x + 0{,}07x$

100% de x mais 7% de x

b) Diminuição de 7%.

$x(1 - 0{,}07) = x - 0{,}07x$

100% de x menos 7% de x

c) Aumento da grandeza em i por cento. Diminuição da grandeza em i por cento.

15. Seja V_i o valor inicial e V_f o valor final. Sabemos que V_i = R$ 89,00 e V_f = R$ 60,52

$89 - 60{,}52 = 28{,}48$; R$ 28,48

Para saber o percentual do desconto, calculamos o que o valor de R$ 28,48 representa em relação ao valor de R$ 89,00:

$$p = \frac{28,48}{89,00} = \frac{28,48}{89} = 0,32 = 32\%$$

Portanto, está sendo anunciado um desconto de 32% nessa promoção.

16. Vamos calcular o valor do carro após o primeiro ano de uso, que chega a desvalorizar aproximadamente 15%, ou seja, sofrer um decréscimo de 15%, passando a valer 85% do valor inicial.

85% de R$ 69.000,00

$0,85 \cdot 69\,000 = 58\,650$; R$ 58.650,00

Portanto, após o primeiro ano de uso, o carro vai custar R$ 58.650,00.

17. Temos que $\frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$, ou seja, paga-se 75% do valor total, ou tem-se um desconto de 25% em cada produto.

18.

a) Um aumento de 5% sobre determinado valor x corresponde à multiplicação de x por 1,05, e um aumento de 2% sobre o novo valor corresponde à multiplicação desse novo valor por 1,02. O valor x após os dois aumentos consecutivos pode ser obtido pela multiplicação de 1,05 por 1,02. Como $1,05 \cdot 1,02 = 1,071$, temos 107,1% do valor x inicial. Portanto, houve aumento de 7,1%.

b) Um desconto de 5% sobre determinado valor x corresponde à multiplicação de x por 0,95, e um desconto de 2% sobre o novo valor corresponde à multiplicação desse novo valor por 0,98. O valor x após os dois descontos consecutivos pode ser obtido pela multiplicação de 0,95 por 0,98 ($0,95 \cdot 0,98 = 0,931$), isto é, pela multiplicação do valor inicial x por 0,931, que significa 93,1% do valor x inicial. Portanto, houve um desconto de 6,9% (100% – 93,1% = 6,9%).

19.

a) $(0,2 \cdot V) \cdot 0,4 = 0,08V$

b) $(0,15 \cdot V) \cdot 0,3 = 0,045V$

20.

a) Vamos obter o valor depois de um aumento de 4% sobre R$ 560.000,00:
104% de R$ 560.000,00.
$1,04 \cdot 560\,000 = 582\,400$; R$ 582.400,00
Portanto, a empresa terá R$ 582.400,00 de lucro.

b) Vamos obter o valor depois de um decrescimento de 4% sobre R$ 560.000,00:

96% de R$ 560.000,00

$0,96 \cdot 560\,000 = 537\,600$; R$ 537.600,00
Portanto, a empresa terá R$ 537.600,00 de lucro.

21. No item **a**, basta multiplicar 560.000 por 1,04, e, no item **b**, basta multiplicar 560 000 por 0,96.

22.

a) Vamos calcular o valor do carro no início de 2023, após uma desvalorização de 9% (o carro passou a valer 91% do valor inicial).
91% de R$ 52.000,00
$0,91 \cdot 52\,000 = 47\,320$; R$ 47.320,00
Agora, vamos calcular o valor do carro no início de 2020, após uma desvalorização de 5% (o carro passou a valer 95% do valor do ano anterior).
95% de R$ 47.320,00
$0,95 \cdot 47\,320 = 44\,954$;
R$ 44.954,00
Portanto, o carro passou a valer R$ 44.954,00 no início de 2024.

b) $0,91 \cdot 0,95 = 0,8645 = 86,45\%$

100% – 86,45% = 13,55%

23. Sejam s o preço da saia, b o preço da blusa e t o preço total das duas peças. Temos que o preço da saia sofreu aumento de 20% e o preço da blusa aumentou 30%. Então:

$s + 0,2s = 1,2s$

$b + 0,3b = 1,3b$

$t = s + b$

Comprando as duas peças pelo novo preço, Maria pagaria 24% a mais, um aumento de 124% de t, isto, é $1,24t$. Logo:

$1,2s + 1,3b = 1,24t$

Como $t = s + b$, substituímos na equação acima e obtemos:

$1,2s + 1,3b = 1,24(s + b)$

$1,2s + 1,3b = 1,24s + 1,24b$

$1,3b - 1,24b = 1,24s - 1,2s$

$0,06b = 0,04s \Rightarrow s = 1,5b$

Agora, vamos determinar quanto mais caro foi o preço da saia em relação ao preço da blusa:

$s - b = 1,5b - b = 0,5b = 50\%$ de b

Portanto, a saia foi 50% mais cara que a blusa

Alternativa **e**.

24. Sejam x o preço do primeiro eletrodoméstico e y o preço do segundo eletrodoméstico. Então:

$x + y = 3\,500$ (I)

Temos que o primeiro eletrodoméstico sofreu um desconto de 10%, e o segundo eletrodoméstico, um desconto de 8%. Então:

$x - 0,1x = 0,9x$

$y - 0,08y = 0,92y$

Comprando os dois eletrodomésticos depois dos descontos, o preço total seria R$ 3.170,00. Logo:

$0,9x + 0,92y = 3\,170$ (II)

Isolando y na equação (I), obtemos:

$y = 3\,500 - x$

Substituindo o valor de y na equação (II), obtemos:

$0,9x + 0,92(3\,500 - x) = 3\,170$

$0,9x + 3\,220 - 0,92x = 3\,170$

$0,9x - 0,92x = 3\,170 - 3\,220$

$-0,02x = -50$

$x = \frac{50}{0,02} = 2\,500$; R$ 2.500,00

Portanto, foi pago R$ 2.500,00 pelo primeiro eletrodoméstico. Alternativa **b**.

25. Sejam x o salário de João e y o valor do plano de saúde. Sabemos que o valor desse plano de saúde equivale a 10% do salário de João e que foi reajustado em 15%, o que proporcionou um aumento de R$ 120,00 nas despesas dele. Assim, calculamos o custo do plano de saúde:

$\frac{y}{120} = \frac{100}{15}$

$y \cdot 15 = 120 \cdot 100$

$y = \frac{12\,000}{15} \Rightarrow y = 800$

Logo, o plano de saúde custa R$ 800,00, o que sabemos que equivale a 10% do salário de João.

Agora, vamos determinar o salário de João:

$\frac{x}{800} = \frac{100}{10}$

$x \cdot 10 = 800 \cdot 100$

$x = \frac{80\,000}{10} \Rightarrow x = 8\,000$

Portanto, o salário mensal de João é R$ 8.000,00.

Alternativa **e**.

26. A resposta depende do estado onde os estudantes moram. O pequeno texto deve evidenciar se houve crescimento ou decrescimento, além de abordar o significado e o efeito desses fatos em termos econômicos.

27. Inflação em janeiro: para atualizar os valores devemos multiplicá-los por 1,06, que corresponde a um reajuste de 6%.

Inflação em fevereiro: para atualizar os valores devemos multiplicá-los por 1,05, que corresponde a um reajuste de 5%.

Assim, os reajustes sucessivos correspondem a:

$1{,}06 \cdot 1{,}05 = 1{,}113, = 11{,}3\%$

Portanto, a taxa de inflação no bimestre janeiro/fevereiro é de 11,3%.

Alternativa **d**.

28. Exemplo de resposta: Se a taxa de inflação de março é de 4% e a de abril é de 3%, qual é a taxa de inflação acumulada no bimestre março/abril?

$(1 + \text{taxa março}) \cdot (1 + \text{taxa abril}) - 1$

Convertendo as taxas percentuais em decimais:

$(1 + 0{,}04) \cdot (1 + 0{,}03) - 1 = 1{,}0712 - 1 = 0{,}0712$

Convertendo de volta para percentual:

$0{,}0712 \cdot 100 = 7{,}12\%$

Portanto, a taxa de inflação no bimestre março/abril é de 7,12%.

29. $0{,}50 \cdot 0{,}40 = 0{,}20 = 20\%$

$0{,}30 \cdot 0{,}2 = 0{,}06 = 6\%$

Alternativa **a**.

30. Seja x o valor inicial das ações. Então, vamos calcular a oscilação do seu valor.

Aumento de 10% do valor das ações:

$(1 + 0{,}10) \cdot x = 1{,}10x$

Aumento de 8% do valor das ações:

$(1 + 0{,}08) \cdot 1{,}10x = 1{,}188x$

Queda de 50% no valor das ações:

$(1 - 0{,}50) \cdot 1{,}188x = 0{,}594x$

Assim, o valor das ações diminuiu

$(1 - 0{,}594) \cdot 100 = 0{,}406 \cdot 100 = 40{,}6 = 40{,}6\%$

Alternativa **c**.

31. O comerciante quer ter um lucro de 20% sobre o valor de compra do fogão. Assim, o valor pelo qual ele pode vender o fogão é dado por:

$(1 + 0{,}20) \cdot 840 = 1\,008$; R$ 1.008,00

Porém, nesse lucro é considerado um desconto de 20% sobre o valor pelo qual o fogão será vendido. Seja x o valor do fogão. Então:

$$\frac{x}{1\,008} = \frac{100}{80}$$

$$80x = 100 \cdot 1\,008 \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 1\,008}{80}$$

$x = 1\,260$; R$ 1.260,00

Alternativa **e**.

32. Vamos calcular o percentual dos aumentos dos custos do professor com transporte e alimentação no mês seguinte.

Transporte:

$0{,}10 \cdot 0{,}10 = 0{,}01 = 1\%$

Alimentação:

$0{,}20 \cdot 0{,}3 = 0{,}06 = 6\%$

Assim, esses aumentos nos gastos no mês irão representar $1 + 6 = 7\%$ do salário total do professor. Seja x o seu salário total. Podemos calculá-lo da seguinte forma:

$$\frac{x}{252} = \frac{100}{7}$$

$7x = 100 \cdot 252$

$$x = \frac{100 \cdot 252}{7}$$

$x = 3\,600$; R$ 3.600,00

Alternativa **d**.

33. Vamos calcular quantas quilocalorias (kcal) estão contidas em 700 mL desse refrigerante.

$$\frac{200}{700} = \frac{85}{x}$$

$$x = \frac{700 \cdot 85}{200} = \frac{59\,500}{200} = 297{,}5$$

Logo, 700 mL de refrigerante contêm 297,5 kcal.

O paciente substituiu essas 2 latas de refrigerante por 2 latas de suco, cada uma contendo 25 kcal. Com isso, o seu consumo diário de kcal foi de 2 800 kcal para:

$2\,800 - 297{,}5 + 2 \cdot 25 = 2\,552{,}5$

Assim, o seu novo consumo diário de calorias é de 2 552,5 kcal.

Vamos calcular a porcentagem da redução das quilocalorias na dieta do paciente:

$$\frac{2\,800}{2\,552{,}5} = \frac{100}{y}$$

$$y = \frac{100 \cdot 2\,552{,}5}{2\,800} \cong 91{,}2\%$$

Portanto, o seu consumo de quilocalorias foi reduzido em aproximadamente $100\% - 91{,}2\% = 8{,}8\%$.

Alternativa **d**.

34. Seja P o preço do produto. Considerando que a máquina de cartões cobra uma taxa de 6%, podemos concluir que o faturamento do comerciante é dado por $P - 0{,}06P = 0{,}94P$.

Vamos calcular o preço ajustado do produto:

$$\frac{x}{P} = \frac{100}{94}$$

$$94x = 100 \cdot P \Rightarrow x = \frac{P}{0{,}94}$$

Alternativa **d**.

35. Se a equipe concluiu 40% do serviço no sábado, restam $100\% - 40\% = 60\%$ do serviço para ser concluído. Assim, se uma equipe de x pessoas fez 40% do serviço em 8 horas, vamos calcular o tamanho da equipe para que os 60% restantes sejam concluídos em 8 horas:

$$\frac{x}{y} = \frac{40}{60}$$

$40y = 60 \cdot x \Rightarrow y = 1{,}5x = (1 + 0{,}5)x$

Assim, a equipe precisa aumentar em 50%.

Alternativa **d**.

Página 239

Análise e contexto

Exemplo de resposta: Má educação financeira: Comprar um carro caro com o aumento de salário, sem planejamento, levando a dificuldades financeiras.

Boa educação financeira: Destinar o aumento de salário para poupança, investimentos e despesas planejadas, mantendo equilíbrio financeiro.

2. Matemática Financeira

Página 240

Para pensar e discutir

1. Exemplo de resposta: a opção 1 por ter 10% de desconto.

2. Temos que o aparelho de TV custa R$ 1.000,00.

Comprando à vista há 10% de desconto, o aparelho de TV passa a custar R$ 900,00.

Comprando a prazo, são duas parcelas iguais e sem desconto: R$ 500,00 no ato da compra e outra de R$ 500,00 após um mês.

$C = 900 - 500 = 400$

Por esses R$ 400,00, você deve pagar R$ 500,00 após um mês.

$J =$ R\$ 100,00, $C =$ R\$ 400,00, $n = 1$.

$J = n \cdot i \cdot C \Rightarrow i = \dfrac{J}{Cn} \Rightarrow i = \dfrac{100}{400} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

Portanto, você pagará uma taxa de 25% nesse mês.

Página 241

Para pensar e discutir

1. Por um dia de atraso serão pagos multa de 2% e juros de 0,05% ao dia em relação ao valor do boleto.

Valor do boleto: R$ 1.215,00.

Valor da multa: 2% de R$ 1.215,00.

$\dfrac{2 \cdot 1\,215}{100} = 24{,}30$; R\$ 24,30

Valor dos juros ao dia: 0,05% de R$ 1.215,00.

$\dfrac{0{,}05 \cdot 1\,215}{100} \cong 0{,}61$; R\$ 0,61

Valor total: $1\,215 + 24{,}30 + 0{,}61 = 1\,239{,}91$; R\$ 1.239,91

Portanto, o valor total é R$ 1.239,91, sendo R$ 24,30 de multa e R$ 0,61 de juros por 1 dia de atraso.

2. Por 28 dias de atraso, serão pagos multa de 2% e juros de 0,05% ao dia em relação ao valor do boleto.

Valor do boleto: R$ 1.215,00

Valor da multa: R$ 24,30 (calculado na **atividade 1**)

Valor dos juros por 28 dias: 28 · 0,05% de R$ 1.215,00.

$\dfrac{28 \cdot 0{,}05 \cdot 1\,215}{100} = 17{,}01$; R\$ 17,01

Valor total: $1\,215 + 24{,}30 + 17{,}01 = 1\,246{,}31$; R\$ 1.256,31

Portanto, o valor total é R$ 1.256,31, sendo R$ 24,30 de multa e R$ 17,01 de juros por 28 dias de atraso.

Página 242

Para pensar e discutir

1. Os juros foram calculados sobre o capital de R$ 10.000,00 (capital inicial).

2. O montante aumenta sempre na mesma taxa de crescimento, isto é, o montante aumentará sempre R$ 100,00, que representa 1% de R$ 10.000,00.

Página 243

Para pensar e discutir

1. Seja $J = n \cdot i \cdot C$, então:

$\dfrac{J}{n} = i \cdot C = J_1$. Temos o capital multiplicado pela taxa de juros, ou seja, o valor dos juros do 1º período (que representa o mesmo para cada um dos n períodos).

2. Triplicando a quantidade de períodos de aplicação em juros simples, triplicamos os juros.

$J_2 = 2n \cdot i \cdot C = 2J$

$J_3 = 3n \cdot i \cdot C = 3J$

Página 244

Para pensar e discutir

1. De acordo com o gráfico, temos que a taxa de crescimento da função afim é 300.

2. A constante de proporcionalidade é 300.

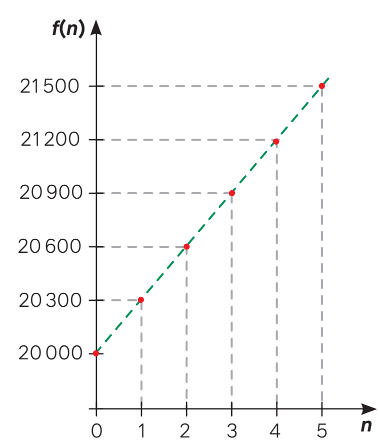
Retome com os estudantes que uma função da forma $y = f(x) = ax$, com a diferente de zero, é chamada de função linear. Já uma função da forma $y = f(x) = ax + b$, recebe a denominação de função afim. Dessa forma, uma função linear é um caso particular de função afim.

Páginas 245-246

Para explorar

Parte 1

1.



Acervo editora

O gráfico é apenas a sucessão de pontos isolados, pois n representa uma variável natural.

2. No texto, o estudante deve comentar resumidamente, entre outras coisas, que o crescimento é linear e que a taxa de crescimento corresponde ao juro mensal, quando estamos na modalidade de juros simples.

Parte 2

1. Resposta possível: os cálculos foram feitos para um empréstimo de R$ 2.000,00.

A pessoa A e a pessoa B fizeram um empréstimo de R$ 2.000,00 cada uma.

Empréstimo da pessoa A

	A	B	C	D	E
	Período	**Capital**	**Taxa**	**Juros**	**Montante**
1	1º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.024,00
2	2º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.048,00
3	3º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.072,00
4	4º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.096,00
5	5º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.120,00
6	6º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.144,00
7	7º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.168,00
8	8º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.192,00
9	9º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.216,00
10	10º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 24,00	R$ 2.240,00

Empréstimo da pessoa B

	Período	Capital	Taxa	Juros	Montante
1	1º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.022,00
2	2º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.044,00
3	3º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.066,00
4	4º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.088,00
5	5º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.110,00
6	6º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.132,00
7	7º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.154,00
8	8º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.176,00
9	9º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.198,00
10	10º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.220,00
11	11º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.242,00
12	12º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 22,00	R$ 2.264,00

2. Os estudantes devem trocar as tabelas e compará-las.

3. Tomaria o empréstimo da pessoa A, pois tem juros menores.

4. Espera-se que os estudantes apresentem no texto, de forma reduzida, o comportamento do crescimento dos montantes na modalidade juros simples, evidenciando que incidem sempre sobre o capital inicial.

Atividades

36.

a) $J = 1 \cdot 0{,}046 \cdot 32\,000$

$J = 1\,472$. Portanto, ele recebeu R$ 1.472,00.

b) $M = C + J$

$M = 32\,000 + 1\,472$

$M = 33\,472$; R$ 33.472,00

37. $M = C + n \cdot i \cdot C$

$26\,500 = 24\,000 + 1 \cdot i \cdot 24\,000$

$2\,500 = 24\,000i \Rightarrow i \cong 0{,}1042 = 10{,}42\%$

38. Seja x o capital usado para comprar o terreno.

$M = 2x$, $C = x$, $n = 4$ e $i = ?$

$M = C + n \cdot i \cdot C \Rightarrow 2x = x + 4 \cdot i \cdot x$

$2x - x = 4xi \Rightarrow x = 4xi$

$i = \frac{x}{4x} \Rightarrow i = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

Logo, a taxa foi de 25% a.a.

Portanto, no período de 4 anos a taxa foi de 100%.

39. $M = 3C$ e $i = 8\% = 0{,}08$

$M = C + n \cdot i \cdot C$

$3C = C + n \cdot 0{,}08 \cdot C$

$3C - C = 0{,}08Cn$

$n = \frac{2C}{0{,}08C} = \frac{2}{0{,}08} = 25$

Portanto, o capital irá triplicar em 25 anos.

40. $M = 2C$

$i = 0{,}8\% = 0{,}008$

$M = C + n \cdot i \cdot C$

$2C = C + n \cdot 0{,}008 \cdot C$

$2C - C = 0{,}008Cn$

$C = 0{,}008Cn$

$n = \frac{C}{0{,}008C} = \frac{1}{0{,}008} = 125$

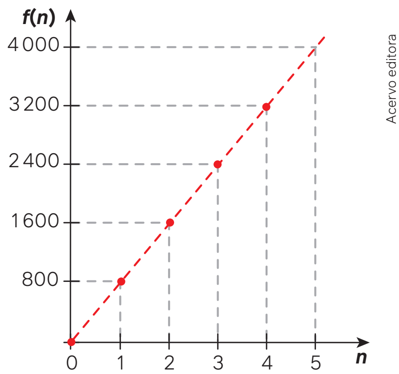
Portanto, o capital irá duplicar em 125 meses.

41.

a) $J = f(n) = n \cdot 0{,}1 \cdot 8\,000 = 800n$

b)

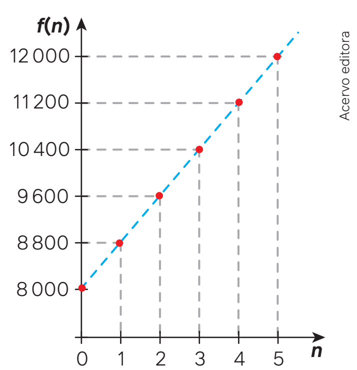
A	B
n	$J = f(n) = 800n$
0	$J = f(0) = 800 \cdot 0 = 0$
1	$J = f(1) = 800 \cdot 1 = 800$
2	$J = f(2) = 800 \cdot 2 = 1\,600$
3	$J = f(3) = 800 \cdot 3 = 2\,400$
4	$J = f(4) = 800 \cdot 4 = 3\,200$
5	$J = f(5) = 800 \cdot 5 = 4\,000$



c) $M = f(n) = 8\,000 + 800n$

d)

A	B
n	$M = f(n) = 8\,000 + 800n$
0	$M = f(0) = 8\,000 + 800 \cdot 0 = 8\,000$
1	$M = f(1) = 8\,000 + 800 \cdot 1 = 8\,800$
2	$M = f(2) = 8\,000 + 800 \cdot 2 = 9\,600$
3	$M = f(3) = 8\,000 + 800 \cdot 3 = 10\,400$
4	$M = f(4) = 8\,000 + 800 \cdot 4 = 11\,200$
5	$M = f(5) = 8\,000 + 800 \cdot 5 = 12\,000$



42. Seja p o valor do aparelho celular. Comprando à vista, é dado 10% de desconto, ou seja, o aparelho celular passa a custar $0{,}9p$.

$C = 0{,}9p - \frac{p}{2} = \frac{2}{5}p$

Por esses $\frac{2}{5}p$, a pessoa deverá pagar $\frac{p}{2}$ após um mês.

Assim, temos:

$J = 0{,}1p$; $C = \frac{2}{5}p$;

$n = 1$ e $i = ?$

$J = n \cdot i \cdot C \Rightarrow i = \frac{J}{Cn}$

$i = \frac{0{,}1p}{\frac{2}{5}p \cdot 1} \Rightarrow i = \frac{\frac{1}{10}p}{\frac{2}{5}p}$

$i = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

Alternativa **e**.

43. $M = C + niC$

$10\,000 = C + 1 \cdot 0{,}1 \cdot C$

$10\,000 = C + 0{,}1C$

$10\,000 = 1{,}1C$

$C = \frac{10\,000}{1{,}1} \cong 9\,090{,}91$; R\$ 9.090,91

Como já sabemos o valor do capital aplicado, vamos determinar os juros auferidos na aplicação.

$J = M - C$

$J = 10\,000 - 9\,090{,}91 \Rightarrow J = 909{,}09$; R\$ 909,09

Alternativa **d**.

44. Calculamos os juros que Bruno vai pagar a Edson, sabendo que $C =$ R\$ 10.000,00, $i = 5\% = 0{,}05$ e $n = 1$.

$J = n \cdot i \cdot C$

$J = 1 \cdot 0{,}05 \cdot 10\,000 = 500$

Logo, Bruno pagará a Edson R\$ 500,00 de juros.

Calculamos os juros que Bruno vai pagar a Carlos, sabendo que $C =$ R\$ 10.000,00, $i = 4\% = 0{,}04$ e $n = 1$.

$J = n \cdot i \cdot C$

$J = 1 \cdot 0{,}04 \cdot 10\,000 = 400$

Logo, Bruno pagará a Carlos R\$ 400,00 de juros.

Calculamos os juros que correspondem à valorização da casa, sabendo que $C =$ R\$ 50.000,00, $i = 3\% = 0{,}03$ e $n = 1$.

$J = 1 \cdot 0{,}03 \cdot 50\,000 = 1\,500$; R\$ 1.500,00

A venda da casa deu lucro de R\$ 1.500,00.

Mas Bruno pagou a Edson e a Carlos pelo empréstimo. Assim, vamos determinar o lucro de Bruno.

$1\,500 - 500 - 400 = 600$; R\$ 600,00

Portanto, Bruno obteve um lucro de R\$ 600,00.

Alternativa **c**.

45. O imóvel comprado em São Paulo valorizou 10% e temos $C = x$,

$i = 10\% = 0{,}1$, $n = 1$ e

$M =$ R\$ 495.000,00.

$M = C + niC$

$495\,000 = x + 1 \cdot 0{,}1 \cdot x$

$495\,000 = 1{,}1x$

$x = 450\,000$; R\$ 450.000,00

O imóvel comprado em Porto Alegre desvalorizou 10% e temos

$M = C + n \cdot i \cdot C$

$495\,000 = y + 1 \cdot (-0{,}1) \cdot y$

$495\,000 = 0{,}9y$

$y = 550\,000$; R\$ 550.000,00.

Alternativa **b**.

46. $M = C + n \cdot i \cdot C$

$M = 18\,000 + 3 \cdot 0{,}1 \cdot 18\,000$

$M = 18\,000 + 5\,400 = 23\,400$

Agora, dividimos o montante por 36 (número de parcelas):

$p = \frac{M}{36} = \frac{23\,400}{36} = 650$; R\$ 650,00

Alternativa **e**.

47. $M = C + n \cdot i \cdot C$

$600 = 500 + 5 \cdot i \cdot 500$

$600 - 500 = 2\,500i$

$i = \frac{100}{2\,500} = \frac{1}{25} = 0{,}04 = 4\%$

Alternativa **d**.

48. Exemplo de resposta: Maria emprestou R\$ 800,00 a Ana por 4 meses, no sistema de juros simples, a uma taxa de juros fixa e mensal. No final dos 4 meses, Maria recebeu um total de R\$ 960,00.

$J =$ Montante – Capital

$J = 960 - 800 = 160$

$J = C \cdot i \cdot t$

$160 = 800 \cdot i \cdot 4 \Rightarrow i = \frac{160}{3\,200}$

$i = 0{,}05$ ou 5% ao mês

Esse tipo de questão possibilita aos estudantes pensarem a respeito de valores próximos aos da realidade deles e os leva a analisar os juros (percentuais).

49. Temos $C =$ R\$ 1.500,00; $n = 3$;

$M =$ R\$ 1.350,00 e $i = ?$

$M = C + n \cdot i \cdot C$

$1\,527 = 1\,500 + 3 \cdot i \cdot 1\,500$

$1\,527 - 1\,500 = 4\,500i$

$i = \frac{27}{4\,500} = 0{,}6\%$

Portanto, a taxa aplicada foi de 0,6% a.m

Alternativa **e**.

50. Temos $C =$ R\$ 1.250,00; $n = ?$;

$M =$ R\$ 1.350,00 e $i = 1\% = 0{,}01$.

$M = C + n \cdot i \cdot C$

$1\,350 = 1\,250 + n \cdot 0{,}01 \cdot 1\,250$

$1\,350 - 1\,250 = 12{,}5n$

$n = \frac{100}{12{,}5} = \frac{8}{1} = 8$

Portanto, o tempo de atraso foi de 8 meses

Alternativa **b**.

51. Alexandre tomou dois empréstimos totalizando R\$ 20.000,00. Considere que os empréstimos, com juros anuais, foram os seguintes:

Empréstimo 1: Alexandre tomou emprestado x reais a uma taxa de 5% ao ano.

Empréstimo 2: Alexandre tomou emprestado 20 000 – x reais a uma taxa de 8% ao ano.

Então, sabendo que sua dívida após um ano é de R$ 21.405,00, temos:

$1{,}05 \cdot x + (20\,000 - x) \cdot 1{,}08 = 21\,405$

$0{,}03x = 21\,405 - 21\,000$

$x = \dfrac{405}{0{,}03} = 13\,500$

$20\,000 - x = 20\,000 - 13\,500 = 6\,500$

Assim, Alexandre tomou emprestado parcelas de R$ 13.500,00 e R$ 6.500,00.

Alternativa **c**.

52. Sabemos que:

$C = C$, $M = 3C$ e $i = 3\% = 0{,}03$

$M = C + n \cdot i \cdot C$

$3C = C + n \cdot 0{,}03 \cdot C$

$3C - C = 0{,}03Cn \Rightarrow 2C = 0{,}03Cn$

$n = \dfrac{2C}{0{,}03C} = \dfrac{198}{3} + \dfrac{2}{3} = 66 + \dfrac{2}{3}$

Portanto, considerando que os juros são mensais, o capital irá triplicar em 66 meses e 20 dias, isto é, 5 anos, 6 meses e 20 dias.

Alternativa **d**.

53. $M = C + n \cdot i \cdot C$

$8\,320 = 8\,000 + n \cdot 0{,}16 \cdot 8\,000$

$8\,320 - 8\,000 = 1\,280n$

$n = \dfrac{320}{1\,280} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

Portanto, o tempo para o pagamento é de 0,25 anos, isto é, 3 meses.

Alternativa **b**.

Página 247

Para pensar e discutir

1. Acrescenta-se 1% sobre o valor R$ 40.000,00. Uma maneira de calcular é multiplicando 40 000 por 1,01.
2. Não, pois o montante é calculado com taxa de juros compostos, isto é, juros sobre juros.
3. Não. A taxa de 1% é calculada sobre o montante correspondente à dívida.
4. $M = C + n \cdot i \cdot C$

   $M = 40\,000 + 5 \cdot 0{,}01 \cdot 40\,000$

   $M = 40\,000 + 2\,000$

   $M = 42\,000$; R$ 42.000,00

Página 248

Para pensar e discutir

1. Sim. É importante os estudantes fazerem a verificação e, em seguida, multiplicar por 50 000 o valor encontrado, para determinar o montante.
2. Em uma calculadora científica (acessível em aplicativos de celulares) encontre a tecla x^y. Digite inicialmente 1,005, aperte a tecla x^y, depois digite 6 e, por último, aperte a tecla =. Em seguida, multiplique pelo capital inicial, 50 000.

Páginas 249-251

Para pensar e discutir

1. Basta digitar 1,310796 e apertar duas vezes consecutivas a tecla de raiz quadrada.
2. Utilizando a tecla $\sqrt[y]{x}$. Para isso, digite 1,310796; aperte a tecla $\sqrt[y]{x}$; digite 4 e depois aperte a tecla =.

Para explorar

1. Planilha com a modalidade de juros simples

Período	Capital	Taxa	Juros simples	Montante
1	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 51.000,00
2	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 52.000,00
3	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 53.000,00
4	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 54.000,00
5	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 55.000,00
6	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 56.000,00
7	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 57.000,00
8	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 58.000,00
9	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 59.000,00
10	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 60.000,00

Planilha com a modalidade de juros compostos

Período	Capital	Taxa	Juros compostos	Montante
1	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 51.000,00
2	R$ 51.000,00	2%	R$ 1.020,00	R$ 52.020,00
3	R$ 52.020,00	2%	R$ 1.040,40	R$ 53.060,40
4	R$ 53.060,40	2%	R$ 1.061,21	R$ 54.121,61
5	R$ 54.121,61	2%	R$ 1.082,43	R$ 55.204,04
6	R$ 55.204,04	2%	R$ 1.104,08	R$ 56.308,12
7	R$ 56.308,12	2%	R$ 1.126,16	R$ 57.434,28
8	R$ 57.434,28	2%	R$ 1.148,69	R$ 58.582,97
9	R$ 58.582,97	2%	R$ 1.171,66	R$ 59.754,63
10	R$ 59.754,63	2%	R$ 1.195,09	R$ 60.949,72

2. Os estudantes devem comparar as planilhas com os valores mês a mês observando os valores dos juros também.
3. No texto, é importante verificar se os estudantes evidenciam a diferença no crescimento dos montantes nas duas modalidades, observando que em uma a taxa de crescimento é constante (juros simples), enquanto na outra isso não ocorre.

Atividades

O uso de calculadoras nessas atividades é um facilitador.

54.

a) $C =$ R$ 20.000,00;

$i = 10\% = 0{,}1$; $n = 4$ e $M_4 = ?$

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_4 = 20\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^4$

$M_4 = 20\,000 \cdot (1{,}1)^4$

$M_4 = 29\,282$; R$ 29.282,00

b) $J = M - C$

$J = 29\,282{,}00 - 20\,000$

$J = 9\,282$; R$ 9.282,00

c) $P = \dfrac{J}{C}$

$P = \dfrac{9\,282}{20\,000} = 0{,}4641 = 46{,}41\%$

55.

a) $C =$ R$ 100.000,00;

$i = 14\% = 0{,}14$; $n = 5$ e $M_5 = ?$

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_5 = 100\,000 \cdot (1 + 0{,}14)^5$

$M_5 \cong 192\,541{,}46$; R$ 192.541,46

b) $J = M - C$

$J = 192\,541{,}46 - 100\,000$

$J = 92\,541{,}46$; R$ 92.541,46

Agora, vamos determinar o percentual de valorização desse terreno.

$P = \frac{J}{C} = \frac{92\,541{,}46}{100\,000} = 92{,}54\%$

Portanto, o rendimento obtido representa aproximadamente 92,54% de ganho em relação ao capital aplicado.

56.

a) $M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_{10} = 1\,500 \cdot (1 + 0{,}012)^{10}$

$M_{10} \cong 1.690{,}04$; R$ 1.690,04

b) $J = M - C \Rightarrow J = 190{,}04$; R$ 190,04

Agora vamos determinar quantos por cento o capital investido aumentou.

$P = \frac{J}{C} \Rightarrow P = \frac{190{,}04}{1\,500} \cong 12{,}67\%$

57. O objetivo desta atividade é levar os estudantes a comparar investimentos. Comente que há investimentos de alto risco e outros mais conservadores. As questões auxiliam o desenvolvimento de habilidades relacionadas à Educação Financeira.

58.

a) $M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$5\,306{,}04 = 5\,000 \cdot (1 + i)^3$

$\frac{5\,306{,}04}{5\,000} = (1 + i)^3$

$1{,}061208 = (1 + i)^3$

$\sqrt[3]{1{,}061208} = 1 + i$

$1{,}02 = 1 + i$

$i = 1{,}02 - 1 = 0{,}02 = 2\%$

b) $M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_{12} = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}02)^{12}$

$M_{12} \cong 6\,341{,}21$; R$ 6.341,21

c) $J = M - C \Rightarrow J = 1\,341{,}21$; R$ 1.341,21

Agora, vamos determinar o percentual em relação ao valor inicial da dívida.

$P = \frac{J}{C} = \frac{1\,341{,}21}{5\,000} \cong 0{,}27 = 27\%$

59. Banco A: $M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_{16} = 400\,000 \cdot (1 + 0{,}03)^{16}$

$M_{16} \cong 641\,882{,}58$

Agora, vamos determinar os juros obtidos por esse empréstimo.

$J = M - C = 641\,882{,}58 - 400\,000$

$J = 241\,882{,}58$

Logo, no banco A o montante é de aproximadamente R$ 641.882,58 e os juros são de R$ 241.882,58.

Banco B: $M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_{12} = 400\,000 \cdot (1 + 0{,}04)^{12}$

$M_{12} = 400\,000 \cdot (1{,}04)^{12}$

$M_{12} \cong 640\,412{,}89$

Agora, vamos determinar os juros obtidos por esse empréstimo.

$J = M - C = 640\,412{,}89 - 400\,000$

$J = 240\,412{,}89$

Logo, no banco B o montante é de aproximadamente R$ 640.412,89 e os juros são de R$ 240.412,89.

Portanto, Luciana deve escolher o banco B.

60. Seja C o valor da fatura do cartão de crédito.

$P = \frac{J}{C} \Rightarrow J = 0{,}331C$

$M = C + J = C + 0{,}331C = 1{,}331C$

Taxa de juros cobrada em 3 meses.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$1{,}331C = C \cdot (1 + i)^3$

$\frac{1{,}331C}{C} = (1 + i)^3$

$1{,}331 = (1 + i)^3$

$\sqrt[3]{1{,}331} = 1 + i$

$1{,}1 = 1 + i \Rightarrow i = 1{,}1 - 1 = 0{,}1 = 10\%$

61. Resposta possível: considerando a taxa do cartão de crédito de 7,75% ao mês, temos

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_3 = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}0775)^3$

$M_3 = 5\,000 \cdot (1{,}0775)^3$

$M_3 \cong 6\,254{,}92$; R$ 6.254,92

Esta atividade é importante porque alerta os estudantes para o perigo do pagamento da fatura do cartão de crédito fora do prazo.

62. Opção A: $M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_{12} = 750\,000 \cdot (1 + 0{,}005)^{12}$

$M_{12} \cong 796\,258{,}36$

$J = M - C = 796\,258{,}36 - 750\,000$

$J = 46\,258{,}36$

Evento	Valores
Total investido	R$ 750.000,00
Total ganho em juros	R$ 46.258,36
TOTAL	R$ 796.258,36

Opção B:

	Período	Capital investido	Taxa	Juros composto	Montante	Total
1	0	R$ 4.500,00	0,5%	–	–	R$ 4.500,00
2	1	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 22,50	R$ 4.522,50	R$ 9.022,50
3	2	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 45,11	R$ 9.022,50	R$ 13.567,61
4	3	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 67,84	R$ 13.567,61	R$18.135,45
5	4	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 90,68	R$ 18.135,45	R$ 22.726,13
6	5	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 113,63	R$ 22.726,13	R$ 27.339,76
7	6	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 136,70	R$ 27.339,76	R$ 31.976,46
8	7	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 159,88	R$ 31.976,46	R$ 36.636,34
9	8	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 183,18	R$ 36.636,34	R$ 41.319,52
10	9	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 206,60	R$ 41.319,52	R$ 46.026,12
11	10	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 230,13	R$ 46.026,12	R$ 50.756,25
12	11	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 253,78	R$ 50.756,25	R$ 55.510,03
13	12	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 277,55	R$ 55.510,03	R$ 60.287,58
14	Total investido	R$ 58.500,00	Total ganho em juros	R$ 1.787,58		

Evento	Valores
Total investido	R$ 58.500,00
Total ganho em juros	R$ 1.787,58
TOTAL	R$ 60.287,58

Espera-se que os estudantes percebam que alugar a casa é a melhor decisão a ser tomada, pois o rendimento total é maior. Também nesse caso eles podem simular situações similares para fazer comparações.

63. $M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_8 = 3\,000 \cdot (1 + 0{,}03)^8$

$M_8 = 3\,000 \cdot 1{,}27 = 3\,810$; R$ 3.810,00

Alternativa **e**.

64. Temos $C = C$; $n = ?$, $M_5 = 2C$ e $M_n = 16C$

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$16C = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow 16 = (1 + i)^n$

Como a cada 5 anos o valor do investimento dobra e como $16 = 2^4$, temos:

$2C = C \cdot (1 + i)^5 \Rightarrow 16 = ((1 + i)^5)^4$

$16 = (1 + i)^{5 \cdot 4} \Rightarrow 16 = (1 + i)^{20} \Rightarrow n = 20$

Portanto, o montante aumenta em 16 vezes após 20 anos.

65. $M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_3 = 80\,000 \cdot (1 - 0{,}1)^3$

$M_3 = 80\,000 \cdot 0{,}729 = 58\,320$; R$ 58.320,00

Alternativa **b**.

66. O rendimento de Gabriel foi de 80% no primeiro ano e 25% no segundo ano. Assim, o montante total de seu investimento é de:

$1\,000 \cdot (1 + 0{,}8) \cdot (1 + 0{,}25) =$

$= 2\,250$; R$ 2.250,00

Agora, podemos calcular a taxa de rendimento da criptomoeda de Júlia.

$n = 2$ e $M_2 =$ R$ 2.250,00.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_2 = 1\,000 \cdot (1 + i)^2$

$2\,250 = 1\,000 \cdot (1 + i)^2$

$\frac{2\,250}{1\,000} = (1 + i)^2 \Rightarrow 2{,}25 = (1 + i)^2$

$\sqrt{2{,}25} = 1 + i \Rightarrow i = 0{,}5 = 50\%$

Alternativa **c**.

67. Temos $C =$ R$ 1.600,00; $i = ?$; $n = 4$ e $M_4 =$ R$ 1.800,00.

$M^n = C \cdot (1 + i)^n$

$1\,800 = 1\,600 \cdot (1 + i)^4$

$\frac{1\,800}{1\,600} = (1 + i)^4 \Rightarrow 1{,}125 = (1 + i)^4$

$\sqrt[4]{1{,}125} = 1 + i \Rightarrow 1 + i \cong 1{,}029$

$i \cong 0{,}029 = 2{,}9\%$

Alternativa **b**.

68. $M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_5 = C \cdot (1 + 0{,}05)^5$

Agora, vamos calcular qual a taxa de crescimento necessária para que o PIB do país chegue a $2C$ nos próximos 5 anos.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$2C = C \cdot (1{,}05)^5 \cdot (1 + i)^5$

$\sqrt[5]{2} = 1{,}05 \cdot (1 + i)$

Pela tabela dada, temos que $\sqrt[5]{2} = 1{,}15$. Então:

$1{,}15 = 1{,}05 \cdot (1 + i)$

$1{,}05i = 1{,}15 - 1{,}05 = 0{,}10$

$i = \frac{0{,}10}{1{,}05} \cong 0{,}095$

Portanto, o PIB desse país deve crescer aproximadamente 9,5% ao ano no período dado. Alternativa **c**.

Para pensar e discutir

1. Temos $i_1 = 2\% = 0{,}02$; $i_2 = 3\% = 0{,}03$; $i_3 = 1\% = 0{,}01$ e $i_4 = 1{,}5\% = 0{,}015$.

   Então:

   $M_4 = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)(1 + i_4)$

   $M_4 = C(1 + 0{,}02)(1 + 0{,}03)(1 + 0{,}01)(1 + 0{,}015)$

   $M_4 \cong C \cdot 1{,}077 = C + 0{,}077C$

   $M_4 = C + 7{,}7\%C$

   Portanto, aumentos sucessivos de 2%, 3%, 1% e 1,5% correspondem a um único aumento de 7,7%.

2. Aproximadamente 1,91%, pois

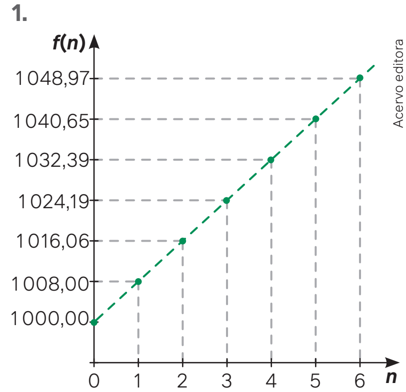
   $1{,}007 \cdot 1{,}012 = 1{,}0191 = 1 + 0{,}0191$

   Aproveite para explicar mais detalhadamente esse procedimento aos estudantes. A multiplicação $1{,}007 \cdot 1{,}012$ representa os dois aumentos sucessivos.

Página 252

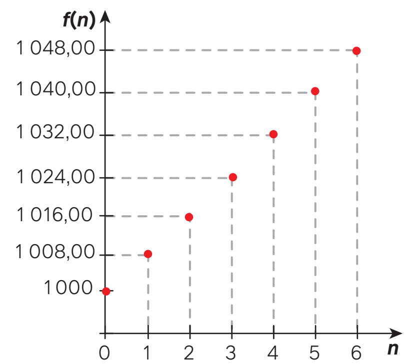
Para explorar

1.



2.

A	B
n	$M = f(n) = 1\,000 + 8 \cdot n$
0	1 000
1	1 008,00
2	1 016,00
3	1 024,00
4	1 032,00
5	1 040,00
6	1 048,00



3. Esta atividade compõe parte da avaliação do estudo da unidade.

Página 253

Para pensar e discutir

1. Não, a taxa mensal equivalente é de aproximadamente 0,95%.

   $(1 + i)^{12} = 1{,}12 \Rightarrow 1 + i = \sqrt[12]{1{,}12}$

   $1 + i \cong 1{,}0095 \Rightarrow i \cong 0{,}0095 = 0{,}95\%$

   Logo, 12% a.a. corresponde a aproximadamente 0,95% a.m.

2. A taxa é de aproximadamente 12,68% a.a. Para calcular, basta fazer $(1 + 0{,}01)^{12}$, obtendo o valor 1,1268. Multiplicar um número por 1,1268 é aumentar esse número em 12,68%.

Páginas 254-255

Atividades

69. Temos $i_1 = 4{,}52\%$; $i_2 = 10{,}06\%$; $i_3 = 5{,}79\%$ e $i_4 = 4{,}62\%$. Então:

$i = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2)(1 + i_3)(1 + i_4)$

$i = (1 + 0{,}0452)(1 + 0{,}1006)(1 + 0{,}0579)(1 + 0{,}0462)$

$i \cong 1{,}2732 = 1 + 0{,}2732$

Portanto, a taxa da inflação acumulada é aproximadamente 27,32%.

70. Exemplo: IPC de outubro de 2023 a março de 2024:

Mês/Ano	Índice do mês (em %)	Índice acumulado no período (em %)
Out./23	0,30	0,30
Nov./23	0,43	0,73
Dez./23	0,30	1,03
Jan./24	0,26	1,29
Fev./24	0,46	1,75
Mar./24	0,46	2,21

Fonte: IPC/FIPE – ÍNDICE DE PREÇOS AO CONSUMIDOR calculado pela FIPE. *In*: *Portal Brasil*, [s. l.], [20--]. Disponível em: https://www.portalbrasil.net/ipc/. Acesso em: 18 out. 2024.

Oriente os estudantes para que verifiquem o real significado do IPC (o que ele mede e como afeta a vida das pessoas economicamente). O IPC mede a variação de preços ao consumidor com base nos gastos de quem ganha de 1 a 20 salários mínimos.

71. Maria dispõe de um capital $C = R\$\ 855{,}00$.

Opção 1

5% de R$ 900,00 $= 0{,}05 \cdot 900 = 45$

Preço do computador à vista:

$P = R\$\ 900{,}00 - R\$\ 45{,}00 = R\$\ 855{,}00$

$C - P = R\$\ 855{,}00 - R\$\ 855{,}00 = 0$

Logo, Maria tem o dinheiro para comprar o computador à vista e não sobrará dinheiro se optar pela opção 1.

Opção 2

Temos $C = R\$\ 855{,}00$; $i = 1\%$ a.m.; $n = 4$ e $M =?$. Então:

$M_4 = C \cdot (1 + i)^4 = 855 \cdot (1 + 0{,}01)^4$

$M_4 = 855 \cdot 1{,}014 \cong 889{,}72$

Preço do computador a prazo:

$P = R\$\ 900{,}00$

$M_4 = R\$\ 889{,}72 - R\$\ 900{,}00$

$M_4 = R\$\ 10{,}28$; R$ 10,28

Opção 3

Valor da prestação: $V_p = R\$\ 225{,}00$.

$M_1 = C_1 \cdot (1 + i)^1 = 855 \cdot (1 + 0{,}01)^1$

$M_1 = 855 \cdot 1{,}01 = 863{,}55$

$M_1 - V_p = 863{,}55 - 225$

$M_1 = 638{,}55$; R$ 638,55

Temos que o novo capital investido corresponde ao montante que sobrou do mês anterior, ou seja, $C_2 = R\$\ 638{,}55$.

$M_2 = C_2 \cdot (1 + i)^1 = 638{,}55 \cdot (1 + 0{,}01)^1$

$M_2 = 638{,}55 \cdot 1{,}01 \cong 644{,}94$

$M_2 - V_p \cong 644{,}94 - 225$

$M_2 \cong 419{,}94$; R$ 419,94

Temos $C_3 = R\$\ 419{,}94$

$M_3 = C_3 \cdot (1 + i)^1 = 419{,}94 \cdot (1 + 0{,}01)^1$

$M_3 = 419{,}94 \cdot 1{,}01 \cong 424{,}14$

$M_3 - V_p \cong 424{,}14 - 225$

$M_3 \cong 199{,}14$; R$ 199,14

Temos $C_4 = R\$\ 199{,}14$

$M_4 = C_4 \cdot (1 + i)^1 = 199{,}14 \cdot (1 + 0{,}01)^1$

$M_4 = 199{,}14 \cdot 1{,}01 \cong 201{,}13$

$M_4 - V_p \cong 201{,}13 - 225{,}00$

$M_4 \cong -23{,}87$; –R$ 23,87

Logo, Maria precisará desembolsar mais R$ 23,87 para comprar o computador com a opção 3.

Opção 4

Temos $C = R\$\ 855{,}00$; $i = 2\%$ a.m.; $n = 3$ e $M_3 = ?$.

$M_3 = C \cdot (1 + i)^3 = 855 \cdot (1 + 0{,}02)^3$

$M_3 \cong 855 \cdot 1{,}061 \cong 907{,}33$

Preço do computador a prazo:

$P = 900$; R$ 900,00

$M_3 \cong 907{,}33 - 900 = 7{,}33$; R$ 7,33

Logo, Maria terá lucro de R$ 7,33 com a opção 4.

Portanto, Maria terá maior vantagem financeira na opção 4.

Alternativa **c**.

72. $1{,}08 = (1 + i)^{12} \Rightarrow \sqrt[12]{1{,}08} = 1 + i$

$1{,}00643 \cong 1 + i \Rightarrow i \cong 0{,}00643 = 0{,}643\%$

73. $(1 + i)^6 = 1{,}05 \Rightarrow 1 + i = \sqrt[6]{1{,}05}$

$1 + i \cong 1{,}00816 \Rightarrow i \cong 0{,}00816 = 0{,}816\%$

74. $n_1 = n_2 = 6$

$M = C \cdot (1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2}$

$M = 45\,000 \cdot (1 + 0{,}01)^6 \cdot (1 + 0{,}02)^6$

$M \cong 53\,795$; R$ 53.795,00

75. Investimento A

$(1 + 0{,}03)^{12} = 1{,}03^{12} \cong 1{,}426 =$

$= 1 + 0{,}426$

Portanto, o investimento A tem rentabilidade anual de aproximadamente 42,6%.

Investimento B

$(1 + 0{,}36)^1 = 1{,}36 = 1 + 0{,}36$

Portanto, o investimento B tem rentabilidade anual de 36%.

Investimento C

$(1 + 0{,}18)^2 = 1{,}18^2 = 1{,}3924 = 1 + 0{,}3924$

Portanto, o investimento C tem rentabilidade anual de 39,24%.

A pessoa deve escolher o investimento A, pois a rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.

Alternativa **c**.

76. Como é dada a taxa de juros anual, o tempo n da aplicação de 6 meses é igual a $\frac{1}{2}$ ano.

$n = \frac{1}{2}$.

$M = C \cdot (1 + 0{,}69)^{\frac{1}{2}}$

$M = 2\,000 \cdot \sqrt{1{,}69}$

$M = 2\,000 \cdot 1{,}3 = 2\,600$; R$ 2.600,00

Alternativa **e**.

77. Primeiro, vamos calcular quanto o cliente ganhou com seu investimento.

$C = 1\,000$; R$ 1.000,00;

$M_{12} = C \cdot (1 + i)^{12}$

$M_{12} = 1\,000 \cdot (1 + 0{,}01)^{12}$

$M_{12} \cong 1\,000 \cdot 1{,}13 = 1\,130$; R$ 1.130,00

Agora, vamos calcular quanto o banco recebeu pelo seu empréstimo.

$i = 5\%$ a.m. $= 0{,}05$; $n = 12$ e $M_{12} = ?$

$M_{12} = C \cdot (1 + i)^{12}$

$M_{12} = 1\,000 \cdot (1 + 0{,}05)^{12}$

$M_{12} \cong 1\,000 \cdot 1{,}80 = 1\,800$; R$ 1.800,00

Assim, o banco obteve nessas duas transações, um lucro de

$1\,800{,}00 - 1\,130{,}00 = 670$; R$ 670,00

Alternativa **c**.

78. Primeiro, vamos encontrar uma maneira de reescrever a quantidade de anos em função da quantidade de meses:

Anos	Meses
t	m
1	12

$12t = 1 \cdot m \Rightarrow t = \frac{m}{12}$

Assim, podemos reescrever a fórmula do valor da peça em função dos meses após a restauração:

$v(t) = 2\,500 \cdot (1{,}03)^t$

$v(m) = 2\,500 \cdot (1{,}03)^{\frac{m}{12}}$

Alternativa **e**.

79. Seja C o PIB desse país em 2 000.

$M_{10} = C \cdot (1 + i)^{10} = C \cdot (1 + 0{,}04)^{10}$

$M_{10} = C \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{10} = C \cdot \frac{26^{10}}{25^{10}}$

$M_{10} = C \cdot \frac{b}{c}$

Portanto, o PIB desse país em 2010 é igual ao PIB de 2 000 vezes $\frac{b}{c}$.

Alternativa **b**.

Página 256

Para pensar e discutir

1. Essas taxas podem variar dependendo da distribuidora e da região, geralmente a multa é de 2%.
2. A média é de 7% a 15%, porém pode variar conforme o banco escolhido.
3. Essas taxas podem ser encontradas nos *sites* oficiais dos bancos ou

entrando em contato com o atendimento ao cliente.

A atividade contribui efetivamente para a Educação Financeira dos jovens.

Página 257

Para pensar e discutir

1. Basta dividir 900 por $1{,}04^1$.
2. Basta dividir 900 por $1{,}04^2$.
3. Basta dividir 900 por $1{,}04^3$.

Página 258

Para explorar

1. **1º mês:** R$ 650,00 representa o valor da 1ª parcela com juros de 3%, isto é, representa o montante de um valor V_1 após 1 mês a juros compostos. Cálculo de V_1:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$650 = V_1 \cdot (1 + 0{,}03)^1$

$V_1 = \dfrac{650}{1{,}03^1}$

2º mês: R$ 650,00 representa o valor da 2ª parcela com juros de 3%, isto é, representa o montante de um valor V_2 após 2 meses a juros compostos. Cálculo de V_2:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$650 = V_2 \cdot (1 + 0{,}03)^2$

$V_2 = \dfrac{650}{1{,}03^2}$

3º mês: R$ 650,00 representa o valor da 3ª parcela com juros de 3%, isto é, representa o montante de um valor V_3 após 3 meses a juros compostos. Cálculo de V_3:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$650 = V_3 \cdot (1 + 0{,}03)^3$

$V_3 = \dfrac{650}{1{,}03^3}$

4º mês: R$ 650,00 representa o valor da 4ª parcela com juros de 3%, isto é, representa o montante de um valor V_4 após 4 meses a juros compostos. Cálculo de V_4:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$650 = V_4 \cdot (1 + 0{,}03)^4$

$V_4 = \dfrac{650}{1{,}03^4}$

5º mês: R$ 650,00 representa o valor da 5ª parcela com juros de 3%, isto é, representa o montante de um valor V_5 após 5 meses a juros compostos. Cálculo de V_5:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$650 = V_5 \cdot (1 + 0{,}03)^5$

$V_5 = \dfrac{650}{1{,}03^5}$

O valor à vista, nas condições apresentadas, é dado por:

$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$

$V \cong 631{,}07 + 612{,}69 + 594{,}84 +$
$+ 577{,}52 + 560{,}70$

$V \cong 2\,976{,}82$

Portanto, o valor à vista desse computador é R$ 2.976,82.

2. Com auxílio de uma planilha eletrônica determinaremos o valor de cada parcela na compra de um automóvel. Sendo n o número correspondente a cada mês, o cálculo de cada linha da coluna D corresponde a $\dfrac{1}{1{,}015^n}$.

A	B	C	D
1º mês	1,5%	1	0,985
2º mês	1,5%	2	0,971
3º mês	1,5%	3	0,956
4º mês	1,5%	4	0,942
5º mês	1,5%	5	0,928
6º mês	1,5%	6	0,915
7º mês	1,5%	7	0,901
8º mês	1,5%	8	0,888
9º mês	1,5%	9	0,875
10º mês	1,5%	10	0,862
11º mês	1,5%	11	0,849
12º mês	1,5%	12	0,836
13º mês	1,5%	13	0,824
14º mês	1,5%	14	0,812
15º mês	1,5%	15	0,800
16º mês	1,5%	16	0,788
17º mês	1,5%	17	0,776
18º mês	1,5%	18	0,765
19º mês	1,5%	19	0,754
20º mês	1,5%	20	0,742
21º mês	1,5%	21	0,731
22º mês	1,5%	22	0,721
23º mês	1,5%	23	0,710
24º mês	1,5%	24	0,700
		Total	20,030

E	G
Valor do carro à vista	Valor da parcela
R$ 25.000,00	R$ 1.248,10

Portanto, serão 24 parcelas iguais de R$ 1.248,10.

Atividades

80. $V_0 = 500$ (primeira parcela à vista)

1º mês: R$ 500 representa o valor da 1ª parcela com juros de 7%, isto é, representa o montante de um valor V_1 após 1 mês a juros compostos. Cálculo de V_1:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$500 = V_1 \cdot (1 + 0{,}07)^1$

$V_1 = \dfrac{500}{1{,}07^1}$

2º mês: R$ 500,00 representa o valor da 2ª parcela com juros de 7%, isto é, representa o montante de um valor V_2 após 2 meses a juros compostos. Cálculo de V_2:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$500 = V_2 \cdot (1 + 0{,}07)^2$

$V_2 = \dfrac{500}{1{,}07^2}$

3º mês: R$ 500,00 representa o valor da 3ª parcela com juros de 7%, isto é, representa o montante de um valor V_3 após 3 meses a juros compostos. Cálculo de V_3:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$500 = V_3 \cdot (1 + 0{,}07)^3$

$V_3 = \dfrac{500}{1{,}07^3}$

O valor à vista, de acordo com as condições apresentadas, é dado por:

$V = V_0 + V_1 + V_2 + V_3$

$V \cong 500 + 467{,}29 + 436{,}72 + 408{,}15 =$
$= 1\,812{,}16$

Portanto, o valor à vista desse produto é aproximadamente R$ 1.812,16.

81. Ao elaborar e resolver situações como essa, os estudantes pensam além dos valores numéricos, analisam também a coerência dos juros atualmente aplicados.

82. **1º mês:** R$ 500 representa o valor da 1ª parcela com juros de 7%, isto é, representa o montante de um valor V_1 após 1 mês a juros compostos. Cálculo de V_1:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$500 = V_1 \cdot 1{,}07^1$

$V_1 = \dfrac{500}{1{,}07^1}$

2º mês: R$ 500,00 representa o valor da 2ª parcela com juros de 7%, isto é, representa o montante de um valor V_2 após 2 meses a juros compostos. Cálculo de V_2:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$500 = V_2 \cdot (1 + 0{,}07)^2$

$V_2 = \dfrac{500}{1{,}07^2}$

3º mês: R$ 500,00 representa o valor da 3ª parcela com juros de 7%, isto é, representa o montante de um valor V_3 após 3 meses a juros compostos. Cálculo de V_3:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$500 = V_3 \cdot (1 + 0{,}07)^3$

$V_3 = \dfrac{500}{1{,}07^3}$

4º mês: R$ 500,00 representa o valor da 4ª parcela com juros de 7%, isto é, representa o montante de um valor V_4 após 4 meses a juros compostos. Cálculo de V_4:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$500 = V_4 \,.\, (1 + 0{,}07)^4$

$V_4 = \dfrac{500}{1{,}07^4}$

Cálculo do valor à vista:

$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$

$V \cong 467{,}29 + 436{,}72 + 408{,}15 +$

$+ 381{,}45 = 1693{,}61$

Portanto, o valor à vista desse produto é aproximadamente R$ 1.693,61.

83. Exemplo de resposta: um produto é vendido em 5 parcelas de R$ 600,00 com juros de 5% ao mês. Considerando que a 1ª parcela será paga apenas daqui a um mês (0 + 5), calcule o valor à vista desse produto.

1ª parcela (paga em 1 mês):

$PV_1 = \dfrac{600}{(1 + 0{,}05)^1} \cong 571{,}43$

2ª parcela (paga em 2 meses):

$PV_2 = \dfrac{600}{(1 + 0{,}05)^2} \cong 544{,}22$

3ª parcela (paga em 3 meses):

$PV_3 = \dfrac{600}{(1 + 0{,}05)^3} \cong 518{,}31$

4ª parcela (paga em 4 meses):

$PV_4 = \dfrac{600}{(1 + 0{,}05)^4} \cong 493{,}63$

5ª parcela (paga em 5 meses):

$PV_5 = \dfrac{600}{(1 + 0{,}05)^5} \cong 470{,}13$

$PV_{total} \cong 571{,}43 + 544{,}22 + 518{,}31 +$
$+ 493{,}63 + 470{,}13$

$PV_{total} \cong 2.597{,}72$

Portanto, o valor à vista do produto é aproximadamente R$ 2.597,72.

84. **1º mês:** R$ 202,00 representa o valor da 1ª parcela com juros de 1%, isto é, representa o montante de um valor V_1 após 1 mês a juros compostos. Cálculo de V_1:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$202 = V_1 \cdot (1 + 0{,}01)^1$

$V_1 = \dfrac{202}{1{,}01^1}$

2º mês: R$ 204,02 representa o valor da 2ª parcela com juros de 1%, isto é, representa o montante de um valor V_2 após 2 meses a juros compostos. Cálculo de V_2:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$204{,}02 = V_2 \cdot (1 + 0{,}01)^2$

$V_2 = \dfrac{204{,}02}{1{,}01^2}$

O valor à vista, nas condições apresentadas, é dado por:

$V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = 200 + 200 = 400$

Portanto, o valor à vista que deve constar na nota fiscal é R$ 400,00.

Alternativa **b**.

85. Arthur dispõe de um capital C = R$ 55.000,00. Vamos analisar as opções e verificar qual oferece maior vantagem financeira.

Opção 1: Arthur paga à vista os R$ 55.000,00. Logo, não terá lucro nem prejuízo com essa opção.

Opção 2: Arthur dá uma entrada de R$ 30.000,00, aplica R$ 25.000,00 e paga uma prestação p no valor de R$ 26.000,00 com o montante da aplicação. Então, temos:

C = R$ 25.000,00; $i = 10\% = 0{,}1$;

$n = 1$

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_1 = 25\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^1 =$

$= 25\,000 \cdot 1{,}1 = 27\,500$

$M_1 - p = 27\,500 - 26\,000 = 1\,500$;

R$ 1.500,00

Então, Arthur paga a prestação de R$ 26.000,00 e restará R$ 1.500,00, que será aplicado por mais 6 meses. Temos:

C = R$ 1.500,00; $i = 10\% = 0{,}1$;

$n = 1$.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_1 = 1\,500 \cdot (1 + 0{,}1)^1 = 1\,650$

Logo, Arthur terá um lucro de R$ 1.650,00.

Opção 3: Arthur dá uma entrada de R$ 20.000,00, aplica R$ 35.000,00 e paga uma prestação p_1 no valor de R$ 20.000,00 com o montante da aplicação. Então, temos inicialmente:

C = R$ 35.000,00; $i = 10\% = 0{,}1$;

$n = 1$.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_1 = 35\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^1 = 38\,500$

$M_1 - p_1 = 38\,500 - 20\,000 = 18\,500$;

R$ 18.500,00

Então, Arthur paga a prestação de R$ 20.000,00 e resta R$ 18.500,00, que será aplicado por mais 6 meses para depois pagar outra prestação p_2 no valor de R$ 18.000,00 com o montante da aplicação. Temos:

C = R$ 18.500,00; $i = 10\% = 0{,}1$;

$n = 1$ e $M_1 = ?$.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_1 = 18\,500 \cdot (1 + 0{,}1)^1 = 20\,350$

$M_1 - p_2 = 20.350 - 18\,000 = 2\,350$;

R$ 2.350,00

Assim, Arthur paga a prestação de R$ 18.000,00 e resta R$ 2.350,00. Logo, Arthur terá lucro de R$ 2.350,00.

Opção 4: Arthur dá uma entrada de R$ 15.000,00, aplica R$ 40.000,00 por 2 semestres, ou seja, um ano, pagando depois uma prestação p no valor de R$ 60.000,00 com o montante da aplicação.

C = R$ 40.000,00; $i = 10\% = 0{,}1$;

$n = 2$

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_2 = 40\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^2 =$

$= 40\,000 \cdot 1{,}1^2 = 40\,000 \cdot 1{,}21 =$

$= 48\,400$

$M_2 - p = 48\,400 - 39.000 = 9\,400$;

Assim, Arthur pagará a prestação de R$ 39.000,00 e restará R$ 9.400,00. Logo, Arthur terá lucro de R$ 9.400.

Opção 5: Arthur aplica os R$ 55.000,00 por 2 semestres, ou seja, um ano, e depois paga uma prestação p no valor de R$ 60.000,00 com o montante da aplicação.

C = R$ 55.000,00; $i = 10\% = 0{,}1$;

$n = 2$

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_2 = 55\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^2 = 66\,550$

$M_2 - p = 66\,550 - 60\,000 = 6\,550$;

R$ 6.550,00

Assim, Arthur pagará a prestação de R$ 60.000,00 e restará R$ 6.550,00. Logo, Arthur terá lucro de R$ 6.550,00. Portanto, para Arthur é mais vantajoso financeiramente escolher a opção 4.

Alternativa **d**.

86. O aparelho de TV custa R$ 1.000,00. Comprando à vista, há 4% de desconto, ou seja, o aparelho passa a custar

R$ 1.000,00 – R$ 40,00 = R$ 960,00

Comprando a prazo, o pagamento é

feito em duas parcelas iguais e sem desconto, R$ 500,00 no ato da compra e outra parcela de R$ 500,00 após um mês. Assim:

$C = 960 - 500 = 460$; R$ 460,00

Por esses R$ 460,00, a pessoa deve pagar R$ 500,00 após um mês. Assim, temos:

$J = n \cdot i \cdot C \Rightarrow i = \frac{J}{C} \cdot n$

$i = \frac{40}{460} \cong 0{,}087 = 8{,}7\%$

Alternativa **a**.

Páginas 259-264

Atividades finais

1.

a) Multiplicar um número por 0,012 significa calcular 1,2% desse número.

b) Multiplicar um número por 1,012 significa calcular 101,2% desse número.

2.

a) Dois aumentos consecutivos de 2% e 6% correspondem a um só aumento de 8,12%, pois $1{,}02 \cdot 1{,}06 = 1{,}0812$, que significa 108,12% do valor inicial.

b) Dois descontos consecutivos de 2% e 6% correspondem a um só desconto de 7,88%, pois $0{,}98 \cdot 0{,}94 = 0{,}9212$, que significa 92,12% do valor inicial ou um desconto de 7,88%.

3.

a) Se determinado valor aumentou de R$ 10,00 para R$ 12,00, ocorreu uma variação de 20%, pois $\frac{12}{10} = 1{,}2 = 1 + 0{,}2$, ou seja, um aumento de 20%.

b) Se determinado valor diminuiu de R$ 12,00 para R$ 10,00, ocorreu uma variação de aproximadamente 16,67%, pois $\frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$, ou seja, uma diminuição de aproximadamente 16,67%.

4.

a) O montante é a soma do capital com os juros.

b) Regime de juros simples.

c) Regime de juros simples.

5.

a) $M = C \cdot (1 + n \cdot i)$

b) $M = C \cdot (1 + i)^n$

c) Nos juros simples, o crescimento é linear; nos juros compostos, é exponencial.

Questões de vestibulares e Enem

6. Considerando x e y, respectivamente, o número de meninos e meninas da turma, temos:

$\frac{2}{x-2} = 0{,}08$

$2 = (x - 2) \cdot 0{,}08$

$2 = 0{,}08x - 0{,}16$

$2{,}16 = 0{,}08x$

$x = \frac{2{,}16}{0{,}08} = 27$

Logo, na turma há 27 meninos.

$\frac{1}{y-3} = 0{,}05$

$1 = (y - 3) \cdot 0{,}05$

$1 = 0{,}05y - 0{,}15$

$1{,}15 = 0{,}05y$

$y = \frac{1{,}15}{0{,}05} = 23$

Logo, na turma há 23 meninas.

Cálculo do percentual do número de meninos nos dias em que a turma está completa:

$P = \frac{27}{27 + 23}$

$P = \frac{27}{50} = 0{,}54 = 54\%$

Portanto, há 54% de meninos nos dias em que a turma está completa.

Alternativa **c**.

7. Cálculo do percentual atual de vitórias de João:

$\frac{10}{25} = 0{,}4 = 40\%$

Vamos considerar que n represente o número de vitórias consecutivas para que o percentual de João aumente em pelo menos 12%.

$\frac{10 + n}{25 + n} \geq 0{,}40 + 0{,}12$

Como $25 + n > 0$, podemos "passar" para o lado direito da desigualdade, multiplicando por 0,52.

$10 + n \geq (25 + n) \cdot 0{,}52$

$10 + n \geq 13 + 0{,}52n$

$n - 0{,}52n \geq 13 - 10$

$0{,}48n \geq 3$

$n \geq \frac{3}{0{,}48} \Rightarrow n \geq 6{,}25$

Portanto, o número mínimo de vitórias é 7.

Alternativa **e**.

8. $1\,000 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right)^5 =$

$= 1\,000 \cdot (0{,}80)^5 =$

$= 1\,000 \cdot 0{,}32768 = 327{,}68 \cong 327$;

327 L

Alternativa **b**.

9. Sendo x o número de desempregados no segundo trimestre de 2018, em milhões, temos:

$x \cdot (1 - 0{,}04) = 12 \Rightarrow x \cdot 0{,}96 = 12$

$x = \frac{12}{0{,}96} = 12{,}5$

Portanto, o número de desempregados no segundo trimestre de 2018 foi de 12,5 milhões de pessoas.

Alternativa **d**.

10. Calculamos o PIB em cada ano, considerando o PIB de 2015 com um valor x.

$PIB_{2015} = x$

$PIB_{2016} = 1{,}02 \cdot x = 1{,}02x$

$PIB_{2017} = 0{,}95 \cdot 1{,}02x = 0{,}969x$

$PIB_{2018} = 1{,}03 \cdot 0{,}969x = 0{,}99807x$

Cálculo da variação percentual:

$P = \frac{PIB_{2018} - PIB_{2015}}{PIB_{2015}}$

$V = \frac{0{,}99807x - x}{x}$

$V = -0{,}00193 \cong -0{,}002 = -0{,}2\%$

Portanto, a variação do PIB teve um decrescimento de aproximadamente 0,2%.

Alternativa **a**.

11. Sendo C o custo original da refeição, temos:

$p = 1{,}10 \cdot (1{,}10 \cdot C) \Rightarrow C = \frac{p}{1{,}21}$

Alternativa **b**.

12. Vamos calcular o aumento percentual na produção de petróleo de cada país citado.

Arábia Saudita: $\frac{13{,}2}{12{,}3} \cong 1{,}073 =$

$= 1 + 0{,}073$

Aumento de aproximadamente 7,3%.

EUA: $\frac{11{,}6}{8{,}1} \cong 1{,}432 = 1 + 0{,}432$

Aumento de aproximadamente 43,20%.

Rússia: $\frac{10{,}6}{10{,}2} \cong 1{,}309 = 1 + 0{,}309$

Aumento de aproximadamente 30,09%.

Iraque: $\frac{7{,}6}{2{,}5} = 3{,}04 = 1 + 2{,}04$

Aumento de 204%.

Canadá: $\frac{5{,}5}{3{,}3} \cong 1{,}6667 = 1 + 0{,}6667$

Aumento de aproximadamente 66,67%.

Brasil: $\frac{4{,}5}{2} = 2{,}25 = 1 + 1{,}25$

Aumento de 125%.

China: $\frac{4,5}{4,1} \cong 1,0976 = 1 + 0,0976$

Aumento de aproximadamente 9,76%.

Irã: $\frac{3,4}{3,8} \cong 0,8947 = 1 - 0,1053$

Diminuição de aproximadamente 10,53%.

Kuwait: $\frac{3,4}{3} \cong 1,1333 = 1 + 0,1333$

Aumento de aproximadamente 13,33%.

Portanto, o Brasil foi o segundo país com maior aumento percentual na produção de petróleo.

Alternativa **b**.

13. Sendo C o capital inicial, M o montante, i a taxa e n o tempo, temos:

$M = C \cdot (1 + in) \Rightarrow 3C = C \cdot (1 + 0,03 \cdot n)$

$3 = 1 + 0,03n \Rightarrow 2 = 0,03n$

$n = \frac{2}{0,03} \cong 66,67$

66,67 meses = 5 anos, 6 meses e 20 dias.

Portanto, o montante será o triplo do valor inicial no final de 5 anos, 6 meses e 20 dias.

Alternativa **d**.

14. Cálculo da variação percentual de 2014 para 2016:

$p = \frac{11,8 - 6,7}{6,7} \cong 0,76 = 76\%$

Portanto, o aumento da média anual de desempregados de 2014 para 2016 está mais próximo de 76%.

Alternativa **b**.

15. Utilizando a relação para o cálculo do montante a juros compostos e considerando que o custo é o capital inicial e o lucro é o montante, temos:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$1\,200 = C \cdot (1 + 0,02)^3$

$1\,200 \cong C \cdot 1,0612$

$C \cong \frac{1\,200}{1,0612} \cong 1\,130,80$

Portanto, a venda à vista deve ser de aproximadamente R$ 1.130,80.

Alternativa **b**.

16. A cada garrafa envasada, perde-se 15% do seu volume. Logo, o fabricante pode contar com apenas 100% – 15% = 85% dos 582 litros de refrigerante que ele possui, isto é, com 582 L · 0,85 = 494,7 L

Vamos determinar quantas garrafas podem ser envasadas com 582 L de refrigerante.

Volume (L)	Garrafas (Un)
0,33	1
494,7	x

$0,33x = 494,7$

$x = \frac{494,7}{0,33}$

$x \cong 1\,499,09$

Portanto, podem ser envasadas aproximadamente 1 500 garrafas de refrigerante.

Alternativa **a**.

17. Sejam x a quantidade de água nessa solução e y a quantidade de álcool na solução. Na solução de 30 L, temos 14 partes de álcool e 1 parte de água. Isto é:

$x = \frac{1}{15} \cdot 30 = 2 \Rightarrow 2\ L$

$y = \frac{14}{15} \cdot 30 = 28 \Rightarrow 28\ L$

Assim, para que essa solução tenha 70% de álcool é necessário:

Volume (L)	Porcentagem
28	70
V	100

$70V = 100 \cdot 28$

$V = \frac{2\,800}{70}$

$V = 40$; 40 litros

Assim, a diferença entre os volumes é de 40 L – 30 L = 10 L.

Portanto, devem ser acrescentados 10 L de água nessa solução.

Alternativa **b**.

18.

Massa (g)	Porcentagem
70	100
x	0,5

$100x = 70 \cdot 0,5$

$x = \frac{70 \cdot 0,5}{100}$

$x = 0,35$; 0,35 g

Portanto, o erro máximo dessa balança é dado por:

70 g + 0,35 g = 70,35 g

Alternativa **b**.

19. Sejam x e y as quantidades dos ingredientes A e B, respectivamente. Então, podemos definir que:

$100x + 100y = 1\,000$ (I)

$4x + 8y = 56$ (II)

Multiplicando a equação (II) por –25 e somando com a equação (I) temos:

$100x + 100y + (-100x - 200y) =$

$= 1\,000 + (-1\,400)$

$100x + 100y - 100x - 200y =$

$= 1\,000 - 1\,400$

$-100y = -400$

$y = \frac{-400}{-100} \Rightarrow y = 4$

Portanto, são utilizados

4 · 100 = 400; 400 g desse ingrediente na receita, que corresponde a 40% de 1 kg.

Alternativa **c**.

20. Analisando a coluna dos carros de modelo *flex* na tabela, temos:

$104 + x + 8 = 123 \Rightarrow x = 11$

Ou seja, foram vendidos 11 veículos de modelo *flex* no mês de fevereiro.

Da mesma maneira, temos:

$170 + y + 15 = 201 \Rightarrow y = 16$

Logo, foram vendidos 16 veículos no mês de fevereiro.

Quantidade de carros	Porcentagem
16	100
11	x

$16x = 100 \cdot 11 \Rightarrow x = 68,75$

Portanto, a quantidade de veículos de modelo *flex* vendidos no mês em questão corresponde a 68,75% dos veículos vendidos nesse mês.

Alternativa **a**.

21. Seja x a produção de grãos em toneladas dessa empresa. Então, a produção C dessa empresa, caso as metas sejam atingidas, será de:

$C = x(1 + 0,15)(1 + 0,12)(1 + 0,10)$

$(1 + 0,08)(1 + 0,05)$

$C = x \cdot 1,15 \cdot 1,12 \cdot 1,10 \cdot 1,08 \cdot 1,05$

$C \cong x \cdot 1,60 = x \cdot (1 + 0,60)$

Assim, o incremento percentual foi de aproximadamente 60%.

Alternativa **d**.

22. Inicialmente, é preciso calcular o lucro que o cliente teve no investimento Alfa. Temos

$C =$ R$ 2.000,00; $i = 12\% = 0,12$;

$n = 5$ e $M_5 = ?$.

$M_n = C \cdot (1 + in)$

$M_5 = 2\,000 \cdot (1 + 0,12 \cdot 5)$

$M_5 = 2\,000 \cdot 1,6 = 3.200$

Assim, o cliente obteve R$ 3.200,00 no investimento Alfa.

Agora, vamos calcular o ganho do cliente no investimento Beta. Temos $C =$ R$ 3.200,00 $+ x$; $i = 10\% = 0,10$; $n = 2$ e $M_2 = 3\,200 + x + 1\,050$.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$3\,200 + x + 1\,050 =$

$= (3\,200 + x) \cdot (1 + 0,10)^2$

$4\,250 + x = (3\,200 + x) \cdot 1,21$

$4\,250 + x = 3\,872 + 1,21x$

$1,21x - x = 4\,250 - 3\,872$

$0,21x = 378$

$x = \frac{378}{0,21}$

$x = 1\,800$; R$ 1.800,00

Portanto, o cliente acrescentou R$ 1.800,00 ao montante ganho no investimento Alfa.

23. Inicialmente, é preciso calcular quanto o comprador ganhou em seu investimento. Temos

C = R$ 10.404,00; $i = 2\% = 0{,}02$;

$n = 1$.

$M_n = C \cdot (1 + in)$

$M_1 = 10\,404 \cdot (1 + 0{,}02)$

$M_1 = 10\,612{,}08$

Desse valor, foi retirado o valor da primeira parcela da motocicleta, isto é:

R$ 10.612,08 – R$ 5.202,00 =

= R$ 5.410,08

Agora, é preciso calcular quanto o comprador ganhou em seu investimento no segundo mês. Temos:

C = R$ 5.410,08; $i = 2\% = 0{,}02$;

$n = 1$ e $M_1 = ?$.

$M_n = C \cdot (1 + in)$

$M_1 = 5\,410{,}08 \cdot (1 + 0{,}02)$

$M_1 \cong 5\,518{,}28$; R$ 5.518,28

Desse valor, foi retirado o valor da segunda parcela da motocicleta, isto é:

$5\,518{,}28 - 5\,202 = 316{,}28$; R$ 316,28

Esse valor corresponde a:

Valor (R$)	Porcentagem
10 404	100
316,28	x

$10\,404x = 100 \cdot 316{,}28$

$x = \dfrac{31\,628}{10\,404}$

$x \cong 3{,}04$

Portanto, o lucro equivale a, aproximadamente, 3%.

Alternativa **a**.

24. Chamaremos de x o valor total da compra, primeira parcela de y e a segunda parcela de $x - y$.

A segunda parcela tem 2% de juros simples ao mês, por 3 meses:

$y = (x - y) \cdot 1{,}06 \Rightarrow y = 1{,}06x - 1{,}06y$

$2{,}06y = 1{,}06x$

$y = \dfrac{1{,}06x}{2{,}06} = \dfrac{106x}{206} = \dfrac{53x}{103}$

Alternativa **b**.

25. Aplicar um capital C para uma taxa de 1% ao mês, por quatro meses:

$M = C(1 + 0{,}01)^4$

Para a taxa de 2% ao mês, temos R$ 65.536,00:

$65\,536 = 1{,}01^4C(1 + 0{,}02)^4$

$2^{16} = (1{,}01 \cdot 1{,}02)^4C$

$C = \left(\dfrac{2^2}{1{,}0302^{\frac{1}{2}}}\right)^8$

$C = 3{,}96^8$

Alternativa **e**.

26. A renda mensal da família é de R$ 1.368,00 e o empréstimo é de 30% dessa renda:

$1\,368 \cdot \dfrac{30}{100} = 410{,}40$

O valor total do empréstimo é de R$ 410,40.

Aplicando a fórmula de juros compostos:

$M = C\,(1 + i)^n$

$M = 410{,}40\,(1 + 0{,}02)^2 \Rightarrow M = 426{,}98$

Alternativa **e**.

27. De acordo com o enunciado, o custo com o transporte será $\frac{1}{5}$ ou 20% do valor do objeto.

Portanto, a pessoa deve oferecer uma recompensa de até 80% do valor do objeto. Alternativa **e**.

28. Seja x o valor do produto com desconto e f o valor do frete para cada loja.

Loja 1: Temos que 20% de desconto equivale a R$ 720,00 e sabemos que $f = 70$.

Valor (R$)	Percentual
720	20
x	80

$20x = 80 \cdot 720 \Rightarrow x = 2\,880$

Logo, o valor do produto com desconto é R$ 2.880,00.

$x + f = 2\,880 + 70 = 2\,950$; R$ 2.950,00

Portanto, R$ 2.950,00 é o preço total na loja 1.

Loja 2: Temos que 20% de desconto equivale a R$ 740,00 e sabemos que $f = 40$.

Valor (R$)	Percentual
740	20
x	80

$20x = 80 \cdot 740 \Rightarrow x = 2\,960$

Logo, o valor do produto com desconto é de R$ 2.960,00.

$x + f = 2\,960 + 50 = 3\,010$; R$ 3.010,00

Portanto, R$ 3.010,00 é o preço total na loja 2.

Loja 3: Temos que 20% de desconto equivale a R$ 760,00 e sabemos que $f = 80$.

Valor (R$)	Percentual
760	20
x	80

$20x = 80 \cdot 760 \Rightarrow x = 3.040$

Logo, o valor do produto com desconto é de R$ 3.040,00.

$x + f = 3\,040 + 870 = 3\,120$; R$ 3.120,00

Portanto, R$ 3.120,00 é o preço total na loja 3.

Loja 4: Temos que 15% de desconto equivale a R$ 710,00 e sabemos que $f = 10$.

$\dfrac{710}{x} = \dfrac{15}{85}$

$15x = 85 \cdot 710$

$x \cong 4\,023{,}33$; R$ 4.023,33

$x + f = 4\,023{,}33 + 10 = 4\,033{,}33$;

R$ 4.033,33

Portanto, R$ 4.033,33 é o preço total na loja 4.

Loja 5: Temos que 15% de desconto equivale a R$ 690,00 e sabemos que $f = 0$.

Valor (R$)	Percentual
690	15
x	85

$15x = 85 \cdot 690 \Rightarrow x = 3\,910$

Portanto, R$ 3.910,00 é o preço total na loja 5.

Logo, o produto foi comprado na loja 1.

Alternativa **a**.

29. Os rendimentos correspondem a um só aumento de 17,92%, pois $1{,}072 \cdot 1{,}1 = 1{,}1792$. Calculamos o aumento em 2020:

$0{,}1792 \cdot 1\,250 = 224$; R$ 224,00

Então, calculamos o rendimento médio mensal em 2020:

$1\,250 + 224 = 1\,474$; R$ 1.474,00

Portanto, o rendimento médio mensal será de R$ 1.474,00.

Alternativa **e**.

30. Despesa com ligações:

$200 - 40 = 160$

Cálculo do percentual de redução:

$P = \dfrac{40 - 160}{160} = -0{,}75 = -75\%$

Portanto, a redução percentual com gastos em ligações para celulares nessa loja deverá ser de 75%.

Alternativa **e**.

31. Vamos calcular o percentual do número de unidades vendidas desse produto do primeiro para o segundo semestre.

Produto I:

$\dfrac{600}{350} \cong 1{,}7143 = 1 + 0{,}7143$

O produto I teve um aumento de aproximadamente 71,43% nas vendas.

Produto II:

$\dfrac{1\,100}{1\,000} = 1{,}1 = 1 + 0{,}1$

O produto II teve um aumento de 10% nas vendas.

Produto III: $\frac{4\,000}{4\,000} = 1 = 1 + 0{,}0$

O produto III não teve aumento.

Produto IV:

$\frac{1\,200}{850} \cong 1{,}4118 = 1 + 0{,}4118$

O produto IV teve um aumento aproximado de 41,18% nas vendas.

Produto V: $\frac{2\,600}{2\,000} = 1{,}3 = 1 + 0{,}3$

O produto V teve um aumento de 30%. Portanto, o produto I teve a ação de *marketing* mais bem-sucedida.

Alternativa **a**.

32. Vamos calcular o preço inicial do orçamento.

$10\,000 + 40\,000 + 40 \cdot 2\,500 = 150\,000$; R$ 150.000,00

Logo, o orçamento original é de R$ 150.000,00.

A construtora apresentou um novo orçamento, reduzindo 10% do original. Então:

10% de $150\,000 = 0{,}1 \cdot 150\,000 = 15\,000$

$150\,000 - 15\,000 = 135\,000$; R$ 135.000,00

Assim, o novo orçamento é de R$ 135.000,00.

Vamos determinar o percentual de desconto que a construtora deverá conceder nos custos fixos.

$0{,}5 \cdot 10\,000 + x \cdot 40\,000 + 1{,}25 \cdot (40 \cdot 2\,500) = 135\,000$

$5\,000 + 40\,000x + 125\,000 = 135\,000$

$40\,000x = 135\,000 - 125\,000 - 5\,000$

$40\,000x = 5\,000$

$x = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

Portanto, o valor dos custos fixos corresponde a 12,5% do valor inicial, ou seja, houve um desconto de 87,5%.

Alternativa **d**.

33. A aeronave B transporta 10% a mais de passageiros que a aeronave A, isto é:

$200 \cdot (1 + 0{,}1) = 200 \cdot 1{,}1 = 220$; 220 passageiros

Além disso, a aeronave consome 10% a menos de combustível por quilômetro por passageiro, ou seja:

$0{,}02 \cdot (1 - 0{,}1) = 0{,}02 \cdot 0{,}9 = 0{,}018$; 0,018 L de combustível por quilômetro por passageiro

Assim, essas aeronaves, quando lotadas, consomem:

aeronave A: $200 \cdot 0{,}02 = 4$; 4 L por quilômetro

aeronave B: $220 \cdot 0{,}018 = 3{,}96$; 3,96 L por quilômetro

Portanto, o consumo de combustível da aeronave B, em relação a aeronave A, é de:

$\frac{4 - 3{,}96}{4} = 0{,}01 = 1\%$

Portanto, o consumo da aeronave B, em relação a aeronave A, é 1% menor.

Alternativa **b**.

34. Vamos calcular a quantidade de água, em bilhões de litros, de cada reservatório.

Reservatório I: $105 \cdot 0{,}2 = 21$

Logo, o reservatório I tem 21 bilhões de litros de água.

Reservatório II: $100 \cdot 0{,}3 = 30$

Logo, o reservatório II tem 30 bilhões de litros de água.

Reservatório III: $20 \cdot 0{,}5 = 10$

Logo, o reservatório III tem 10 bilhões de litros de água.

Reservatório IV: $80 \cdot 0{,}4 = 32$

Logo, o reservatório IV tem 32 bilhões de litros de água.

Reservatório V: $40 \cdot 0{,}6 = 24$

Logo, o reservatório V tem 24 bilhões de litros de água.

Portanto, o reservatório IV tem o maior volume de água.

Alternativa **d**.

35. Sabendo que a pessoa teve 20% de lucro na venda dos bombons, vamos calcular quanto ela lucrou com a venda deles.

Valor (R$)	**Percentual**
5	100
x	20

$100x = 5 \cdot 20$

Logo, a pessoa lucrou R$ 1,00 com a venda dos bombons.

Porém, desses 25 bombons, a pessoa comeu 5, restando apenas 20 bombons para serem vendidos. Assim, seja p o preço de cada bombom.

$5 + 1 = 20p \Rightarrow p = \frac{6}{20} = 0{,}3$

Portanto, cada bombom foi vendido por R$ 0,30.

Alternativa **c**.

36. Assim, como foram investidos 45 milhões de reais em 30 mil aparelhos, temos:

$45 \cdot 5 = 225$; 225 milhões de reais investidos no total;

$30 \cdot 5 = 150$; 150 mil aparelhos vendidos no Brasil.

$\frac{225 \cdot 10^6 + 30 \cdot 10^6}{150 \cdot 10^3} = \frac{255\,000}{150} = 1\,700$; R$ 1.700,00

Logo, o celular foi vendido a R$ 1.700,00 no primeiro semestre.

Considerando que a empresa fará o mesmo investimento, porém, esperando um lucro 10% maior, temos o valor total das vendas:

$225 \cdot 10^6 + 30 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0{,}1) = (225 + 33) \cdot 10^6 = 258 \cdot 10^6$

Logo, caso a empresa venda todos os aparelhos, o total arrecadado será de 258 milhões de reais.

Agora, vamos calcular o valor de venda de cada celular.

$\frac{258 \cdot 10^6}{150 \cdot 10^3} = \frac{258\,000}{150} = 1\,720$; R$ 1.720,00

Portanto, para atingir o lucro esperado, no segundo semestre cada celular deverá ser vendido por R$ 1.720,00.

Alternativa **b**.